



JOSE MANOEL BALTHAZAR  
ITAMAR ILIUK  
CARLOS ALBERTO BAVASTRI  
DAVI ANTÔNIO DOS SANTOS  
ÁTILA MADUREIRA BUENO  
JORGE LUIS PALACIOS FELIX  
VINÍCIUS PICCIRILLO  
ANDRÉ LUIZ ANDREOLI  
CLIVALDO DE OLIVEIRA  
FREDERIC CONRAD JANZEN  
THIAGO GILBERTO DO PRADO  
MARIANO FEBBO

MAURICIO APARECIDO RIBEIRO  
ANGELO MARCELO TUSSET  
AIRTON NABARRETE  
EDUARDO MÁRCIO DE OLIVEIRA LOPES  
DIEGO COLÓN  
MARCUS VINICIUS MONTEIRO VARANIS  
PAULO JOSÉ AMARAL SERNI  
BRUNO ALBUQUERQUE DE CASTRO  
RAPHAELA CARVALHO MACHADO  
JEFERSON JOSÉ DE LIMA  
GUILHERME BERALDI LUCAS

# SISTEMAS DINÂMICOS E MECATRÔNICOS

MODELAGEM, ANÁLISE E CONTROLE AVANÇADO  
DE SISTEMAS NÃO LINEARES

**Blucher**

**VOL. 2**

Jose Manoel Balthazar  
Itamar Iliuk  
Carlos Alberto Bavastri  
Davi Antônio dos Santos  
Átila Madureira Bueno  
Jorge Luis Palacios Felix  
Vinícius Piccirillo  
André Luiz Andreoli  
Clivaldo de Oliveira  
Frederic Conrad Janzen  
Thiago Gilberto do Prado  
Mariano Febbo

Mauricio Aparecido Ribeiro  
Angelo Marcelo Tusset  
Airton Nabarrete  
Eduardo Márcio de Oliveira Lopes  
Diego Colón  
Marcus Vinicius Monteiro Varanis  
Paulo José Amaral Serni  
Bruno Albuquerque de Castro  
Raphaela Carvalho Machado  
Jeferson José de Lima  
Guilherme Beraldi Lucas

## **SISTEMAS DINÂMICOS E MECATRÔNICOS**

Modelagem, análise e controle avançado  
de sistemas não lineares

*Sistemas dinâmicos e mecatrônicos: modelagem, análise e controle avançado de sistemas não lineares*

© 2024 Jose Manoel Balthazar, Mauricio Aparecido Ribeiro, Itamar Iliuk, Angelo Marcelo Tusset, Carlos Alberto Bavastri, Airtton Nabarrete, Davi Antônio dos Santos, Eduardo Márcio de Oliveira Lopes, Átila Madureira Bueno, Diego Colón, Jorge Luis Palacios Felix, Marcus Vinicius Monteiro Varanis, Vinicius Piccirillo, Paulo José Amaral Serni, André Luiz Andreoli, Bruno Albuquerque de Castro, Clivaldo de Oliveira, Raphaela Carvalho Machado, Frederic Conrad Janzen, Jeferson José de Lima, Thiago Gilberto do Prado, Guilherme Beraldi Lucas, Mariano Febbo

Editora Edgard Blücher Ltda.

*Publisher* Edgard Blücher

*Editor* Eduardo Blucher

*Coordenador editorial* Rafael Fulanetti

*Coordenação de produção* Andressa Lira

*Produção editorial* Kedma Marques

*Diagramação* Autores

*Revisão de texto* Maurício Katayama

*Capa* Leandro Cunha

# Blucher

---

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar  
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil  
Tel.: 55 11 3078-5366  
**contato@blucher.com.br**  
**www.blucher.com.br**

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, julho de 2021.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora.

---

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

---

Balthazar, Jose Manoel

*Sistemas dinâmicos e mecatrônicos: modelagem, análise e controle avançado de sistemas não lineares* / Jose Manoel Balthazar... [et al.] – 1. ed. – São Paulo: Blucher, 2024.

519 p.: il. (Sistemas dinâmicos e mecatrônicos ; 1)

ISBN 978-85-212-2481-5 (impresso)

ISBN 978-85-212-2482-2 (eletrônico)

1. Engenharia 2. Sistemas dinâmicos 3. Análise de sistemas – Modelos matemáticos 3. Sistemas lineares 4. Sistemas não lineares 5. Mecatrônica I. Balthazar, Jose Manoel.

24-5747

CDD 620.001185

---

Índice para catálogo sistemático:

1. Engenharia de sistemas: Modelagem

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Análise linear e não linear de sistemas estruturais vibratórios</b>	<b>15</b>
1.1	Analogia entre sistemas mecânicos e elétricos . . . . .	18
1.2	Transdutores . . . . .	19
1.2.1	Localização de modos . . . . .	23
1.3	Modos normais não lineares (NNM) . . . . .	24
1.4	Teoria de Shaw e Pierre, para modos normais não lineares de vibrações . . . . .	28
1.5	Transportadores vibracionais com excitadores... . . . .	30
1.6	Comentários sobre ressonância . . . . .	35
1.7	Método da média . . . . .	36
1.8	Método do balanço harmônico . . . . .	38
1.9	Método de Lindstedt-Poincaré . . . . .	38
1.10	Sobre a teoria de Takens . . . . .	43
	Referências . . . . .	44
<b>2</b>	<b>Identificação por subespaços de sistemas dinâmicos</b>	<b>49</b>
2.1	Introdução . . . . .	49
2.1.1	Tipos de modelagem de sistemas dinâmicos . . . . .	51
2.1.2	Identificação para projeto de controle . . . . .	53
2.2	Métodos de subespaços . . . . .	54
2.2.1	Formulação do problema de identificação por subespaços . . . . .	55
2.2.2	Algoritmo DSR_e . . . . .	58
2.3	Aplicações . . . . .	63
2.3.1	Identificação de um aerofólio com dois graus de liberdade . . . . .	64
2.3.2	Identificação de um sistema massa-mola com dois graus de liberdade . . . . .	72
2.4	Conclusão . . . . .	80
<b>3</b>	<b>Fundamentos da dinâmica do cálculo fracionário</b>	<b>87</b>
3.1	Introdução . . . . .	87
3.2	Funções especiais . . . . .	89
3.2.1	Função Gamma . . . . .	89
3.2.2	Função de Mittag-Leffler . . . . .	89
3.3	Transformadas de Laplace . . . . .	91
3.4	Operadores de derivada fracionária e suas transformadas de Laplace . . . . .	92
3.4.1	Operador de Riemann-Liouville . . . . .	92
3.4.2	Operador de Caputo . . . . .	94
3.4.3	Operador de Grunwald-Letnikov . . . . .	95
3.4.4	Operador de Riesz . . . . .	95

3.4.5	Operador de Feller . . . . .	97
3.5	Transformadas de Laplace dos operadores de derivada fracionária . . . . .	98
3.6	Transformadas de Fourier dos operadores . . . . .	99
3.7	Método numérico – integrador fracionário . . . . .	99
3.7.1	Método numérico para o operador de Riemann-Liouville . . . . .	100
3.8	Exemplos de aplicações de derivadas fracionárias . . . . .	101
3.8.1	Aplicação em uma equação diferencial simples . . . . .	101
3.8.2	Exemplo físico . . . . .	104
3.8.3	Aplicações em sistemas eletromecânicos . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Integridade dinâmica</b> . . . . .	<b>115</b>
4.1	Introdução . . . . .	115
4.1.1	Caracterização de problemas sob a ótica da integridade dinâmica . . . . .	116
4.2	Robustez no espaço de fase . . . . .	118
4.2.1	Bacia segura . . . . .	118
4.2.2	Medidas de integridade dinâmica . . . . .	120
4.3	Robustez no espaço de controle . . . . .	121
4.3.1	Perfil de erosão . . . . .	121
4.3.2	Bifurcações homoclínicas e o processo de erosão . . . . .	122
4.3.3	Método de Melnikov . . . . .	124
4.4	Aplicações . . . . .	126
4.4.1	Oscilador de Helmholtz . . . . .	126
4.4.2	Oscilador de Duffing . . . . .	131
<b>5</b>	<b>Espaço de parâmetros</b> . . . . .	<b>137</b>
5.1	Introdução . . . . .	137
5.2	Esqueleto de janelas periódicas complexas . . . . .	141
5.3	Espaços de parâmetros em mapas . . . . .	143
5.4	Espaços de parâmetros em EDO . . . . .	146
5.5	Algoritmo para construção de Espaço de Parâmetros no MATLAB . . . . .	150
<b>6</b>	<b>Busca de soluções analíticas aproximadas e existência de estabilidade de órbitas periódicas de sistemas vibratórios não ideais (RNIS)</b> . . . . .	<b>153</b>
6.1	Efeito Sommerfeld . . . . .	153
6.2	Aplicação do método da média no sistema de um absorvedor eletromecânico . . . . .	168
6.3	Busca de solução na região de ressonância interna 1:1 . . . . .	168
6.4	Busca de solução na região de ressonância interna 1:3 . . . . .	173
<b>7</b>	<b>Sistemas microeletromecânicos (MEMS) e nanoeletromecânicos (NEMS): microscopia de força atômica</b> . . . . .	<b>177</b>
7.1	Sistemas microeletromecânicos (MEMS) . . . . .	177
7.2	Modelo matemático do sistema . . . . .	177
7.3	Controle do comportamento caótico utilizando o controle por realimentação com atraso de tempo ( <i>time delay feedback control</i> ) . . . . .	181
7.4	Nanoeletromecânicos (NEMs): microscopia de força atômica . . . . .	182
7.5	Modelo matemático para o modo intermitente . . . . .	184

<b>8</b>	<b>Abordagem geométrica de sistemas dinâmicos e linearização por realimentação dinâmica zero</b>	<b>195</b>
8.1	Introdução à abordagem geométrica . . . . .	195
8.2	Aplicações entre espaços euclidianos . . . . .	196
8.3	Variedades diferenciáveis . . . . .	198
8.4	Sistemas dinâmicos: abordagem geométrica . . . . .	205
8.5	Derivadas de Lie . . . . .	212
8.6	Exemplo: pêndulo invertido . . . . .	219
8.7	Introdução à linearização por realimentação . . . . .	221
8.8	Sistemas de controle não lineares . . . . .	222
8.9	Folheações, fibrados e distribuições . . . . .	223
8.9.1	Teorema de Frobenius . . . . .	228
8.9.2	Existência de sistema de coordenadas . . . . .	230
8.10	Controlabilidade de sistemas . . . . .	232
8.11	Linearização entrada-estado . . . . .	234
8.12	Exemplo de linearização entrada-estado . . . . .	237
8.13	Linearização entrada-saída . . . . .	240
8.13.1	Dinâmica zero . . . . .	243
8.14	Exemplo de linearização entrada-saída . . . . .	243
<b>9</b>	<b>Programação dinâmica e controle ótimo</b>	<b>249</b>
9.1	Princípio da Otimalidade de Bellman . . . . .	249
9.1.1	Problema de roteamento ótimo . . . . .	251
9.1.2	Controle ótimo utilizando programação dinâmica . . . . .	253
9.1.3	Programação dinâmica para sistemas de controle . . . . .	255
9.1.4	Algumas considerações sobre a implementação computacional da programação dinâmica . . . . .	259
9.1.5	O regulador linear discreto . . . . .	261
9.2	A Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman . . . . .	268
<b>10</b>	<b>Métodos de análise tempo-frequência em aplicações de dinâmica não linear</b>	<b>273</b>
10.1	Representação tempo-frequência . . . . .	275
10.1.1	Transformada de Fourier janelada . . . . .	275
10.1.2	Transformada <i>wavelet</i> . . . . .	276
10.1.3	Distribuição de Wigner-Ville . . . . .	276
10.2	Métodos baseados em modo de decomposição empírica . . . . .	276
10.2.1	Transformada de Hilbert-Huang (HHT) . . . . .	276
10.3	<i>Synchrosqueezed transform</i> . . . . .	279
10.3.1	Transformada <i>wavelet synchrosqueezing</i> . . . . .	279
10.4	Estudo de casos . . . . .	280
10.5	Observações finais . . . . .	289
10.6	Apêndice . . . . .	290
<b>11</b>	<b>Materiais inteligentes aplicados ao controle de vibração de estruturas flexíveis em movimento de rastreamento</b>	<b>293</b>
11.1	Introdução . . . . .	293
11.2	Modelagem de vigas flexíveis . . . . .	294

11.3	Modelagem do motor CC . . . . .	296
11.4	Acoplamento da viga com o motor CC . . . . .	297
11.5	Modelagem da liga com memória de forma . . . . .	298
11.6	Modelagem do acoplamento entre viga e LMF . . . . .	299
11.7	Controle de posição e vibração da estrutura flexível . . . . .	302
11.7.1	Projeto de controle . . . . .	302
11.7.2	Projeto do controle de posição angular . . . . .	303
11.7.3	Projeto do controle de vibração . . . . .	305
<b>12</b>	<b>Controle de multicópteros por modos deslizantes</b>	<b>311</b>
12.1	Introdução . . . . .	311
12.2	Notação . . . . .	312
12.3	Equações de movimento . . . . .	313
12.3.1	Movimento rotacional . . . . .	313
12.3.2	Movimento translacional . . . . .	314
12.3.3	Modelagem dos atuadores . . . . .	315
12.3.4	Esforços de controle resultantes . . . . .	316
12.4	Controle por modos deslizantes . . . . .	317
12.5	Controle de voo . . . . .	320
12.5.1	Arquitetura hierárquica de controle . . . . .	320
12.5.2	Controlador de atitude . . . . .	322
12.5.3	Controlador de posição . . . . .	323
12.5.4	Cálculo do Comando de Atitude . . . . .	324
12.5.5	Alocação de Controle . . . . .	325
12.6	Exemplo numérico . . . . .	326
12.7	Conclusão . . . . .	329
<b>13</b>	<b>Controle passivo de vibrações usando neutralizadores viscoelásticos</b>	<b>333</b>
13.1	Introdução . . . . .	333
13.2	Neutralizadores dinâmicos viscoelásticos . . . . .	334
13.2.1	Modelo para materiais viscoelásticos via derivada fracionária . . . . .	334
13.2.2	Modelo clássico de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos . . . . .	335
13.2.3	Modelo via parâmetros equivalentes generalizados . . . . .	336
13.3	Sistema não linear cúbico com um grau de liberdade . . . . .	337
13.3.1	Modelo de sistema primário . . . . .	337
13.3.2	Modelo de sistema composto . . . . .	339
13.3.3	Identificação de parâmetros . . . . .	340
13.4	Projeto ótimo de neutralizador em sistema não linear cúbico . . . . .	342
13.5	Dessintonização por temperatura . . . . .	343
13.6	Aplicação numérico-experimental . . . . .	343
13.6.1	Sistema não linear cúbico . . . . .	343
13.6.2	Controle passivo ótimo . . . . .	347
13.7	Conclusão . . . . .	351
<b>14</b>	<b>Cinemática na robótica móvel</b>	<b>355</b>
14.1	Rotação, translação e transformação homogênea . . . . .	355
14.1.1	Conceitos de cinemática . . . . .	358
14.1.2	Cinemática de robôs móveis com rodas . . . . .	360

14.1.3	Cinemática de robô diferencial . . . . .	360
14.2	Dinâmica e restrições de movimento . . . . .	362
14.2.1	Restrições holonômicos . . . . .	362
14.2.2	Sistemas não holonômicos . . . . .	364
14.2.3	Dinâmica do robô diferencial . . . . .	365
14.3	Eventos não determinísticos em robótica móvel . . . . .	370
14.3.1	Filtro de Bayes . . . . .	371
14.3.2	Filtro de Kalman . . . . .	372
14.3.3	Extended Kalman Filter . . . . .	379
<b>15</b>	<b>Controle bioinspirado: controle baseado na lógica <i>fuzzy</i></b>	<b>383</b>
15.1	Teoria dos conjuntos <i>fuzzy</i> . . . . .	383
15.1.1	Funções de pertinência <i>fuzzy</i> . . . . .	383
15.1.2	Fuzzificação . . . . .	388
15.1.3	Defuzzificação . . . . .	388
15.2	Controladores <i>fuzzy</i> . . . . .	391
15.2.1	Tabela ou mapa de regras <i>fuzzy</i> . . . . .	393
15.3	Proposta de controle de vibração de um modelo de quarto de carro . . . . .	395
15.3.1	Projeto de controle considerando o modelo de Mandani . . . . .	397
15.3.2	Projeto de controle considerando o modelo de Takagi-Sugeno . . . . .	399
<b>16</b>	<b>Sistema de conversão de energia eólica a partir de folhas pendulares oscilantes bioinspiradas</b>	<b>403</b>
16.1	Sistema de conversão de energia eólica . . . . .	403
16.1.1	Introdução . . . . .	403
16.2	Material e métodos . . . . .	406
16.2.1	Descrição dos modelos: FTI, FLT & FAI . . . . .	406
16.2.2	Configuração experimental . . . . .	408
16.3	Resultados e discussão . . . . .	410
16.3.1	Avaliação de velocidades obtidas pelo ventilador eletrodoméstico . . . . .	410
16.3.2	Avaliação de desempenho e potência obtida . . . . .	411
16.4	Conclusão . . . . .	415
<b>17</b>	<b>Análise da influência do acoplamento piezoelétrico em dispositivo de captação de energia (<i>energy harvesting</i>)</b>	<b>419</b>
17.1	Comportamento dinâmico de um dispositivo de captação de energia ( <i>energy harvesting</i> ) . . . . .	419
17.2	Caso linear – coeficiente de acoplamento não linear com valor = 0,00 . . . . .	424
17.3	Caso não linear – coeficiente de acoplamento linear com valor= 0,4 . . . . .	427
17.4	Conclusão . . . . .	430
<b>18</b>	<b>Modelagem dinâmica aplicada ao monitoramento e diagnóstico de falhas em motores de indução trifásicos</b>	<b>433</b>
18.1	Falhas em motores de indução e suas consequências . . . . .	434
18.1.1	Origem elétrica . . . . .	435
18.1.2	Origem mecânica . . . . .	436
18.2	Modelagem dinâmica de falhas . . . . .	438
18.2.1	Modelagem de vibrações mecânicas . . . . .	438



18.2.2	Barras quebradas . . . . .	439
18.2.3	Modelagem das correntes de falhas . . . . .	440
18.3	Aplicações de sensores para detecção de falhas em motores de indução . . . . .	443
18.3.1	Sensores de vibração . . . . .	443
18.3.2	Sensores de corrente . . . . .	444
18.3.3	Demais sensores . . . . .	447
18.4	Técnicas de processamento de sinais para diagnósticos de falhas . . . . .	447
18.4.1	Análise em frequência . . . . .	448
18.4.2	Análise tempo-frequência . . . . .	448
18.4.3	Métodos de reconhecimento de padrão . . . . .	449
18.5	Exemplos e aplicações . . . . .	458
18.5.1	Exemplos de análise em modelos de frequência e tempo-frequência . . . . .	459
18.5.2	Exemplos de diagnóstico de falhas por técnicas de reconhecimento de padrão . . . . .	461
<b>19</b>	<b>Modelagem de estruturas unidimensionais com parâmetros distribuídos e concentrados</b> . . . . .	<b>467</b>
19.1	Introdução . . . . .	468
19.2	Modelagem matemática . . . . .	469
19.2.1	Modelagem com parâmetros distribuídos . . . . .	469
19.2.2	Modelagem com parâmetros discretos . . . . .	470
19.2.3	Princípios de energia . . . . .	471
19.3	Modelo matemático de estruturas com parâmetros distribuídos . . . . .	473
19.3.1	Barras com carregamento axial . . . . .	473
19.3.2	Eixos de transmissão sujeitos a torques . . . . .	476
19.3.3	Vigas sujeitas a carregamentos transversais . . . . .	476
19.4	Modelagem conjunta de parâmetros contínuos e concentrados . . . . .	478
19.4.1	Exemplo: asa retangular plana fixada na fuselagem . . . . .	481
19.5	Solução baseada em técnica variacional . . . . .	484
19.5.1	Exemplo: viga com engaste elástico e lastro . . . . .	485
19.5.2	Quociente de Rayleigh . . . . .	486
19.6	Método de Rayleigh-Ritz . . . . .	489
19.6.1	Exemplo: asa de aeronave com afilamento . . . . .	491
19.7	Método de elementos finitos . . . . .	493
19.7.1	Modelagem matemática . . . . .	494
19.7.2	Funções de interpolação . . . . .	497
19.7.3	Elementos finitos unidimensionais lineares . . . . .	497
19.7.4	Transformação de coordenada local para global . . . . .	505
19.7.5	Exemplo: MEF aplicado a viga uniforme . . . . .	506
19.8	Conclusão . . . . .	510
	<b>Sobre os Autores</b> . . . . .	<b>513</b>

# Capítulo 1

## Análise linear e não linear de sistemas estruturais vibratórios

As oscilações (vibrações) mecânicas estão presentes em nossa vida nas mais diversas situações, tendo como exemplos, entre muitos outros em engenharia, os seguintes casos (Craig, 1994; Inman, 2019 etc.): o movimento oscilante da suspensão de um carro, o movimento do solo pela passagem de um ônibus nas proximidades e a propagação do som de uma música associada às vibrações acústicas. Todas essas situações, que notamos intuitivamente, são fenômenos físicos nos quais ocorrem transferência de energia mecânica de uma natureza para outra.

Os exemplos citados anteriormente apresentam as seguintes naturezas de energia: na suspensão do carro, a mola é o elemento relacionado à energia potencial elástica de deformação do material e o amortecedor é o elemento dissipador (transformador) de energia mecânica para energia térmica, o que é verificado pelo aquecimento do óleo do amortecedor; as rodas do ônibus, em movimento sobre o pavimento, transmitem energia potencial elástica para o solo; a música é a transmissão de ondas de pressão no ar (pressão acústica), que são percebidas através de nosso sistema auditivo etc.

Em alguns problemas de engenharia, as oscilações (vibrações) mecânicas devem ser controladas ou suprimidas. Alguns exemplos de casos de necessidade de controle de oscilações (vibrações) mecânicas são: o problema da estabilidade dos veículos, o problema da emissão de ruído em sistemas mecânicos e o problema das oscilações (vibrações) induzidas por atrito em máquinas.

Como se viu logo acima, tem uma importância muito grande na engenharia atual e não há exagero ao afirmar que é improvável a existência de qualquer ramo da engenharia no qual elas não exerçam papel importante. As equações diferenciais do

movimento de sistemas dinâmicos mecânicos são comumente equações diferenciais a derivadas parciais em suas coordenadas generalizadas espaciais e temporais. No caso em que as variáveis do problema não são do tipo separáveis, então o uso de métodos clássicos possibilita a eliminação das variáveis generalizadas espaciais, obtendo-se, desta forma, um conjunto de equações ordinárias na variável temporal, quer sejam na forma com coeficientes constantes ou dependentes do tempo.

É de suma importância a análise da estabilidade das soluções das equações do movimento, obtidas. Normalmente, adota-se a definição de estabilidade segundo Liapunov. Diz-se que um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico é estável se, qualquer que seja a perturbação imposta ao estado de equilíbrio, o sistema permanece suficientemente próximo a esse estado; no caso oposto, tem-se instabilidade. Se o sistema perturbado tender ao estado de equilíbrio inicial com o passar do tempo, diz-se que o sistema é assintoticamente estável.

As condições de estabilidade-instabilidade dinâmica são comumente expressas em teoria de vibrações mecânicas em termos de certas relações existentes entre as frequências das excitações externas e as frequências naturais do sistema, denominadas de relações de frequências, cujo fenômeno mecânico associado é chamado de ressonância.

A transmissão das vibrações para o corpo humano pode causar diversos prejuízos, tais como: dor, desconforto, perda de eficiência e concentração no trabalho, tontura, náusea, turvamento da visão, perturbação da fala, fadiga, perturbações neurológicas ou musculares, lesões osteoarticulares, patologias na região lombar e até mesmo lesões da coluna vertebral. As partes do corpo humano apresentam sensibilidade à frequência de vibração em diferentes faixas (valores): na cabeça em torno de 25Hz; nos globos oculares 30-60Hz; na caixa torácica 60Hz; na coluna vertebral 10-12Hz; no braço 16-30Hz; na mão 50-150Hz; na massa pélvica e nádegas 4-8Hz; nas pernas 2-20Hz.

O risco de exposição à vibração depende da amplitude, frequência, direção, tempo de exposição e comportamento da vibração ao longo do tempo (contínua, intermitente ou transitória).

Esse assunto da exposição humana à vibração é tão importante que existem várias normas internacionais que tratam dessa temática. Por exemplo, a norma ISO 2631-1 (1997) traz os requisitos gerais a respeito da exposição humana à vibração de corpo inteiro, abrangendo métodos de medição, severidade de vibração e conforto humano e possíveis efeitos sobre a saúde. A norma ISO 2631-2 (2003) apresenta um guia para aplicação da ISO 2631-1 sobre a resposta humana sob a ação de vibração de prédios.

No ambiente industrial, existem inúmeras fontes de vibração: máquinas rotativas, máquinas alternativas, processos com impacto, transportadores, veículos, máquinas ferramenta, dentre outras. Vale destacar alguns resultados das vibrações no ambiente industrial: ruído excessivo, desgaste prematuro, trincas, afrouxamento de

parafusos, vazamentos, mau funcionamento de máquinas e equipamentos e falhas estruturais. Nesse contexto de ambiente industrial, destaca-se o desbalanceamento, que é uma das causas mais comuns de vibração em equipamentos rotativos, especialmente em: rotores de motores elétricos, rotores de ventiladores, rotores de sopradores, turbinas, bombas centrífugas e uniões elásticas (acoplamentos mecânicos).

O desbalanceamento rotativo está presente em inúmeras aplicações de engenharia, por exemplo, afirma-se que grande parte dos motores de acionamento tem problema relacionado com vibração mecânica, devido ao desbalanceamento inerente que existe nos motores. Além disso, sabe-se que o desbalanceamento de motores a combustão interna pode gerar ondas (vibrações) com magnitude suficiente para causar incômodo em áreas urbanas ou até mesmo danos estruturais nas edificações; as rodas de uma locomotiva em alta velocidade podem ter afastamento considerável (da ordem de centímetro) dos trilhos da ferrovia em razão do desbalanceamento; a vibração causada pelo desbalanceamento afeta estruturas (suporte ou base de fixação) e componentes mecânicos das máquinas. Essa vibração pode causar falhas mecânicas como, por exemplo, desgaste acelerado, ruído excessivo ou falha por fadiga (variação cíclica da tensão), que são efeitos indesejáveis. Com o conhecimento da intensidade do desbalanceamento rotativo é possível minimizá-lo no projeto, bem como dimensionar as estruturas e componentes mecânicos para assegurar que o seu efeito não seja danoso aos mesmos.

Alguns efeitos do desbalanceamento serão abordados nos Capítulos 2 e 3 deste volume, referindo-se a problemas vibratórios denominados de não ideais (RNIS), onde se considera a interação entre a fonte de energia (de potência limitada) e a estrutura que a suporta.

Sabe-se também que qualquer equipamento ou sistema está sujeito a desgastes mecânicos. Rupturas podem resultar em grandes prejuízos econômicos e acidentes de produção. Sendo assim, uma recente ferramenta está sendo utilizada e destacando-se no campo da manutenção preditiva. A Peri dinâmica (não tratada neste livro) é capaz de informar o desenvolvimento de trincas desde estágios iniciais até a completa inutilização de um elemento de máquina ou equipamento (Madenci e Oterkus, 2014).

Neste ponto é importante comentar a existência de uma analogia entre sistemas mecânicos elétricos, desde que os sistemas (RNIS) se enquadrem na categoria de sistemas eletromecânicos.

## 1.1 Analogia entre sistemas mecânicos e elétricos

Dois sistemas físicos são análogos (duais) quando são descritos pelo mesmo modelo matemático, ou seja, pelo mesmo conjunto de equações diferenciais ou pela mesma função de transferência. Os sistemas análogos caracterizam-se por apresentarem a mesma forma de resposta quando submetidos a excitações do mesmo tipo.

O conceito de sistemas análogos é bem mais amplo: podemos ter analogias eletro-hidráulica, eletrotérmica, eletropneumática etc. No que diz respeito à analogia eletromecânica, tem-se dois tipos: a analogia força-voltagem, com base na lei de Kirchhoff das malhas, e a analogia força-corrente, amparada na lei de Kirchhoff dos nós.

A Tabela 1.1 mostra as equações diferenciais de um sistema mecânico do tipo massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade, de um circuito elétrico RCL em série, obtido pela lei das malhas, e de um circuito elétrico RCL em paralelo, obtido pela lei dos nós. A simbologia usada nesta tabela é descrita nas tabelas seguintes.

**Tabela 1.1** Modelos matemáticos dos circuitos mecânicos e elétricos

Sistema mecânico	Sistema elétrico	Sistema elétrico
Sistema translacional $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)$	$L\frac{di}{dt} + Ri + \int_0^t idt = e(t)$	$C\frac{de}{dt} + \frac{e}{R} + \int_0^t edt = 1$
Sistema rotacional $J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = T(t)$	ou $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = e(t)$	ou $C\ddot{\Psi} + \frac{\dot{\Psi}}{R} + \frac{\Psi}{L} = i(t)$

A analogia realizada aqui se estende para sistemas que apresentam elementos não lineares. Nestes casos, faz-se necessário realizar novamente as devidas comparações entre os modelos matemáticos.

A Tabela 1.2 mostra os elementos análogos obtido por comparação entre os modelos matemáticos dos sistemas mecânico e elétrico na analogia força-voltagem. A Tabela 1.3 mostra a analogia força-corrente obtida da comparação entre os modelos matemáticos dos sistemas mecânico e elétrico na analogia força-corrente.

**Tabela 1.2** Elementos análogos de sistemas mecânicos e elétricos baseado na relação força-voltagem

Sistema mecânico	Sistema elétrico
Força $F$ (ou Torque $T$ )	Voltagem $e$
Massa $m$ (ou Inércia $J$ )	Indutância $L$
Amortecimento viscoso $b$ (ou $B$ )	Resistência $R$
Rigidez $k$ (ou $K$ )	Inverso da capacitância $1/C$
Deslocamento $x$ (ou $\theta$ )	Carga elétrica $q$
Velocidade $\dot{x}$ (ou $\dot{\theta}$ )	Corrente elétrica $i$
Aceleração $\ddot{x}$ (ou $\ddot{\theta}$ )	Variação $di/dt$

**Tabela 1.3** Elementos análogos de sistemas mecânicos e elétricos baseado na relação força-corrente.

Sistema mecânico	Sistema elétrico
Força $F$ (ou Torque $T$ )	Corrente elétrica $i$
Massa $m$ (ou Inércia $J$ )	Capacitância $C$
Amortecimento viscoso $b$ (ou $B$ )	Inverso da resistência $1/R$
Rigidez $k$ (ou $K$ )	Inverso da indutância $1/L$
Deslocamento $x$ (ou $\theta$ )	Fluxo magnético $\Psi$
Velocidade $\dot{x}$ (ou $\dot{\theta}$ )	Voltagem $e$
Aceleração $\ddot{x}$ (ou $\ddot{\theta}$ )	Variação $de/dt$

O uso de circuitos elétricos, como absorvedores, pode ser explicado pela analogia entre sistemas mecânicos e elétricos. Entretanto, precisa-se considerar como será realizada a transferência de energia entre os sistemas mecânicos e elétricos. A seguir, mostra-se o dispositivo que pode ser utilizado nesta transferência.

## 1.2 Transdutores

Transdutores são dispositivos que convertem energia de uma forma para outra. Os transdutores mais estudados são os sensores e os atuadores. Sensores são dispositivos utilizados na detecção e medida de quantidades físicas; normalmente estas medidas são transformadas em energia elétrica.

Atuadores são dispositivos que convertem um sinal (normalmente elétrico) em uma ação (normalmente mecânica). Sinclair (2001), em seu livro *Sensors and transducers*, convencionou tratar os atuadores simplesmente por transdutores. A diferença entre sensores e atuadores é muito sutil. A principal diferença ocorre nas eficiências da conversão de energia. O principal objetivo dos sensores é realizar

medidas, então a eficiência não é tão importante. Ao contrário dos atuadores, que tem como principal objetivo a conversão de energia, portanto a eficiência da conversão é muito importante.

Sensores podem ser classificados como ativos ou passivos. Os sensores ativos são aqueles que podem gerar um sinal sem precisar de uma fonte de alimentação externa. Células fotovoltaicas, termopares e piezoelétricos são alguns exemplos de sensores ativos. Por outro lado, sensores passivos são aqueles que para gerar um sinal precisam de uma fonte de alimentação externa.

O uso de transdutores piezoelétricos tornou-se bastante comum em aplicações de controle de vibrações. Eles são usados tanto como sensores quanto atuadores em sistemas de controle de vibrações estruturais. A capacidade dos materiais piezoelétricos de transformar energia mecânica em energia elétrica e vice-versa foi descoberto por Pierre e Jacques Curie, segundo Moheimani e Fleming (1967). Estes cientistas descobriram uma classe de materiais que quando pressionados geram uma carga elétrica e quando colocados em um campo elétrico são mecanicamente tensionados.

A piroeletricidade, que literalmente significa “eletricidade gerada de pressão”, é encontrada naturalmente em muitos materiais monocristalinos, como o quartzo e topaz. Entretanto, estes materiais não são adequados como atuadores em aplicações de controle de vibrações. Em seu lugar, utilizam-se materiais sintéticos com estruturas policristalinas, como o titanato de zircônio (PZT), que pode ser processado para apresentar importantes propriedades piezoelétricas.

Os transdutores piezoelétricos são usados em muitas aplicações, como controle de vibrações estruturais, sistemas aeroespaciais e, mais recentemente, em micro e nanotecnologia.

Outro tipo de transdutor eletromecânico muito utilizado é o transdutor capacitivo. O transdutor capacitivo é um condensador que exhibe uma variação do valor nominal da capacidade em função de uma grandeza não elétrica.

Uma vez que um condensador consiste basicamente num conjunto de duas placas condutoras separadas por um dielétrico, as variações no valor nominal da capacidade podem ser provocadas por redução da área frente a frente e da separação entre placas, ou por variação da constante dielétrica do material. Este tipo de transdutor é muito empregado como sensor de medidas físicas, tais como a posição, a velocidade e aceleração linear ou angular de um objeto, pressão, umidade etc.

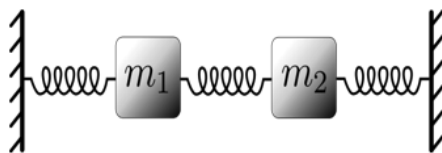
A seguir, discutem-se os modos normais de vibração.

## Modos normais de vibrações

É importante frisar que uma tendência mundial de resolução dos problemas da moderna engenharia, independente da sua especialidade, são definidas pelas suas características interdisciplinares, através de uma cooperação sistemática entre as partes: teórica (qualitativa) e a parte experimental/numérica (quantitativa), e que as não linearidades podem ser de origens elásticas, inerciais, ou dissipativas, e que geralmente são aproximadas por polinômios que contêm termos quadráticos ou cúbicos (ou de ordens superior). Sabe-se que os sistemas vibratórios não lineares comportam-se diferentemente de sistemas lineares. Múltiplas soluções, pontos de bifurcação, onde a resposta qualitativamente sofre mudanças bruscas, respostas com períodos diferentes ao da excitação, sensibilidade às condições iniciais, ressonâncias super e sub-harmonicas, são alguns dos fenômenos presentes em sistemas não lineares, que vêm sendo amplamente estudados nas últimas décadas. O recomendável, no caso de sistemas de muitos graus de liberdade, é o estudo inicial de poucos graus de liberdade (dois ou três) associado ao sistema de grande porte. Do conhecimento de propriedades importantes, de estabilidade, por exemplo, usar-se-ia estas conclusões como balizamento dos estudos não lineares do sistema de grande porte. Obviamente, não pode esquecer-se da importância da teoria de controle no condicionamento das respostas dos sistemas dinâmicos, quer eles sejam lineares ou não lineares. O teorema da superposição é a pedra fundamental da teoria de sistemas lineares. Esse teorema permite a análise modal em sistemas dinâmicos lineares com base no conceito de modos lineares de vibração. Em contrapartida, é precisamente essa forma de recombinação das coordenadas modais que falta para os sistemas dinâmicos não lineares. Em sistemas lineares, pelo princípio de superposição, um modelo dinâmico em larga escala pode ser reduzido a um modelo de menor dimensão, representado pelos modos de vibração dominantes, utilizando as ferramentas usuais da análise modal, pois os modos são dinamicamente independentes. Considerando-se o sistema dado pela Figura 1.1, composto por dois osciladores iguais acoplados (não afetados pela gravidade), com dois graus de liberdade (2-DOF), sendo que cada um com massa,  $m$ , presos a três molas, cada um com constante de mola  $k$ . onde os pontos de borda são fixos e não podem se mover e usando-se  $x_1(t)$  para denotar o deslocamento horizontal da massa esquerda e  $x_2(t)$  para denotar o deslocamento da massa direita, as equações governantes do movimento serão:

$$\begin{aligned}m_1\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2 \\m_2\ddot{x}_2 &= -kx_2 + k(x_1 - x_2) = -2kx_2 + kx_1\end{aligned}\tag{1.1}$$





**Figura 1.1** Sistema vibratório ideal (IS) com 2 graus de liberdade.

Uma vez que espera-se movimento oscilatório de um modo normal (onde  $\omega$  é o mesmo para ambas as massas), tem-se que  $x_i(t) = A_i e^{i\omega t}$ , obtendo-se:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 m - 2k & k \\ k & \omega^2 m - 2k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.2)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad (1.3)$$

Substituindo-se  $\omega_1$  na matriz acima e resolvendo para  $(A_1, A_2)$ , obtém-se  $(1, 1)$ . Se substituir  $\omega_2$ , obtém-se  $(1, -1)$ . Estes vetores são os autovetores e as frequências são os autovalores. Logo, o primeiro modo normal de vibrar será:

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (1.4)$$

que corresponde a ambas as massas se moverem na mesma direção e ao mesmo tempo. O segundo modo normal de vibração será:

$$\eta_2 = \begin{pmatrix} x_1^2(t) \\ x_2^2(t) \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (1.5)$$

que corresponde às massas moverem-se em direções opostas, enquanto o centro de massa permanece estacionário. A solução geral é dada pela superposição dos modos normais, onde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são determinados pelas condições iniciais do problema. Nas diversas áreas de abrangência da ciência da engenharia, com aplicações em mecânica, aeroespacial, naval, elétrica etc., é usual encontrarem-se sistemas estruturais compostos de uma sequência de módulos, nominalmente iguais em suas características de rigidez, massa e carregamentos, acoplados entre si. Tais sistemas são denominados de uma forma imprecisa, como estruturas periódicas. Como exemplos, tem-se: as pás de turbinas constituem uma estrutura com periodicidade cíclica levemente acopladas pelo rotor a que são elasticamente

engastadas; os painéis modulados de chapa fixadas a longarinas e cavernas de veículos terrestres longos, como os ônibus; caso de embarcações de superfície e submarinas; as linhas de transmissão de energia quando as distâncias entre torres são aproximadamente iguais; estruturas treliçadas de todos os tipos, inclusive de plataformas espaciais, estruturas de edifícios altos em que os andares se repetem em grande número ao longo da altura etc. Ao se estudar o comportamento dinâmico de tais sistemas, adotam-se propriedades de rigidez, massa e amortecimento idênticas para os diversos segmentos. Também os carregamentos são considerados repetitivos. Os modos de vibrar resultantes desses modelos idealizados são globais por natureza, as respostas modais estendendo-se ao longo de toda a estrutura. Também no estudo da estabilidade do equilíbrio (flambagem), o usual é a adoção de características geométricas e materiais bem como carregamentos de referência idênticos ao longo do sistema. Mais uma vez, as configurações de equilíbrio alternativas são de caráter global, com deslocamentos de ordens de grandeza equivalentes, nas várias partes da estrutura. Entretanto, nas estruturas reais, não há segmentos idênticos. Imperfeições construtivas, geralmente, produzem pequenas variações, de natureza aleatória, nas propriedades estruturais. As magnitudes dessas diferenças entre os trechos são determinadas pela tolerância de construção e variabilidade de carregamento. À medida que as desordens crescem e o acoplamento entre módulos diminui em intensidade, há probabilidade de que os modos resultantes mudem expressivamente com relação ao do modelo idealizado. A resposta pode ficar confinada a alguns segmentos, ou mesmo a um só, em contraste com o caso ordenado em que ela se estende por toda a estrutura. Este é o denominado fenômeno de localização de modos. O grau e a natureza das imperfeições determinam se essas localizações são benéficas, como um mecanismo de amortecimento, ou catastróficas, quando se leva a solicitações excessivas ou perda de estabilidade (Brasil, 1995).

### 1.2.1 Localização de modos

Nas diversas áreas de abrangência da ciência da engenharia, com aplicações em mecânica, aeroespacial, naval, elétrica etc., é usual encontrarem-se sistemas estruturais compostos de uma sequência de módulos, nominalmente iguais em suas características de rigidez, massa e carregamentos, acoplados entre si. Tais sistemas são denominados de uma forma imprecisa, como estruturas periódicas. Como exemplos, tem-se: as pás de turbinas constituem uma estrutura com periodicidade cíclica levemente acopladas pelo rotor a que são elasticamente engastadas; os painéis modulados de chapa fixadas a longarinas e cavernas de veículos terrestres longos, como os ônibus; caso de embarcações de superfície e submarinas; As linhas de transmissão de energia quando as distâncias entre torres são aproximadamente iguais; Estruturas treliçadas de todos os tipos, inclusive de plataformas espaciais, estruturas de edifícios altos em que os andares se repetem em grande número ao longo da altura; etc.

Ao se estudar o comportamento dinâmico de tais sistemas, adotam-se propriedades de rigidez, massa e amortecimento idênticas para os diversos segmentos. Também os carregamentos são considerados repetitivos. Os modos de vibrar resultantes desses modelos idealizados são globais por natureza, as respostas modais estendendo-se ao longo de toda a estrutura. Também no estudo da estabilidade do equilíbrio (flambagem), o usual é a adoção de características geométricas e materiais bem como carregamentos de referência idênticos ao longo do sistema. Mais uma vez, as configurações de equilíbrio alternativas são de caráter global, com deslocamentos de ordens de grandeza equivalentes, nas várias partes da estrutura. Entretanto, nas estruturas reais, não há segmentos idênticos. Imperfeições construtivas, geralmente, produzem pequenas variações, de natureza aleatória, nas propriedades estruturais. As magnitudes dessas diferenças entre os trechos são determinadas pela tolerância de construção e variabilidade de carregamento. À medida que as desordens crescem e o acoplamento entre módulos diminui em intensidade, há probabilidade de que os modos resultantes mudem expressivamente com relação ao do modelo idealizado. A resposta pode ficar confinada a alguns segmentos, ou mesmo a um só, em contraste com o caso ordenado em que ela se estende por toda a estrutura. Este é o denominado fenômeno de localização de Modos. O grau e a natureza das imperfeições determinam se estas localizações são benéficas, como um mecanismo de amortecimento, ou catastróficas, quando se leva a solicitações excessivas ou perda de estabilidade (Nayfeh, Hawwa, 1994; Pierre e Dowel, 1987; (Vakakis , 1993; Almeida, 2000; Brasil, 2015, entre outros).

### 1.3 Modos normais não lineares (NNM)

Para sistemas não lineares, estas ferramentas não são diretamente aplicáveis e deve-se usar outra forma para compreender e analisar a dinâmica dos sistemas não lineares. O conceito apresentado por Rosenberg (1996) de modos normais não lineares (NNM) é considerado como uma extensão dos modos normais lineares, e tem se tornado uma ferramenta útil na análise de vibrações não lineares.

De acordo com Rosenberg (1996), os modos normais não lineares são movimentos síncronos que apresentam uma relação bem definida entre as coordenadas generalizadas, isto é, todas as coordenadas generalizadas executam movimentos de mesmo período ( $x_i(t) = x_i(t+T)$ ) passando pela posição de equilíbrio ( $x_i(t_0) = x_i^0$ ) alcançando seus deslocamentos máximos simultaneamente, ou seja, existe um tempo  $t = t_1 \neq t_0$  no qual todas as velocidades tornam-se nulas, isto é:  $\dot{x}_1 = 0$ . Nota-se que para um  $r = [1, 2, \dots, n]$  fixo, em qualquer instante de tempo as coordenadas do sistema devem ser relacionadas por equações funcionais da forma:  $x_i = P_i(x_r); i \neq r, i = 1, 2, \dots, n$  onde  $P_i$  é chamado de função modal para o modo não linear  $r$ . Sendo assim, em um modo, as oscilações de todas as coordenadas podem ser parametrizadas por uma única coordenada.

Assim, a possibilidade de definir as posições de todas as massas por meio de qualquer uma delas permite uma redução de ordem muito eficiente para o problema como um todo. O modo linear pode ser, por essa definição, visto como um caso particular do modo não linear, onde as funções modais na expressão  $x_i = P_i(x_r)$ ;  $i \neq r, i = 1, 2, \dots, n$ . são funções lineares. Rosenberg também define dois tipos de modos não lineares, similar e não similar. Se as linhas modais correspondentes ao modo não linear forem retas, tem-se que o modo é similar. No caso geral onde as linhas modais são curvas, o modo é não similar. Portanto, quando um sistema se movimenta em um modo similar, esse movimento ocorre ao longo de uma linha reta passando pela posição de equilíbrio no espaço  $n$ -dimensional do sistema, ao passo que o movimento não similar ocorre ao longo de uma curva no mesmo espaço. O movimento do modo similar que ocorre em um sistema em vibração livre pode ser matematicamente reescrito como:  $x_i = c_{ir} r x_r$ ;  $i \neq r, c_{ir} = 1$ , sendo que essas relações lineares devem ser satisfeitas pelas coordenadas  $x_i$  para todos os tempos, onde  $c_{ir}$ . são  $n - 1$  quantidades escalares desconhecidas. O modo linear é um caso particular de modo similar. Considerando-se, a título de exemplificar a teoria de Rosenberg, seja o sistema não lineares de equações:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 + kx_1^3 + (x_1 - x_2)^3 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + x_2 + kx_2^3 - (x_1 - x_2)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

e, devido à sua simetria, esse sistema possui apenas (NNMs) semelhantes que são calculados impondo a seguinte relação funcional

$$x_2 = cx_1 \quad (1.7)$$

obtém-se:

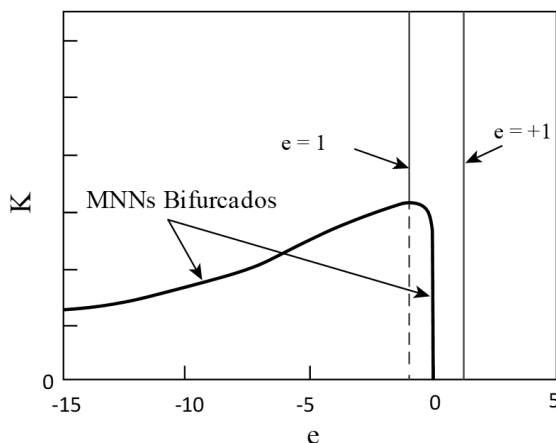
$$K(1+c)(c-1)^3 = c(1-c^2) \quad (1.8)$$

Na próxima figura (Figura 1.2), os valores reais da constante modal  $c$  são representados para o coeficiente de rigidez de acoplamento variável  $K$ , a partir do qual infere-se que uma bifurcação de pitchfork de NNMs ocorre no sistema dinâmico, considerado. Este tipo de bifurcação é realizado devido à simetria do sistema e espera-se que “se quebre” em bifurcação(ões) de nó de sela (SN) quando essa simetria for perturbada. Com referência à Figura 1.2, nota-se que o sistema (.1) sempre possui os

$$NNMs y_2 = \pm y_1 \quad (1.9)$$

correspondentes para soluções  $c = \pm 1$ , independentemente da resistência de acoplamento  $K$ ; estes correspondem a NNMs semelhantes em fase e “fora” de fase, respectivamente, que podem ser considerados como “continuações” dos dois modos normais de vibração do sistema linear correspondente.

Na Figura 1.2, os valores reais da constante modal  $c$  são representados para o coeficiente de rigidez de acoplamento variável  $K$ , a partir do qual inferimos que uma bifurcação de pitchfork de NNMs ocorre no sistema hamiltoniano. Este tipo de bifurcação é realizado devido à simetria do sistema e espera-se que “se quebre” em bifurcação(ões) de nó de sela (SN) quando essa simetria for perturbada. Conforme observado a partir do diagrama de bifurcação da Figura 1.2, o sistema não linear possui dois (NNMs) adicionais que bifurcam a partir de fora de fase NNM em  $K = 1/4$ . Os (NNMs) bifurcados estão fora de fase, essencialmente movimentos não lineares, periódicos no tempo do sistema (.1) não tendo análogos na teoria linear; ambos esses NNMs tornam-se fortemente localizados como  $K \rightarrow 0$  (ou seja, para suficientemente fraco acoplamento) a um dos dois osciladores do sistema (.1). Portanto, no limite de acoplamento fraco, a localização do modo não linear ocorre no sistema simétrico. Este exemplo simples demonstra que os NNMs de um sistema dinâmico podem exceder em número seus graus de liberdade Neste caso particular, a bifurcação (NNM) é devido à ressonância interna de 1:1 entre os dois osciladores não lineares do sistema (.1). Uma conclusão adicional interessante tirada deste exemplo específico é que as bifurcações (NNM) podem resultar em instabilidade de modo; de fato, para  $K < 1/4$ , o (NNM)  $x_2 = -x_1$  fora de fase torna-se instável.



**Figura 1.2** (NNMs)—: estável , - - -: instável NNMs.

O estudo completo da estabilidade dos modos ilustrados na Fig 2, pode ser encontrado em Nayfeh (2000). Para o uso do método de múltiplas escalas (Balthazar

et al., 2020), descrito em detalhes no volume 1, deste livro, deve-se tomar as equações na forma

$$\begin{aligned}(x_1) + \ddot{x}_1 + \varepsilon(Kx_1^3 + (x_1 - x_2)^3) &= 0 \\ (x_2) + \ddot{x}_2 + \varepsilon(Kx_2^3 - (x_1 - x_2)^3) &= 0\end{aligned}\tag{1.10}$$

buscando-se soluções da forma:

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1)y(t, \varepsilon) = y_0(T_0, T_1) + \varepsilon y_1(T_0, T_1)\tag{1.11}$$

e obtém-se os mesmos resultados, mostrados logo acima (Nayfeh, 2000).

Esse conceito original de modos normais não lineares de Rosenberg foi modificado nos últimos anos por Shaw e Pierre (1991) que propuseram uma definição dos modos normais não lineares, na qual não somente os deslocamentos generalizados, mas também as velocidades devem ser consideradas. A vantagem dessa definição é que ela incorpora a definição de Rosenberg.

De acordo com Shaw e Pierre (1991), um modo normal não linear é um movimento em vibração livre que se realiza em uma variedade bidimensional invariante inserida no espaço de fase do sistema. Como as variedades são invariantes, isso significa que, se as condições iniciais estão em uma dessas variedades, o movimento correspondente permanece nesta variedade. Formalmente, uma variedade invariante de um sistema dinâmico é um subconjunto  $S$  do espaço de fase, tal que, se um conjunto de condições iniciais for dado em  $S$ , a solução permanece em  $S$  ao longo de todo o tempo. como um caso particular e é apropriada para sistemas conservativos e não conservativos. A variedade invariante de um modo normal não linear é uma superfície bidimensional no espaço de fase do sistema. Essa variedade deve conter o ponto de equilíbrio e ser tangente ao correspondente autoespaço do sistema linearizado. Nessa formulação, um par de coordenadas, deslocamento-velocidade, é escolhido como coordenadas governantes, caracterizando o movimento modal não linear individual que ocorre em tal variedade. Assim todos os graus de liberdade restantes são descritos como coordenadas dependentes, compostas da mesma forma por pares de coordenadas, deslocamento-velocidade.

Esses conceitos podem ser reescritos formalmente pela definição: um modo para um sistema não linear é um movimento que ocorre em uma variedade bidimensional invariante no espaço de fase do sistema. Essa variedade passa através do ponto de equilíbrio estável de interesse e, nesse ponto, é tangente ao autoespaço bidimensional do sistema linearizado. Nessa variedade, o sistema dinâmico é governado por uma equação de movimento envolvendo um par de variáveis de estado, ou seja, comporta-se como um sistema de um grau de liberdade.

A seguir, discute-se esta teoria com maior detalhamento. O algoritmo por variedades invariantes estabelecida por Shaw e Pierre pode ser adaptada para o tratamento das equações de movimento provenientes do método dos elementos finitos facilmente.

Para uma revisão do método de elementos finitos, recomenda-se o texto Brasil et al. (2016).

## 1.4 Teoria de Shaw e Pierre, para modos normais não lineares de vibrações

O algoritmo para uso da teoria de Shaw e Pierre é esboçado a seguir:

**A:** O primeiro passo é escrever as equações que representam os vários graus de liberdade em relação à posição de equilíbrio, como  $\ddot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ou em forma de equações de primeira ordem

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= y_i \\ \dot{y}_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n); i = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\tag{1.12}$$

onde  $x_i$  são as coordenadas generalizadas (deslocamentos, rotações etc.);  $y_i$  são as correspondentes velocidades e  $f_i$  são as forças não lineares.

**B:** O segundo passo é apresentar os deslocamentos e velocidades são parametrizados por um único par deslocamento-velocidade, por meio de equações de restrição. Esse par pode ser arbitrariamente escolhido e é denominado par mestre:  $u = x_1, v = y_1$ . O par de variáveis  $(u, v)$  são as variedades invariantes referente ao primeiro grau de liberdade.

**C:** O terceiro passo é tomar os pares dos demais graus de liberdade, chamados de pares escravos, que são restritos em função de  $(u, v)$ , de acordo com as equações abaixo:

$$\begin{aligned}x_i &= P_i(u, v), i = 1, 2, \dots, n \\ y_i &= Q_i(u, v)\end{aligned}\tag{1.13}$$

onde  $(P_i, Q_i)$  são as funções de restrição das variedades invariantes, ou equações modais.

**D:** O quarto passo é tomar o deslocamento e a velocidade do grau de liberdade na direção:  $x$  são escolhidos como par mestre,  $y$  são escolhidas como par escravo:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \dot{u}_1 \\ u_2 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ P(u, v) \\ Q(u, v) \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

onde  $(P, Q)$  representam as variedades invariantes, ou funções modais.

**E:** O quinto passo consiste na eliminação da variável temporal; obtêm-se primeiramente as derivadas temporais das funções de restrição. Essas equações relacionam as taxas de variação de todas as variáveis de estado em relação a  $(u, v)$  por meio das equações de restrição

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial u} u + \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial v} \dot{v} \rightarrow i = 1, 2, \dots, n \\ y_i &= \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial v} \dot{v} \rightarrow i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.15)$$

**F:** O sexto passo consiste em substituir as equações acima na equação de movimento e utilizar as equações de restrição, obtendo-se  $2n - 2$  equações diferenciais parciais não lineares:

$$Q_1(u, v) = \frac{\partial P_1(U, V)}{\partial U} V + \frac{\partial P_1(U, V)}{\partial V} F_1 \quad (1.16)$$

onde  $F_1 = F_1(U, P_2(U, V), \dots, P_n(U, V); V, Q_2(U, V), \dots, Q_N(U, V))$ ;

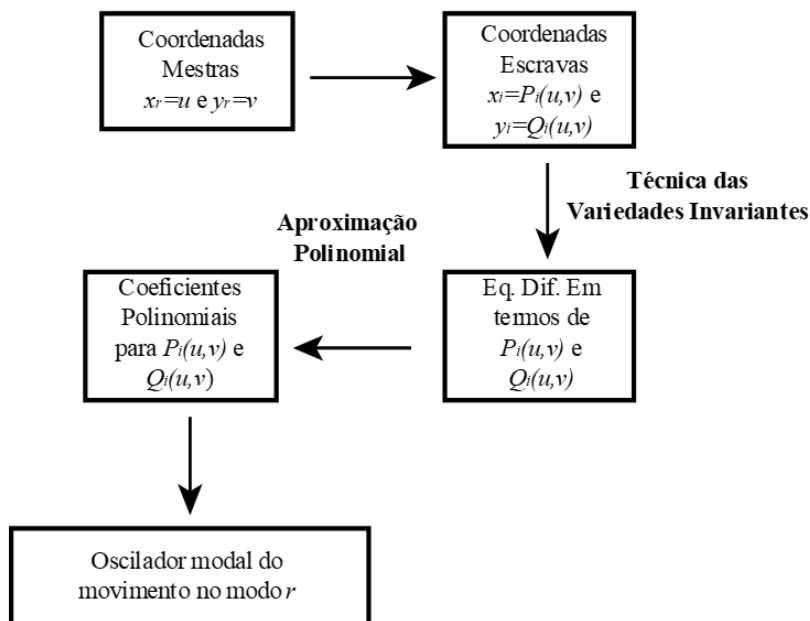
**G:** O sétimo passo consiste em partir das funções de restrição; os modos normais não lineares podem ser obtidos pela substituição das funções de restrição nas equações de movimento, resultando nas seguintes equações modais de único grau de liberdade, também chamado de oscilador modal:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{v} \\ \dot{v} &= f_1(u, P_2(u, v), \dots, P_n(u, v); v, Q_2(u, v), \dots, Q_n(u, v)) \end{aligned} \quad (1.17)$$

As equações obtidas significam a dinâmica de um determinado modo não linear, incluindo se os efeitos dos modos não simulados, referentes aos pares escravos, no modo simulado, referente ao par mestre.

Esses passos do algoritmo encontram-se na forma de fluxograma (Figura 1.3):





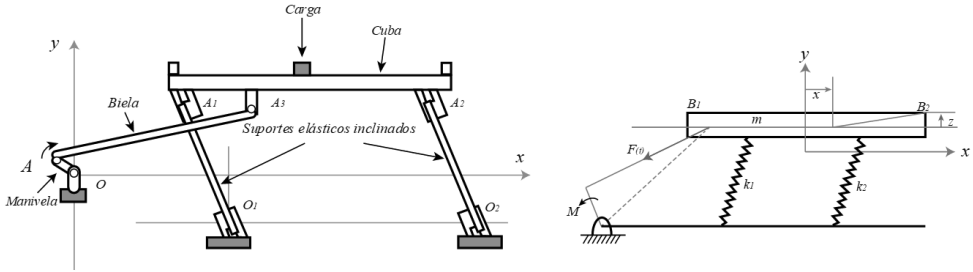
**Figura 1.3** Escolha das coordenadas mestras; expressar das coordenadas escravas em função das funções de restrição; uso da técnica das variedades invariantes para eliminar a dependência explícita do tempo das equações de movimento; utilização das aproximações locais para as funções de restrições; substituição das aproximações das funções de restrição nas equações diferenciais parciais que governam as variedades invariantes; resolução do sistema de equações algébricas resultante; substituição das coordenadas escravas na equação de movimento pelas expansões polinomiais.

Em geral a definição baseada nas variedades invariantes é mais geral, uma vez que cobre uma faixa mais ampla de sistemas e respostas. Ela pode ainda ser generalizada para o caso de multimodos quando um sistema com ressonâncias internas é estudado, o que não se aborda neste texto básico. Um exemplo da aplicação do algoritmo de Shaw-Pierre (Alışverişçi, 2015) é apresentado a seguir, resumidamente.

## 1.5 Transportadores vibracionais com excitadores de manivela e haste

Considerando-se, a seguir, as Figuras 1.4(a) e 1.4(b) (Alışverişçi, 2015), onde as constantes  $k_1$  e  $k_2$  são os coeficientes elásticos das molas,  $m$  é a massa do sistema,  $r$  é o comprimento da manivela,  $\theta$  é o ângulo de rotação do sistema,  $J$  é o momento

de inércia do sistema em relação ao centro de massa,  $x$  e  $z$  são a posição do centro de massa do sistema,  $\omega$  é a frequência de excitação, e  $q_i$  são as coordenadas generalizadas.



**Figura 1.4** Transportador vibracional com excitadores de manivela e haste; (a) modelo físico; (b) modelo matemático.

As equações de Lagrange nas coordenadas  $q_1 = x, q_2 = z$  e  $q_3 = \theta$  são:

$$\begin{aligned}
 (k_1 + k_2)x + m\ddot{x} &= & (1.18) \\
 \frac{1}{r} \left[ M \cos \left( \beta - a \sin \left( \frac{r \sin(\omega t)}{L} \right) \right) \sin \left( \omega t + a \sin \left( \frac{r \sin(\omega t)}{L} \right) \right) \right] \\
 (-k_1 L_1 + k_2 L_2) \sin(\theta) + (k_1 + k_2)z + m\ddot{z} &= \\
 \frac{1}{r} \left[ M \sin \left( \beta - a \sin \left( \frac{r \sin(\omega t)}{L} \right) \right) \sin \left( \omega t + a \sin \left( \frac{r \sin(\omega t)}{L} \right) \right) \right] \\
 \cos(\theta)(k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2) \sin(\theta) + (k_2 L_2 - k_1 L_1)z + J\ddot{\theta} &= \\
 \frac{1}{r} \left[ M \sin \left( \beta - a \sin \left( \frac{r \sin(\omega t)}{L} \right) \right) \sin \left( \omega t + a \sin \left( \frac{r \sin(\omega t)}{L} \right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

Entretanto, para se formular a teoria dos modos normais não lineares, nota-se que eles estarão concentrados apenas na vizinhança da região de ressonância paramétrica principal. As equações de movimento do sistema não linear conservador assumem a forma.

Assumindo que  $\theta$  é pequeno tal que:  $(\cos(\theta) \approx 1, \sin(\theta) \approx \theta)$ , obtém-se um sistema linear cujas frequências são dadas por:

$$\begin{aligned}
 (k_1 + k_2)x + m\ddot{x} &= 0 & (1.19) \\
 (k_2 L_2 - k_1 L_1)\theta + (k_1 + k_2)z + m\ddot{z} &= 0 \\
 J\ddot{\theta} + (k_2 L_2 - k_1 L_1)z + (k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2)\theta &= 0
 \end{aligned}$$

Com

$$m_m = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}, k_m = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_1 L_1 + k_2 L_1 \\ 0 & k_2 L_1 - k_1 L_1 & k_1 L_1^2 + k_2 L_1^2 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

$m_m$  sendo a matriz de massa e  $k_m$  a matriz de rigidez.

Desta forma, a equação de frequência será:

$$\begin{aligned} \text{freq.Eq} = \det[k_m - \lambda m_m] &= \quad (1.21) \\ \det \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - m\lambda & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 - m\lambda & k_2 L_2 - k_1 L_1 \\ 0 & k_2 L_2 - k_1 L_1 & k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2 - J\lambda \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} \lambda &= \omega^2, \quad (1.22) \\ \text{freq.Eq} &= -Jm^2\lambda^3 + 2Jm\lambda^2 k_1 - J\lambda k_1^2 + 2Jm\lambda^2 k_2 - 2J\lambda k_1 k_2 - \\ &J\lambda k_2^2 + m^2\lambda^2 k_1 L_1^2 - m\lambda k_1^2 L_1^2 + m^2\lambda^2 k_2 L_1^2 - 6m\lambda k_1 k_2 L_1^2 \\ &+ 4k_1^2 k_2 L_1^2 - m\lambda k_2^2 L_1^2 + 4k_1 k_2^2 L_1^2 \end{aligned}$$

em que:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{k_1 + k_2}{m} \quad (1.23) \\ \lambda_{2,3} &= \frac{Jk_1 + Jk_2 + mk_1 L_1^2 + mk_2 L_1^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2Jm} \end{aligned}$$

onde  $\Delta = -16Jmk_1 k_2 L_1^2 + (-Jk_1 - Jk_2 - mk_1 L_1^2 - mk_2 L_1^2)^2$ .

Adotando-se os valores  $\lambda_1 = 100$ ,  $\omega_1 = 10\text{rad/s}$ ,  $\lambda_2 = 95.491$ ,  $\omega_2 = 9.77\text{rad/s}$ ,  $\lambda_3 = 654.51$ ,  $\omega_3 = 25.58\text{rad/s}$

**Tabela 1.4**

$k_1$	$k_2$	$r$	$L$	$L_1$	$L_2$	$M$	$m$	$J$	$g$	$\omega$	$\beta$
$N/m$	$N/m$	$m$	$m$	$m$	$m$	$kg.m$	$kg$	$kg.m^2$	$m/s$	$rad/s$	$rad$
5000	5000	0.1	1	2	3	100	100	100	9.81	20	$\pi/6$

De acordo, com o algoritmo de Shaw e Pierre, esboçado neste capítulo, tem-se:

$$\begin{aligned}
z &= x_1 \\
\theta &= x_1 \\
\dot{x}_1 &= y_1 \\
\dot{x}_2 &= y_2 \\
\dot{y}_1 &= f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) \\
\dot{y}_2 &= f_2(x_1, y_1, x_2, y_2)
\end{aligned} \tag{1.24}$$

As coordenadas mestras podem ser escolhidas como sendo:

$$\begin{aligned}
x_1 &= u \\
y_1 &= v;
\end{aligned} \tag{1.25}$$

e as escravas podem ser aproximadas pelas coordenadas mestras:

$$\begin{aligned}
x_2 &= X_2(u, v) \\
y_2 &= Y_2(u, v)
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Assim, o deslocamento e a velocidade do terceiro oscilador podem ser expressos pela velocidade de deslocamento do segundo oscilador. Não há acoplamento do primeiro oscilador. As funções  $X_2(u, v)$ ,  $Y_2(u, v)$  são denominadas de equações de restrição e representam as chamadas superfícies do modelo. A técnica da variedade invariável pode ser usada para eliminar a dependência do tempo.

$$\begin{aligned}
Y_2(u, v) &= \frac{\partial X_2(u, v)}{\partial u} v \\
&+ \frac{\partial X_2(u, v)}{\partial v} f_1(u, v, X_2(u, v), Y_2(u, v))
\end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned}
f_2(u, v, X_2(u, v), Y_2(u, v)) &= \frac{\partial Y_2(u, v)}{\partial u} v \\
&+ \frac{\partial Y_2(u, v)}{\partial v} f_1(u, v, X_2(u, v), Y_2(u, v))
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Nota-se que a solução local pode ser aproximada, usando-se uma expansão polinomial de  $X_1$  e  $X_2$  em termos de  $u$  e  $v$  :

$$\begin{aligned}
X_2 &= a_1u + a_2v + a_3u^2 + a_4uv + a_5v^2 + a_6u^3 + a_7u^2v + a_8uv^2 + a_9v^3 \\
Y_2 &= b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2 + b_6u^3 + b_7u^2v + b_8uv^2 + b_9v^3 \\
\dot{X}_2 &= a_1\dot{u} + a_2\dot{v} + 2a_3\dot{u} + a_4\dot{u}v + a_4u\dot{v} + 2a_5v\dot{v} + 3a_6u^2\dot{u} + 2a_7u\dot{u}v + a_7u^2\dot{v} + a_8u\dot{v}^2 + 2a_8uv\dot{v} + 3a_9v^2\dot{v} \\
\dot{Y}_2 &= b_1\dot{u} + b_2\dot{v} + 2b_3\dot{u}u + b_4\dot{u}v + b_4\dot{u}v + 2b_5v\dot{v} + 3b_6u^2\dot{u} + 2b_7\dot{u}uv + b_7u^2\dot{v} + b_8\dot{u}v^2 + 2b_8uv\dot{v} + 3b_9v^2\dot{v}
\end{aligned} \tag{1.29}$$

obtendo-se:

$$\begin{aligned}
y_2 &= a_1y_1 + a_2f_1 + 2a_3x_1y_1 + a_4x_1f_1 + a_4y_1^2 + 2a_5y_1f_1 + 3a_6x_1^2y_1 + 2a_7x_1y_1^2 + a_7x_1^2f_1 + a_8y_1^3 + 2a_8x_1y_1f_1 + 3a_9y_1^2f_1 + \dots \\
f_2 &= b_1y_1 + b_2f_1 + 2b_3x_1y_1 + b_4x_1f_1 + b_4y_1^2 + 2b_5y_1f_1 + 3b_6x_1^2y_1 + 2b_7x_1y_1^2 + b_7x_1^2f_1 + b_8y_1^3 + 2b_8x_1y_1f_1 + 3b_9y_1^2f_1 + \dots
\end{aligned} \tag{1.30}$$

E usando-se:

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) &= f_1(u, v, X_2(u, v), Y_2(u, v)) \\
f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) &= f_2(u, v, X_2(u, v), Y_2(u, v))
\end{aligned} \tag{1.31}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
y_2 - \dot{x}_2 &= 0 \\
f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) - \dot{y}_2 &= 0
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Agrupando os termos em  $u, v, u^2, uv, v^2, u^3, u^2v, uv^2, v^3$ , obtém-se:

$a_1, \dots, a_9, b_1, \dots, b_9$ , desta forma, os dois modos de vibrar não lineares são dados pelas Figuras 1.5:

$$\begin{aligned}
mod1 : \ddot{u}_1 + 95.4915u_1 &= 0.00951u_1^3 - 0.0001432u_1\dot{u}_1^2 - 4.7685u_1^3\dot{u}_1^2 \\
mod2 : \ddot{u}_2 + 654.5085u_2 &= 23895.445u_2^3 - 787.218u_2\dot{u}_2^2 + 48410.711u_2^3\dot{u}_2^2
\end{aligned} \tag{1.33}$$

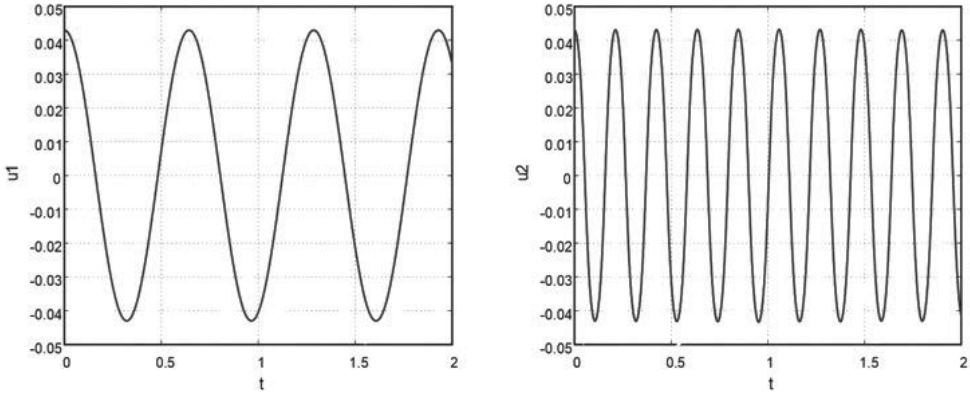


Figura 1.5 Modos não lineares de vibração:  $a : u_1$  ,  $b = u_2$ .

## 1.6 Comentários sobre ressonância

De um modo geral, um sistema de  $n$  graus de liberdade, excitado harmônica e parametricamente, pode ser escrito na forma (Nayfeh e Mook, 1979)

$$M\dot{\mathbf{x}} + C\mathbf{x} + K(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x}) = P_1(t) + P_2(t)\mathbf{x} \tag{1.34}$$

onde a matriz  $x$  e o vetor não linear “embutido” na estrutura  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  tem dimensão  $n \times 1$  e as matrizes  $n \times n$  :  $M$  : matriz massa,  $C$  : matriz de amortecimento,  $K$  : matriz de rigidez,  $P_1$  e  $P_2$  são funções periódicas do tempo.

Considerando-se as vibrações livres tem-se  $M\dot{x} + Kx = 0$  e tomam-se as frequências por  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , assumindo-se que todos eles são reais e diferentes de zero.

Um caso importante ocorre sempre que dois ou mais são comensuráveis ou quase comensuráveis:

$$\begin{aligned} \omega_2 \approx 2\omega_1, \omega_2 \approx 3\omega_1, \omega_2 \approx \omega_2 \pm \omega_1, \omega_3 \approx 2\omega_2 \pm \omega_1; \\ \omega_4 \approx \omega_3 \pm \omega_2 \mp \omega_1, \dots, \end{aligned} \tag{1.35}$$

i.e., tem-se ressonâncias internas além das externas. No caso de haver não linearidades quadráticas, tem-se ressonância 1 : 2; no caso de haver termos cúbicos, tem-se ressonâncias internas 1 : 3 e assim por diante. No caso particular do sistema de dois graus de liberdade com não linearidades quadráticas, tem-se, por exemplo:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 2\mu_1\dot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = u_1 u_2 \\ \ddot{u}_2 + 2\mu_2\dot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = u_1^2 + f \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{1.36}$$

Com ressonâncias externas do segundo modo de vibração  $\omega_2 = \omega + \delta_2$ ; ressonância interna 1 : 2  $\omega_2 = 2\omega_1 + \delta_1$ , (parâmetros de sintonia  $\delta_1, \delta_2 \ll 1$ ) e, por exemplo, amortecimentos  $\mu_1, \mu_2 \ll 1$ . Neste caso específico tem-se o chamado fenômeno de saturação (que será abordado com maiores detalhes posteriormente neste capítulo), onde se observa uma transferência de energia. Ressalta-se que as equações governantes de pórtico simples de comportamento não linear excitado são da forma acima. Se as frequências naturais são fixadas de tal modo que o motor excite o primeiro modo antissimétrico (“Sway”) ou o primeiro modo simétrico. As propriedades físicas e geométricas do pórtico são escolhidas para que as frequências naturais dos dois modos estejam em ressonância interna 1:2, então há possibilidade de ocorrência de saturação do modo de alta frequência e pequena amplitude e transferência de energia para o modo de baixa frequência e grande amplitude.

Usando-se um método de perturbação, tem-se que

$$\begin{aligned} u_1 &\approx a_1 \cos\left(\frac{\omega t}{2} + \gamma_1\right) \\ u_2 &\approx a_2 \cos(\omega t + \gamma_2) \end{aligned} \quad (1.37)$$

onde  $(a_i, \gamma_i)$ ,  $i = 1, 2$  são as amplitudes e fase, respectivamente. Logo, tem-se a troca de energia, exibida logo abaixo:

$$\begin{aligned} u_1 u_2 &\approx a_1 a_2 \cos\left(\frac{\omega t}{2} + \gamma_1\right) + \dots \\ u_1^2 &\approx a_1^2 \cos(2\omega_1 t + \gamma_2) + \dots \end{aligned} \quad (1.38)$$

com  $\frac{\omega t}{2} \approx \omega_1 t$  e  $2\omega_1 t \approx \omega t$ .

A seguir, esboçam-se as principais ideias dos métodos da média, balanço harmônico e de Lindsted Poincaré, na busca de soluções analíticas aproximadas de um sistema vibratório de 01 grau de liberdade, que são facilmente estendidos para vários graus de liberdade. O método de múltiplas escalas foi discutido em Balthazar et al. (2020, Volume 1).

## 1.7 Método da média

O método da média é vantajoso na análise de sistemas fracamente não lineares. Este método foi desenvolvido por Krylov e Bogoliubov, e é aplicado em sistemas da forma

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon f(u, \dot{u}) \quad (1.39)$$

onde  $\varepsilon$  é um pequeno parâmetro, os pontos indicam derivadas com relação ao tempo adimensional  $t$ ,  $u$  é a variável dependente adimensional e a função  $f(u, \dot{u})$  é contínua. Quando  $\varepsilon = 0$ , a solução de 1.39 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} u &= a \cos(\omega_0 t + \beta) \\ \dot{u} &= -\omega_0 a \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (1.40)$$

sendo  $\phi = \omega_0 t + \beta$  onde  $a$  e  $\beta$  são constantes, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:  $u = a \cos(\varphi)$ . Quando  $\varepsilon \neq 0$ , a solução da equação, em tela, pode ser expressa da forma  $u = a \cos(\varphi)$ , mas  $a$  e  $\beta$  são agora funções do tempo  $t$ , assim não sendo mais constantes. Logo, ela pode ser vista como uma variável dependente  $u(t)$  e novas variáveis independentes  $a(t)$  e  $\beta(t)$ .

Desde que estas equações constituem duas equações com três variáveis  $u$ ,  $a$  e  $\beta$ , é possível impor uma condição adicional.

Para se determinar as equações que descrevem  $a(t)$  e  $\beta(t)$ , nós diferenciamos com relação ao tempo  $t$  e assim se obtém que

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\omega_0 a \sin(\varphi) + \dot{a} \cos(\varphi) - a \dot{\beta} \sin(\varphi) \\ \dot{a} \cos(\varphi) - a \dot{\beta} \sin(\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Diferenciando com relação ao tempo  $t$ , tem-se que:

$$\ddot{u} = \omega_0^2 a \cos(\phi) - \omega_0 \dot{a} \sin(\phi) - \omega_0 a \dot{\beta} \cos(\phi) \quad (1.42)$$

Substituindo-se para  $\dot{u}$  e  $\ddot{u}$  na equação (1.39) obtém-se

$$\omega_0 \dot{a} \sin(\phi) + \omega_0 a \dot{\beta} \cos(\phi) = -\varepsilon f(a \cos(\phi), -\omega_0 a \sin(\phi)) \quad (1.43)$$

Logo,  $\dot{a}$  e  $\dot{\beta}$  tornam-se

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin(\phi) f(a \cos(\phi), -\omega_0 a \sin(\phi)) \\ \dot{\beta} &= -\frac{\varepsilon}{\omega_0 a} \cos(\phi) f(a \cos(\phi), -\omega_0 a \sin(\phi)) \end{aligned} \quad (1.44)$$

Para  $\varepsilon$  pequenos, tem-se que  $\dot{a}$  e  $\dot{\beta}$  são pequenos, portanto,  $a$  e  $\beta$  variam muito mais devagar com relação ao tempo  $t$  do que  $\phi = \omega_0 t + \beta$ .

Em outras palavras,  $a$  e  $\beta$  variam durante o período de oscilação  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  de  $\sin(\phi)$  e  $\cos(\phi)$ . Isto permite calcular a média da variação de  $\phi$ . Com a média dessas equações sobre o período  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  e considerando  $a$ ,  $\beta$ ,  $\dot{a}$  e  $\dot{\beta}$  serem constantes enquanto calculamos a média, obtém-se as seguintes equações que descrevem a variação de  $a$  e  $\beta$ .

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \pi \sin(\phi) f(a \cos(\phi), -\omega_0 a \sin(\phi)) d\phi \\ \dot{\beta} &= -\frac{\varepsilon}{2a\pi} \int_0^{2\pi} \pi \cos(\phi) f(a \cos(\phi), -\omega_0 a \sin(\phi)) d\phi \end{aligned} \quad (1.45)$$



## 1.8 Método do balanço harmônico

Seja

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin(x) = 0 \quad (1.46)$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} \quad (1.47)$$

logo

$$\dot{x} + \omega_0^2 x - \frac{\omega^2}{6} x^3 = 0 \quad (1.48)$$

ou

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = 0 \quad (1.49)$$

e, admitindo-se que se tenha uma solução que possa ser aproximada por

$$x(t) = C \sin(\omega t), \quad (1.50)$$

tem-se:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{C^2}{8}} \cong \omega_0 \left( 1 - \frac{C^2}{16} \right) \quad (1.51)$$

ou seja,  $\omega(C)$ , onde a frequência pode depender da amplitude. A melhor solução é quando se consideram os harmônicos de ordem superior:

$$x(t) = C \sin(\omega t) + \sum_{n=2}^m C_n \sin(n\omega t) + D_n \cos(n\omega t) \quad (1.52)$$

## 1.9 Método de Lindstedt-Poincaré

Seja

$$\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (1.53)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência natural sendo sistema não perturbado  $\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , cujo período de oscilações, é  $T = 2\pi/\omega_0$ . Nota-se que o termo não linear afeta não apenas a amplitude, mas também o período do sistema (Nayfeh e Mook, 1969). Procuram-se soluções da forma

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (1.54)$$

e

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots \quad (1.55)$$

que serão determinados impondo-se a condição de que todos os  $x_i(t)$  sejam periódicos. Elas são resolvidos recursivamente, mas com a tarefa adicional de determinar as quantidades  $\omega_i$ , o que é realizado exigindo que cada função  $x_i$  seja periódica e de período  $2\pi$ . As condições de periodicidade têm a forma:  $x_i(\tau + 2\pi) = x_i(t)$ . Para garantir que  $x_i$  esteja livre de termos seculares, deve-se evitar ressonâncias, o que requer que os lados direitos de não contenham termos harmônicos em frequência unitária. Para maiores detalhes sobre termos seculares, ver Balthazar et al. (2020, Volume 1).

Em vez de trabalhar com a frequência fundamental como uma quantidade desconhecida, é mais conveniente alterar a escala de tempo, mudando a variável independente, onde o período de oscilação na nova variável seja igual a  $2\pi$ .

Logo, considerando:

$$\begin{aligned} \tau &= \omega t \\ \frac{d}{dt} &= \omega \frac{d}{d\tau} \end{aligned} \quad (1.56)$$

obtem-se no caso da equação de Duffing:

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}) &= f(x, \omega x') \\ f(x) &= -\omega_0^2 x^3 \end{aligned} \quad (1.57)$$

Expandindo-se  $f(x, \omega x')$  em série de potências em  $\varepsilon$  e levando-se em conta as equações (1.53), tem-se:

$$f(x, \omega x') = f(x_0, \omega x'_0) + \varepsilon[\dots] + \varepsilon^2[\dots] + \dots \quad (1.58)$$

em que:

$$[\dots] = x_1 \frac{\partial f(x_0, \omega x'_0)}{\partial x} + x'_1 \frac{\partial f(x_0, \omega x'_0)}{\partial x'} + \omega_1 \frac{\partial f(x_0, \omega x'_0)}{\partial \omega} \quad (1.59)$$

e levando-se em conta que

$$\left. \frac{\partial f(x, \omega x')}{\partial x} \right|_{(x = x_0, x' = x'_0, \omega = \omega_0)} \quad (1.60)$$

Obtêm-se as equações nas diversas ordens de  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 &= 0 & (1.61) \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= -x_0^3 - 2\frac{\omega_1}{\omega_0}\ddot{x}_0 \\ \ddot{x}_2 + x_2 &= -3\omega_0^2x_1 - \frac{1}{\omega_0^2}(2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2)\ddot{x}_0 - 2\frac{\omega_1}{\omega_0}\ddot{x}_1 \\ x_i(\tau + 2\pi) &= x_i(t) \end{aligned}$$

As soluções geradoras  $x_0$  satisfazem a condição de periodicidade automaticamente sem perda de generalidade; assume-se que equivale a assumir que a velocidade inicial é zero. Isso pode ser feito incluindo um ângulo de fase, um procedimento permissível em virtude do fato de que o sistema é autônomo.

Considerando-se:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \quad (1.62)$$

tem-se

$$x_0 = A\cos(\tau) \quad (1.63)$$

e, levando-a em  $x_1$ , tem-se que

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{A}{\omega_0}\right)(8\omega_1 - 3\omega_0A^2)\cos(\tau) - \frac{1}{4}A^2\cos(3\tau) \quad (1.64)$$

É fácil ver que o primeiro termo à direita pode ser levado à ressonância e, portanto, ao termo secular. Para se suprimir tais termos, usam-se as condições de periodicidade para  $i = 14$  em  $x_i(\tau + 2\pi) = x_i(t)$ .

O que equivale a simplesmente definir o coeficiente de  $\cos(\tau)$  igual a zero, obtendo-se

$$\omega_1 = \frac{3}{8}\omega_0A^2 \quad (1.65)$$

Além disso, considerando-se a condição inicial correspondente a  $i = 1$  na solução particular de  $x'_i(0) = 0$ , tem-se

$$x_1 = \frac{1}{32}A^3\cos(3\tau) \quad (1.66)$$

e

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + x_2 &= \frac{1}{128}\frac{A}{\omega_0}(256\omega_2 + 15\omega_0A^4)\cos(\tau) + & (1.67) \\ &\frac{21}{128}A^5\cos(3\tau) - \frac{3}{128}A^5\cos(5\tau) \end{aligned}$$

e, eliminando-se termos seculares, obtém-se

$$\omega_2 = -\frac{15}{256}\omega_0 A^4 \quad (1.68)$$

e

$$x_2 = -\frac{21}{1024}A^5 \cos(3\tau) + \frac{1}{1024}A^5 \cos(5\tau) \quad (1.69)$$

O procedimento para se obter as aproximações de ordem superior segue o mesmo padrão. Introduzindo-se os resultados obtidos, pode-se escrever a aproximação de segunda ordem por

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) + \frac{A^3}{32} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{32}\right) \cos[3(\omega t + \phi)] + \quad (1.70) \\ &\quad \frac{\varepsilon^2 A^2}{1024} \cos[5(\omega t + \phi)] \\ \omega &= \omega_0 \left(1 + \frac{\varepsilon 3A^2}{8} - \frac{\varepsilon^2 A^4 15}{256}\right) \end{aligned}$$

O efeito da não linearidade da mola se reflete tanto na amplitude quanto no período do movimento. Para um determinado conjunto de condições iniciais  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$ , os valores de  $A$ ,  $\phi$  podem ser obtidos das expressões logo acima, i.e., tendo  $A$ ,  $\phi$  a aproximação de segunda ordem para a frequência fundamental  $\omega$  é obtida facilmente.

Definindo um tempo inicial  $t_0$  de modo que as condições iniciais tenham a forma conveniente:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= A_0 \dot{x}(t_0) = 0 \quad (1.71) \\ x(t_0) &= A + \frac{\varepsilon_1 A^3}{32} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{32}\right) + \frac{\varepsilon^2 A^5}{1024} = A_0 \end{aligned}$$

e tomando-se

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots \quad (1.72)$$

tem-se

$$A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots + \frac{\varepsilon A^3}{32} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{32}\right) + \frac{\varepsilon^2 A^5}{1024} = A_0 \quad (1.73)$$

O ângulo de fase está relacionado à condição inicial tempo  $t_0$  e à frequência fundamental  $\omega$ , por:

$$\omega t_0 + \phi = 0 \Rightarrow \phi = -\omega t_0 \quad (1.74)$$

ou

$$\phi = \omega_0 t_0 \left( 1 + \frac{3A^2 \varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon^2 A^4 15}{256} \right). \quad (1.75)$$

Se  $\dot{x}(0) = 0$ , o tempo inicial  $t_0$  é igual a zero, assim como o ângulo de fase. Extensões a outros problemas são facilmente efetuadas, tomando-se por exemplo:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \left[ -\omega^2(\alpha x + \beta x^3) + F \cos(\omega t) \right] \quad (1.76)$$

pode-se explorar a possibilidade de que essa equação tenha uma solução periódica de período  $T = 2\pi/\omega$ . É conveniente alterar a escala de tempo para que o período de oscilações seja de  $2\pi$ . Para este fim, apresentamos a substituição

$$\begin{aligned} \omega t &= \tau + \phi \\ \frac{d}{dt} &= \omega \frac{d}{d\tau}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

obtendo-se

$$\omega^2 \ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \left[ -\omega^2(\alpha x + \beta x^3) + F \cos(\tau + \phi) \right] \quad (1.78)$$

tomando-se

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots \\ \phi &= \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \dots, \\ x_i(\tau + 2\pi) &= x_i(\tau), \\ x_i(0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.79)$$

obtém-se (as equações (5.35) do volume 1 (Balthazar et al., 2020))

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{3\varepsilon\beta A_0^2}{4} \right) - \frac{\varepsilon F}{A_0} \quad (1.80)$$

Procedimento semelhante é adotado para o caso amortecido

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(-\omega^2 \alpha x - \omega^2 \beta x^3 - c\dot{x} + F \cos(\omega t)) \quad (1.81)$$

Outros métodos podem ser encontrados na literatura, por exemplo, o método da homotopia (ver He, 1999).

## 1.10 Sobre a teoria de Takens

Quando se pretende estudar em detalhe o comportamento de um sistema vibratório, em muitas situações apenas se tem acesso à evolução no tempo de certas medições sobre as variáveis que compõem esse sistema.

Se considerarmos que as observações destas medições podem ser representadas por uma série temporal e que esta representa a trajetória de um dado sistema dinâmico, torna-se então importante compreender que propriedades do sistema global conseguimos obter através da análise da série temporal.

Uma das técnicas de análise de séries temporais que tem como objetivo obter informações sobre variáveis não observáveis é a chamada reconstrução do espaço de fases, que tem por base princípios provados por Takens – o teorema do mergulho de Takens (1981).

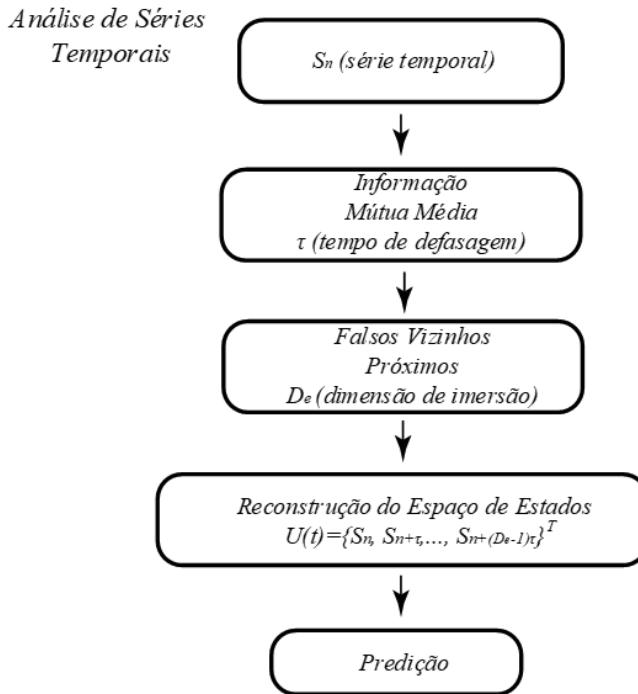
Esse teorema permite reconstruir um espaço de fases  $m$ -dimensional similar ao espaço de fases original a partir de medições de uma única variável, e esse espaço reconstruído apresenta uma suave variação de coordenadas em relação ao espaço original (preservando os invariantes geométricos do sistema, tais como os expoentes de Lyapunov).

Portanto, uma série temporal escalar,  $S_n$ , pode ser usada para construir um vetor de séries temporais, que é equivalente à dinâmica original do sistema, sob um ponto de vista topológico. A reconstrução do espaço de estado precisa formar um sistema de coordenadas para capturar a estrutura das órbitas no espaço de estado, que pode ser feito usando variáveis defasadas  $S_{n\tau}$ , onde  $\tau$  é uma defasagem no tempo. Então, isto é possível usando uma coleção de defasagens no tempo para criar um vetor no espaço de dimensão:

$$U(t) = \{S_n, S_{n+\tau}, \dots, S_{n+(D_e-1)\tau}\} \quad (1.82)$$

Essa abordagem está associada com a determinação dos parâmetros de defasagem: tempo de defasagem,  $\tau$ , e dimensão de imersão,  $D_e$ . O trabalho de Takens considera uma série infinita e sem ruídos. Sabe-se que no mundo real não existem séries infinitas e que particularmente as séries de são também constituídas de ruído. Para o cálculo da Dimensão da Imersão precisam ser utilizadas duas técnicas originadas no âmbito da dinâmica não linear e da teoria do caos: Dimensão da Correlação, e Falsos Vizinhos Mais Próximos. Já para a determinação do Passo de Reconstrução, a metodologia utilizada é conhecida como método da informação mútua. Visando aproximar as hipóteses dos métodos para assim realizar uma correta aplicação do teorema de Takens, pode ser aplicada a teoria de Wavelets (Newland, 1994) nas séries temporais antes do processo de reconstrução. Este livro não tratará desse tema, apenas menciona-se a título de competitividade do assunto.

Para maiores informações sobre esse assunto, citam-se os textos Abarbanel (1966), Nayfeh e Balachandran (2000), Westin et al. (2020), Ferrara e do Prado (1994), sem desmerecer outros. A Figura 1.6 ilustra o procedimento.



**Figura 1.6** Esquema do método de Takens.

## Referências

- [1] Balthazar et al. *Sistemas Dinâmicos e Mecatrônicos – Volume 1. Teoria e aplicação de controle*. [S.l.], 2021.
- [2] Brasil, R.M.L.R.F. *O Fenômeno de Localização de Modos em Dinâmica e Estabilidade de Estruturas Moduladas de Comportamento Linear e Não-Linear*. Tese de livre Docência. Escola Politécnica da USP, 1995.
- [3] Brasil, R.M.L.R.F.; Balthazar, J. M.; Gois, W. *Métodos Numéricos e Computacionais na Prática de Engenharias e Ciências*. Editora Blucher, 2015.
- [4] Caig Jr., R. *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*. John Wiley and Sons, 1981.

- [5] Madenci, E. Oterkus E. *Peridynamic Theory and Its Applications*. New York, Springer, 2014.
- [6] De Oliveira Almeida, P.F. *Localização de Modos de Vibrar em Estruturas quase Periódicas: Modelos Matemáticos e Investigações Experimentais*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola Politécnica da USP, 2000.
- [7] Pierre, C.; Dowell, E.H. Localization of vibrations by structural irregularity. *Journal of Sound and Vibration*, 114, 1987, 549-564.
- [8] Vakakis, A.F. Analytic study of linear and nonlinear mode localization. *Journal of Applied Mechanics*, 60, 1993, 555-557.
- [9] Nayfeh, A.H.; Mook, D.T. *Nonlinear Oscillations*. Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 1979.
- [10] Nayfeh, A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley. 1981.
- [11] Nayfeh, A.H.; Balachandran, B. *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods*. Wiley, 2000
- [12] Nayfeh, A.H. *Nonlinear Interactions: Analytical, Computational, and Experimental Methods*. Wiley VCH., 2000.
- [13] Inman, D. *Engineering Vibrations*. Pearson International Edition, 2008.
- [14] Alişverişçi, G.F. *The Nonlinear Behavior of Vibrational Conveyers with Single-Mass Crank-and-Rod Exciters*. 13th International Conference on Dynamical Systems – Theory and Applications, December 7-10, 2015. Lodz, Poland. Dynamical Systems – Mathematical and Numerical Approaches. p. 31-40.
- [15] Alişverişçi, G.F.; Bayıroğlu, H.; Balthazar, J.M.; Felix, J.L.P.; da Fonseca Brasil, R.M.L.R. On Dynamic Behavior of a Nonideal Torsional Machine Suspension Structure. In: Awrejcewicz J. (eds.). *Dynamical Systems: Modelling*. DSTA 2015. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 181. Springer, Cham, 2016.
- [16] Hunt, G.W.; Williams, K.A.J.; Cowell, R.G. Hidden Symmetry Concepts in the Elastic Buckling of Axially Loaded Cylinders. *International Journal of Solids and Structures*, 22, 1986, 1501-1515.
- [17] Rand, R.H. *Topics in Nonlinear Dynamics with Computer Algebra (Computation in Education, Vol 1)*. 1st Edition. CRC Press, 1994.
- [18] Rosenberg, R. M. On Nonlinear Vibrations of Systems with many degrees-of-freedom. *Adv. Appl. Mech.*, 9, 1966, 155-242.
- [19] Shaw, S.W.; Pierre, C. Nonlinear Normal Modes and Invariant Manifold. *Journal of Sound and Vibration*, 150, 1991, 170-173.



- [20] Sinclair, I. R. *Sensors and Transducers. 3. ed.* Woburn: Newnes, 1967.
- [21] Vakakis, A.F. *Analysis and Identification of linear and Nonlinear Normal Modes in Vibrating Systems.* Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, USA, 1991.
- [22] Vakakis, A.F., Gendelman, O.V., Bergman, L.A., MacFarland, D.M., Kerscher, G., Lee Y.S. *Nonlinear target energy transfer in mechanical and structural systems.* Springer Verlag Holland, 2008.
- [23] Vakakis, A.F., Rand, R.H. Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom nonlinear system – I. Low energies, *Int. J. Nonlinear Mech*, 27(5), 1992a, 861–874.
- [24] Vakakis, A.F., Rand, R.H., Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom nonlinear system – II. High energies, *Int. J. Nonlinear Mech*, 27(5), 1991b, 875–888.
- [25] Kerschen, G., Peeters, M., Golinval, J.C., Vakakis, A.F. *Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist*, *Mech. Syst. Sign. Proc.*, 2008.
- [26] Jiang, D., Pierre, C., Shaw, S. W. The Construction of Non-Linear Normal Modes for Systems with Internal Resonance. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 40, 2005, 729-746.
- [27] Konstantin V. Avramov, Yuri V. Mikhlin. Review of Applications of Nonlinear Normal Modes for Vibrating Mechanical Systems. *Appl. Mech. Rev. Mar 2013*, 65(2): 020801 (20 pages). Paper No: AMR-12-1010, 2013.
- [28] Soares, M.E.S., Mazzilli, C.E.N. Nonlinear normal modes of planar frames discretised by the finite element method. *Computers and Structures*. 77(5), 21 July 2000, 485-493.
- [29] He, J. H. (1999). Homotopy perturbation technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 178(3-4), 257-262.
- [30] Abarbanel H.D.I., *Analysis of Observed Chaotic Data*, Ed. Wiley, New York, 1996, ISBN 978-1-4612-0763-4
- [31] Westin, M.F., Balthazar, J.M., da Silva, R.G.A. *On Comparison Between 01 Test for Chaos and Attractor Reconstruction of an Aeroelastic System.* *J. Vib. Eng. Technol*, 2020.
- [32] Hegger, R.; Kantz, H. Schreiber, T. *Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package.* *Chaos* 9:413-435, 1999.

[33] Fiedler-Ferrara, N.; do Prado C.P.C. *Caos - Uma Introdução*. Blucher, 1994, ISBN:978852120058

[34] Newland, D. *Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*, Longman Scientific and Technical, 1994.

**NO VOLUME 2 DESTE ABRANGENTE COMPÊNDIO DE DINÂMICA E CONTROLE EM ENGENHARIA, OS ENGENHEIROS, PESQUISADORES E ESTUDANTES, ENCONTRARÃO UMA EXPLORAÇÃO PROFUNDA E PRÁTICA DE DIVERSOS TÓPICOS FUNDAMENTAIS E AVANÇADOS. ESTE VOLUME ESTENDE AINDA MAIS OS HORIZONTES DO CONHECIMENTO, ABORDANDO QUESTÕES CRÍTICAS NA ANÁLISE E CONTROLE DE SISTEMAS DINÂMICOS, OFERECE UMA ABORDAGEM ÚNICA, EQUILIBRANDO TEORIA E APLICAÇÃO PRÁTICA, SENDO UMA FERRAMENTA VALIOSA PARA QUEM BUSCA APRIMORAR SUAS HABILIDADES E COMPREENSÃO. ENTRE OS TEMAS DESTACADOS ESTÃO:**

Exploração aprofundada das técnicas de análise linear e não linear aplicadas a sistemas estruturais vibratórios, fornecendo insights cruciais para o projeto e otimização de estruturas resilientes. Abordagem prática para identificação eficiente de sistemas dinâmicos, utilizando métodos avançados baseados em subespaços. Uma introdução abrangente aos princípios fundamentais e aplicações práticas do cálculo fracionário na dinâmica de sistemas complexos. Exploração da abordagem geométrica para sistemas dinâmicos, com ênfase especial na linearização por realimentação dinâmica zero para melhor controle. Análise e implementação de estratégias de controle passivo para redução de vibrações usando neutralizadores viscoelásticos. Utilização de modelagem dinâmica para monitoramento avançado e diagnóstico de falhas em motores de indução trifásicos. Exploração de materiais inteligentes para o controle eficaz de vibrações em estruturas flexíveis durante movimentos de rastreamento. Análise do espaço de parâmetros em sistemas dinâmicos, proporcionando uma visão abrangente das relações entre diferentes variáveis. Abordagem prática para o controle eficiente de multicópteros, empregando técnicas avançadas de modos deslizantes. Aplicação de modelos avançados para estruturas unidimensionais, considerando tanto parâmetros distribuídos quanto concentrados. Investigação aprofundada sobre o impacto do acoplamento piezoelétrico em dispositivos de captação de energia (*energy harvesting*), explorando oportunidades e desafios.



[www.blucher.com.br](http://www.blucher.com.br)

**Blucher**



Clique aqui e:

[VEJA NA LOJA](#)

## Sistemas dinâmicos e mecatrônicos - Vol. 2

Modelagem, análise e controle avançado de sistemas não lineares

---

José Manoel Balthazar

ISBN: 9788521224815

Páginas: 519

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2024

---