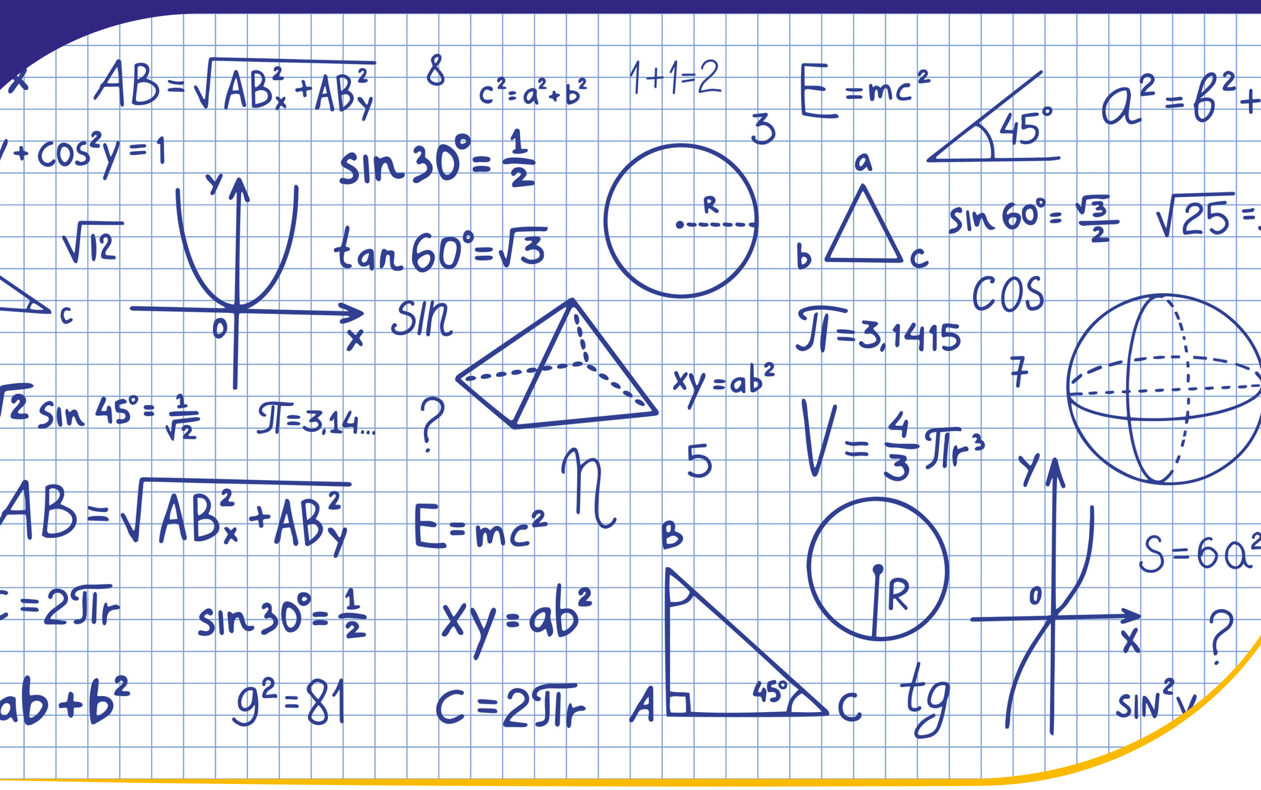
HÉLIO VINICIUS MORENO TOZATTI
RAIMUNDO DE ARAÚJO BASTOS JÚNIOR

PRÉ-CÁLCULO SEM MISTÉRIOS

Teoria e prática passo a passo



Blucher

Volume 1

Hélio Vinicius Moreno Tozatti
Raimundo de Araújo Bastos Júnior

PRÉ-CÁLCULO SEM MISTÉRIOS

Teoria e prática passo a passo

Volume 1

Acesse o gabarito aqui:

Pré-cálculo sem mistérios: teoria e prática passo a passo, volume 1

Publisher Edgard Blücher
Editor Eduardo Blücher
Coordenador editorial Rafael Fulanetti
Coordenação de produção Andressa Lira
Produção editorial Kedma Marques
Diagramação Os autores
Revisão de texto Maurício Katayama
Capa Laércio Flenic
Imagem da capa iStockphoto

Editora Blucher
Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Tozatti, Hélio Vinicius Moreno. Pré-cálculo sem mistérios, volume 1 : teoria e prática passo a passo / Hélio Vinicius Moreno Tozatti, Raimundo de Araújo Bastos Júnior. - São Paulo : Blucher, 2024. 226 p.

ISBN 978-85-212-2213-2 (impresso)

ISBN 978-85-212-2214-9 (eletrônico)

1. Pré-cálculo I. Título II. Bastos Júnior, Raimundo de Araújo

24-4230 CDD 512

Índices para catálogo sistemático: 1. Pré-cálculo

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução à teoria dos conjuntos

1.1 Conceito e notação

O conceito primitivo de conjuntos surgiu pela necessidade da contagem de objetos sobre uma correspondência entre cada animal (carneiros/porcos/ bodes) dentro de um curral em uma marca ou pedra, usando um registrador (***tally***), ou seja, a base da teoria de conjuntos veio da formação de coleções de animais, pessoas, números ou objetos de qualquer natureza. O primeiro registro de objeto matemático mais antigo conhecido é um osso de lobo que representa um tally encontrado na República Tcheca esculpido com entalhes há mais de 30 mil anos. A representação de um conjunto é feita por letras maiúsculas do **alfabeto latino** ($A, B, C, D, E, \ldots$). Os objetos que constituem um conjunto são chamados de **elementos do conjunto** e usualmente são representados por letras minúscula do **alfabeto latino**. Um conjunto consiste em escrever seus elementos entre chaves separados por vírgula; chamamos isso de **forma tabular** do conjunto.

Considerando as letras vogais, podemos determinar o conjunto das vogais da seguinte forma:

$$V = \{a, e, i, o, u\}.$$

Também definimos um conjunto determinando as propriedades que seus elementos precisam satisfazer, por exemplo:

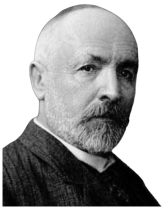
$$P = \{x \mid x \text{ é um número par}\}.$$

(P é o conjunto dos elementos x, tais que x é um número par.)

$$I = \{x \mid x \text{ é um número ímpar}\}.$$
(I é o conjunto dos elementos x, tais que x é um número ímpar.)

Chamamos esse formato de **forma de construção de um conjunto**. Observe que a linha vertical "|" é lida "tal que".

Cabe observar que a formalização dessa teoria foi iniciada apenas em 1874 por Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor[1] (1845-1918). Junto com o trabalho de Richard Dedekind[2] (1831-1916) e Giuseppe Peano[3] (1858-1932), eles mostraram que o sistema dos números naturais pode ser definido em termos de conceitos da teoria dos conjuntos.


Georg Cantor


Richard Dedekind


Giuseppe Peano

Não iremos adotar aqui uma axiomatização da teoria dos conjuntos para não entrarmos em antinomias ou círculos viciosos existentes na teoria geral dos conjuntos. A teoria dos conjuntos de Cantor, que estudaremos, é regida pelo seguinte conceito: "*Por conjunto, entendemos como sendo uma coleção de objetos definidos e distintos de nossa intuição ou de nosso pensamento, e esses objetos são chamados de elementos do conjunto*". Com essa imposição na noção de conjunto ou princípio do círculo vicioso, evitamos antinomias conhecidas na teoria geral dos conjuntos.

1.2 Conjuntos universo, unitário e vazio

Para a construção de alguma teoria matemática, inicialmente temos que determinar o conjunto onde serão desenvolvidos tais estudos. Chamamos esse conjunto de **conjunto universo**, que usualmente denotamos pela letra

[1] `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor`
[2] `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dedekind`
[3] `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Peano`

U. Fixado um conjunto universo, então definimos os conjuntos com propriedades existentes relacionadas com tal conjunto universo. Por exemplo, os números reais formam o conjunto universo na teoria de cálculo diferencial e integral em uma variável.

Além do conjunto universo, existem outros conjuntos que levam nomes específicos. Por exemplo, um conjunto formado apenas por um elemento é chamado de **conjunto unitário**. Um conjunto que não possui nenhum elemento é chamado de **conjunto vazio** (ou **conjunto nulo**).

Notação: $\emptyset$ ou $\{\}$.

Exemplo 1.1. *Dado o conjunto universo* $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{3\}$ *é um conjunto unitário e* $B = \{x \mid \text{números maiores que } 5\} = \emptyset = \{\}$ *é um conjunto vazio.*

Observação 1.1. *O conjunto* $A = \{\emptyset\}$ *não representa o conjunto vazio, pois o conjunto* A *indica que possui somente como elemento o conjunto vazio, ou seja, o conjunto* A *é um conjunto unitário.*

1.3 Relação de pertinência

Indicamos a relação de pertinência pelos símbolos $\in$ (pertence) e $\notin$ (não pertence). Essa relação se estabelece entre um elemento e um conjunto. Quando um elemento a pertence ao conjunto B, indicamos por $a \in B$. Usualmente, na lógica matemática (e também no trânsito), utilizamos a barra "/" para denotar a negação de um símbolo. Denotamos que um elemento x não pertence a um conjunto B por $x \notin B$. Para determinarmos se um elemento pertence ou não a um determinado conjunto, verificamos se ele está ou não representado no conjunto. O símbolo $\in$ foi estabelecido pelo matemático Giuseppe Peano e é a letra grega épsilon.

Exemplo 1.2. *Dado o conjunto* $B = \{1, 3, a, d\}$, *temos que* $3 \in B$; $2 \notin B$; $c \notin B$ *e* $d \in B$.

1.4 Relação de inclusão (subconjuntos)

Em algumas situações, formamos um conjunto com elementos de um outro conjunto. Quando agrupamos alguns elementos de um conjunto para se formar um novo conjunto, dizemos que formamos um **subconjunto** do conjunto em questão.

Definição 1.1. *Dados os conjuntos A e B, dizemos que o conjunto A é um* ***subconjunto*** *do conjunto B, quando todos os elementos do conjunto A também pertencem ao conjunto B. Essa relação é chamada de* ***relação de inclusão entre conjuntos****. Para expressarmos tal relação, utilizamos os símbolos $\subset$ (está contido) e $\not\subset$ (não está contido).*

Notação*:*

$$A \subset B \ (A \text{ está contido em } B),$$

$$A \not\subset B \ (A \text{ não está contido em } B).$$

Observação 1.2. *A relação de inclusão é somente entre conjuntos. Também denotamos $B \supset A$ (B contém A) para expressarmos $A \subset B$.*

Exemplo 1.3. *Consideramos o conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Os conjuntos $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$ e $\{8\}$ são subconjuntos unitários de A. Os conjuntos $\{2, 6\}$, $\{4, 8\}$ e $\{8, 2\}$ são subconjuntos do conjunto A com dois elementos. O conjunto $\{8, 4, 2\}$ é um subconjunto de A com três elementos.*

Observação 1.3. *Se A não é um subconjunto de B, ou seja, $A \not\subset B$, então deve haver pelo menos um elemento no conjunto A que não seja um elemento do conjunto B.*

Exemplo 1.4. *Dados $A = \{a, b, 1\}$, $B = \{a, b, 2, 1\}$ e $C = \{a, b, c\}$, temos que $A \subset B$, pois $a \in B$, $b \in B$ e $1 \in B$. Por outro lado, $C \not\subset B$ pois $c \notin B$ e, analogamente, podemos verificar que $C \not\subset A$.*

A seguinte proposição garante que o conjunto vazio é o único conjunto que é subconjunto de qualquer conjunto dado.

Proposição 1.1. *O conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto dado.*

Demonstração: Suponhamos que o resultado seja falso, ou seja, existe um conjunto A tal que $\emptyset \not\subset A$. Neste caso, existe um elemento $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$, o que é absurdo, pois $\emptyset$ não possui nenhum elemento. $\square$

1.4.1 Relação de igualdade de conjuntos

Dizemos que os conjuntos A e B são iguais, ou idênticos, quando $A \subset B$ e $B \subset A$.

Notação: $A = B$.

Nos próximos três exemplos que iremos apresentar, consideraremos o conjunto universo dos números inteiros. Esse conjunto será estudado com mais detalhes no próximo capítulo.

Exemplo 1.5. *Se* $A = \{2, 4, 8\}$ *e* $B = \{4, 2, 8\}$*, então* $A = B$*, pois* $2, 4, 8 \in A$ *e* $2, 4, 8 \in B$*. A ordem dos elementos não interfere na verificação da igualdade.*

Exemplo 1.6. *Dados* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{1, 2, 8\}$*. Temos* $A \neq B$*, pois* $3 \notin B$*.*

Exemplo 1.7. *Sejam os conjuntos*

$$C = \{x \mid x^2 - 1 = 0\},\ D = \{x \mid (x+1)(x-1) = 0\} \text{ e } E = \{1, -1\}.$$

Observemos que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$ *se, e somente se,* $x = \pm 1$*, assim, temos* $C = D = E$*.*

1.4.2 Subconjunto definido por uma propriedade

Um símbolo pode representar indistintamente qualquer um dos elementos de um conjunto dado. Esse símbolo recebe o nome de **variável do conjunto**. Por exemplo, seja

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

a notação $x \in A$ significa que x pode assumir qualquer dos valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Portanto, x é uma variável em A.

Os elementos de um conjunto que satisfazem a uma dada propriedade constituem um subconjunto definido por essa propriedade.

Exemplo 1.8. *Seja* $A = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$*, temos que*

$$B = \{x \in A \mid x \textit{ é par}\} = \{2, 8\};$$

$$C = \{x \in A \mid x \textit{ é ímpar}\} = \{1, 5, 7, 9\};$$

$$D = \{x \in A \mid x < 7\} = \{1, 2, 5\}.$$

1.4.3 Subconjunto próprio

Um conjunto é sempre um subconjunto de si mesmo, pois todos os seus elementos estão contidos nele. Porém, se um conjunto B é um subconjunto de um conjunto A e, ao mesmo tempo, B não é igual a A, então dizemos que B é um **subconjunto próprio** de A. Essa distinção é importante, e é comum utilizar a notação $B \subsetneq A$ para indicar que B é um subconjunto próprio de A. Alguns autores, entretanto, acabam adotando a notação $B \subseteq A$ para se referir a qualquer subconjunto de A, sem fazer essa distinção entre subconjuntos próprios e subconjuntos iguais ao conjunto original.

Notação: $B \subsetneq A$ (B é um subconjunto próprio de A).

Exemplo 1.9. *Observemos que o conjunto vazio* $\emptyset$ *é um subconjunto próprio de qualquer conjunto* A *não vazio. De fato, da Proposição 1.1,* $\emptyset \subset A$ *e de* A *ser não vazio, temos* $A \neq \emptyset$*. Assim, o conjunto vazio não possui um subconjunto próprio.*

Se um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B e esse conjunto B é um subconjunto de outro conjunto C, é natural concluir que A é um subconjunto de C, ou seja, a propriedade de contingência é transitiva. A proposição a seguir verifica essa propriedade.

Proposição 1.2. *Sejam* A*,* B *e* C *conjuntos não vazios. Se* $A \subset B$ *e* $B \subset C$*, então* $A \subset C$*.*

Demonstração: Seja x um elemento de A, ou seja, $x \in A$. Como A é um subconjunto de B, x também pertence a B, isto é, $x \in B$. Mas, por hipótese, $B \subset C$. Assim, qualquer elemento de B, incluindo x, também é um elemento de C. Mostrando que dado qualquer $x \in A$ implica que $x \in C$. Portanto, $A \subset C$. $\square$

1.5 Operações com conjuntos

A partir de dois conjuntos, é possível criar outros conjuntos por meio de operações predeterminadas. Na teoria dos conjuntos, estudamos três operações principais: a **união** (ou **reunião**), a **intersecção** (ou **interseção**) e a **diferença**. É importante notar que essas operações não são as mesmas que as operações aritméticas, mas sim operações que envolvem a combinação e manipulação dos elementos de conjuntos.

1.5.1 União e intersecção

Consideramos a seguinte situação com os seguintes conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e } B = \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Dos conjuntos A e B, podemos construir um novo conjunto C, reunindo todos os elementos de A com os elementos de B, ou seja,

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

O conjunto C é a chamada **união** dos conjuntos A e B. Convencionamos que um mesmo elemento, repetido em ambos os conjuntos, na união ele comparecerá uma única vez. Formalmente a união entre dois conjuntos é dada por:

Definição 1.2. *A* ***união*** *(ou* ***reunião****) dos conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos de A junto com os elementos de B, ou seja,*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Observação 1.4. *Da definição de união entre conjuntos, podemos afirmar que* $A \subset A \cup B$ *e* $B \subset A \cup B$.

Exemplo 1.10. *Dados os conjuntos* $A = \{2, 4, 8\}$ *e* $B = \{2, 5, 8\}$, *temos que* $A \cup B = \{2, 4, 5, 8\}$, *pois esse é o conjunto que contém todos os elementos de* A *e* B, *sem repetições. De forma similar, podemos calcular a união dos conjuntos* $C = \{7, 10, 13\}$ *e* $D = \{1\}$, *resultando em* $C \cup D = \{10, 13, 1, 7\}$. *Já para o conjunto* $E = \{\pi, \sqrt{2}\}$ *e* $F = \emptyset$ *(o conjunto vazio), temos que* $E \cup F = \{\pi, \sqrt{2}\}$, *pois o conjunto vazio não adiciona nenhum elemento ao conjunto* E.

Exemplo 1.11. *Considerando os conjuntos:*

$$P = \{x \mid x = 4n \text{ com } n \in \mathbb{N}\},$$

$$I = \{x \mid x = 2n + 1 \text{ com } n \in \mathbb{N}\} \text{ e}$$

$$D = \{x \mid x = 8n \text{ com } n \in \mathbb{N}\}.$$

O conjunto $P \cup I \cup M$ *é formado pelos elementos* x *tais que é um número natural múltiplo de* 4 *ou é um número natural ímpar ou é um número natural múltiplo de* 8. *Mas observe que todo número natural múltiplo de* 8 *é um número natural múltiplo de* 4, *assim, podemos escrever*

$$P \cup I \cup M = \{x \mid x = 4n \text{ ou } x = 2n + 1 \text{ com } n \in \mathbb{N}\}.$$

Exemplo 1.12. *Se* $A \cup B = \emptyset$, *então* $A = B = \emptyset$. *De fato, pela Observação 1.4, temos que* $A \subset A \cup B = \emptyset$, *ou seja,* $A \subset \emptyset$. *Como o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto (ver Proposição 1.1), podemos afirmar que* $A = \emptyset$. *Analogamente, concluímos que* $B = \emptyset$.

Na lógica matemática o conectivo "ou"possui a propriedade associativa e comutativa. Na próxima proposição temos que as propriedades são demonstradas aplicando somente a definição de união entre conjuntos e as propriedades do conectivo "ou".

Proposição 1.3. *Dados* A, B *e* C *conjuntos não vazios.*

(a) $A \cup B = B \cup A$; *(propriedade comutativa)*

(b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; *(propriedade associativa)*

(c) $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$;

(d) $A \cup B = B$ *se, e somente se,* $A \subset B$.

Demonstração: Exercício. $\square$

Devido à validade da propriedade associativa na união entre conjuntos, podemos realizar a união de vários conjuntos, por exemplo:

$$A \cup B \cup C \cup D = (A \cup B) \cup (C \cup D).$$

O cálculo anterior pode ser feito de diversas maneiras. Por exemplo, usando essa igualdade, calculamos os conjuntos $(A \cup B)$ e $(C \cup D)$ e, em seguida, determinamos a união $(A \cup B) \cup (C \cup D)$.

Exemplo 1.13. *Podemos calcular o conjunto união de* $A = \{a, 2, b, 3, c, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{a, b, c, d, e\}$ *e* $D = \{1, 2, 5, 6, d, e, f, g\}$ *da seguinte forma: Primeiro, calculamos* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, b, c\}$. *Em seguida, tomamos a união deste conjunto com* C, *obtendo*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, d, e\}.$$

Finalmente, calculamos a união deste conjunto com D, *chegando a*

$$(A \cup B \cup C) \cup D = A \cup B \cup C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, a, b, c, d, e, f, g\}.$$

Retornando aos conjuntos do início desta seção:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e } B = \{3, 4, 5, 6, 7\},$$

podemos formar um outro conjunto com os elementos em comuns aos dois, ou seja, os elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B. Nesse caso, esse conjunto é

$$C = \{3, 4, 5\}.$$

Dizemos que o conjunto C é a **intersecção** dos conjuntos A e B.

Definição 1.3. *A **intersecção** (ou **interseção**) dos conjuntos A e B é dada por:*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

*Quando $A \cap B = \emptyset$ dizemos que os conjuntos A e B são **disjuntos**.*

Exemplo 1.14. *Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 8\}$, $B = \{2, 5, 8\}$, $C = \{3, 2, 1\}$ e $D = \{1\}$. Podemos calcular $A \cap B$ e $C \cap D$ da seguinte forma:*

$$A \cap B = \{2, 8\},$$
$$C \cap D = \{1\}.$$

Agora, considere os conjuntos $E = \{\pi, \sqrt{2}\}$ e $F = \{3, 4\}$. Nesse caso, temos que $E \cap F = \emptyset$, ou seja, os conjuntos E e F não possuem elementos em comum.

Exemplo 1.15. *Recordando que um losango é um paralelogramo com quatro lados de mesma medida e um retângulo é um paralelogramo que tem quatro ângulos retos. Denotando, respectivamente, por L e R os conjuntos dos losangos e dos retângulos, temos:*

$$L = \{x \mid x \text{ é um paralelogramo com 4 lados de mesma medida}\} \text{ e}$$
$$R = \{x \mid x \text{ é um paralelogramo com 4 ângulos retos}\}.$$

A interseção entre esses dois conjuntos é formada pelos elementos que são paralelogramos com 4 lados de mesma medida e com 4 ângulos retos, ou seja, é o conjunto formado pelos quadrados. Em notação de conjuntos, podemos escrever:

$$Q = L \cap R = \{x \mid x \text{ é um quadrado}\}.$$

O conectivo "e" na lógica matemática possui a propriedade de associatividade e comutatividade. As propriedades a seguir são demonstradas aplicando somente a definição de intersecção entre conjuntos e as propriedades do conectivo "e".

Proposição 1.4. *Dados A, B e C conjuntos não vazios.*

(a) $A \cap B = B \cap A$; *(propriedade comutativa)*

(b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; *(propriedade associativa)*

(c) $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$;

(d) $A \cap B = A$ *se* $A \subset B$.

Demonstração: Exercício. □

De modo análogo ao feito para a união entre conjuntos, a propriedade associativa na intersecção entre conjuntos garante que podemos realizar a intersecção entre mais de dois conjuntos, ou seja, $A \cap B \cap C \cap D = (A \cap B) \cap (C \cap D)$. Para isso, calculamos inicialmente os conjuntos $(A \cap B)$ e $(C \cap D)$ e, em seguida, calculamos $(A \cap B) \cap (C \cap D)$.

Exemplo 1.16. *Considerando os conjuntos*

$$A = \{a, b, c, 4, 5, 6\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, b, c, d, e\},$$

$$C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e\} \text{ e } D = \{0, 1, 2, 3, 4, a, b, c, d\},$$

podemos observar que a interseção entre A *e* B *é o conjunto* $\{b, c, 4, 5, 6\}$*. Em seguida, ao realizarmos a interseção com* C*, obtemos novamente o conjunto* $\{b, c, 4, 5, 6\}$*, ou seja,* $(A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C = \{b, c, 4, 5, 6\}$*. Por fim, ao realizarmos a interseção com o conjunto* D*, chegamos ao conjunto* $\{4, b, c\}$*, ou seja,* $(A \cap B \cap C) \cap D = A \cap B \cap C \cap D = \{4, b, c\}$*.*

Na teoria dos conjuntos, as operações união e intersecção admitem certas similaridades com as operações algébricas adição e multiplicação. Mais precisamente, sabendo que a lei de distributividade é válida para os conetivos "ou" e "e", as propriedades distributivas para conjuntos seguem aplicando as propriedades dos conectivos na definição de cada conjunto.

Proposição 1.5. *Sejam* A*,* B *e* C *conjuntos, então as propriedades distributivas são válidas, ou seja,*

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Demonstração: Exercício. □

As demonstrações das Proposições 1.3, 1.4 e 1.5 ficam a cargo do leitor. Por conveniência, estão disponíveis no link `https://youtu.be/I6pO8siZNr8`.

1.5.2 Conjunto diferença

Sejam os conjuntos

$$A = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\} \text{ e } B = \{6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Observe que o conjunto $\{0, 1, 3, 4, 5\}$, é formado pelos elementos de A "menos" os elementos de B. A formalização desse conceito vem da seguinte definição:

Definição 1.4. *Dados os conjuntos A e B, dizemos que o* ***conjunto diferença*** *entre A e B é o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem ao conjunto B, ou seja,*

$$A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Ambas as notações, "$A - B$" e "$A \setminus B$", são bastantes empregadas em matemática. Neste texto, optamos pela notação $A - B$ para expressarmos a diferença entre A e B.

Exemplo 1.17. *Dados os conjuntos $A = \{3, 2, 1\}$ e $B = \{0, 1, 5\}$, note que $A - B = \{3, 2\}$ e $B - A = \{0, 5\}$. Observe que, em geral, $A - B \neq B - A$. Ou seja, a propriedade comutativa não é válida para a diferença entre conjuntos.*

Exemplo 1.18. *Sejam os conjuntos $A = \{3, 2, 1\}$ e $C = \{4, 5, 6\}$. Então,*

$$A - C = \{3, 2, 1\} = A \text{ e}$$

$$C - A = \{4, 5, 6\} = C.$$

Observe que, com esses dados, não podemos assegurar a seguinte afirmação:

$$A - C = A \text{ então } C = \emptyset.$$

Observação 1.5. *Seja A um conjunto qualquer. Então $A - \emptyset = A$, pois*

$$A - \emptyset = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin \emptyset\}$$

e $x \notin \emptyset$ é uma sentença verdadeira para qualquer elemento do conjunto A.

Observação 1.6. *Dados A e B conjuntos não vazios. Se $A - B = \emptyset$, então $A = B$. De fato, se $A \neq B$, então existe $x \in A$ tal que $x \notin B$, ou seja, $A - B \neq \emptyset$. Aplicando a lei contrapositiva, obtemos o desejado. A hipótese para que os conjuntos sejam não vazios segue do fato de que $\emptyset - B = \emptyset$ para qualquer conjunto $B \neq \emptyset$.*

Exemplo 1.19. *No caso com os conjuntos $A = \{3, 2, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos*

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\} = \emptyset \text{ e}$$

$$A - C = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin C\} = \emptyset.$$

A partir desse exemplo, $A - B = A - C$ e $B \neq C$, ou seja, a sentença $A - B = A - C \Rightarrow B = C$ é falsa.

Exemplo 1.20. *Dados os seguintes conjuntos:*

$$A = \{a, b, c, d\}, B = \{b, c, d, e, f\},$$

$$C = \{1, b\}, D = \{2, c, 4, e, f\}, E = \{3, 7, 5, 9\}.$$

Podemos aplicar a operação de diferença entre conjuntos para obter os seguintes resultados:

- $A - B = \{a\}$: *Esse resultado significa que o conjunto resultante da diferença de B em relação a A contém somente o elemento a, pois ele pertence a A, mas não pertence a B.*

- $C - D = \{1, b\}$: *Nesse caso, a diferença entre D e C resulta no conjunto $\{1, b\}$, pois esses elementos pertencem a C, mas não pertencem a D.*

- $E - \{\} = \{3, 7, 5, 9\}$: *A diferença do conjunto vazio com qualquer conjunto resulta no próprio conjunto, pois não há elementos para serem removidos.*

Observação 1.7. *Da Definição 1.4, temos que o conjunto A contém $A - B$ para qualquer conjunto B, ou seja, $A - B \subset A$.*

Observação 1.8. *Os conjuntos $A - B$, $A \cap B$ e $B - A$ são dois a dois disjuntos, ou seja, $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$, $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ e $(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$.*

1.5.3 Conjunto complementar

Quando a diferença entre dois conjuntos é por meio de um conjunto e um subconjunto deste, essa operação é conhecida como **conjunto complementar**. Mais precisamente,

Definição 1.5. *Dados os conjuntos A e B tais que $A \subset B$, o* ***conjunto complementar*** *de A em relação a B é definido por:*

$$\complement_B^A = B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}.$$

Fixado um conjunto universo U, o **complementar** do conjunto A em relação a U é o conjunto

$$\complement_U^A = A^C = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}.$$

Usaremos sempre a notação A^C para representar $\complement_U^A$.

Observação 1.9. *O conjunto diferença entre os conjuntos A e B é igual à intersecção de A com o complementar de B. De fato, $x \in A - B$, se, e somente se, $x \in A$ e $x \notin B$, se, e somente se, $x \in A$ e $x \in B^C$. Portanto, $A - B = A \cap B^C$.*

Exemplo 1.21. *Sejam $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, então*

$$\complement_A^B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\} = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Exemplo 1.22. *Dados $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 5\}$. Note que $B - A = \{1, 5\}$. Mas não podemos chamar $B - A$ de conjunto complementar de B em relação a A pois $A \not\subset B$, ou seja, a condição essencial para determinar $\complement_A^B$ é de que $A \subset B$.*

Observação 1.10. *A união de qualquer conjunto A com seu complementar A^C é igual ao conjunto universo, ou seja, $A \cup A^C = U$. Além do mais, o conjunto A e seu complementar são disjuntos, isto é, $A \cap A^C = \emptyset$.*

Observação 1.11. *O complementar do conjunto universo é o conjunto vazio e o complementar do conjunto vazio é o conjunto universo, ou seja, $U^C = \emptyset$ e $\emptyset^C = U$.*

Observação 1.12. *O complementar do conjunto complementar de A é o próprio conjunto A, isto é, $\left(A^C\right)^C = A$.*

O volume 1 do Pré-cálculo sem mistérios surge como uma solução para superar os obstáculos enfrentados por alunos ingressantes no ensino superior. Este livro foi elaborado para preencher as lacunas frequentemente encontradas nos cursos de cálculo diferencial e integral.

Embasando-se nas dúvidas recorrentes dos estudantes, a obra se aprofunda em temas fundamentais como *conjuntos*, *números* e *funções*. O texto estabelece uma ponte entre exemplos oriundos do ensino médio e tópicos mais avançados, garantindo uma transição harmoniosa e robusta ao ambiente acadêmico. Este é, sem dúvida, um investimento valioso para aqueles que buscam solidificar seus conhecimentos e adentrar com segurança o universo do cálculo.

ISBN 978-85-212-2213-2

9 788521 222132

Blucher

www.blucher.com.br