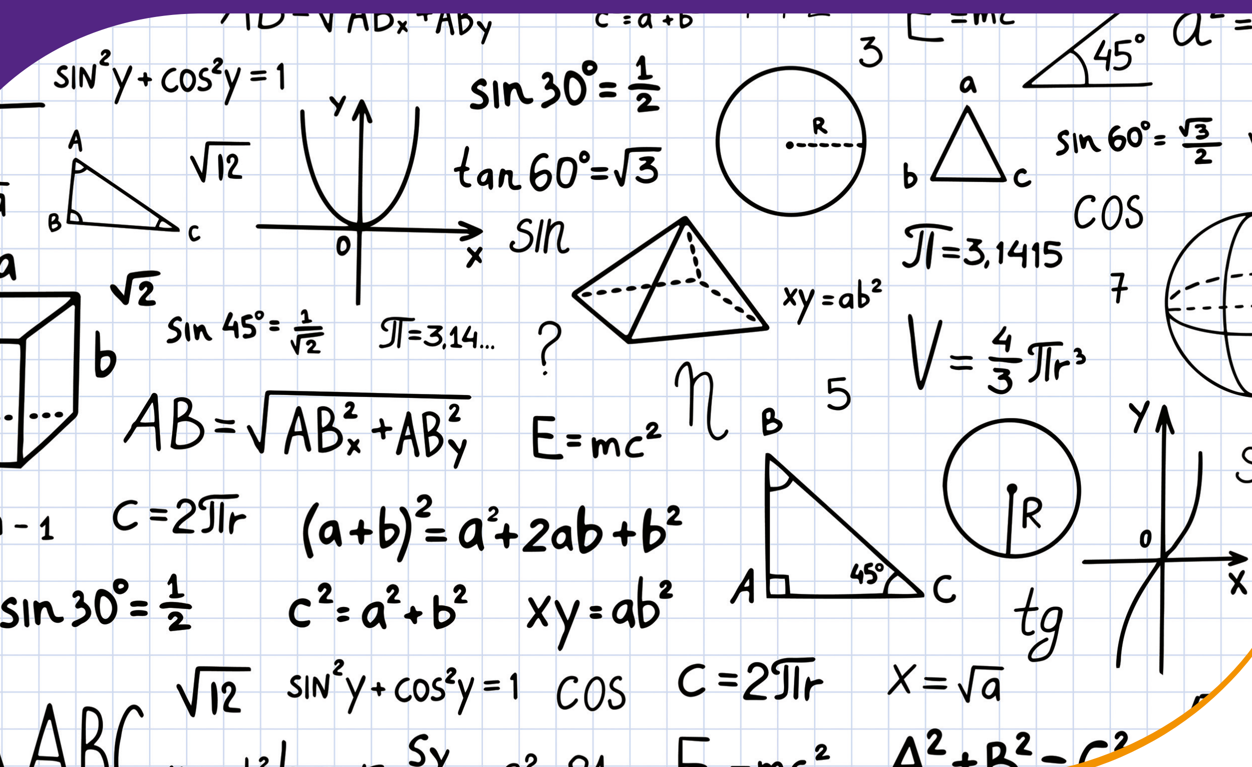
HÉLIO VINICIUS MORENO TOZATTI
RAIMUNDO DE ARAÚJO BASTOS JÚNIOR

PRÉ-CÁLCULO SEM MISTÉRIOS

Teoria e prática passo a passo



Blucher

Volume 2

Hélio Vinicius Moreno Tozatti
Raimundo de Araújo Bastos Júnior

PRÉ-CÁLCULO SEM MISTÉRIOS

Teoria e prática passo a passo

Volume 2

Acesse o gabarito aqui:

Pré-cálculo sem mistérios: teoria e prática passo a passo, volume 2

Publisher Edgard Blücher
Editor Eduardo Blücher
Coordenador editorial Rafael Fulanetti
Coordenação de produção Andressa Lira
Produção editorial Kedma Marques
Diagramação Os autores
Revisão de texto Maurício Katayama
Capa Laércio Flenic
Imagem da capa iStockphoto

Editora Blucher
Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Tozatti, Hélio Vinicius Moreno. Pré-cálculo sem mistérios, volume 2 : teoria e prática passo a passo / Hélio Vinicius Moreno Tozatti, Raimundo de Araújo Bastos Júnior. - São Paulo : Blucher, 2024.

152 p.

ISBN 978-85-212-2215-6 (impresso)
ISBN 978-85-212-2209-5 (eletrônico)

1. Pré-cálculo I. Título II. Bastos Júnior, Raimundo de Araújo

24-4231 CDD 512

Índices para catálogo sistemático: 1. Pré-cálculo

Conteúdo

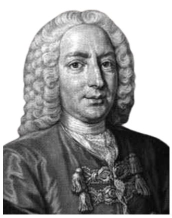
Capítulo 1

Funções exponenciais

Nascido em Basileia (Suíça), Leonhard Euler[1] (1707-1783), filho de um pastor calvinista que estudou com Jacob Bernoulli[2] (1655-1705), conseguiu uma indicação de Johann Bernoulli[3] (1667-1748) para estudar com ele. Em 1727, Euler foi indicado pelos irmãos Daniel Bernoulli[4] (1700-1782) e Nicolaus Bernoulli[5] (1657-1759) para a Academia de São Petersburgo, criada por Pedro, o Grande. Após quatorze anos, Euler aceitou o convite de Frederico, o Grande, para chefiar a seção de matemática da Academia de Berlim, onde permaneceu por 25 anos.

Leonard Euler

Jacob Bernoulli



Daniel Bernoulli

Durante toda sua estadia na Prússia, Euler recebia uma pensão da Rússia por causa do alto prestígio que ele adquiriu nesse país. Por isso,

[1] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/

[2] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Jacob/

[3] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann/

[4] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Daniel/

[5] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Nicolaus(I)/

em 1766, ele aceitou o convite de Catarina, a Grande, para retornar à Academia de São Petersburgo, onde ficou até sua morte súbita em 1783, com 76 anos de idade. Curiosamente, Euler nunca ocupou um cargo de professor.

Euler é, sem dúvida, um ser insuperável na história da matemática. Sua produtividade é tão surpreendente que, mesmo tendo ficado cego pouco depois de seu retorno a São Petersburgo (Euler já era cego do olho direito desde 1735), ele continuou seu trabalho com a ajuda de um secretário que anotava suas ideias. Ao longo de sua vida, foram publicados 530 de seus trabalhos. Devido ao número substancial de trabalhos não publicados, mesmo após a sua morte, outros manuscritos foram publicados, contribuindo por mais 47 anos às publicações da Academia de São Petersburgo.

A Sociedade Suíça de Ciências Naturais iniciou em 1909 uma edição completa da obra de Euler, que resultou em 886 trabalhos, entre livros e artigos. A notação $f(x)$ usada para função de x foi apresentada pela primeira vez por Euler no artigo *Comentários de Petersburgo* (1734-1735). A partir daí, a ideia de função surgiu em vários artigos de análise matemática. Euler também foi o primeiro a usar a forma exponencial e para base dos logaritmos naturais, e muitas das notações modernas de matemática são creditadas a ele, por exemplo: $\operatorname{sen}, \cos, \tan, \cot, \sec, \csc, \sum$ e $i = \sqrt{-1}$.

1.1 Definição e propriedades

Para entender o conceito de exponencial, considere a situação de uma população de b bactérias que dobra seu número a cada 30 minutos. É claro que, em meia hora, a população será de $2 \cdot b$ bactérias, em uma hora, a população será de $2\cdot(2\cdot b) = 2^2\cdot b$ bactérias e, após 5 horas, ou seja, 10 períodos de 30 minutos, a população será de $2^{10}\cdot b$ bactérias. Seguindo o raciocínio, o número de n bactérias durante x períodos de 30 minutos, é dado pela função $n(x) = 2^x \cdot b$. Essa função que modela tal situação é conhecida como **função exponencial**. As funções exponenciais que definiremos a seguir descrevem uma grande variedade de problemas, por exemplo, projeção populacional, desintegração radioativa, velocidades de reações químicas, avaliação de investimentos, análise da propagação de epidemias, circuitos elétricos, estudo dos fenômenos de aprendizagem e avaliação da confiabilidade de produtos.

Definição 1. *Dado um número real* a*, tal que* $a \neq 1$ *e* $a > 0$*, a função*

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & f(x) = a^x \end{array}$$

é chamada de ***função exponencial de base*** a*.*

Observação 1. *As restrições impostas à base* a *referem-se aos seguintes fatos:*

- *Se* $a = 1$*, então* $f(x) = 1^x = 1$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*
- *Se* $a = 0$*, então* $f(x) = 0^x$ *não está bem definida. Para* $x = -1$*, temos que* $f(x) = 0^{-1}$ *é um valor indeterminado.*
- *Se* $a < 0$*, então existem valores da função* $f(x) = a^x$ *que não estão definidos em* $\mathbb{R}$*. Por exemplo, dados* $a = -2$ *e* $x = \frac{1}{2}$*,* $f(x) = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$*.*

Observação 2. *Note que as funções exponenciais são injetoras. De fato, se* $x_1 \neq x_2$ *com* $a^{x_1} = a^{x_2}$*, então*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} & = & 1; \\ a^{x_1 - x_2} & = & 1; \\ x_1 - x_2 & = & 0; \\ x_1 & = & x_2. \end{array}$$

O que é absurdo, pois $x_1 \neq x_2$*. Assim, se* $x_1 \neq x_2$*, então* $a^{x_1} \neq a^{x_2}$*. Ressaltamos que* $\mathbb{R}_+^*$ *é o conjunto imagem das funções exponenciais. Do modo como foram definidas, as funções exponenciais são funções bijetoras e chamamos suas funções inversas de* ***funções logarítmicas****, assunto que estudaremos na próxima seção.*

Por conveniência do leitor, reiteramos as seguintes propriedades:
Dados $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $x, y \in \mathbb{R}$,

(a) $a^0 = 1$;

(b) $a^x a^y = a^{x+y}$;

(c) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

(d) $(a^x)^y = a^{xy}$;

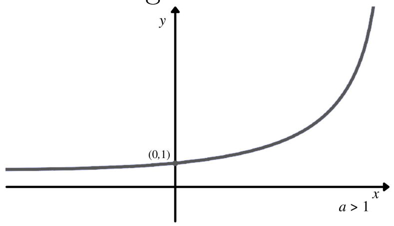
(e) $(ab)^x = a^x b^x$;

(f) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

(g) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

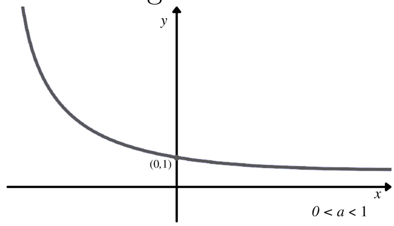
O esboço do gráfico de uma função exponencial $f(x) = a^x$ depende estritamente do valor da base a. No entanto, em todos os casos, $f(0) = a^0 = 1$, ou seja, o ponto $(0,1)$ pertence ao gráfico de todas as funções exponenciais. De acordo com o Teorema **??**, podemos afirmar que, para $a > 1$, a função exponencial é crescente, e, quando $0 < a < 1$, a função exponencial é decrescente. As Figuras 1.1 e 1.2 representam os esboços dos gráficos das funções exponenciais nos casos crescente e decrescente.

Figura 1.1:



Esboço da função exponencial quando $a > 1$.

Figura 1.2:



Esboço da função exponencial quando $0 < a < 1$.

Observação 3. *Quando a base da função exponencial é o número*

$$e \cong 2,7182818\ldots,$$

ela recebe o nome de ***função exponencial natural****. As funções definidas na forma $f(x) = be^{kx}$, onde $x \geq 0$ e $b, k \in \mathbb{R}_+^*$ são chamadas de* ***funções de crescimento exponencial****. Se $k \in \mathbb{R}_-^*$, as funções são chamadas de* ***funções de decaimento exponencial****.*

Exemplo 1. ***(Curvas de crescimento biológico)***
A maioria das leis de crescimento biológico são representadas pela equação

$$N = N_0 R^t,$$

onde N é o número de uma população no instante t, N_0 é o número inicial de uma população (no instante $t = 0$) e $R > 0$ é a taxa de crescimento. Essa equação é baseada no modelo de uma população em que cada membro produz $R - 1$ membros adicionais em cada unidade de tempo e nenhum morre. (Esta situação descreve algumas culturas durante períodos limitados de tempo).

Exemplo 2. *(Curvas de Gompertz)*
As ***curvas de Gompertz*** *são representadas pela equação*

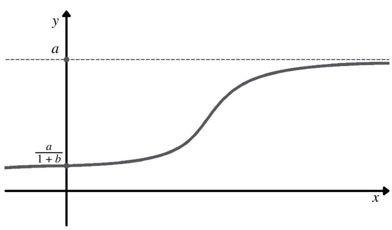
$$N = ca^{Rt},$$

onde N é o número da população no instante t, $R \in (0, 1)$ é a taxa de crescimento, a é a proporção do crescimento inicial e c é o crescimento na maturidade. Quando $t = 0$, $N = ca$, o que corresponde ao N_0 da função do crescimento biológico.

Geralmente utilizamos modelos de funções com crescimento exponencial em estudos que envolvem representações de crescimentos **não restritos**. Quando o crescimento é **restrito**, ou seja, nunca ultrapassará uma determinada quantidade $a > 0$, os melhores modelos são as **funções de crescimento logístico** definidas por

$$f(x) = \frac{a}{1 + be^{-kx}}, \text{ onde } a, b, k \in \mathbb{R}_+^*.$$

Usualmente, o esboço do gráfico dessas funções é chamado de **curva logística**, e esta possui a forma de S, ou seja, é uma *curva sigmoidal.*



Esboço do gráfico de crescimento logístico.

As curvas logísticas ilustram modelos de crescimento populacional com limite superior imposto por fatores ambientais, expansão de epidemias e propagação de rumores na sociedade.

Exemplo 3. ***(Curvas logísticas)***
Consideramos a situação em uma cidade onde, após t semanas, a constatação da existência de contaminação pelo vírus SARS-CoV-2 resultará em aproximadamente

$$S(t) = \frac{10}{1 + 9e^{-1,2t}},$$

milhares de pessoas contaminadas. Para sabermos quantas pessoas adquiriram inicialmente o vírus, devemos calcular a função S *para* $t = 0$, *ou seja,*

$$S(0) = \frac{10}{1 + 9e^{-1,2 \cdot 0}} = \frac{10}{1 + 9} = 1.$$

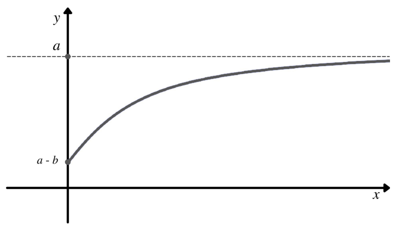
Assim, 1.000 *pessoas foram inicialmente contaminadas com a doença. E após um mês, ou seja,* $t = 4$ *semanas, temos que foram contaminadas*

$$S(4) = \frac{10}{1 + 9e^{-1,2 \cdot 4}} \cong 9.310 \text{ pessoas.}$$

Exemplo 4. ***(Curvas de aprendizagem)***
As funções exponenciais da forma:

$$A(x) = a - be^{-kx}, \text{ onde } x \geq 0 \text{ e } a, b, k \in \mathbb{R}_+^*,$$

são conhecidas como ***curvas de aprendizagem****. Como* $A(x) < a$ *para todo* $x \geq 0$, *temos que esses modelos representam um* ***crescimento limitado****.*



Esboço de uma curva de aprendizagem onde $b < a$.

O nome "curvas de aprendizagem" surgiu quando psicólogos perceberam que essas funções descrevem a relação entre a eficiência com que um indivíduo executa uma determinada atividade ou trabalho e o grau de treinamento ou experiência adquirida por ele. Em sua teoria de reforço de *aprendizagem, Clark Hull usou o caso especial $a = b$ de sua função como uma das equações básicas para descrever a relação entre a consolidação de aprendizagem A e o número de reforços x.*

Por exemplo, se um funcionário dos Correios com t meses de experiência classifica uma determinada quantidade de correspondências $A(t)$ por hora, definida por

$$A(t) = 600 - 200e^{-0,5t},$$

então um novo funcionário classifica a quantidade de

$$A(0) = 600 - 200e^{-0,5\cdot(0)} = 600 - 200e^{0} = 600 - 200 = 400$$

cartas por hora. Após três meses de trabalho, estima-se que esse funcionário esteja classificando cerca de

$$A(3) = 600 - 200e^{-0,5\cdot(3)} = 600 - 200e^{-1,5} \cong 555$$

cartas por hora.

Exemplo 5. ***(Determinação da idade dos materiais orgânicos)*** *A proporção de isótopos de carbono radioativos em relação ao número total de átomos de carbono é de cerca de* 1 *para* 10^{12}. *Quando um material orgânico morre, seus isótopos de carbono radioativos começam a se decompor, com meia-vida de cerca de* 5715 *anos. A fórmula da proporção R de isótopos de carbono por átomos de carbono é*

$$R = \left(\frac{1}{10^{12}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5715}},$$

onde t é o tempo em anos. Ao substituirmos na fórmula anterior a variável t por 10.000, *temos*

$$R(10.000) = \left(\frac{1}{10^{12}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10.000}{5715}} \approx 2,973 \cdot 10^{-13},$$

que é a proporção de isótopos de carbono por átomos de carbono depois de 10.000 *anos.*

Exemplo 6. ***(Juros simples e juros compostos)***
Juros simples *é um tipo de juros calculado apenas sobre o montante inicial investido, chamado de* ***principal****. Se I representa os juros sobre o principal P (em reais) a uma taxa de juros anual de r por t anos, então temos que*

$$I = Prt.$$

A ***fórmula de juros simples*** *é determinada pelo* ***montante acumulado*** *A, que é a soma do principal e dos juros após t anos, ou seja,*

$$A = P + I = P + Prt = P(1 + rt).$$

Frequentemente, os juros obtidos são periodicamente adicionados ao principal e dali em diante esta soma é reinvestida à mesma taxa de juros. Isso é chamado de ***juros compostos****. Para determinarmos a* ***fórmula de juros compostos****, suponhamos que o montante principal P é depositado em um banco por um período de t anos. Se os juros estão a uma taxa de r por cento ao ano (chamada de* ***taxa nominal ou declarada****) compostos anualmente, então o montante acumulado ao final do primeiro ano é*

$$A_1 = P(1 + r1) = P(1 + r).$$

A quantia após 2 anos é de

$$A_2 = [P(1 + r)](1 + r) = P(1 + r)^2.$$

A quantia após 3 anos é de

$$A_3 = [P(1 + r)^2](1 + r) = P(1 + r)^3.$$

Seguindo com esse raciocínio, obtemos que a quantia após n anos é de

$$A_n = P(1 + r)^n.$$

Por exemplo, suponhamos que uma pessoa deposita $R\$ \ 1.000,00$ a 2% de juros ao ano. Essa pessoa terá em 5 anos

$$A_5 = 1.000(1 + 0,02)^5 \cong R\$ \ 1.104,09.$$

No entanto, na prática, os juros são geralmente compostos mais de uma vez ao ano. O intervalo de tempo entre sucessivos cálculos de juros é chamado de ***período de conversão****. Se os juros a uma taxa nominal de r ao ano são compostos m vezes ao ano sobre um principal P, então a taxa de juros simples para o período de conversão é*

$$i = \frac{r}{m} = \frac{\text{(Taxa de juros anual)}}{\text{(Períodos ao ano)}}.$$

Assim, a quantia após n anos é

$$A_n = P(1+i)^{n \cdot m}.$$

Se o banco paga juros trimestralmente, então, se uma pessoa deposita $R\$ \ 1.000,00$ a 2% de juros, então, em 5 anos, essa pessoa terá

$$A_5 = 1.000 \left(1 + \frac{0,02}{4}\right)^{5 \cdot 4} = 1.000\,(1 + 0,005)^{20} \cong R\$ \ 1.104,90.$$

Exemplo 7. ***(Taxa efetiva de juros)***
A ***taxa efetiva*** *é uma taxa de juros simples que produziria o mesmo montante acumulado em 1 ano obtido com uma taxa nominal composta m vezes ao ano. A taxa efetiva também é conhecida como* ***taxa real****. Para encontrarmos a relação entre a taxa de juros nominal, r composta m vezes ao ano, e sua correspondente taxa efetiva r_{ef}, ao ano, vamos assumir um investimento inicial de P reais. Então, o montante acumulado após 1 ano a uma taxa de juros simples de r_{ef} ao ano é*

$$A = P(1 + r_{ef}).$$

Igualmente, o montante acumulado após um ano a uma taxa de juros anual r, composta m vezes ao ano ($i = r/m$), é

$$A = P(1+i)^m = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m.$$

Igualando as duas expressões temos:

$$\begin{aligned} P(1+r_{ef}) &= P\left(1+\frac{r}{m}\right)^m; \\ (1+r_{ef}) &= \left(1+\frac{r}{m}\right)^m; \\ r_{ef} &= \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1. \end{aligned}$$

*A última expressão é a **fórmula da taxa de juros efetiva**.*

Quando temos uma taxa nominal de 8% *ao ano, a taxa de juros efetiva composta anualmente também é de* 8% *ao ano. De fato,*

$$r_{ef} = \left(1+\frac{0,08}{1}\right) - 1 = 0,08.$$

Se acaso a taxa de juros efetiva for composta trimestralmente, ou seja, $m = 4$*, temos que*

$$\begin{aligned} r_{ef} &= \left(1+\frac{0,08}{4}\right)^4 - 1; \\ r_{ef} &= (1,02)^4 - 1; \\ r_{ef} &= 0,08243. \end{aligned}$$

Portanto, a taxa de juros efetiva ao ano é de 8,243%.

Exemplo 8. ***(Valor presente e valor futuro)***
*No problema de juros compostos, o valor inicial P é geralmente chamado de **valor presente**, enquanto o valor acumulado A é chamado de **valor futuro**, pois é realizado em uma data futura. Em algumas situações, um investidor deseja determinar o valor que deve ser investido no presente, a uma taxa de juros fixa, para obter um determinado montante em uma data futura.*

Esse problema é resolvido expressando P em função de A, ou seja,

$$P = A(1+i)^{-n}.$$

Por exemplo, se quisermos obter um montante acumulado de R\$ 10.000 *em 4 anos a uma taxa de juros de* 6% *ao ano, com capitalização mensal, o valor a ser depositado hoje é de*

$$P = 10.000\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{-(4\cdot 12)} \cong 7.870,98.$$

***O volume 2 do Pré-cálculo sem mistérios* surge como uma solução para superar os obstáculos enfrentados por alunos ingressantes no ensino superior.**

Este livro foi elaborado para preencher as lacunas frequentemente encontradas nos cursos de cálculo diferencial e integral. Embasando-se nas dúvidas recorrentes dos estudantes, a obra se aprofunda em temas fundamentais como **constante de Euler, funções exponenciais, funções logarítmicas e fundamentos da trigonometria**. O texto estabelece uma ponte entre exemplos oriundos do ensino médio e tópicos mais avançados, garantindo uma transição harmoniosa e robusta ao ambiente acadêmico. Este é, sem dúvida, um investimento valioso para aqueles que buscam solidificar seus conhecimentos e entrar com segurança no universo do cálculo.

ISBN 978-85-212-2215-6

9 788521 222156

Blucher

www.blucher.com.br