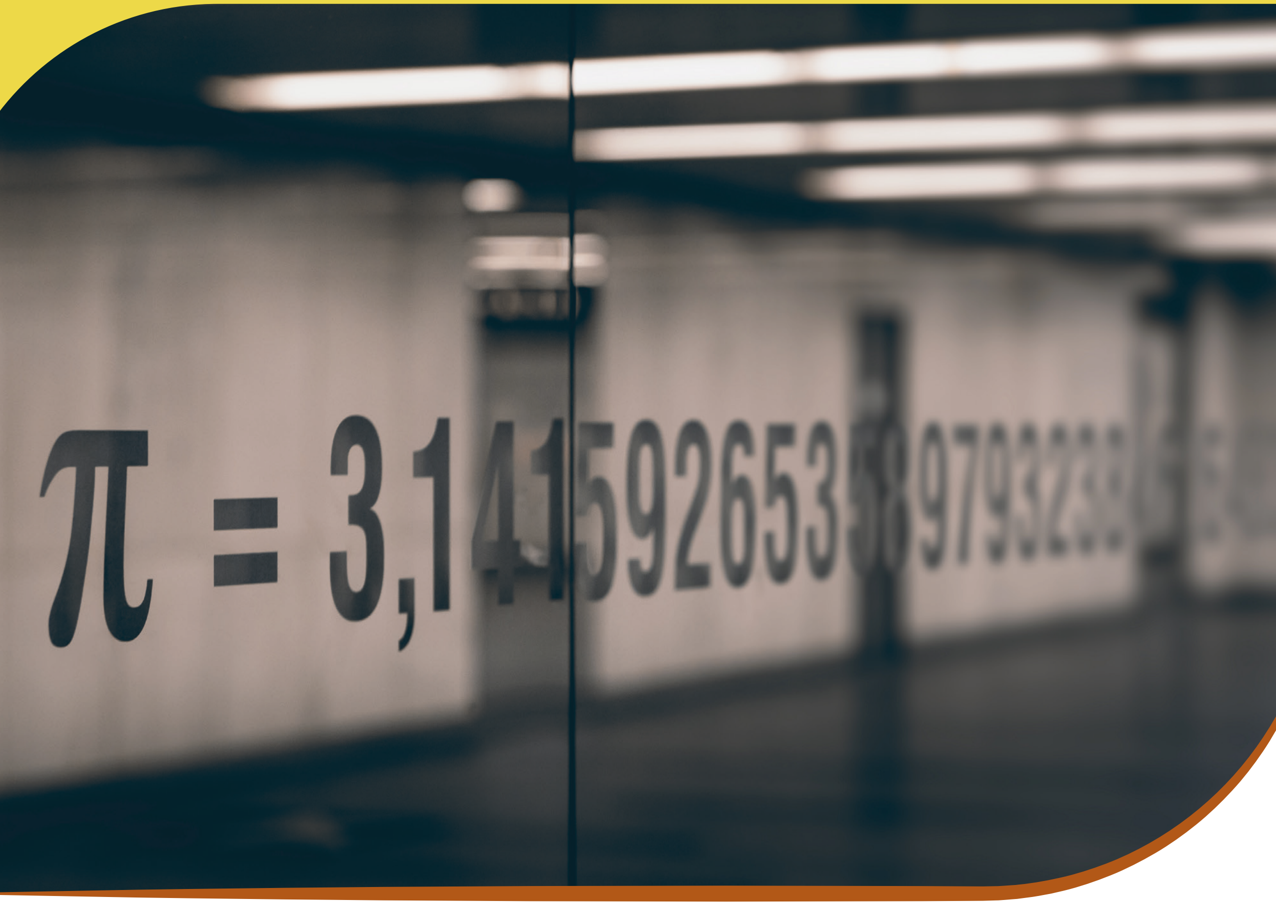
GERMAN LOZADA CRUZ

NÚMEROS REAIS



Blucher

NÚMEROS REAIS

German Lozada Cruz

Números reais

© 2023 German Lozada Cruz

Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher

Editor Eduardo Blücher

Coordenação editorial Jonatas Eliakim

Produção editorial Ariana Corrêa

Revisão de texto Maurício Katayama

Capa Laércio Flenic

Imagem da capa iStockphoto

Editora Blucher
Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4° andar
CEP 04531-934 São Paulo SP Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Cruz, German Lozada

Números reais / German Lozada Cruz. - São Paulo : Blucher, 2023.

112 p.: il.

Bibliografia

ISBN 978-65-5506-755-2

1. Matemática Estudo e ensino 2. Números reais I. Título

23-1717 CDD 510.07

Índice para catálogo sistemático: 1. Matemática Estudo e ensino

Conteúdo

Capítulo 1

Os números reais: propriedades algébricas

Neste capítulo vamos ver brevemente alguns resultados importantes sobre os números reais. Assumiremos conhecido o conjunto dos números naturais, o qual é denotado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$,[1] o conjunto dos números inteiros, o qual é denotado por $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$[2] e o conjunto dos números racionais, o qual é denotado por $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$.[3]

1.1 Indução matemática

A teoria dos números naturais pode ser obtida a partir de três axiomas, chamados axiomas de Peano. O estudo detalhado dessa teoria está além dos propósitos deste texto. Por isso, vamos partir de outro ponto: vamos admitir conhecidas as operações de adição, suas propriedades algébricas e a ordem dos números naturais.

Definição 1.1.1 *Seja* $\varnothing \neq N \subset \mathbb{N}$. *Dizemos que* $n_0 \in N$ *é o* **menor elemento** (*ou* **elemento mínimo**) *de* N *se* $n_0 \leqslant n$ *para todo* $n \in N$.

[1] A notação $\mathbb{N}$ vem da palavra *natural*. Alguns autores também chamam os números naturais de números *inteiros positivos*.

[2] A notação $\mathbb{Z}$ vem da palavra alemã *Zahl*, que significa número.

[3] A notação $\mathbb{Q}$ vem da palavra *quociente*.

A partir dessa definição, podemos concluir que, se m_0 e n_0 são elementos menores de N, então tem-se $m_0 \leqslant n_0$ e $n_0 \leqslant m_0$, donde $m_0 = n_0$. Portanto, o elemento menor de um subconjunto dos números naturais é único.

Um resultado de grande importância em $\mathbb{N}$ é o chamado *princípio da boa ordenação*.

Princípio da boa ordenação (PBO).
Todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ não vazio possui um menor elemento de A, isto é, existe $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leqslant n$, $\forall n \in A$.
Demonstração. Para cada número $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$.
• Se $1 \in A$, então 1 será o elemento menor de A.
• Se $1 \notin A$, então consideremos o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} : I_n \subset \mathbb{N} \backslash A\}$.

Como $I_1 = \{1\} \subset \mathbb{N} \backslash A$ segue que $1 \in X$. Por outro lado, como $A \neq \varnothing$ segue que $X \neq \mathbb{N}$. Logo, existe $n \in X$ tal que $n+1 \notin X$. Então $I_n \subset \mathbb{N} \backslash A$, mas $n_0 = n+1 \in A$.

Afirmamos que n_0 é o menor elemento de A. De fato, suponhamos que existe $l \in A$ tal que $l < n+1$. Logo $l \leqslant n$, daí $l \in X$, ou seja, $l \notin A$, o que é um absurdo. Portanto, n_0 é o menor elemento de A. □

Exemplo 1.1.2 *Não existe número natural n tal que* $0 < n < 1$.

Solução. Definamos $A = \{n \in \mathbb{N} : 0 < n < 1\}$. Vamos mostrar que $A = \varnothing$. Suponhamos que $A \neq \varnothing$, logo, pelo princípio da boa ordenação, A possui elemento menor que denotaremos por a. Assim, $0 < a < 1$. Multiplicando essa desigualdade por a temos $0 < a^2 < a < 1$. Logo a^2 é elemento menor de A e é menor que a, mas isso é um absurdo, pois a é elemento menor de A. Portanto, $A = \varnothing$. □

Um resultado que é importante em toda a matemática é o *princípio da indução finita*. Ele é a base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes aos números naturais.

Princípio da indução finita. *Seja $P(n)$ uma propriedade referente ao número natural n. Suponhamos que*:
(**i**) *$P(1)$ é válida.*
(**ii**) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n+1)$.*

Então $P(n)$ é valida qualquer que seja o número natural n.

Demonstração. Denotemos por $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ é falsa}\}$ e vamos mostrar que $S = \emptyset$. Suponhamos que $S \neq \emptyset$. Pelo princípio da boa ordenação, S possui elemento menor que denotaremos por n_0. Por (**i**), $n_0 \neq 1$, logo $n_0 > 1$. Como n_0 é elemento menor, segue que $n_0 - 1 \notin S$, ou seja, $P(n_0 - 1)$ é verdadeira. Por (**ii**) segue que $P(n_0)$ também é verdadeira, já que $n_0 = (n_0 - 1) + 1$. Isso é uma contradição. Portanto $S = \emptyset$. □

Exemplo 1.1.3 *Prove que* $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solução. Seja $P(n)$ a afirmação dada, i.e.,

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{n(n+1)}{2}.$$

Provaremos que $P(n)$ é válida para todo natural n.
(**i**) $P(1) : \ 1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$.
(**ii**) Suponhamos que $P(n)$ vale (hipótese de indução). Vamos provar que $P(n+1)$ também vale. De fato,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \tfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= (n+1)(\tfrac{n}{2} + 1) \\ &= \tfrac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,$P(n+1)$ é verdade. Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 1.1.4 (Desigualdade de Bernoulli) *Para todo número real* $x \geqslant -1$ *e todo* $n \in \mathbb{N}$ *tem-se*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \tag{1.1.1}$$

Demonstração. Seja $P(n)$ a afirmação dada, i.e., $P(n) : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$, $x \geqslant -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(**i**) Se $n = 1$, claramente vemos que $P(1)$ vale, já que $1 + x \geqslant 1 + x$, para todo $x \geqslant -1$.
(**ii**) Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira, i.e., $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ (hipótese de indução).
(**iii**) Vamos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira sempre que $P(n)$ seja verdadeira.

De fato,

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx)$$
$$\geqslant 1+nx+x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x.$$

Portanto, $P(n+1)$ é verdadeira. Logo, pelo princípio da indução finita, temos que $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, a desigualdade de Bernoulli (1.1.1) vale para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 1.1.5 *Seja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{N}$. Seja $a = f(1)$. Mostre que*

$$f(n) = a^n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.1.2}$$

Solução. Seja a afirmação $P(n)$ dada por $P(n) : f(n) = a^n$.
(**i**) Se $n = 1$, claramente vemos que $P(1)$ é verdade, pois $f(1) = a$, por definição.
(**ii**) Suponhamos que, para $n = k$, $P(k)$ é verdadeira (hipótese de indução), isto é, $f(k) = a^k$.
(**iii**) Vamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira sempre que $P(k)$ seja verdadeira.

De fato, observe que

$$f(k+1) = f(k)f(1) = a^k a = a^{k+1}.$$

Portanto, $P(k+1)$ é verdade. Logo, pelo princípio da indução, temos que $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$, i.e., a equação (1.1.2) vale para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 1.1.6 *Demonstre que o número $n(n+1)(n+5)$ é um múltiplo de 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Solução. Denotemos por $P(n) : n(n+1)(n+5)$ é múltiplo de 3.
(**i**) Se $n = 1$, claramente vemos $P(1)$ é verdade, pois $1 \cdot 2 \cdot 6 = 12 = 3 \cdot 4$.
(**ii**) Suponhamos que, para $n = k$, $P(k)$ é verdade (hipótese de indução).
(**iii**) Vamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira sempre que $P(k)$ seja verdadeira.

De fato, denotemos por $k(k+1)(k+5) = 3l$, onde $l \in \mathbb{N}$. Agora

$$\begin{aligned}
(k+1)(k+1+1)(k+1+5) &= (k+1)[(k+1)+1][(k+5)+1] \\
&= [k(k+1)+k+k+1+1][(k+5)+1] \\
&= [k(k+1)+2(k+1)][(k+5)+1] \\
&= k(k+1)(k+5)+k(k+1) \\
&\quad +2(k+1)(k+5+1) \\
&= 3l+(k+1)(k+2(k+6)) \\
&= 3l+3(k+1)(k+4) \\
&= 3m,
\end{aligned}$$

onde $m = l+(k+1)(k+4) \in \mathbb{N}$. Portanto, $P(k+1)$ é verdade. Logo, $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $n(n+1)(n+5)$ é um múltiplo de 3 para todo $n \in \mathbb{N}$. □

1.2 Exercícios

1. Usando o PBO, mostre que o conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} : 7 < m < 8\}$ é vazio.

2. Usando o PBO, mostre que o conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} : n < m < n+1\}$ é vazio, onde $n \in \mathbb{N}$.

3. Mostre que $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Mostre que $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Mostre que $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Seja $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $\underbrace{x+x+\cdots x}_{n-\text{vezes}} = nx$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

7. Mostre que $\underbrace{111\cdots 1}_{n1's} = \frac{10^n-1}{9}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $S_n = \sum_{k=1}^{n} k!$ é ímpar.[4]

[4] $k!$ é o fatorial de n e é dado por $k! = k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1$.

9. Mostre que $n < 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

10. Mostre que $n! \leqslant n^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

11. Mostre que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 > \frac{n^3}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

12. Mostre que, se $0 < a < b$, então $0 < a^n < b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

13. Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $8^n - 3^n$ é divisível por 5.

14. Mostre que $8^n + 2 \cdot 7^n - 1$ é divisível por 7 para todo $n \in \mathbb{N}$.

15. Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é múltiplo de 3.

1.3 Números reais

O conjunto dos números reais[5] será denotado por $\mathbb{R}$. Neste conjunto estão definidas duas operações binárias,[6] chamadas de adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$.
A **adição** denotada por a é definida por

$$\begin{aligned} a: \ \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to a(x, y) = x + y \,(\text{soma}) \end{aligned}$$

e satisfaz as seguintes propriedades:

(a_1) $x + y = y + x$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ (comutatividade).

(a_2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ (associatividade).

(a_3) **Existência de elemento neutro da adição**. Existe um elemento em $\mathbb{R}$ denotado por 0 tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $x + 0 = x$.

(a_4) **Existência de elemento inverso (oposto) da adição**. Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe um elemento em $\mathbb{R}$ denotado por $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.

---

[5] A notação $\mathbb{R}$ vem da palavra *real*.

[6] Uma operação binária $\mathbb{R}$ é uma função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A **multiplicação** denotada por m é definida por

$$\begin{array}{rll} m: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to m(x,y) = x\cdot y = xy\,(\text{produto}) \end{array}$$

e satisfaz as seguintes propriedades:

(m_1) $xy = yx,\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ (comutatividade).

(m_2) $(xy)z = x(yz),\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ (associatividade).

(m_3) **Existência de elemento neutro da multiplicação**. Existe um elemento em $\mathbb{R}$ que denotamos por 1, $1 \neq 0$ tal que $x\cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

(m_4) **Existência de elemento inverso da multiplicação** Para todo $x \neq 0$ existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x\cdot x^{-1} = 1$.

(m_5) $x(y+z) = xy + xz,\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ (distributividade).

O conjunto dos números reais acrescido das operações binárias de adição e multiplicação $(\mathbb{R},+,\cdot)$ satisfazendo as propriedades acima é dito de *corpo dos números reais*.

Dos axiomas acima, resultam todas as regras familiares de manipulação com os números reais. Por exemplo, da comutatividade segue que $0 + x = x$ e $-x + x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Analogamente $1\cdot x = x$ e $x^{-1}\cdot x = 1$ quando $x \neq 0$.

A soma $x + (-y)$ será indicada por $x - y$ e chamada a diferença entre x e y. Se $y \neq 0$, o produto $x\cdot y^{-1}$ será indicado por $\dfrac{x}{y}$ e chamado o quociente de x por y.

As operações $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ni (x,y) \mapsto x - y \in \mathbb{R}$(diferença) e $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \ni (x,y) \mapsto \dfrac{x}{y} \in \mathbb{R}$(quociente) chamam-se, respectivamente *subtração* e *divisão*.

Evidentemente, a divisão de x por y só faz sentido quando $y \neq 0$, pois o número 0 não possui inverso multiplicativo.

Teorema 1.3.1 *Os elementos neutros aditivo e multiplicativo são únicos.*

Demonstração. Suponhamos que existem 0 e $0'$ em $\mathbb{R}$ tal que

$$x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x + 0' = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Agora, $0' = 0' + 0$, pois 0 é elemento neutro. Por outro lado, $0'$ também é elemento neutro aditivo, assim $0' = 0' + 0 = 0$, logo $0' = 0$.

Suponhamos que existem 1 e $1'$ em $\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &= x, \forall x \in \mathbb{R} \\ x \cdot 1' &= x, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Agora, $1' = 1' \cdot 1$, pois 1 é elemento neutro multiplicativo. Por outro lado, $1'$ também é inverso multiplicativo, assim, $1' = 1' \cdot 1 = 1$, logo $1' = 1$. □

Teorema 1.3.2 *Os elementos oposto e inverso são únicos.*

Demonstração. Suponhamos que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \begin{cases} y \in \mathbb{R} : x + y = 0 \\ y' \in \mathbb{R} : x + y' = 0. \end{cases}$$

Se $x + y' = 0$, então

$$\begin{aligned} x + y' + y &= 0 + y \\ 0 + y' &= y \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Suponhamos que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists \begin{cases} y \in \mathbb{R} : xy = 1 \\ y' \in \mathbb{R} : xy' = 1. \end{cases}$$

Se $xy' = 1$, então

$$(xy')y = 1 \cdot y \Leftrightarrow 1 \cdot y' = y \Leftrightarrow y' = y.$$

□

Teorema 1.3.3 $x \cdot 0 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Observe que

$$x \cdot 0 + x = x \cdot 0 + x \cdot 1 = x(0+1) = x \cdot 1 = x.$$

Disto, segue que $x \cdot 0 + x = x$. Somando o oposto de x em ambos os lados desta última igualdade, temos $(x \cdot 0 + x) + (-x) = x + (-x) = 0$. Assim, temos $x \cdot 0 + 0 = 0$ e, portanto, $x \cdot 0 = 0$. □

Teorema 1.3.4 *Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $-x = (-1)x$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Observe que

$$x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0x = 0.$$

Disto, segue que $x + (-1)x = 0$. Logo, pela unicidade do elemento oposto de x, segue que $(-1)x = -x$. □

Corolário 1.3.5 *Se $x, y \in \mathbb{R}$, então $x(-y) = (-x)y = -(xy)$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Observe que

$$\begin{aligned} x(-y) &= x((-1)y) = x(-1)y = ((-1)x)y = (-x)y \\ &= ((-1)x)y = (-1)(xy) = -(xy). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3.6 *Para todo número real x tem-se $-(-x) = x$.*

Demonstração. Sabemos que o oposto de x é $-x$ e satisfaz $x + (-x) = 0$. Agora, de $(-x) + x = 0$, segue que x é o oposto de $-x$, ou seja $x = -(-x)$. □

Teorema 1.3.7 *Se $x, y \in \mathbb{R}$, então $(-x)(-y) = xy$.*

Demonstração. De fato, observe que do Corolário 1.3.5 segue que

$$(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-(xy)) = xy,$$

onde na última igualdade usamos o Teorema 1.3.6. □

Teorema 1.3.8 *Se* $0 \neq x \in \mathbb{R}$*, então* $(x^{-1})^{-1} = x$*.*

Demonstração. Sabemos que o inverso multiplicativo de x satisfaz

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

De $x^{-1} \cdot x = 1$ e do fato de o inverso multiplicativo ser único, segue que $x = (x^{-1})^{-1}$.

□

Teorema 1.3.9 *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}$*. Então* $xy = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$ *ou* $y = 0$*.*

Demonstração. $\Rightarrow$] De fato, suponhamos que $y \neq 0$. Logo existe $y^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $y \cdot y^{-1} = y^{-1} \cdot y = 1$. Agora, de $xy = 0$ temos

$$\begin{aligned}
(xy)y^{-1} &= 0y^{-1} \\
x(yy^{-1}) &= 0 \\
x \cdot 1 &= 0 \\
x &= 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, assumindo que $x \neq 0$, obtém-se $y = 0$. Portanto, se $xy = 0$, temos $x = 0$ ou $y = 0$.

$\Leftarrow$] Se $x = 0$, então $xy = 0 \cdot y = 0$ ou, se $y = 0$, então $xy = x \cdot 0 = 0$. □

Exemplo 1.3.10 *Resolver a equação* $x^2 - 6x - 7 = 0$*.*

Solução. Fatorando a expressão quadrática $x^2 - 6x - 7$ obtemos

$$x^2 - 6x - 7 = (x+1)(x-7)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x - 7 = 0 &\Leftrightarrow (x+1)(x-7) = 0 \\
&\Leftrightarrow x + 1 = 0 \ \text{ ou } \ x - 7 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -1 \ \text{ ou } \ x = 7.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.3.11 *Se $x^2 = y^2$, então $x = \pm y$.*

Solução. De fato, somando e subtraindo xy na hipótese, temos

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - y^2 = x^2 - xy + xy - y^2 \\ 0 &= x(x-y) + y(x-y) \\ 0 &= (x+y)(x-y) \end{aligned}$$

Logo, do Teorema 1.3.9 segue que $x+y=0$ ou $x-y=0$, ou seja, $x=y$ ou $x=-y$.

□

Exemplo 1.3.12 *Resolver a equação $x^2 + 8x - 9 = 0$.*

Solução. Para resolver a equação vamos completar quadrados. De fato,

$$\begin{aligned} x^2 + 8x - 9 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 8x + 4^2 = 9 + 4^2 \\ &\Leftrightarrow (x+4)^2 = 25 \\ &\Leftrightarrow (x+4)^2 - 5^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+4-5)(x+4+5) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+9) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -9. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3.13 (Cancelamento para a adição) *Se $x+y = z+y$, para todo $x,y,z \in \mathbb{R}$, então $x = z$.*

Demonstração. Observe que se

$$\begin{aligned} x + y &= z + y \\ x + y + (-y) &= z + y + (-y) \\ x + 0 &= z + 0 \\ x &= z. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3.14 (Cancelamento para a multiplicação) *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Se $xz = yz$ e $z \neq 0$, então $x = y$.*

Demonstração. Se $x = 0$, então $xz = 0$. Logo, $yz = 0$. Daí, $y = 0$, já que $z \neq 0$. Portanto, $x = 0 = y$.

Se $x \neq 0$, então $xz \neq 0$, já que $z \neq 0$. Logo, $yz \neq 0$. Por outro lado, como $z \neq 0$, existe $z^{-1} \neq 0$. Daí,

$$\begin{aligned} xz = yz &\Rightarrow (xz)z^{-1} = (yz)z^{-1} \Rightarrow x(zz^{-1}) = y(zz^{-1}) \\ &\Rightarrow x \cdot 1 = y \cdot 1 \Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.3.15 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que $-x - y = -(x + y)$.*

Solução. Denotemos por $z = x + y$. Assim,

$$\begin{aligned} z + (-x - y) &= x + y + (-x - y) \\ &= x + y + (-x) + (-y) \\ &= x + (-x) + y + (-y) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

e, como o inverso aditivo de z é único, segue que $-x - y = -(x + y)$. □

Exemplo 1.3.16 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Se $xy \neq 0$, então mostre que*

$$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

Solução. Denotemos por $z = xy$. Assim,

$$\begin{aligned} z(x^{-1}y^{-1}) &= (xy)x^{-1}y^{-1} = y(xx^{-1})y^{-1} \\ &= (yy^{-1})(xx^{-1}) = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

e, como o inverso aditivo de z é único, segue que $z^{-1} = x^{-1}y^{-1}$, isto é, $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$. □

Método de completar quadrados[7]

É um *procedimento prático* de transformar uma expressão quadrática geral ax^2+bx+c, onde $a,b,c\in\mathbb{R}$ com $a\neq 0$, na forma

$$ax^2+bx+c=a(x\pm h)^2\pm k,$$

onde $h,k\in\mathbb{R}$.

Vejamos os seguintes casos:
Caso 1. $a=1$.
Neste caso, temos a expressão quadrática particular $x^2\pm bx+c$ e fazemos:

$$\begin{aligned} x^2\pm bx+c &= x^2\pm bx+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2-\left(\tfrac{b}{2}\right)^2+c\\ &= \left(x\pm\tfrac{b}{2}\right)^2-\left(\tfrac{b}{2}\right)^2+c. \end{aligned}$$

Caso 2. $a\neq 1$.
Neste caso, temos a expressão quadrática geral $ax^2\pm bx+c$ e fazemos:

$$\begin{aligned} ax^2\pm bx+c &= a\left[x^2\pm\tfrac{b}{a}x\right]+c\\ &= a\left[x^2\pm\tfrac{b}{a}x+\left(\tfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\tfrac{b}{2a}\right)^2\right]+c\\ &= a\left[\left(x\pm\tfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\tfrac{b}{2a}\right)^2\right]+c. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3.17 *Complete quadrados na expressão quadrática* x^2+4x+8.

Solução. Como o coeficiente a de x^2 na expressão quadrática é 1, então estamos no **Caso 1**. Observe que $b=4$ e $c=8$, assim $b/2=2$. Logo

$$\begin{aligned} x^2+4x+8 &= \left(x+\tfrac{b}{2}\right)^2-\left(\tfrac{b}{2}\right)^2+c\\ &= (x+2)^2-2^2+8\\ &= (x+2)^2+4. \end{aligned}$$

□

[7] Usando esse método obtemos a conhecida fórmula de Bhaskara, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, que são as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$.

Exemplo 1.3.18 *Complete quadrados na expressão quadrática* x^2-6x-7.

Solução. Como o coeficiente a de x^2 na expressão quadrática é 1, então estamos no **Caso 1**. Neste caso, temos $b=-6$ e $c=-7$, assim $b/2=3$. Logo

$$\begin{aligned} x^2-6x-7 &= \left(x-\tfrac{b}{2}\right)^2-\left(\tfrac{b}{2}\right)^2+c \\ &= (x-3)^2-3^2-7 \\ &= (x-3)^2-16. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.3.19 *Complete quadrados na expressão quadrática* $3x^2+4x-1$.

Solução. Como o coeficiente a de x^2 na expressão quadrática é $a=3$, então estamos no **Caso 2**. Observe que $b=4$ e $c=-1$. Assim $b/2a=4/6=2/3$. Logo,

$$\begin{aligned} 3x^2+4x-1 = 3\left(x^2+\tfrac{4}{3}x\right)-1 &= 3\left[\left(x+\tfrac{2}{3}\right)^2-\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\right]-1 \\ = 3\left(x+\tfrac{2}{3}\right)^2-\tfrac{4}{3}-1 &= 3\left(x+\tfrac{2}{3}\right)^2-\tfrac{7}{3}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.3.20 *Completar quadrados na expressão quadrática* $3x^2-17x+20$.

Solução. Como o coeficiente a de x^2 na expressão quadrática é $a=3$, então estamos no **Caso 2**. Observe que $b=-17$ e $c=20$, assim $b/2a=17/6$. Logo,

$$\begin{aligned} 3x^2-17x+20 &= 3\left(x^2-\tfrac{17}{3}x\right)+20 \\ &= 3\left[\left(x-\tfrac{17}{6}\right)^2-\left(\tfrac{17}{6}\right)^2\right]+20 \\ &= 3\left(x-\tfrac{17}{6}\right)^2-3\left(\tfrac{17}{6}\right)^2+20 \\ &= 3\left(x-\tfrac{17}{6}\right)^2-\tfrac{289}{12}+20 \\ &= 3\left(x-\tfrac{17}{6}\right)^2-\tfrac{49}{12}. \end{aligned}$$

□

Esta obra apresenta o estudo das propriedades básicas dos números reais, desde o ponto de vista algébrico, da ordem que apresentam os elementos dos conjuntos dos números reais, até o ponto de vista da completude. Ela está direcionada aos alunos ingressantes nos cursos de matemática e também aos de engenharia.

ISBN 978-65-5506-755-2

9 786555 067552

www.blucher.com.br

Blucher