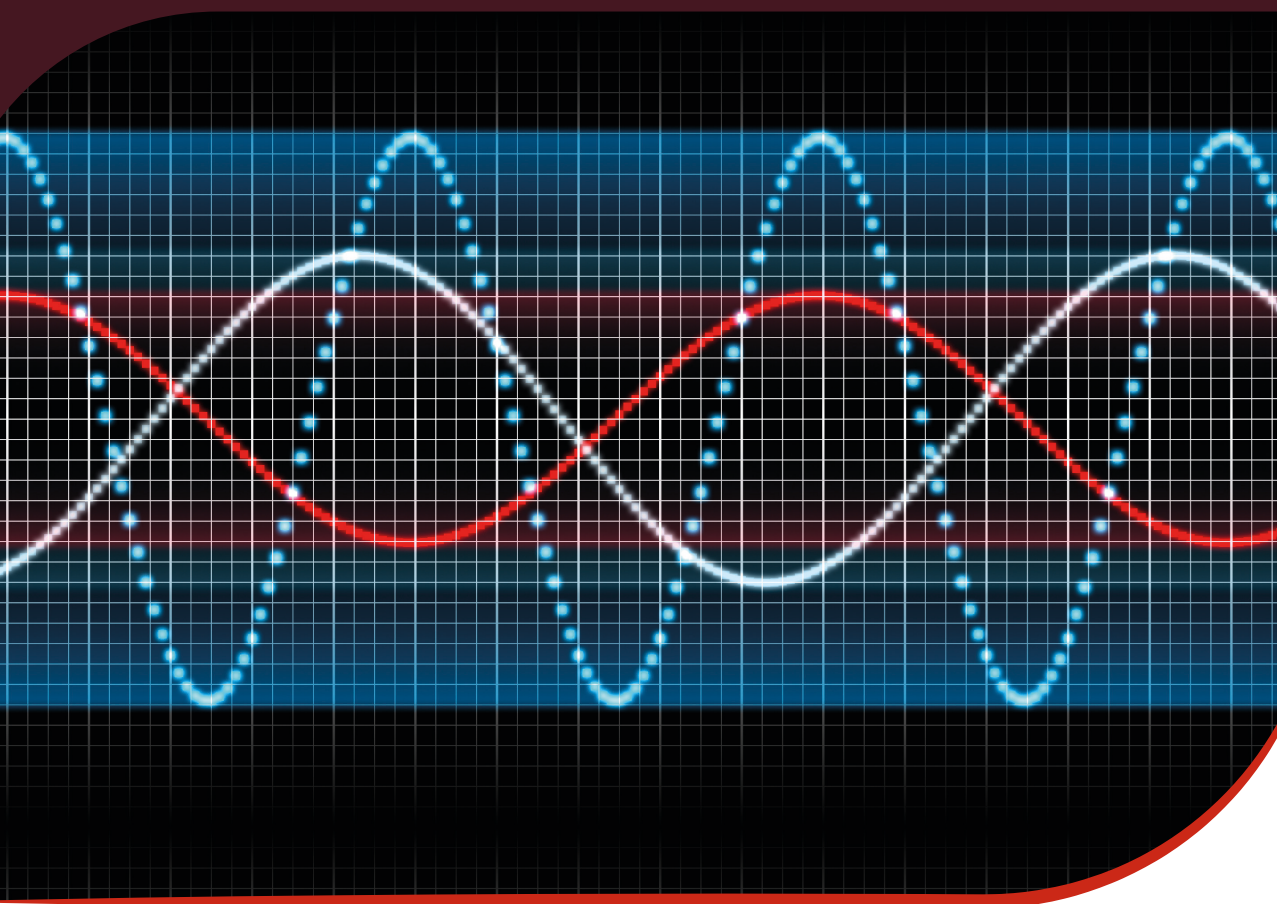


MAGNO ENRIQUE MENDOZA MEZA

# SISTEMAS DE CONTROLE COM PYTHON

Resposta em frequência



**Blucher**

Magno Enrique Mendoza Meza

**SISTEMAS DE CONTROLE  
COM PYTHON**

Resposta em Frequência

*Sistemas de Controle com Python: Resposta em frequência*

© 2023 Magno Enrique Mendoza Meza

Editora Edgard Blücher Ltda.

*Publisher* Edgard Blücher

*Editor* Eduardo Blücher

*Coordenação editorial* Jonatas Eliakim

*Produção editorial* Alessandra de Proença

*Revisão de texto* Gabriela Castro

*Diagramação* Magno Enrique Mendoza Meza

*Capa* Laércio Flenic

---

# Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar  
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil  
Tel.: 55 11 3078-5366

**contato@blucher.com.br**

**www.blucher.com.br**

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed.  
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,  
Academia Brasileira de Letras, julho de 2021.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer  
meios sem autorização escrita da editora.

---

Todos os direitos reservados pela Editora  
Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

---

Meza, Magno Enrique Mendoza

Sistemas de controle com Python : resposta em frequência /  
Magno Enrique Mendoza Meza. – São Paulo : Blucher, 2023.  
498 p.

Bibliografia

ISBN 978-85-212-2112-8 (impresso)

ISBN 978-65-5506-265-6 (eletrônico)

1. Engenharia de controle 2. Sistemas de controle 3. Modelagem  
matemática 4. Python (Linguagem de programação de computa-  
dor) I. Título

21-4340

CDD 629.8

---

Índice para catálogo sistemático:

1. Engenharia de controle

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
1.1	Modelagem matemática de sistemas mecânicos . . . . .	16
1.2	Modelagem matemática de sistemas elétricos . . . . .	30
1.3	Revisão dos números complexos . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Transformada de Laplace</b>	<b>53</b>
2.1	Definições . . . . .	53
2.2	Propriedades e teoremas da transformada de Laplace . . . . .	58
2.3	Transformada inversa de Laplace . . . . .	62
2.4	Diagrama de blocos . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Resposta em frequência</b>	<b>71</b>
3.1	Função de transferência . . . . .	71
3.2	Função de transferência com retardo de transporte . . . . .	73
3.3	Resposta em frequência . . . . .	75
3.4	Diagrama polar . . . . .	80
3.5	Diagrama de Bode . . . . .	92
3.5.1	Fator ganho . . . . .	94
3.5.2	Fator diferencial . . . . .	94
3.5.3	Fator integral . . . . .	95
3.5.4	Fator zero real . . . . .	95
3.5.5	Fator polo real . . . . .	97

3.5.6	Fator zeros complexos . . . . .	98
3.5.7	Fator polos complexos . . . . .	100
3.6	Aproximação assintótica empírica de funções de transferência	114
3.6.1	Sistema tipo 0 . . . . .	115
3.6.2	Sistema tipo 1 . . . . .	117
3.6.3	Sistema tipo 2 . . . . .	120
3.7	Procedimento para estimar empiricamente funções de transferência . . . . .	123
3.8	Carta de Nichols . . . . .	131
3.9	Margens de estabilidade . . . . .	134
3.10	Relação entre a resposta em frequência e a resposta transitória ao degrau de um sistema padrão de segunda ordem . . . . .	137
3.11	Crítério de estabilidade de Nyquist . . . . .	144
3.12	Análise de estabilidade no domínio da frequência . . . . .	149
3.12.1	Análise de estabilidade de $G(s)$ sem polos ou zeros no eixo imaginário . . . . .	149
3.12.2	Análise de estabilidade de $G(s)$ com polos ou zeros no eixo imaginário . . . . .	170
<b>4</b>	<b>Projeto na resposta em frequência</b>	<b>187</b>
4.1	Compensador de ganho . . . . .	190
4.2	Compensador por avanço de fase . . . . .	198
4.2.1	Procedimento de projeto compensador por avanço: método tentativa-e-erro . . . . .	209
4.2.2	Procedimento de projeto compensador por avanço: método analítico . . . . .	247
4.3	Compensador por atraso de fase . . . . .	278
4.3.1	Procedimento de projeto compensador por atraso: método tentativa-e-erro . . . . .	281

4.3.2	Procedimento de projeto compensador por atraso de fase: método analítico . . . . .	319
4.4	Compensador por atraso-avanço de fase . . . . .	347
4.4.1	Procedimento de projeto compensador por atraso-avanço de fase: método tentativa-e-erro . . . . .	348
4.4.2	Procedimento de projeto compensador por atraso-avanço de fase: método analítico . . . . .	379
4.4.3	Procedimento de projeto compensador por atraso-avanço de fase: método Ogata . . . . .	408
4.5	Compensadores da família PID: método analítico . . . . .	433
4.5.1	Controlador proporcional . . . . .	434
4.5.2	Controlador proporcional-integral . . . . .	434
4.5.3	Controlador proporcional-integral-diferencial . . . . .	441
<b>A</b>	<b>Entendendo os códigos em Python utilizados</b>	<b>457</b>
	<b>Referências</b>	<b>471</b>
	<b>Lista de figuras</b>	<b>473</b>
	<b>Lista de tabelas</b>	<b>487</b>
	<b>Índice remissivo</b>	<b>490</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A modelagem matemática pode ser entendida como a atividade de descrever matematicamente sistemas reais em diferentes áreas do conhecimento, como física, química, biologia, ecologia, microbiologia, economia, ciências sociais, engenharias etc.

Essa descrição matemática de um sistema pode ser via autômatos celulares ou via equações diferenciais ordinárias ou parciais. As equações diferenciais ordinárias são as mais utilizadas para modelar sistemas reais.

Um conjunto de equações que representa alguma característica de um sistema é denominado modelo matemático.

O tipo de procedimento de modelagem pode ser classificado como:

1. Caixa preta, Identificação, Modelagem empírica: quando não há conhecimento sobre o sistema.
2. Caixa branca ou Modelagem pelo conhecimento ou Modelagem fenomenológica ou conceitual: quando há conhecimento sobre o sistema ou são utilizadas leis físicas conhecidas.

Os modelos matemáticos (veja Figura 1.1) podem ser classificados de acordo com o tipo de equação utilizado na sua formulação:

1. Estático ou Dinâmico.

- (a) Estático: o modelo utilizado é um sistema de equações algébricas.
  - (b) Dinâmico: o modelo utilizado é um sistema de equações diferenciais ou diferenças.
2. Linear ou Não linear.
- (a) Linear: o modelo satisfaz o princípio da superposição.
  - (b) Não linear: não é possível de verificar o princípio de superposição.
3. Uma entrada - uma saída ou Múltiplas entradas - múltiplas saídas (SISO - MIMO).
- (a) Uma entrada - uma saída (SISO): o modelo apresenta uma variável de entrada e uma variável de saída.
  - (b) Múltiplas entradas - múltiplas saídas (MIMO): o modelo apresenta dois ou mais sinais de entrada e/ou dois ou mais sinais de saída.
4. Invariante no tempo ou Variante no tempo.
- (a) Invariante no tempo: os parâmetros dos componentes do sistema não variam com o tempo.
  - (b) Variante no tempo: os parâmetros dos componentes do sistema variam com o tempo.
5. Tempo contínuo ou Tempo discreto.
- (a) Tempo contínuo: os sinais de entrada e de saída são funções reais da variável tempo.
  - (b) Tempo discreto: os sinais de entrada e de saída são definidos em instantes determinados de tempo.
6. Determinístico ou Estocástico.



- (a) Determinístico: a repetição da entrada causará sempre a mesma saída no modelo sob as mesmas condições.
- (b) Estocástico: a saída não é certa no modelo sob uma dada entrada e deve ser expressa em termos probabilísticos.

## 7. Parâmetros concentrados ou Parâmetros distribuídos.

- (a) Parâmetros concentrados: os parâmetros dos componentes independem da posição no espaço.
- (b) Parâmetros distribuídos: os parâmetros de pelo menos um dos componentes dependem da posição no espaço.

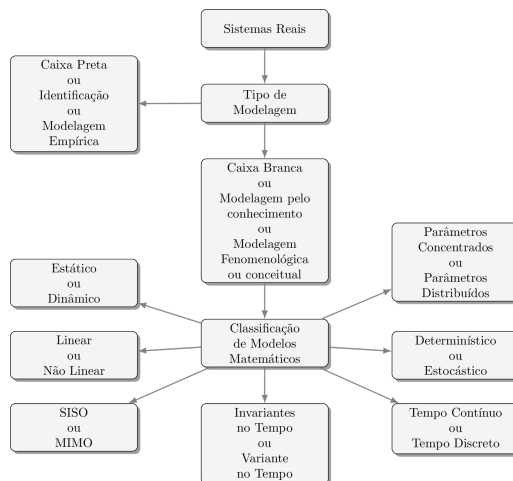


Figura 1.1: Classificação da modelagem e dos modelos.

Neste livro, estudaremos os sistemas conforme observado na Figura 1.2.

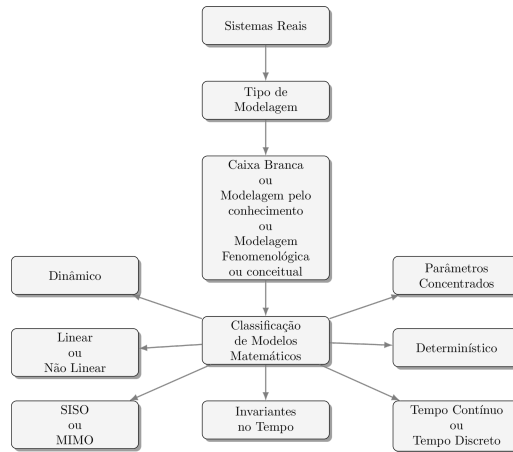


Figura 1.2: Classificação da modelagem e dos modelos estudados neste livro.

## 1.1 Modelagem matemática de sistemas mecânicos

Os sistemas mecânicos podem ser modelados a partir de elementos mecânicos simples, como mostra a Tabela 1.1.

Os sistemas mecânicos rotacionais podem ser modelados a partir de elementos mecânicos rotacionais simples, como pode ser observado na Tabela 1.2.

Para sistemas mecânicos, são utilizados a segunda lei de Newton, para obter o modelo, e o conceito de Lagrange. A segunda lei de Newton pode ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^m \vec{F}_i = m\vec{a},$$

em que  $m$  é a massa,  $\vec{a}$  é a aceleração da massa  $m$  e  $\vec{F}_i$  são as forças atuantes sobre a massa  $m$ .

**Exemplo 1.1.** Considere o sistema massa-mola conforme mostrado na Figura 1.3. Realize a modelagem matemática do sistema que está em movimento livre.

Tabela 1.1: Sistemas mecânicos de translação.

Massa translacional		
Armazenamento indutivo	Equação	$F = m\ddot{x}$ $F = mv_1$
	Energia	$T = \frac{1}{2}mv_1^2$
Mola translacional		
Armazenamento indutivo	Equação	$F = kx_{12}$ $v_{12} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$
	Energia	$V = \frac{1}{2}kx_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$
Amortecedor translacional		
Dissipador de energia	Equação	$F = bv_{12}$
	Energia	$D = \frac{b}{2}v_{12}^2$

**Solução 1.1.** Na Figura 1.3, considere que a primeira mola livre tem um comprimento  $l$  e não possui peso; sob essas condições, não há forças agindo na mola. Na imagem em que a massa  $m$  foi colocada no extremo da mola, a força restaurativa da mola entra em equilíbrio com o peso da massa  $m$ ; essa é a posição de equilíbrio. Isto quer dizer que:

$$ks = mg.$$

Tabela 1.2: Sistemas mecânicos de rotação.

Massa rotacional		
Armazenamento capacitivo	Equação	$\tau = J \frac{d\omega_1}{dt}$
	Energia	$T = \frac{1}{2} J \omega_1^2$
Mola rotacional		
Armazenamento indutivo	Equação	$\tau = k\theta_{12}$ $\frac{d\tau}{dt} = k\omega_{12}$
	Energia	$T = \frac{1}{2} k\theta_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{k}$
Amortecedor rotacional		
Dissipador de energia	Equação	$\tau = b\omega_{12}$
	Energia	$D = \frac{b}{2} \omega_{12}^2$

Na imagem, Figura 1.3, na qual a massa foi deslocada y unidades desde o ponto de equilíbrio e logo a massa é liberada, então teremos um movimento harmônico. Conforme a Figura 1.3, considera-se o deslocamento da massa m no sentido positivo para abaixo. Utilizando a segunda lei de Newton, obtemos:

$$m\ddot{y} = \sum_{i=1}^m \vec{F}_i$$

. Como o sistema se encontrava em equilíbrio entre a força peso da massa m e a força restauradora da mola k logo, a única força agindo na massa m

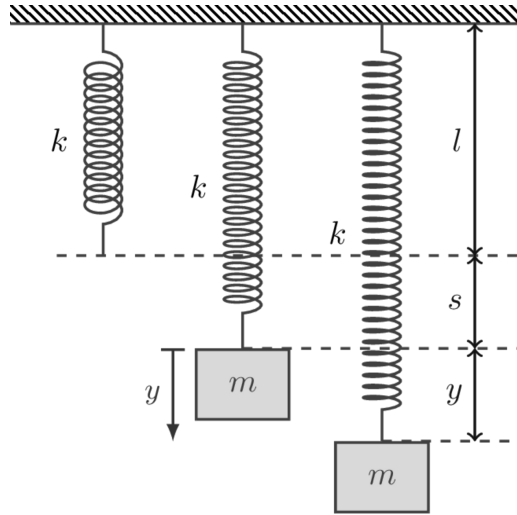


Figura 1.3: Sistema massa-mola.

é a força restauradora da mola devido ao deslocamento  $y$ , do diagrama de corpo livre (Figura 1.4), obtemos:

$$m\ddot{y} = -ky.$$

Assim, a equação governante do movimento é:

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}y. \quad (1.1)$$

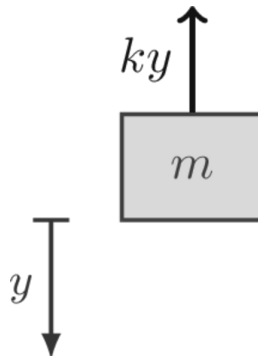


Figura 1.4: Sistema massa-mola.

Consideremos realizar uma simulação desse sistema, no qual  $m = 1$  kg,  $k = 1$  Nm e condição inicial  $(1; 0)$ . A Figura 1.5 mostra o comportamento de um sistema oscilatório com frequência e amplitude constantes, devido à ausência de elementos de amortecimento. O código para a simulação do sistema e para gerar a Figura 1.5 encontra-se na Listagem

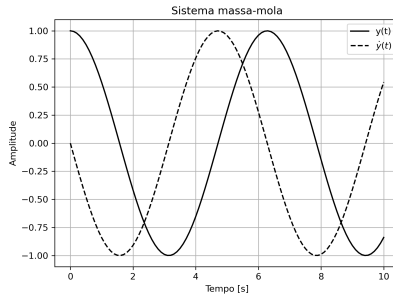


Figura 1.5: Simulação sistema massa-mola para  $m = 1$ ,  $k = 1$  e condição inicial  $(1; 0)$ .

As equações do código são obtidas da seguinte maneira: como o sistema é de segunda ordem, isto é, a equação diferencial ordinária é de ordem 2, escolhemos duas variáveis de estado:

$$x_1 = y \quad (1.2)$$

$$x_2 = \dot{y} \quad (1.3)$$

Com essas duas novas variáveis, transformaremos a equação diferencial de segunda ordem em duas equações diferenciais de primeira ordem. Se derivamos essas variáveis em relação ao tempo, obtemos:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} \quad (1.4)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} \quad (1.5)$$

Da equação 1.4 e da equação 1.3, sabendo que  $\dot{y} = x_2$ , obtemos:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

E  $\ddot{y}$  é obtida da equação governante e da equação 1.1. Isto é, substituindo  $y$  por  $x_1$ , obtemos:

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1$$

Finalmente, o sistema nas novas variáveis de estado é:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1\end{aligned}$$

Essas duas equações diferenciais estão representadas na linha 8 da Listagem



**Exemplo 1.2.** Considere o sistema massa-mola-amortecedor conforme mostrado na Figura 1.6. Realize a modelagem matemática do sistema em movimento livre.

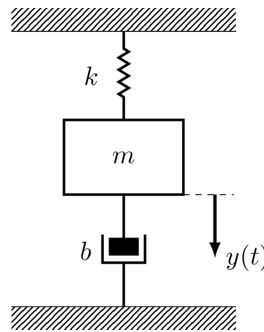


Figura 1.6: Sistema massa-mola-amortecedor.

**Solução 1.2.** O diagrama de corpo livre é mostrado na Figura 1.7. Para obtê-lo, é possível supor que a massa  $m$  foi deslocada  $y$  unidades para abaixo. Utilizando a segunda lei de Newton, obtemos:

$$m\ddot{y} = -ky - b\dot{y}$$

Vamos representar a equação governante  $\ddot{y}$  em variáveis de estado, de modo a resolvê-la numericamente com o Python. Sejam as variáveis de

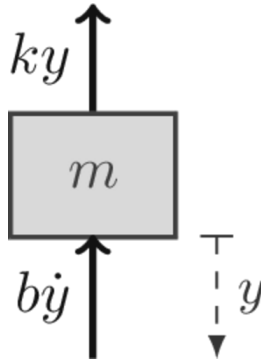


Figura 1.7: Diagrama de corpo livre do sistema massa-mola-amortecedor.

estado:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

O sistema nas novas variáveis de estado é:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2$$

Essas equações podem ser inseridas na definição de equações diferenciais no código da Listagem



Para a simulação, consideremos que  $k = 1 \text{ Nm}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$  e  $b = 1 \text{ Nm/s}$ . A Figura 1.8 mostra a simulação numérica do sistema massa-mola-amortecedor.

A Figura 1.5 mostra o comportamento de um sistema oscilatório, porém a Figura 1.8 mostra o comportamento de um sistema com amortecimento, pois o sistema tem uma oscilação "amortecida" ao longo da evolução do tempo.

Em ambos os exemplos 1.1 e 1.2 a respectiva solução da equação diferencial ordinária original é a primeira variável de estado  $x_1$ , que é igual a  $y(t)$ .



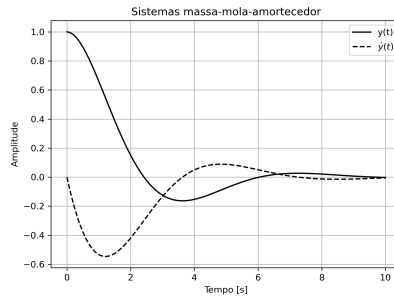


Figura 1.8: Simulação sistema massa-mola-amortecedor para  $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $b = 1$  e condição inicial  $(1; 0)$ .

O código para a simulação do sistema e para gerar a Figura 1.8 encontra-se na Listagem



**Exemplo 1.3.** Considere o sistema mecânico representado na Figura 1.9, na qual os atritos entre as rodas e o chão são desprezíveis. Adote como saídas as posições de deslocamento  $w_1$  e  $w_2$ . Determine as equações governantes do movimento das massas  $m_1$  e  $m_2$ .

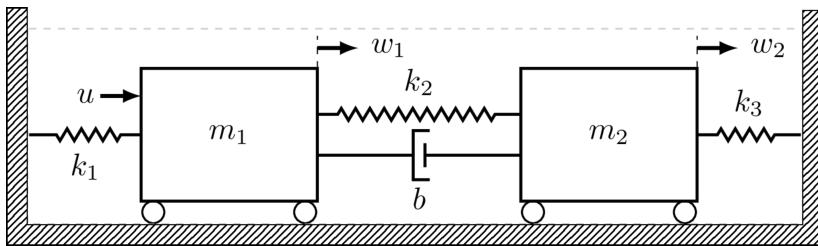


Figura 1.9: Sistema mecânico.

**Solução 1.3.** Iniciamos a solução desenhando os diagramas de corpo livre das massas<sup>1</sup>  $m_1$  e  $m_2$ , como mostrado na Figura 1.10.

<sup>1</sup>Supõe-se que o deslocamento  $w_1$  é um pouquinho maior que o deslocamento  $w_2$ , sendo assim, a mola  $k_1$  está distendida, a mola  $k_2$  e o amortecedor  $b$  estão comprimidos e a mola  $k_3$  está comprimida.

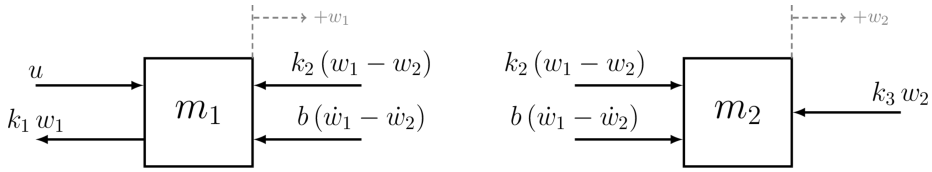


Figura 1.10: Diagramas de corpo livre do sistema mecânico.

Aplicando a segunda lei de Newton nas massas, obtemos:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m_1 \vec{a}_1$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m_2 \vec{a}_2$$

Assim, para a massa  $m_1$ , temos que:

$$m_1 \vec{a}_1 = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i$$

$$m_1 \ddot{w}_1(t) = -k_1 w_1(t) - k_2(w_1(t) - w_2(t)) - b(\dot{w}_1(t) - \dot{w}_2(t)) + u(t)$$

$$m_1 \ddot{w}_1(t) = -b\dot{w}_1(t) - (k_1 + k_2)w_1(t) + b\dot{w}_2(t) + k_2 w_2(t) + u(t)$$

$$\ddot{w}_1(t) = -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} w_1(t) + \frac{k_2}{m_1} w_2(t) + \frac{b}{m_1} \dot{w}_2(t) - \frac{b}{m_1} \dot{w}_1(t) + \frac{1}{m_1} u(t)$$

E para a massa  $m_2$ , temos que:

$$m_2 \vec{a}_2 = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i$$

$$m_2 \ddot{w}_2(t) = -k_3 w_2(t) + k_2(w_1(t) - w_2(t)) + b(\dot{w}_1(t) - \dot{w}_2(t))$$

$$m_2 \ddot{w}_2(t) = b\dot{w}_1(t) - (k_2 + k_3)w_2(t) + b\dot{w}_2(t) + k_2 w_1(t) + u(t)$$

$$\ddot{w}_2(t) = -b\dot{w}_2(t) - (k_2 + k_3)w_2(t) + b\dot{w}_1(t) + k_2 w_1(t)$$

$$\ddot{w}_2(t) = \frac{k_2}{m_2} w_1(t) - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2} w_2(t) - \frac{b}{m_2} \dot{w}_2(t) + \frac{b}{m_2} \dot{w}_1(t)$$

A dinâmica do sistema ou as equações governantes do movimento são:

$$\begin{aligned}\ddot{w}_1(t) &= -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1}w_1(t) + \frac{k_2}{m_1}w_2(t) + \frac{b}{m_1}\dot{w}_2(t) - \frac{b}{m_1}\dot{w}_1(t) + \frac{1}{m_1}u(t) \\ \ddot{w}_2(t) &= \frac{k_2}{m_2}w_1(t) - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2}w_2(t) - \frac{b}{m_2}\dot{w}_2(t) + \frac{b}{m_2}\dot{w}_1(t)\end{aligned}$$

Vamos representar as equações governantes  $\ddot{w}_1$  e  $\ddot{w}_2$  em variáveis de estado, de modo a resolvê-las numericamente com o Python. Sejam as variáveis de estado:

$$\begin{aligned}x_1 &= w_1 \\ x_2 &= w_2 \\ x_3 &= \dot{w}_1 \\ x_4 &= \dot{w}_2\end{aligned}$$

Derivando temporalmente as igualdades anteriores, obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{w}_1 \\ \dot{x}_2 &= \dot{w}_2 \\ \dot{x}_3 &= \ddot{w}_1 \\ \dot{x}_4 &= \ddot{w}_2\end{aligned}$$

Mas sabemos que  $\dot{w}_1 = x_3$ ,  $\dot{w}_2 = x_4$  e  $\ddot{w}_1$  e  $\ddot{w}_2$  são obtidas das equações governantes, substituindo  $w_1$  por  $x_1$ ,  $w_2$  por  $x_2$ ,  $\dot{w}_1$  por  $x_3$  e  $\dot{w}_2$  por  $x_4$ . Assim, obtemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \frac{b}{m_1}x_3 + \frac{b}{m_1}x_4 + \frac{1}{m_1}u \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2}x_2 + \frac{b}{m_2}x_3 - \frac{b}{m_2}x_4 \end{cases}$$

Para a simulação, consideremos que  $k_1 = k_2 = k_3 = 1 \text{ Nm}$ ,  $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ ,  $b = 1 \text{ Nm/s}$ , a condição inicial  $(0, 5; -0, 5; 0; 0)$  e a entrada  $u = 0$ . A Figura 1.11 mostra a simulação numérica do sistema mecânico.

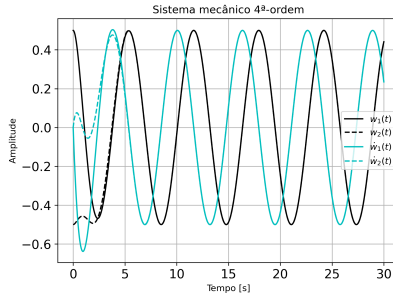



Figura 1.11: Simulação sistema mecânico para  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ ,  $b = 1$  e condição inicial  $(0, 5; -0, 5; 0; 0)$ .

Na Figura 1.11, podemos observar que os deslocamentos  $w_1$  e  $w_2$  entram em harmonia, bem como as velocidades das massas  $m_1$  e  $m_2$ . Para outros valores das massas e molas, poderão ser observados comportamentos diferentes. O código no Python para simulação do Exemplo 1.3 é mostrado na Listagem 

**Exemplo 1.4.** Considere o sistema mecânico representado na Figura 1.12, na qual o atrito entre as massas e o chão não é desprezível. Adote como saídas as posições de deslocamento  $y_1$  e  $y_2$ . Determine as equações governantes do movimento das massas  $m_1$  e  $m_2$ .

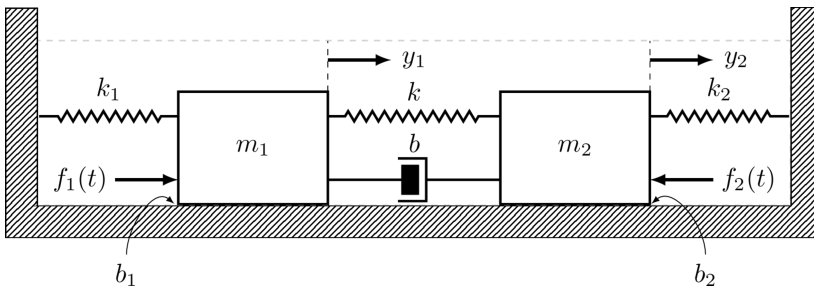


Figura 1.12: Sistema mecânico.

**Solução 1.4.** Iniciamos a solução desenhando os diagramas de corpo livre das massas<sup>2</sup>  $m_1$  e  $m_2$  como mostrado na Figura 1.13.

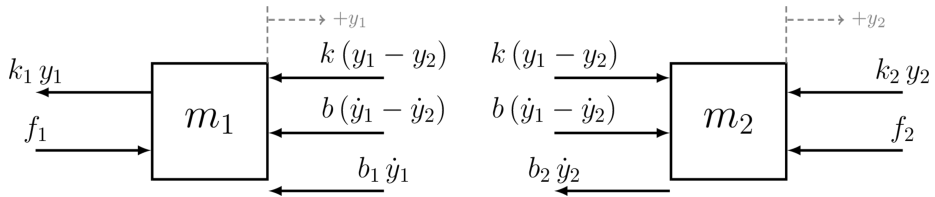


Figura 1.13: Diagramas de corpo livre do sistema mecânico.

Aplicando a segunda lei de Newton nas massas:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m_1 \vec{a}_1$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m_2 \vec{a}_2$$

Para a massa  $m_1$ , temos que:

$$m_1 \vec{a}_1 = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -k(y_1 - y_2) - b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - b_1 \dot{y}_1 - k_1 y_1 + f_1$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -(k + k_1)y_1 + k y_2 - (b + b_1) \dot{y}_1 + b \dot{y}_2 + f_1$$

$$\ddot{y}_1 = -\frac{(k + k_1)}{m_1} y_1 + \frac{k}{m_1} y_2 - \frac{b + b_1}{m_1} \dot{y}_1 + \frac{b}{m_1} \dot{y}_2 + \frac{1}{m_1} f_1$$

<sup>2</sup>Supõe-se que o deslocamento  $y_1$  é um pouquinho maior que o deslocamento  $y_2$ .

E para a massa  $m_2$ , temos que:

$$\begin{aligned}m_2 \vec{a}_2 &= \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i \\m_2 \ddot{y}_2 &= k(y_1 - y_2) + b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - b_2 \dot{y}_2 - k_2 y_2 - f_2 \\m_2 \ddot{y}_2 &= k y_1 - (k + k_2) y_2 + b \dot{y}_1 - (b + b_2) \dot{y}_2 - f_2 \\\ddot{y}_2 &= \frac{k}{m_2} y_1 - \frac{(k + k_2)}{m_2} y_2 + \frac{b}{m_2} \dot{y}_1 - \frac{b + b_2}{m_2} \dot{y}_2 - \frac{1}{m_2} f_2\end{aligned}$$

A dinâmica do sistema ou as equações governantes do movimento são:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -\frac{(k + k_1)}{m_1} y_1 + \frac{k}{m_1} y_2 - \frac{b + b_1}{m_1} \dot{y}_1 + \frac{b}{m_1} \dot{y}_2 + \frac{1}{m_1} f_1 \\\ddot{y}_2 &= \frac{k}{m_2} y_1 - \frac{(k + k_2)}{m_2} y_2 + \frac{b}{m_2} \dot{y}_1 - \frac{b + b_2}{m_2} \dot{y}_2 - \frac{1}{m_2} f_2\end{aligned}$$

Vamos representar as equações governantes  $\ddot{x}_1$  e  $\ddot{x}_2$  em variáveis de estado, de modo a resolvê-las numericamente com o Python. Sejam as variáveis de estado:

$$x_1 = y_1$$

$$x_2 = y_2$$

$$x_3 = \dot{y}_1$$

$$x_4 = \dot{y}_2$$

Derivando temporalmente as igualdades anteriores, obtemos:

$$\dot{x}_1 = \dot{y}_1$$

$$\dot{x}_2 = \dot{y}_2$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{y}_1$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{y}_2$$

Mas sabemos que  $\dot{y}_1 = x_3$ ,  $\dot{y}_2 = x_4$  e  $\ddot{y}_1$  e  $\ddot{y}_2$  são obtidas das equações governantes, substituindo  $y_1$  por  $x_1$ ,  $y_2$  por  $x_2$ ,  $\dot{y}_1$  por  $x_3$  e  $\dot{y}_2$  por  $x_4$ . Assim, obtemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{(k+k_1)}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_1}x_2 - \frac{b+b_1}{m_1}x_3 + \frac{b}{m_1}x_4 + \frac{1}{m_1}f_1 \\ \dot{x}_4 = \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{(k+k_2)}{m_2}x_2 + \frac{b}{m_2}x_3 - \frac{b+b_2}{m_2}x_4 - \frac{1}{m_2}f_2 \end{cases}$$

As equações governantes são duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, que foram transformadas em um sistema de quatro equações diferenciais de primeira ordem.

Para a simulação, consideremos que  $k = k_1 = k_2 = 1 \text{ Nm}$ ,  $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ ,  $b = b_1 = b_2 = 1 \text{ Nm/s}$ , a condição inicial  $(0, 5; 0, 5; 0; 0)$  e a entrada  $f_1 = f_2 = 0$ . A Figura 1.14 mostra a simulação numérica do sistema mecânico.

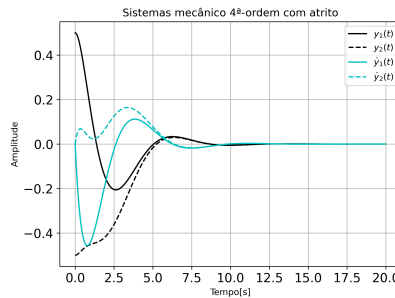


Figura 1.14: Simulação sistema mecânico para  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $k = k_1 = k_2 = 1$ ,  $b = b_1 = b_2 = 1$  e condição inicial  $(0, 5; 0, 5; 0; 0)$ .

Na Figura 1.14, podemos observar que os deslocamentos  $y_1$  e  $y_2$  convergem rapidamente para a origem, assim como as velocidades das massas  $m_1$  e  $m_2$ . Para outros valores das massas e coeficientes de elasticidade das molas, poderão ser observados comportamentos diferentes. O código no Python

para simulação do Exemplo 1.4 é mostrado na Listagem



## 1.2 Modelagem matemática de sistemas elétricos

Os sistemas elétricos podem ser modelados a partir da modelagem do resistor, indutor e capacitor, como demonstrado na Tabela 1.3.

**Exemplo 1.5.** Considere o sistema elétrico RLC em série representado na Figura 1.15, em que  $R$  é a resistência,  $L$  é a indutância,  $C$  é a capacitância,  $v(t)$  é a tensão de entrada e  $i(t)$  é a corrente no circuito em série. Determine a equação diferencial em função da tensão no capacitor  $V_c(t)$  que modela esse sistema elétrico.

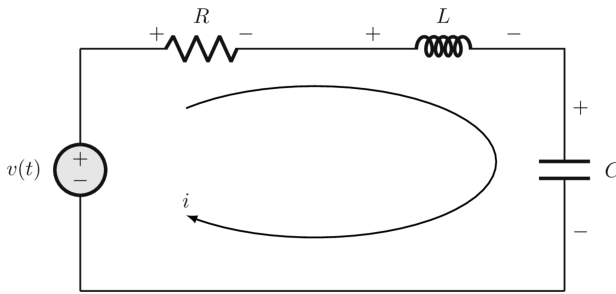


Figura 1.15: Sistema elétrico RLC.

**Solução 1.5.** Consideremos  $V_R$  a tensão no resistor,  $V_L$  a tensão no indutor,  $V_c$  a tensão no capacitor e  $i(t)$  a corrente no circuito. Utilizando a segunda lei de Kirchhoff, a voltagem aplicada em uma malha fechada deve ser igual à soma das quedas de voltagem na malha. Assim, obtemos:

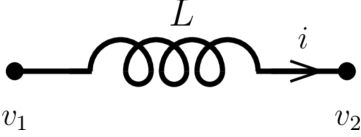
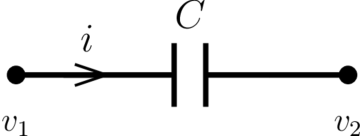
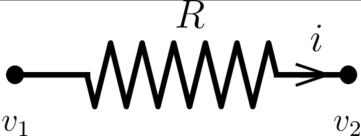
$$v(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_c(t)$$

A corrente  $i(t)$  está relacionada com a tensão no capacitor da seguinte maneira:

$$V_c = \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau.$$



Tabela 1.3: Sistemas elétricos.

Indutor	
Armazenamento indutivo	
	Equação $v_{12} = L \frac{di}{dt}$
	Energia $T = \frac{1}{2} Li^2$
Capacitor	
Armazenamento capacitivo	
	Equação $v_{12} = \frac{1}{C} \int idt$
	Energia $T = \frac{1}{2} Cv_{12}^2$
Resistor	
Dissipador de energia	
	Equação $v_{12} = Ri$
	Energia $D = \frac{1}{2R} v_{12}^2$

Se derivamos em relação ao tempo a equação de  $V_c$  uma e duas vezes, obtemos:

$$\dot{V}_c = \frac{1}{C} i(t) \quad e \quad \ddot{V}_c = \frac{1}{C} \frac{di}{dt}.$$

*Assim:*

$$i(t) = C\dot{V}_c$$
$$e$$
$$\frac{di}{dt} = C\ddot{V}_c.$$

*Sabemos que:*

$$V_R = Ri = RC\dot{V}_c$$
$$e$$
$$V_L = L\frac{di}{dt} = LC\ddot{V}_c.$$

*Finalmente, obtemos:*

$$v(t) = RC\dot{V}_c + LC\ddot{V}_c + V_c$$

*ou*

$$\ddot{V}_c + \frac{R}{L}\dot{V}_c + \frac{1}{LC}V_c = \frac{1}{LC}v(t).$$

*Vamos representar a equação diferencial ordinária do circuito série RLC em variáveis de estado, de modo a resolvê-la numericamente com o Python.*

*Sejam as variáveis de estado:*

$$x_1 = V_c$$
$$x_2 = \dot{V}_c$$

*Derivando temporalmente as igualdades anteriores, obtemos:*

$$\dot{x}_1 = \dot{V}_c$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{V}_c$$

Mas sabemos que  $\dot{V}_c = x_2$  e  $\ddot{V}_c$  é obtida da equação diferencial do circuito, substituindo  $V_c$  por  $x_1$ ,  $\dot{V}_c$  por  $x_2$ . Assim, obtemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{R}{L}x_2 - \frac{1}{LC}x_1 + \frac{1}{LC}v(t) \end{cases}$$

A equação diferencial do circuito é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, que foi transformada em um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem.

Para a simulação, consideremos que  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 1 \text{ F}$ , a condição inicial  $(1; 0)$  e a entrada  $v(t) = 0$ . A Figura 1.16 mostra a simulação numérica do sistema elétrico.

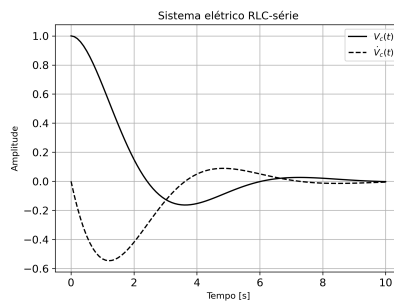


Figura 1.16: Simulação sistema elétrico para  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 1 \text{ F}$  e condição inicial  $(0; 0)$ .

Na Figura 1.16, podemos observar que a tensão  $V_c(t)$  e a derivada temporal de  $V_c(t)$  convergem rapidamente para a origem. Para outros valores de resistor, indutor e capacitor, poderão ser observados comportamentos diferentes. O código no Python para simulação do Exemplo 1.5 é mostrado na Listagem



**Exemplo 1.6.** Considere o circuito elétrico RLC apresentado na Figura 1.17, linear e invariante no tempo, onde  $L$  é a indutância,  $R$  é a resistência e  $C_1$  e  $C_2$  são as capacitâncias. A entrada  $v_i(t)$  é a diferença de potencial

elétrico aplicado no circuito, conforme Figura 1.17. A saída do sistema é a tensão no capacitor  $C_2$ ,  $V_{C_2}(t)$ .

1. Deduza as equações diferenciais lineares que modelam esse sistema.
2. Mostre a representação vetorial-matricial do sistema, considerando:  $x_1(t) = v_{C_1}(t)$ ,  $x_2(t) = i_L(t)$  e  $x_3(t) = v_{C_2}(t)$ .
3. Simule o sistema da Figura 1.17 considerando  $R = 1 \text{ K}\Omega$ ,  $L = 22 \text{ mH}$ ,  $C_1 = 100 \text{ }\mu\text{F}$  e  $C_2 = 10 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $v(t) = 0$ . Mostre os gráficos da evolução ao longo do tempo de  $v_{C_1}$ ,  $v_{C_2}$  e  $i_L$ .

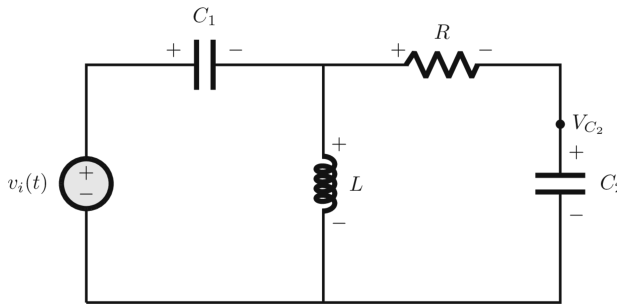


Figura 1.17: Sistema elétrico.

**Solução 1.6.** Seja  $V_R$  a tensão no resistor,  $V_L$  a tensão no indutor,  $V_{C_1}$  a tensão no capacitor  $C_1$ ,  $V_{C_2}$  a tensão no capacitor  $C_2$ ,  $i$  é a corrente no capacitor  $C_1$ ,  $i_L$  é a corrente no indutor  $L$  e  $i_R$  a corrente no resistor  $R$  e  $i_{C_2}$  é a corrente no capacitor  $C_2$ . Aplicamos a lei das correntes em um nó: a soma das correntes que entram em um nó é igual a soma das correntes que saem do nó. Assim, com o nó A da Figura 1.18, obtemos:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t)$$

A tensão no capacitor  $C_1$  é:

$$V_{C_1} = \frac{1}{C_1} \int i(\tau) d\tau$$

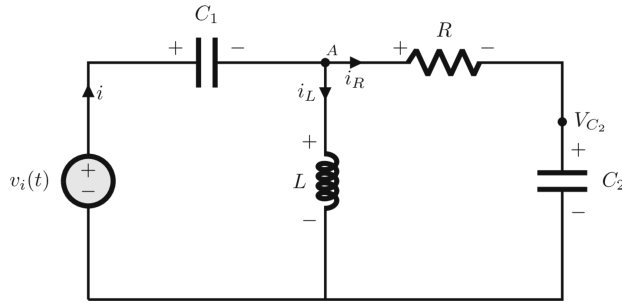


Figura 1.18: Sistema elétrico.

Se derivamos essa equação uma vez em relação ao tempo, obtemos:

$$i = C_1 \dot{V}_{C_1},$$

A tensão no capacitor  $C_2$  é:

$$V_{C_2} = \frac{1}{C_2} \int i_{C_2}(\tau) d\tau$$

Ao derivamos essa equação uma vez em relação ao tempo, obtemos:

$$i_{C_2} = i_R = C_2 \dot{V}_{C_2}.$$

A corrente  $i_{C_2}(t)$  está relacionada com a tensão nos capacitores da seguinte maneira:

$$i_{C_2} = \frac{v_i - V_{C_1} - V_{C_2}}{R} = C_2 \dot{V}_{C_2}.$$

Assim, a equação diferencial de  $V_{C_2}$  é:

$$\dot{V}_{C_2} = \frac{v_i - V_{C_1} - V_{C_2}}{RC_2}$$

De:

$$\dot{V}_{C_1} = \frac{1}{C_1} i = \frac{1}{C_1} (i_{C_2} + i_L) = \frac{1}{C_1} \left( i_L + \frac{v_i - V_{C_1} - V_{C_2}}{R} \right)$$

Assim, a equação diferencial de  $V_{c_1}$  é:

$$\dot{V}_{c_1} = \frac{1}{RC_1}i_L + \frac{1}{RC_1}(v_i - V_{c_1} - V_{c_2})$$

A tensão no indutor é:

$$V_L = v_i - V_{c_1}$$

Assim:

$$V_L = L\frac{di}{dt}$$

Assim, a equação diferencial de  $\frac{di}{dt}$  é:

$$\frac{di}{dt} = \frac{v_i}{L} - \frac{V_{c_1}}{L}.$$

Vamos representar a equação diferencial ordinária do circuito em variáveis de estado, de modo a resolvê-la numericamente com o Python. Sejam as variáveis de estado:

$$x_1 = V_{c_1}$$

$$x_2 = i_L$$

$$x_3 = V_{c_2}$$

Derivando temporalmente as igualdades anteriores, obtemos:

$$\dot{x}_1 = \dot{V}_{c_1}$$

$$\dot{x}_2 = di_L/dt$$

$$\dot{x}_3 = \dot{V}_{c_2}$$

Assim, é obtida a equação diferencial do circuito, substituindo  $V_{c_1}$  por  $x_1$ ,

$i_L$  por  $x_2$  e  $V_{c_2}$  por  $x_3$ . Obtemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{C_1 R}x_1 + \frac{1}{C_1}x_2 - \frac{1}{C_1 R}x_3 + \frac{1}{C_1 R}v_i \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{L}x_1 + \frac{1}{L}v_i \\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{C_2 R}x_1 - \frac{1}{C_2 R}x_3 + \frac{1}{C_2 R}v_i \end{cases}$$

Para a simulação, consideremos  $R = 1 \text{ K}\Omega$ ,  $L = 22 \text{ mH}$ ,  $C_1 = 100 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 10 \text{ }\mu\text{F}$ , a condição inicial  $(0, 5; 0, 2; 0, 1)$  e a entrada  $v_i(t) = 0$ . A Figura 1.19 mostra a simulação numérica do sistema mecânico.

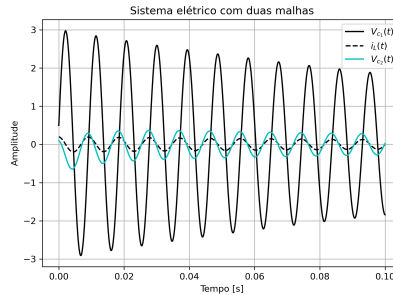


Figura 1.19: Simulação sistema elétrico para  $R = 1 \text{ K}\Omega$ ,  $L = 22 \text{ mH}$ ,  $C_1 = 100 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 10 \text{ }\mu\text{F}$  e a condição inicial  $(0, 5; 0, 2; 0, 1)$ .

Na Figura 1.19, podemos observar que as tensões  $V_{c_1}(t)$ ,  $V_{c_2}(t)$  e a corrente no indutor  $i_L(t)$  oscilam e convergem para a origem. Para outros valores de resistor, indutor e capacitores, poderão ser observados comportamentos diferentes. O código no Python para simulação do Exemplo 1.6 é mostrado na Listagem



### 1.3 Revisão dos números complexos

Os conceitos de números complexos são amplamente utilizados quando é definida a função de resposta em frequência ou a função de transferência senoidal. Em uma função de transferência em malha aberta de um sistema

denotada como  $G(s)$ , a função de transferência senoidal é obtida quando a variável complexa  $s$  é substituída por  $j\omega$ . Isto pode ser interpretado como o mapeamento do semi-eixo imaginário positivo do plano  $s$  por meio da função de transferência em malha aberta no plano complexo  $G(j\omega)$ .

## Números complexos

Um número complexo  $A$  é um par ordenado de números reais  $A_1$  e  $A_2$ , os quais podem ser escritos simbolicamente como:

$$A = (A_1, A_2) \tag{1.6}$$

Seja um segundo número complexo  $B$  designado por:

$$B = (B_1, B_2),$$

usando estes como exemplos, as operações algébricas são definidas como segue:

1. Identidade:

$$A = B$$

Se, e somente se,  $A_1 = B_1$  e  $A_2 = B_2$ .

2. Adição:

$$A + B = (A_1 + B_1, A_2 + B_2)$$

3. Multiplicação:

$$AB = (A_1B_1 - A_2B_2, A_1B_2 + A_2B_1)$$

A adição e a multiplicação obedecem às leis comutativa, associativa e distributiva da álgebra.



4. Divisão: Em sistemas consistentes com números reais, não podemos definir a divisão de forma independente. Nós queremos  $C$ , onde:

$$C = \frac{A}{B}$$

$C$  é o número que, quando multiplicado por  $B$ , dará  $A$ . Então é possível provar que:

$$\frac{A}{B} = \left( \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2}{B_1^2 + B_2^2}, \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{B_1^2 + B_2^2} \right)$$

## Plano complexo

O plano complexo é uma representação geométrica dos números complexos (Figura 1.20). Assim, cada ponto da reta está associado a um número nela. O plano complexo associa biunivocamente o ponto  $(A_1, A_2)$  do plano ao número  $A_1 + i A_2$ . Esta associação conduz as seguintes representações:

1. **Forma cartesiana ou retangular:**

$$A = (A_1, A_2) = A_1 + i A_2$$

Representa o número  $A$ , separando a parte real da parte imaginária.

2. **Forma polar:**

$$A = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) = r e^{i\theta}, \quad |A| = r$$

$r$  é a distância do ponto  $A = A_1 + i A_2$  até a origem de coordenadas e é denominado de **módulo** do número complexo, denotado como:

$$|A| = r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$\theta$  é o ângulo entre a semi-reta  $\overline{0z}$  e o semi-eixo real e é denominado

de **argumento** do número complexo  $A$ , denotado como  $\arg(A)$

3. **Forma exponencial:** Através da identidade de Euler  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ , a forma polar é equivalente à chamada **forma exponencial**:

$$A = r e^{i\theta}.$$

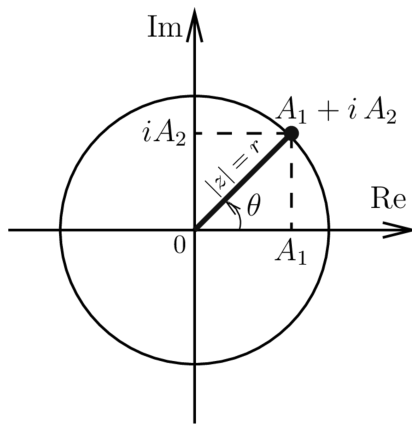


Figura 1.20: No plano complexo, a parte real é representada pela reta das abscissas (Re, horizontal), enquanto a parte imaginária, pela reta das ordenadas (Im, vertical).

## Parte real e parte imaginária

Um número real  $R$  pode ser escrito como:

$$R = (R, 0)$$

Já um número imaginário  $I$ , cujo um símbolo ainda não foi introduzido, por ser escrito como:

$$I = (0, I)$$

Dado um número como na equação 1.6, denomina-se  $A_1$  a parte real (ou a componente real) e  $A_2$  a componente imaginária. O número  $(0, A_2)$  é denominado como a parte imaginária de  $A$ .

Para denotar as componentes real e imaginária, usamos:

$$A_1 = \operatorname{Re} A$$

$$A_2 = \operatorname{Im} A.$$

## Números complexos importantes

Os números complexos que são muito importantes:

$$0 = (0, 0)$$

$$1 = (1, 0)$$

$$j = (0, 1)$$

Os números complexos 0 e 1 desempenham nas operações com número complexos as mesmas funções que suas contrapartes reais.

O número imaginário especial  $j$  (escrito como  $i$  na literatura de matemática) tem sua contraparte nos números reais. Da regra de multiplicação, observe que:

$$jA = (0, 1)(A_1, A_2) = (-A_2, A_1)$$

Note que:

$$j j = (-1, 0)$$

## Magnitude e ângulo de um número complexo

Uma vez que um número complexo é um par ordenado de números reais, este pode ser representado como um ponto no plano. Isto sugere definir a

magnitude e o ângulo (ou fase) de um número complexo como segue:

$$|A| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad \text{magnitude}$$
$$\theta = \text{tg}^{-1} \left( \frac{A_2}{A_1} \right) \quad \text{ângulo ou fase}$$

Muitas vezes, é conveniente designar esses pela notação:

$$|A| = \text{mag } A, \quad \theta = \text{ang } A = \angle A = \underline{\angle A}$$

A magnitude e a fase podem ser interpretadas geometricamente (Figura 1.21) como as coordenadas polares de um ponto em um plano. Assim, pode-se escrever:

$$A = |A| \underline{\angle \theta}$$

Da interpretação geométrica:

$$A_1 = |A| \cos(\theta)$$

$$A_2 = |A| \text{sen}(\theta)$$

Com um pouco de trigonometria, mostra-se que:

$$|AB| = |A| |B|$$

$$\underline{\angle AB} = \underline{\angle A} + \underline{\angle B}$$

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \frac{|A|}{|B|}$$

$$\underline{\angle \frac{A}{B}} = \underline{\angle A} - \underline{\angle B}$$

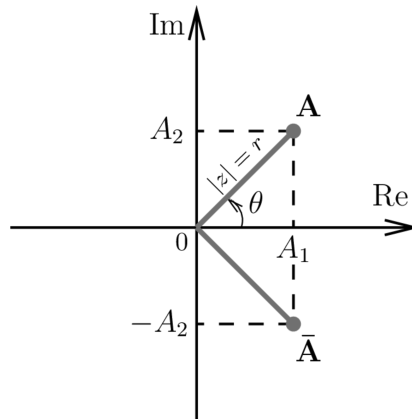


Figura 1.21: Interpretação geométrica de um número complexo.

## Raiz de um número complexo

Devido às regras da multiplicação e da divisão, uma definição consistente pode ser dada para as raízes de um número complexo. Desejamos escrever  $(A)^{1/2}$  como o símbolo de número que multiplicado por si mesmo dá  $A$ . Assim, se  $A^{1/2} = |B| \angle \beta$  e  $A = |A| \angle \alpha$ :

$$|B|^2 \angle 2\beta = |A| \angle \alpha$$

e, portanto,

$$B = \sqrt{|A|}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

Note que:

$$|A| \angle \alpha = |A| \angle \alpha + 2\pi$$

Portanto, o segundo valor do ângulo é:

$$\beta = \frac{\alpha}{2} + \pi$$

Assim:

$$|B| \angle \frac{\alpha}{2} = -|B| \angle \frac{\alpha}{2} + \pi$$

## Complexo conjugado

O complexo conjugado de  $A$  é escrito como  $\bar{A}$  e definido por:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= (A_1, -A_2) \\ &= A_1 - jA_2\end{aligned}$$

**O complexo conjugado (ou conjugado) de um número é obtido mudando o sinal da parte imaginária.**

Das regras da álgebra, obtém-se:

$$\begin{aligned}\overline{A + B} &= \bar{A} + \bar{B} \\ \overline{AB} &= \bar{A}\bar{B} \\ \overline{\left(\frac{A}{B}\right)} &= \frac{\bar{A}}{\bar{B}} \\ |A|^2 &= A\bar{A} \\ \operatorname{Re} A &= \frac{1}{2}(A + \bar{A}) \\ \operatorname{Im} A &= \frac{1}{j2}(A - \bar{A})\end{aligned}$$

## Definição de uma função

Um dos conceitos mais importantes a ser estabelecido é a ideia de um número complexo como função de outro número complexo. Seja o símbolo:

$$s = \sigma + j\omega \tag{1.7}$$

Este símbolo representa um número complexo, onde  $\sigma$  e  $\omega$  têm algum valor real de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

**Observação 1.1.** *Um número complexo designado desta maneira é comumente chamado de **variável complexa**.*

O número complexo  $s$ , como definido pela equação 1.7, pode ser representado como um **ponto no plano complexo**  $s$ . No plano  $s$ , os eixos são denominados como real e imaginário, e um ponto típico é etiquetado como um simples símbolo, denominado  $s$ .

Aqui, introduzimos a noção de uma função de uma variável complexa. Considerando o plano  $s$ , suponha que exista um segundo plano complexo, o qual pode ser denominado de plano  $w$ , cuja forma é:

$$w = u + jv$$

Agora, suponha que uma regra é definida, na qual para cada ponto no plano  $s$  um único ponto é especificado no plano  $w$ , isto é,  $w$  é uma função de  $s$  e pode ser escrita por:

$$w = f(s)$$

Nesta definição de uma função, entende-se que para cada ponto no plano  $s$  existe somente um único ponto que lhe corresponde no plano  $w$ , isto é, uma função de um único valor.

Deve-se entender que o plano  $w$  é geometricamente similar ao plano  $s$ .

**Exemplo 1.7.** *Com o intuito de observar a relação entre um ponto no plano  $w$  e um ponto no plano  $s$  utilizando as coordenadas retangulares considere o caso particular:*

$$w = s^2 \tag{1.8}$$

Para cada ponto no plano  $s$ ,

$$\begin{aligned}w &= (\sigma + j\omega)(\sigma + j\omega) \\ &= \sigma^2 - \omega^2 + j2\sigma\omega\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}u &= \sigma^2 - \omega^2 \\ v &= 2\sigma\omega\end{aligned}\tag{1.9}$$

**Solução 1.7.** A ideia neste exemplo é que a fórmula em 1.8 dá a regra para determinar os pontos no plano  $w$  que correspondem aos pontos no plano  $s$ . As equações 1.9 dão as coordenadas retangulares dos pontos no plano  $w$  em termos de coordenadas retangulares dos pontos no plano  $s$ . A fórmula nos diz como, dado um valor de  $s$ , o valor correspondente de  $w$  deve ser determinado.

Uma generalização de funções consiste na combinação linear de potências de  $s$  e pode ser escrita como:

$$P(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2 + \cdots b_ns^m\tag{1.10}$$

Na qual as constantes  $b_i$ 's podem ser complexas ou reais e  $m$  é qualquer inteiro positivo, isto é,  $P(s)$  é um polinômio em  $s$ . Para maiores generalizações, é necessário introduzir um segundo polinômio:

$$Q(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \cdots a_ns^n$$

Seja  $w$  a razão:

$$w = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \cdots b_ns^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \cdots a_ns^n}\tag{1.11}$$

Quando as constantes  $a_i$  e  $b_i$ 's são conhecidas, cada valor de  $s$  dá um valor de  $w$ , que pode ser calculado. Um dos nossos objetivos é obter interpretações



e significados de tais funções.

Estes conceitos foram compilados de LePage (2018), Brown e Churchill (2015).

**Exemplo 1.8.** Considere a seguinte função de transferência em malha aberta:

$$G(s) = \frac{K_0(Ts - 1)}{s(\tau_1s - 1)(\tau_2s - 1)}$$

Separe a parte real e a parte imaginária da função de transferência senoidal em malha aberta.

**Solução 1.8.** Obtemos a função de transferência senoidal, substituindo  $s$  por  $j\omega$  na função de transferência em malha aberta, como segue:

$$G(j\omega) = \frac{K_0(jT\omega - 1)}{j\omega(j\tau_1\omega - 1)(j\tau_2\omega - 1)}$$

Separamos a parte real e imaginária de  $G(j\omega)$ , multiplicando  $G(j\omega)$  pelos complexos conjugados de cada polo, como segue:

$$G(j\omega) = \frac{K_0(jT\omega - 1)}{j\omega(j\tau_1\omega - 1)(j\tau_2\omega - 1)} \left( \frac{-j}{-j} \right) \left( \frac{-1 - j\tau_1\omega}{-1 - j\tau_1\omega} \right) \left( \frac{-1 - j\tau_2\omega}{-1 - j\tau_2\omega} \right)$$

Assim, obtém-se:

$$G(j\omega) = \frac{K_0(-T\tau_1\tau_2\omega^2 + T - \tau_1 - \tau_2)}{(1 + \omega^2\tau_1^2)(1 + \omega^2\tau_2^2)} + j \frac{K_0(1 + \omega^2(T(\tau_1 + \tau_2) - \tau_1\tau_2))}{\omega(1 + \omega^2\tau_1^2)(1 + \omega^2\tau_2^2)}$$

A parte real da função de transferência senoidal em malha aberta é:

$$\text{Re}[G(j\omega)] = \frac{K_0(-T\tau_1\tau_2\omega^2 + T - \tau_1 - \tau_2)}{(1 + \omega^2\tau_1^2)(1 + \omega^2\tau_2^2)}$$

E a parte imaginária da função de transferência senoidal em malha aberta é:

$$\text{Im}[G(j\omega)] = \frac{K_0(1 + \omega^2(T(\tau_1 + \tau_2) - \tau_1\tau_2))}{\omega(1 + \omega^2\tau_1^2)(1 + \omega^2\tau_2^2)}$$

## Exercícios

- O sistema mecânico da Figura 1.22 consiste em duas massas pontuais  $m_1$  e  $m_2$  influenciadas por forças de amortecimento viscosas (devido a  $b$  e aos termos de fricção com coeficientes de amortecimento viscosas  $b_1$  e  $b_2$ ), forças das molas (devido aos termos  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k$ ) e forças externas  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ . As setas na Figura 1.22 estabelecem a direção positiva para os deslocamentos  $x_1$  e  $x_2$ .
  - Determine o diagrama de corpo livre das massas  $m_1$  e  $m_2$ ;
  - Determine a equação diferencial das massas  $m_1$  e  $m_2$ ;
  - Simule no Python o sistema da Figura 1.22, considerando  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 1$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k = 0,5$ ,  $k_2 = 1$ ,  $b_1 = 0,1$ ,  $b = 0,1$ ,  $b_2 = 0,1$  e  $f_1(t) = f_2(t) = 2$ . Mostre os gráficos da evolução ao longo do tempo de  $x_1$  e  $x_2$ , bem como os de  $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$ .

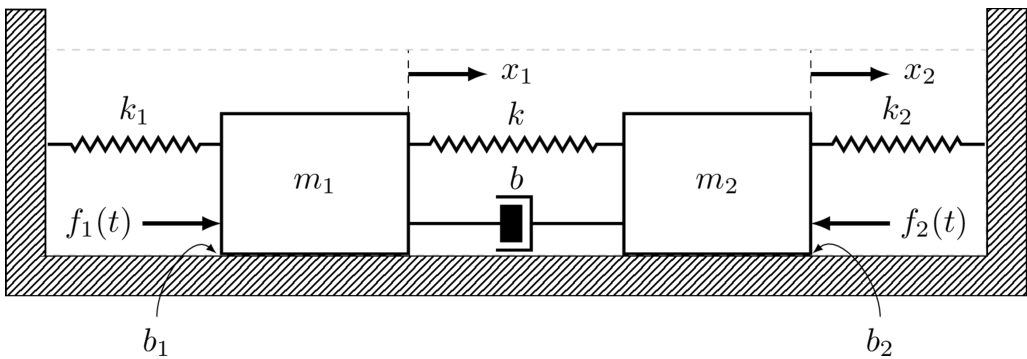


Figura 1.22: Sistema mecânico com duas massas. Figura da Questão 1.

- Dois massas com atrito viscoso no chão são conectadas (coeficientes de atrito  $b_1$  e  $b_2$ ), como mostrado na Figura 1.23. A força de entrada é  $u(t)$  e  $x$  e  $q$  são as saídas.
  - Determine o diagrama de corpo livre das massas  $m_1$  e  $m_2$ ;
  - Determine a equação diferencial das massas  $m_1$  e  $m_2$ ;

- (c) Simule no Python o sistema da Figura 1.23, considerando  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 1$ ,  $k_1 = 0,5$ ,  $k_2 = 1$ ,  $b_1 = 0,1$ ,  $b_2 = 0,1$  e  $u(t) = 2$ . Mostre os gráficos da evolução ao longo do tempo de  $x$  e  $q$ , bem como os de  $\dot{x}$  e  $\dot{q}$  a uma entrada degrau unitária.

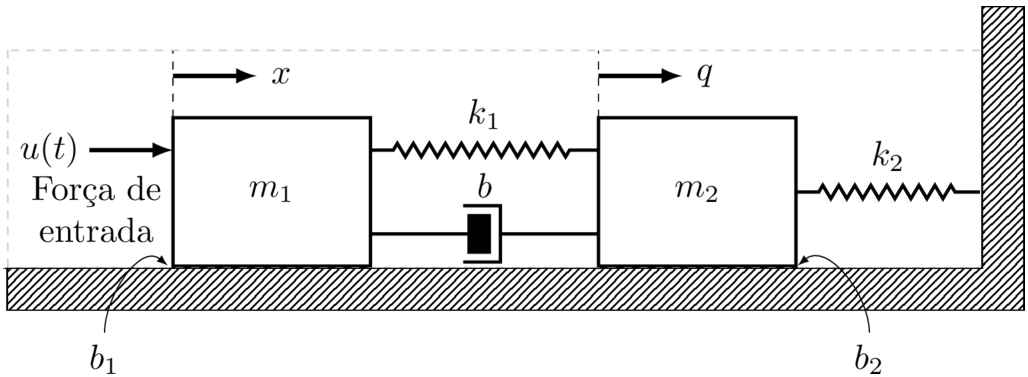


Figura 1.23: Duas massas com atrito viscoso. Figura da Questão 2.

3. Considere o circuito elétrico RLC apresentado na Figura 1.24, linear e invariante no tempo, onde  $L$  é a indutância,  $R_1$  e  $R_2$  são as resistências e  $C_1$  e  $C_2$  são as capacitâncias. A entrada  $v(t)$  é a diferença de potencial elétrico aplicado no circuito (Figura 1.24). A saída  $v_{C_2}(t)$  do sistema é a diferença de potencial elétrico nos terminais do capacitor  $C_2$ .
  - (a) Deduza as equações diferenciais lineares que modelam este sistema, isto é, as equações diferenciais de  $v_{C_1}$ ,  $v_{C_2}$  e  $i_L$ .
  - (b) Simule no Python o sistema da Figura 1.24, considerando  $R_1 = 1 \text{ K}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ K}\Omega$ ,  $L = 22 \text{ mH}$ ,  $C_1 = 100 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 100 \text{ }\mu\text{F}$  e  $u(t) = \text{sen}(t)$ . Mostre os gráficos da evolução ao longo do tempo de  $v_{C_1}$ ,  $v_{C_2}$  e  $i_2$ .
  
4. Considere o circuito elétrico apresentado na Figura 1.25, linear e invariante no tempo, onde  $L$  é a indutância,  $R_1$  e  $R_2$  são as resistências

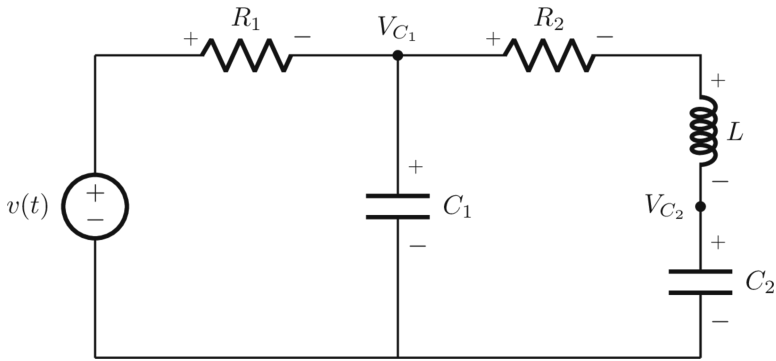


Figura 1.24: Sistema elétrico RLC. Figura da Questão 3.

e  $C$  é a capacitância. A entrada  $v(t)$  é a diferença de potencial elétrico aplicado no circuito (Figura 1.25). A saída  $v_C(t)$  do sistema é a diferença de potencial elétrico nos terminais do capacitor  $C$ .

- Deduza a equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea que modela este sistema, isto é,  $v_C$  e  $\dot{v}_C$ .
- Simule no Python o sistema da Figura 1.25, considerando  $R_1 = 1 \text{ K}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ K}\Omega$ ,  $L = 22 \text{ mH}$ ,  $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$  e  $v(t) = \sin(5t)$ . Mostre os gráficos da evolução ao longo do tempo de  $v_C$  e  $\dot{v}_C$ .

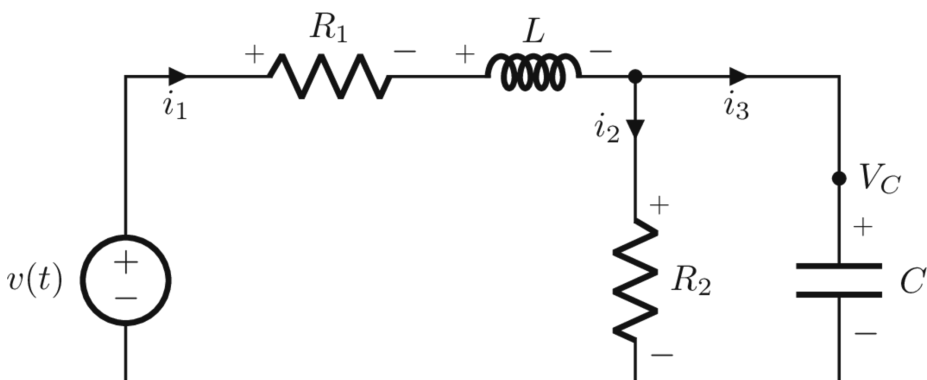


Figura 1.25: Sistema elétrico. Figura da Questão 4.

- Para o sistema mecânico indicado na Figura 1.26, onde  $u$  é a entrada e  $x_1$  e  $x_2$  são as saída:

- (a) Determine o diagrama de corpo livre das massas  $m_1$  e  $m_2$ ;
- (b) Determine a equação diferencial das massas  $m_1$  e  $m_2$ ;
- (c) Simule no Python o sistema da Figura 1.26, considerando  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 1$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 0,5$ ,  $b_1 = b_2 = 0,2$ ,  $b = 0,1$  (coeficiente de atrito viscoso) e  $u(t) = \text{sen}(t)$ . Mostre os gráficos da evolução ao longo do tempo de  $x_1$  e  $x_2$ .

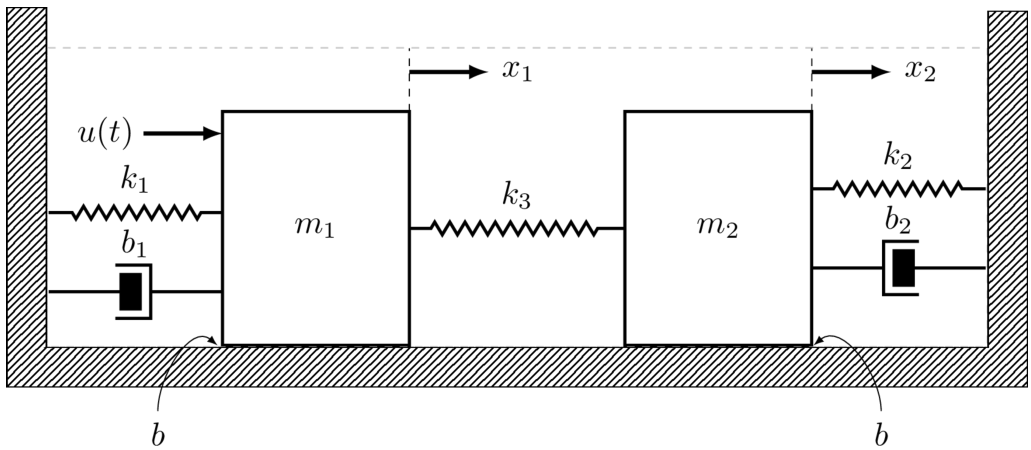


Figura 1.26: Sistema mecânico. Figura da Questão 5.

6. Separar a parte real e a parte imaginária das seguintes funções:

$$(a) G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}$$

$$(b) G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}$$

$$(c) G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)(1 + j\omega\tau_3)}$$

$$(d) G(j\omega) = \frac{K(j\omega + 1)}{j\omega(j\omega - 2)}$$

$$(e) G(j\omega) = \frac{K(j\omega - 1)}{j\omega(j\omega + 2)}$$

## Nos últimos anos, o Python vem sendo utilizado, em vez do Matlab.

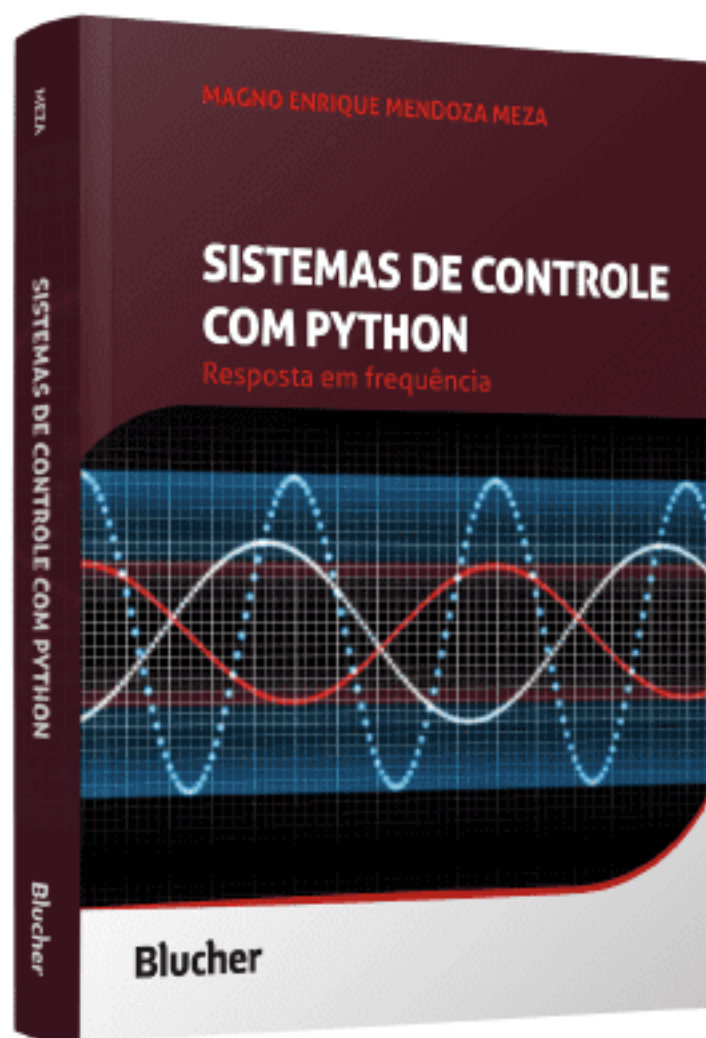
O Python e suas respectivas bibliotecas específicas estão crescendo e amadurecendo de maneira a serem uma alternativa chamativa ao Matlab. Neste livro, estarão disponíveis todos os códigos em Python de todos os exemplos desenvolvidos e de um conjunto de funções criadas para mostrar: dados de simulação como máximo sobressinal; tempo de acomodação, tempo de pico e tempo de subida; frequência de ressonância, amplitude de pico de ressonância e largura de banda; geração de uma onda quadrada e uma onda triangular; margens de fase e de ganho, as respectivas frequências de cruzamento de ganho e de cruzamento de fase; setas de direção de movimento dos diagramas polares; e também funções para criar as tabelas de dados da resposta em frequência, ditas tabelas em LaTeX, HTML e Excel.

O Python é uma linguagem de programação de alto nível, interpretada, *open source* e combina uma sintaxe concisa com recursos de biblioteca por módulos. Ele apresenta um módulo para sistemas de controle com comandos muito semelhantes ao Matlab. Na ampla literatura de controle, observam-se livros que utilizam o Matlab, Scilab e C nos idiomas inglês e português. Livros da área de sistemas de controle utilizando Python são poucos em ambas as linguagens e, principalmente, em português.



[www.blucher.com.br](http://www.blucher.com.br)

**Blucher**



Clique aqui e:

[VEJA NA LOJA](#)

## Sistemas de controle com Python

### Respostas em frequência

---

Magno Enrique Mendoza Meza

ISBN: 9788521221128

Páginas: 494

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2024

---