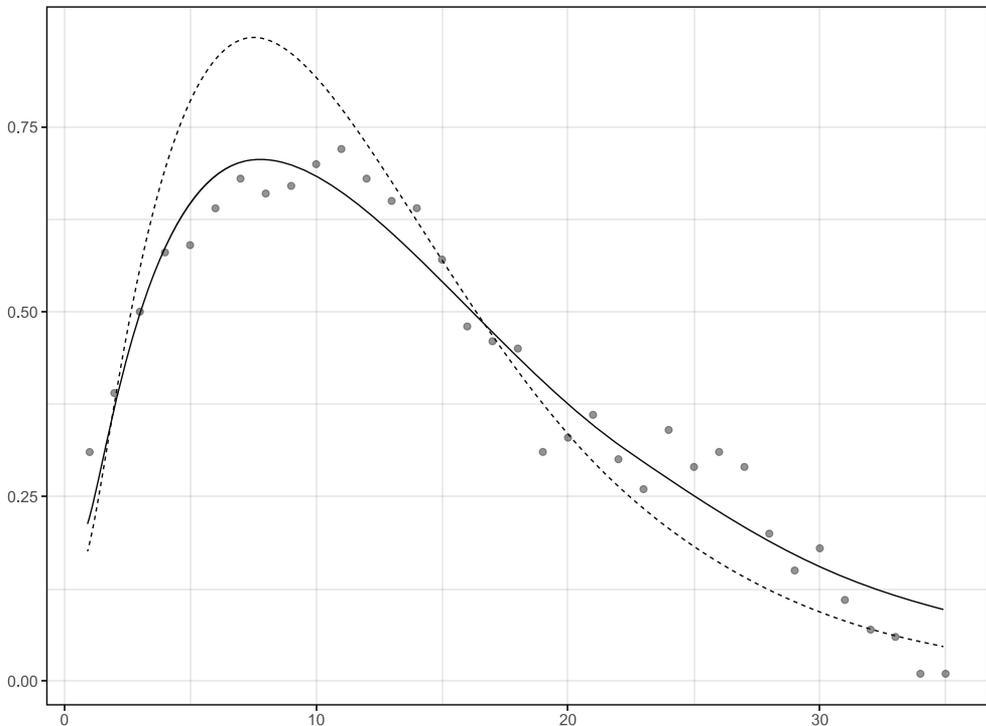
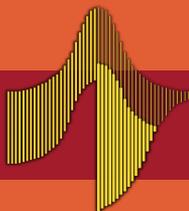


Gauss M. Cordeiro  
Clarice G. B. Demétrio  
Rafael A. Moral

# MODELOS LINEARES GENERALIZADOS E APLICAÇÕES



Blucher



ABE - PROJETO FISHER

Gauss Moutinho Cordeiro  
Clarice Garcia Borges Demétrio  
Rafael de Andrade Moral

**MODELOS LINEARES GENERALIZADOS  
E APLICAÇÕES**

*Modelos lineares generalizados e aplicações*

© 2024 Gauss Moutinho Cordeiro, Clarice Garcia Borges Demétrio e Rafael de Andrade Moral  
Editora Edgard Blücher Ltda.

*Publisher* Edgard Blücher

*Editores* Eduardo Blücher e Jonatas Eliakim

*Coordenação editorial* Andressa Lira

*Produção editorial* Mariana Naime

*Diagramação* Horizon Soluções Editoriais

*Revisão de texto* Helena Miranda

*Capa* Leandro Cunha

# Blucher

---

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar  
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil  
Tel.: 55 11 3078-5366  
**contato@blucher.com.br**  
**www.blucher.com.br**

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed.  
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,  
Academia Brasileira de Letras, julho de 2021.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer  
meios sem autorização escrita da editora.

---

Todos os direitos reservados pela Editora  
Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

---

Cordeiro, Gauss  
Modelos lineares generalizados e aplicações / Gauss  
Cordeiro, Clarice Demétrio, Rafael Moral. -- São Paulo:  
Blucher, 2024.  
256 p.

Bibliografia  
ISBN 978-85-212-2012-1

1. Estatística matemática 2. Modelos lineares (Estatística)  
I. Título II. Demétrio, Clarice III. Moral, Rafael

24-1234

CDD 519.5

---

Índice para catálogo sistemático:  
1. Estatística matemática

# Conteúdo

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Família exponencial de distribuições</b>   | <b>11</b> |
| 1.1      | Introdução . . . . .  | 11        |
| 1.2      | Família exponencial uniparamétrica . . . . .  | 11        |
| 1.3      | Componente aleatório . . . . .  | 13        |
| 1.4      | Função geradora de momentos . . . . .   | 17        |
| 1.5      | Estatística suficiente . . . . .  | 21        |
| 1.6      | Família exponencial multiparamétrica . . . . .  | 22        |
| 1.7      | Exercícios . . . . .  | 25        |
| <b>2</b> | <b>Modelo Linear Generalizado</b>   | <b>33</b> |
| 2.1      | Introdução . . . . .  | 33        |
| 2.2      | Exemplos de motivação . . . . .   | 35        |
| 2.2.1    | Ensaios do tipo dose-resposta . . . . .   | 35        |
| 2.2.2    | Ensaios de diluição . . . . .   | 41        |
| 2.2.3    | Tabelas de contingência . . . . .   | 45        |
| 2.3      | Definição . . . . .   | 47        |
| 2.4      | Exercícios . . . . .  | 51        |
| <b>3</b> | <b>Estimação</b>  | <b>55</b> |
| 3.1      | Estatísticas suficientes . . . . .  | 55        |
| 3.2      | O algoritmo de estimação . . . . .  | 56        |
| 3.3      | Estimação em modelos especiais . . . . .  | 61        |
| 3.4      | Resultados adicionais na estimação . . . . .  | 63        |
| 3.5      | Seleção do modelo . . . . .   | 65        |
| 3.6      | Considerações sobre a função de verossimilhança . . . . .                                   | 67        |
| 3.7      | Exercícios . . . . .  | 70        |
| <b>4</b> | <b>Métodos de Inferência</b>  | <b>75</b> |
| 4.1      | Distribuição dos estimadores dos parâmetros . . . . .                                       | 75        |
| 4.2      | Função desvio e estatística de Pearson generalizada . . . . .                               | 80        |
| 4.2.1    | Função desvio . . . . .   | 82        |
| 4.2.2    | Estatística de Pearson generalizada $X^2$ . . . . .   | 87        |
| 4.3      | Análise de desvio . . . . .   | 89        |
| 4.4      | Estimação do parâmetro de dispersão . . . . .   | 92        |
| 4.4.1    | Comparação dos três métodos de estimação do parâmetro de dispersão no modelo gama . . . . . | 94        |
| 4.5      | Testes de hipóteses . . . . .   | 95        |
| 4.5.1    | Teste de uma hipótese nula simples . . . . .  | 96        |
| 4.5.2    | Teste de uma hipótese nula composta . . . . .   | 98        |
| 4.6      | Regiões de confiança . . . . .  | 100       |
| 4.7      | Seleção de variáveis explanatórias . . . . .  | 101       |

|                                       |   |            |
|---------------------------------------|---|------------|
| 4.8                                   | Exercícios . . . . .  | 103        |
| <b>5</b>                              | <b>Resíduos e Diagnósticos</b>  | <b>109</b> |
| 5.1                                   | Introdução . . . . .  | 109        |
| 5.2                                   | Técnicas para verificar o ajuste de um modelo . . . . .   | 110        |
| 5.3                                   | Análise de resíduos e diagnósticos para o modelo linear clássico . . . . .                      | 110        |
| 5.3.1                                 | Tipos de resíduos . . . . .   | 111        |
| 5.3.2                                 | Estatísticas para diagnóstico . . . . .   | 113        |
| 5.3.3                                 | Tipos de gráficos . . . . .   | 117        |
| 5.4                                   | Análise de resíduos e diagnóstico para MLGs . . . . .   | 121        |
| 5.4.1                                 | Tipos de resíduos . . . . .   | 122        |
| 5.4.2                                 | Tipos de gráficos . . . . .   | 128        |
| 5.5                                   | Método das variáveis explanatórias adicionais na seleção de modelos . . . . .                   | 130        |
| 5.6                                   | Verificação da função de ligação . . . . .  | 132        |
| 5.7                                   | Verificação da função de variância . . . . .  | 135        |
| 5.8                                   | Verificação das escalas das variáveis explanatórias . . . . .                                   | 136        |
| 5.9                                   | Verificação de anomalias no componente sistemático, usando-se análise dos<br>resíduos . . . . . | 140        |
| 5.10                                  | Exercícios . . . . .  | 142        |
| <b>6</b>                              | <b>Aplicações a Dados Contínuos</b>   | <b>147</b> |
| 6.1                                   | Dados de volume de árvores . . . . .  | 147        |
| 6.2                                   | Dados de gordura no leite . . . . .   | 153        |
| 6.3                                   | Dados de Acácia Negra . . . . .   | 156        |
| 6.4                                   | Dados de tempos de sobrevivência de ratos . . . . .   | 160        |
| 6.5                                   | Dados de assinaturas de TV a cabo . . . . .   | 163        |
| <b>7</b>                              | <b>Aplicações a Dados Discretos</b>   | <b>167</b> |
| 7.1                                   | Dados binários e proporções . . . . .   | 167        |
| 7.1.1                                 | Estimação da dose efetiva e seu intervalo de confiança . . . . .                                | 167        |
| 7.1.2                                 | Probabilidade de resposta a uma dose especificada . . . . .                                     | 172        |
| 7.1.3                                 | Paralelismo entre retas no modelo logístico linear e potência relativa . . . . .                | 173        |
| 7.2                                   | Dados de contagens . . . . .  | 193        |
| 7.2.1                                 | Modelo de Poisson . . . . .   | 193        |
| 7.2.2                                 | Modelos log-lineares para tabelas de contingência . . . . .                                     | 199        |
| 7.3                                   | Exercícios . . . . .  | 211        |
| <b>Apêndice A: Conjuntos de dados</b> |   | <b>213</b> |
| <b>Apêndice B: Programas em R</b>     |   | <b>219</b> |
| B.1                                   | Algoritmo de estimação, passo a passo, para o Exemplo 2.1 . . . . .                             | 219        |
| B.2                                   | Programa R para os dados do Exemplo 2.5: Rotenona . . . . .                                     | 220        |
| B.3                                   | Programa R para os dados do Exemplo 6.1: Cerejeiras . . . . .                                   | 221        |
| B.4                                   | Programa R para os dados do Exemplo 6.2: Gordura no leite . . . . .                             | 223        |
| B.5                                   | Programa R para os dados do Exemplo 6.3: Dados de Acácia Negra . . . . .                        | 225        |

---

|      |  |     |
|------|--|-----|
| B.6  | Programa R para os dados do Exemplo 6.4: Tempos de sobrevivência de ratos .                                      | 227 |
| B.7  | Programa R para os dados do Exemplo 6.5: Dados de assinaturas de TV a cabo                                       | 228 |
| B.8  | Programa R para os dados do exemplo 7.1: Rotenona . . . . .  | 230 |
| B.9  | Programa R para os dados do exemplo 7.2: Cipermetrina . . . . .  | 231 |
| B.10 | Programa R para os dados do exemplo 7.3: Mortalidade do besouro da farinha                                       | 234 |
| B.11 | Programa R para os dados do exemplo 7.4: Proporções de gemas florais de macieiras . . . . .                      | 238 |
| B.12 | Programa R para os dados do exemplo 7.5: Cultura de tecidos de macieiras . .                                     | 241 |
| B.13 | Programa R para os dados do exemplo 7.6: Toxicidade a dissulfeto de carbono gasoso . . . . .                     | 242 |
| B.14 | Programa R para os dados do exemplo 7.7: Armazenamento de microorganismos  | 245 |
| B.15 | Programa R para os dados do exemplo 7.8: Número de brotos em um estudo de micropropagação de macieiras . . . . . | 246 |
| B.16 | Programa R para os dados do exemplo 7.9: Número de espécies de plantas . . .                                     | 246 |
| B.17 | Programa R para os dados do exemplo 7.10: Coleta de insetos em armadilhas adesivas . . . . .                     | 247 |
| B.18 | Programa R para os dados do exemplo 7.11: Pneumoconiose em mineiros de carvão                                    | 248 |

**Referências**

# Família exponencial de distribuições

## 1.1 INTRODUÇÃO

Muitas distribuições conhecidas podem ser colocadas em uma família paramétrica denominada **família exponencial de distribuições**. Assim, por exemplo, pertencem a essa família as distribuições normal, binomial, binomial negativa, gama, Poisson, normal inversa, multinomial, beta, logarítmica, entre outras. Essa classe de distribuições foi proposta, independentemente, por Koopman, Pitman e Darrois, nos anos de 1935 e 1936, ao estudarem as propriedades de suficiência estatística. Posteriormente, muitos outros aspectos dessa família foram estudados e tornaram-se importantes na teoria moderna da Estatística. O conceito de família exponencial foi introduzido na Estatística por Fisher, mas os modelos da família exponencial surgiram na Mecânica Estatística no final do século XIX e foram desenvolvidos por Maxwell, Boltzmann e Gibbs. A importância dessa família teve maior destaque, na área dos modelos de regressão, a partir do trabalho pioneiro de Nelder e Wedderburn (1972), que definiram os modelos lineares generalizados (MLGs). Na década de 1980, esses modelos popularizaram-se, inicialmente, no Reino Unido, e, posteriormente, nos Estados Unidos e por toda Europa ocidental.

## 1.2 FAMÍLIA EXPONENCIAL UNIPARAMÉTRICA

A **família exponencial uniparamétrica** é caracterizada por uma função (de probabilidade ou densidade) especificada na forma

$$f(x; \theta) = h(x) \exp [ \eta(\theta) t(x) - b(\theta) ], \quad (1.1)$$

em que as funções  $\eta(\theta)$ ,  $b(\theta)$ ,  $t(x)$  e  $h(x)$  têm valores em subconjuntos dos reais. As funções  $\eta(\theta)$ ,  $b(\theta)$  e  $t(x)$  não são únicas. Por exemplo,  $\eta(\theta)$  pode ser multiplicada por uma constante  $k$ , e  $t(x)$  pode ser dividida pela mesma constante. Adicionalmente, pelo teorema da fatoração de Neyman-Fisher, a estatística  $t(X)$  é suficiente para  $\theta$ .

Várias distribuições importantes podem ser expressas na forma (1.1), tais como: Poisson, binomial, Rayleigh, normal, gama e normal inversa (as três últimas com a suposição de que um dos parâmetros é conhecido). Cordeiro et al. (1995) apresentaram 24 distribuições na forma (1.1). O suporte da família exponencial (1.1), isto é,  $\{x; f(x; \theta) > 0\}$ , não pode depender de  $\theta$ . Assim, a distribuição uniforme em  $(0, \theta)$  não é um modelo da família exponencial.

É fácil comprovar se uma distribuição pertence ou não à família exponencial (1.1), como é demonstrado nos três exemplos que se seguem.

### Exemplo 1.1

A distribuição de Poisson  $P(\theta)$  de parâmetro  $\theta > 0$ , usada para análise de dados na forma de contagens, tem função de probabilidade

$$f(x; \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!} = \frac{1}{x!} \exp[x \log(\theta) - \theta]$$

e, portanto, é um membro da família exponencial (1.1) com  $\eta(\theta) = \log(\theta)$ ,  $b(\theta) = \theta$ ,  $t(x) = x$  e  $h(x) = 1/x!$ .

### Exemplo 1.2

A distribuição binomial  $B(m, \theta)$ , com  $0 < \theta < 1$  e  $m$ , o número conhecido de ensaios independentes, é usada para análise de dados na forma de proporções e tem função de probabilidade

$$f(x; \theta) = \binom{m}{x} \theta^x (1 - \theta)^{m-x} = \binom{m}{x} \exp \left[ x \log \left( \frac{\theta}{1 - \theta} \right) + m \log(1 - \theta) \right],$$

com  $\eta(\theta) = \log[\theta/(1 - \theta)]$ ,  $b(\theta) = -m \log(1 - \theta)$ ,  $t(x) = x$  e  $h(x) = \binom{m}{x}$ , sendo, portanto, um membro da família exponencial (1.1).

### Exemplo 1.3

A distribuição de Rayleigh, usada para análise de dados contínuos positivos, tem função densidade ( $x > 0, \theta > 0$ )

$$f(x; \theta) = \frac{x}{\theta^2} \exp \left( -\frac{x^2}{2\theta^2} \right) = x \exp \left[ -\frac{1}{2\theta^2} x^2 - 2 \log(\theta) \right]$$

e, portanto, pertence à família exponencial (1.1) com  $\eta(\theta) = -1/(2\theta^2)$ ,  $b(\theta) = 2 \log(\theta)$ ,  $t(x) = x^2$  e  $h(x) = x$ .

A família exponencial na forma canônica é definida por (1.1), considerando que as funções  $\eta(\theta)$  e  $t(x)$  são iguais à função identidade, de forma que

$$f(x; \theta) = h(x) \exp[\theta x - b(\theta)]. \quad (1.2)$$

Na parametrização (1.2),  $\theta$  é denominado de **parâmetro canônico**. O logaritmo da função de verossimilhança correspondente a uma única observação no modelo (1.2) é expresso como

$$\ell(\theta) = \theta x - b(\theta) + \log[h(x)]$$

e, portanto, a função escore  $U = U(\theta) = d\ell(\theta)/d\theta$  resulta em  $U = x - b'(\theta)$ , sendo que  $b'(\theta)$  é a derivada de primeira ordem de  $b(\theta)$  em relação a  $\theta$ .

É fácil verificar das propriedades da função escore,  $E(U) = 0$  e  $\text{Var}(U) = -E[d^2\ell(\theta)/d\theta^2] = -E(U')$  (a última igualdade é a informação de Fisher), que

$$E(X) = b'(\theta) \text{ e } \text{Var}(X) = b''(\theta), \quad (1.3)$$

sendo que  $b''(\theta)$  é a derivada de segunda ordem de  $b(\theta)$  em relação a  $\theta$ .

O simples fato de se calcularem momentos da família exponencial (1.2) em termos de derivadas da função  $b(\theta)$  (denominada função geradora de cumulantes, ver Seção 1.4) em relação ao parâmetro canônico  $\theta$  é muito importante na teoria dos modelos lineares generalizados, principalmente no contexto assintótico.

### 1.3 COMPONENTE ALEATÓRIO

O componente aleatório de um MLG é definido a partir da família exponencial uniparamétrica na forma canônica (1.2) com um parâmetro extra de perturbação,  $\phi > 0$ , que é uma medida de dispersão da distribuição, como será descrito na Seção 2.3. Nelder e Wedderburn (1972), ao proporem essa modelagem, conseguiram incorporar distribuições biparamétricas no componente aleatório do modelo. Tem-se

$$f(y; \theta, \phi) = \exp \{ \phi^{-1} [y\theta - b(\theta)] + c(y, \phi) \}, \quad (1.4)$$

em que  $b(\cdot)$  e  $c(\cdot)$  são funções conhecidas. Quando  $\phi$  é conhecido, a família de distribuições (1.4) é idêntica à família exponencial na forma canônica (1.2). Essa família, também, é conhecida como família exponencial linear. Na Seção 1.4, será demonstrado que o valor esperado e a variância de  $Y$  com distribuição na família (1.4) são

$$E(Y) = \mu = b'(\theta) \text{ e } \text{Var}(Y) = \phi b''(\theta).$$

Observa-se, a partir da expressão da variância, que  $\phi$  é um **parâmetro de dispersão** do modelo e seu inverso  $\phi^{-1}$ , uma **medida de precisão**. A função que relaciona o

parâmetro canônico  $\theta$  com a média  $\mu$  é denotada por  $\theta = q(\mu)$  (inversa da função  $b'(\cdot)$ ). A função da média  $\mu$  na variância é representada por  $b''(\theta) = V(\mu)$ , sendo  $V(\mu)$  denominada **função de variância**. Observa-se que o parâmetro canônico pode ser obtido de  $\theta = \int V^{-1}(\mu)d\mu$ , pois  $V(\mu) = d\mu/d\theta$ . A Tabela 1.1 apresenta várias distribuições importantes na família (1.4), caracterizando as funções  $b(\theta)$ ,  $c(y, \phi)$ , a média  $\mu(\theta)$  em termos do parâmetro canônico  $\theta$  e a função de variância  $V(\mu)$ . A família de distribuições (1.4) inclui distribuições que exibem assimetria e de natureza discreta ou contínua, com suportes que são restritos a intervalos do conjunto dos reais, conforme bem exemplificam as distribuições da Tabela 1.1 e com detalhes no Capítulo 2.

Convém enfatizar que se  $\phi$  não for conhecido, a família (1.4) pode, ou não, pertencer à família exponencial biparamétrica (Seção 1.6). Para (1.4) pertencer à família exponencial biparamétrica quando  $\phi$  é desconhecido, a função  $c(y, \phi)$  deve ser decomposta como  $c(y, \phi) = \phi^{-1}d(y) + d_2(\phi) + d_1(y)$ , segundo Cordeiro e McCullagh (1991). Esse é o caso das distribuições normal, gama e normal inversa.

Morris (1982) demonstrou que existem apenas seis distribuições na família (1.4), cuja função de variância é uma função, no máximo, quadrática da média. Essas distribuições são normal ( $V = 1$ ), gama ( $V = \mu^2$ ), binomial ( $V = \mu(1 - \mu)$ ), Poisson ( $V = \mu$ ) e binomial negativa ( $V = \mu + \mu^2/k$ ). A sexta, chamada secante hiperbólica generalizada ( $V = 1 + \mu^2$ ), tem função densidade igual a

$$f(y; \theta) = \frac{1}{2} \exp[\theta y + \log(\cos \theta)] \cosh\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad y \in \mathbb{R}, \quad \theta > 0. \quad (1.5)$$

A distribuição secante hiperbólica generalizada (1.5) compete com a distribuição normal na análise de observações contínuas nos reais. A seguir, apresentam-se duas distribuições que pertencem à família (1.4).

**Tabela 1.1** Algumas distribuições importantes na família (1.4).

| Distribuição                        | $\phi$     | $\theta$                             | $b(\theta)$           | $c(y, \phi)$   | $\mu(\theta)$                  | $V(\mu)$                          |
|-------------------------------------|------------|--------------------------------------|-----------------------|--|--------------------------------|-----------------------------------|
| Normal: $N(\mu, \sigma^2)$          | $\sigma^2$ | $\mu$                                | $\frac{\theta^2}{2}$  | $-\frac{1}{2} \left[ \frac{y^2}{\sigma^2} + \log(2\pi\sigma^2) \right]$      | $\theta$                       | 1                                 |
| Poisson: $P(\mu)$                   | 1          | $\log(\mu)$                          | $e^\theta$            | $-\log(y!)$  | $e^\theta$                     | $\mu$                             |
| Binomial: $B(m, \pi)$               | 1          | $\log\left(\frac{\mu}{m-\mu}\right)$ | $m \log(1+e^\theta)$  | $\log\binom{m}{y}$   | $\frac{me^\theta}{1+e^\theta}$ | $\frac{\mu}{m}(m-\mu)$            |
| Binomial negativa: $BN(\mu, k)$     | 1          | $\log\left(\frac{\mu}{\mu+k}\right)$ | $-k \log(1-e^\theta)$ | $\log\left[\frac{\Gamma(k+y)}{\Gamma(k)y!}\right]$                           | $\frac{ke^\theta}{1-e^\theta}$ | $\mu\left(\frac{\mu}{k}+1\right)$ |
| Gama: $G(\mu, \nu)$                 | $\nu^{-1}$ | $-\frac{1}{\mu}$                     | $-\log(-\theta)$      | $\nu \log(\nu y) - \log(y) - \log \Gamma(\nu)$                               | $\frac{1}{-\theta}$            | $\mu^2$                           |
| Normal inversa: $IG(\mu, \sigma^2)$ | $\sigma^2$ | $-\frac{1}{2\mu^2}$                  | $-( -2\theta )^{1/2}$ | $-\frac{1}{-2} \left[ \log(2\pi\sigma^2 y^3) + \frac{1}{\sigma^2 y} \right]$ | $(-2\theta)^{-1/2}$            | $\mu^3$                           |

Note que  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama, isto é,  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$ .

**Exemplo 1.4**

A distribuição normal  $N(\mu, \sigma^2)$ , de média  $\mu \in \mathbb{R}$  e variância  $\sigma^2 > 0$ , tem função densidade de probabilidade (f.d.p.) expressa como

$$f(y; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2} \right].$$

Tem-se, então,

$$\begin{aligned} f(y; \mu, \sigma^2) &= \exp \left[ -\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) \right] \\ &= \exp \left[ \frac{1}{\sigma^2} \left( y\mu - \frac{\mu^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{y^2}{2\sigma^2} \right], \end{aligned}$$

obtendo-se os elementos da primeira linha da Tabela 1.1, isto é,

$$\theta = \mu, \quad \phi = \sigma^2, \quad b(\theta) = \frac{\mu^2}{2} = \frac{\theta^2}{2} \quad \text{e} \quad c(y, \phi) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{y^2}{\sigma^2} + \log(2\pi\sigma^2) \right],$$

o que demonstra que a distribuição  $N(\mu, \sigma^2)$  pertence à família (1.4).

**Exemplo 1.5**

A distribuição binomial tem função de probabilidade

$$f(y; \pi) = \binom{m}{y} \pi^y (1 - \pi)^{m-y}, \quad \pi \in (0, 1), \quad y = 0, 1, \dots, m.$$

Tem-se, então,

$$\begin{aligned} f(y; \pi) &= \exp \left[ \log \binom{m}{y} + y \log(\pi) + (m - y) \log(1 - \pi) \right] \\ &= \exp \left[ y \log \left( \frac{\pi}{1 - \pi} \right) + m \log(1 - \pi) + \log \binom{m}{y} \right], \end{aligned}$$

obtendo-se os elementos da terceira linha da Tabela 1.1, isto é,

$$\phi = 1, \quad \theta = \log \left( \frac{\pi}{1 - \pi} \right) = \log \left( \frac{\mu}{m - \mu} \right), \quad \text{o que implica em}$$

$$\mu = \frac{me^\theta}{(1 + e^\theta)}, \quad b(\theta) = -m \log(1 - \pi) = m \log(1 + e^\theta) \quad \text{e} \quad c(y, \phi) = \log \binom{m}{y}.$$

Portanto, a distribuição binomial pertence à família exponencial (1.4). Note que a formulação usada,  $\text{Bin}(m, \pi)$ , é equivalente à usada por Davison (2008, p. 169, exemplo 5.6). Ao se tratar  $\phi = 1$ , tem-se que  $\mu$  depende de  $m$ . Um artifício seria usar  $\phi = 1/m$ , como faz Davison (2008, p. 481, exemplo 10.2). McCullagh e Nelder (1989, p. 30) usam, como notação,  $\text{Bin}(m, \pi)/m$  como distribuição pertencente à família exponencial. Porém, o algoritmo de estimação independe de qual dessas formulações é usada.

Outras distribuições importantes podem ser expressas na forma (1.4) como os modelos exponenciais de dispersão (JØRGENSEN, 1987).

### 1.4 FUNÇÃO GERADORA DE MOMENTOS

A função geradora de momentos (f.g.m.) da família (1.4) é igual a

$$M(t; \theta, \phi) = E(e^{tY}) = \exp\{\phi^{-1}[b(\phi t + \theta) - b(\theta)]\}. \quad (1.6)$$

**Prova:** a prova será feita apenas para o caso de variáveis aleatórias contínuas. No caso discreto, basta substituir a integral pelo somatório. Sabe-se que

$$\int_A f(y; \theta, \phi) dy = 1,$$

e, portanto,

$$\int_A \exp\{\phi^{-1}[\theta y - b(\theta)] + c(y, \phi)\} dy = 1,$$

obtendo-se

$$\int_A \exp[\phi^{-1}\theta y + c(y, \phi)] dy = \exp[\phi^{-1}b(\theta)]. \quad (1.7)$$

Logo,

$$\begin{aligned} M(t; \theta, \phi) &= E(e^{tY}) = \int_A \exp(ty) f(y) dy \\ &= \int_A \exp\{\phi^{-1}[(\phi t + \theta)y - b(\theta)] + c(y, \phi)\} dy \\ &= \frac{1}{\exp[\phi^{-1}b(\theta)]} \int_A \exp[\phi^{-1}(\phi t + \theta)y + c(y, \phi)] dy \end{aligned}$$

e, usando a equação (1.7), tem-se

$$M(t; \theta, \phi) = \exp\{\phi^{-1}[b(\phi t + \theta) - b(\theta)]\}.$$

A função geradora de cumulantes (f.g.c.) correspondente é, então,

$$\varphi(t; \theta, \phi) = \log[M(t; \theta, \phi)] = \phi^{-1}[b(\phi t + \theta) - b(\theta)]. \quad (1.8)$$

A f.g.c. desempenha um papel muito importante na Estatística, pois uma grande parte da teoria assintótica depende de suas propriedades. Diferenciando-se (1.8), sucessivamente, em relação a  $t$ , tem-se

$$\varphi^{(r)}(t; \theta, \phi) = \phi^{r-1} b^{(r)}(\phi t + \theta),$$

em que  $b^{(r)}(\cdot)$  indica a derivada de  $r$ -ésima ordem de  $b(\cdot)$  em relação a  $t$ . Para  $t = 0$ , obtém-se o  $r$ -ésimo cumulante da família (1.4) como

$$\kappa_r = \phi^{r-1} b^{(r)}(\theta). \quad (1.9)$$

A partir da equação (1.9), podem ser deduzidos o valor esperado  $\kappa_1$  e a variância  $\kappa_2$  da família (1.4) para  $r = 1$  e  $2$ , respectivamente. Tem-se que  $\kappa_1 = \mu = b'(\theta)$  e  $\kappa_2 = \phi b''(\theta) = \phi d\mu/d\theta$ .

A expressão (1.9) mostra que existe uma relação interessante de recorrência entre os cumulantes da família (1.4), isto é,  $\kappa_{r+1} = \phi d\kappa_r/d\theta$  para  $r = 1, 2, \dots$ . Esse fato é fundamental para a obtenção de propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança (EMVs) nos MLGs.

Essas expressões podem ser deduzidas, de forma alternativa, usando-se as propriedades da função escore, sendo  $\ell = \ell(\theta, \phi) = \log[f(y; \theta, \phi)]$  o logaritmo da função de verossimilhança correspondente a uma única observação em (1.4). Tem-se

$$U = \frac{d\ell}{d\theta} = \phi^{-1}[y - b'(\theta)] \quad \text{e} \quad U' = \frac{d^2\ell}{d\theta^2} = -\phi^{-1}b''(\theta).$$

Logo,

$$E(U) = \phi^{-1} [E(Y) - b'(\theta)] = 0, \quad \text{que implica em } E(Y) = b'(\theta)$$

e, assim,

$$\text{Var}(U) = -E(U') = \phi^{-1}b''(\theta) \quad \text{e} \quad \text{Var}(U) = E(U^2) = \phi^{-2}\text{Var}(Y).$$

Então,

$$\text{Var}(Y) = \phi b''(\theta).$$

**Exemplo 1.6**

Considerando-se o Exemplo 1.4 (distribuição normal), tem-se que  $\phi = \sigma^2$ ,  $\theta = \mu$  e  $b(\theta) = \theta^2/2$ . Da equação (1.8), obtém-se a f.g.c.

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \frac{(\sigma^2 t + \theta)^2}{2} - \frac{\theta^2}{2} \right] = t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}.$$

Note que, diferenciando-se  $\varphi(t)$  e fazendo-se  $t = 0$ , tem-se que  $\kappa_1 = \mu$ ,  $\kappa_2 = \sigma^2$  e  $\kappa_r = 0$ ,  $r \geq 3$ . Assim, todos os cumulantes da distribuição normal de ordem maior do que dois são nulos.

Logo, a f.g.m. é igual a

$$M(t) = \exp \left( t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right).$$

**Exemplo 1.7**

Considerando-se o Exemplo 1.5 (distribuição binomial), tem-se que  $\phi = 1$ ,  $\theta = \log[\mu/(m - \mu)]$  e  $b(\theta) = -m \log(1 - \pi) = m \log(1 + e^\theta)$ .

Logo, usando-se a f.g.c. (1.8), tem-se

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= m [\log(1 + e^{t+\theta}) - \log(1 + e^\theta)] \\ &= \log \left( \frac{1 + e^{t+\theta}}{1 + e^\theta} \right)^m = \log \left( \frac{m - \mu}{m} + \frac{\mu}{m} e^t \right)^m. \end{aligned}$$

Assim, a f.g.m. é

$$M(t) = e^{\varphi(t)} = \left( \frac{m - \mu}{m} + \frac{\mu}{m} e^t \right)^m.$$

A Tabela 1.2 apresenta as funções geradoras de momentos para as distribuições especificadas na Tabela 1.1.

Especificando-se a forma da função  $\mu = q^{-1}(\theta)$ , pode-se demonstrar que a distribuição em (1.4) é univocamente determinada. Assim, uma relação funcional variância-média caracteriza a distribuição na família (1.4). Entretanto, essa relação não caracteriza a distribuição na família exponencial não-linear  $\pi(y; \theta, \phi) = \exp \{ \phi^{-1} [t(y)\theta - b(\theta)] + c(y, \phi) \}$ . Esse fato é comprovado com os três exemplos que se seguem.

**Tabela 1.2** Funções geradoras de momentos para algumas distribuições.

| Distribuição                        | Função geradora de momentos $M(t; \theta, \phi)$  |
|-------------------------------------|---|
| Normal: $N(\mu, \sigma^2)$          | $\exp\left(t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$  |
| Poisson: $P(\mu)$                   | $\exp[\mu(e^t - 1)]$  |
| Binomial: $B(m, \pi)$               | $\left(\frac{m - \mu}{m} + \frac{\mu}{m}e^t\right)^m$   |
| Binomial negativa: $BN(\mu, k)$     | $\left[1 + \frac{\mu}{k}(1 - e^t)\right]^{-k}$  |
| Gama: $G(\mu, \nu)$                 | $\left(1 - \frac{t\mu}{\nu}\right)^{-\nu}, \quad t < \frac{\nu}{\mu}$   |
| Normal inversa: $IG(\mu, \sigma^2)$ | $\exp\left\{\frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{1}{\mu} - \left(\frac{1}{\mu^2} - 2t\sigma^2\right)^{1/2}\right]\right\}, \quad t < \frac{1}{2\sigma^2\mu^2}$ |

**Exemplo 1.8**

Se  $Y$  tem distribuição beta com parâmetros  $\phi^{-1}\mu$  e  $\phi^{-1}(1 - \mu)$  e f.d.p. expressa por

$$f(y; \mu, \phi) = \frac{y^{\phi^{-1}\mu-1}(1-y)^{\phi^{-1}(1-\mu)-1}}{B[\phi^{-1}\mu, \phi^{-1}(1-\mu)]},$$

em que  $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$  é a função beta completa, tem-se que  $t(y) = \log[y/(1-y)]$ ,  $\theta = \mu$  e  $\text{Var}(Y) = \phi\mu(1-\mu)/(1+\phi)$ , obtendo-se uma função de variância do mesmo tipo que a do modelo binomial.

**Exemplo 1.9**

Se  $Y$  tem distribuição de Euler com média  $\mu$  e f.d.p.

$$f(y; \mu) = \exp\{\mu \log(y) - \mu - \log[\Gamma(\mu)]\},$$

tem-se que  $t(y) = \log(y)$ ,  $\theta = \mu$  e  $\text{Var}(Y) = \mu$ , que é do mesmo tipo que a função de variância do modelo de Poisson.

**Exemplo 1.10**

Se  $Y$  tem distribuição log-normal de parâmetros  $\alpha$  e  $\sigma^2$  e f.d.p.

$$f(y; \alpha, \sigma^2) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\log(y) - \alpha]^2}{2\sigma^2}\right\},$$

então, podem-se obter  $E(Y) = \mu = \exp(\alpha + \sigma^2/2)$ ,  $t(y) = \log(y)$ ,  $\theta = \alpha/\sigma^2$  e  $\text{Var}(Y) = \mu^2[\exp(\sigma^2) - 1]$ , que é do mesmo tipo que a função de variância do modelo gama.

**1.5 ESTATÍSTICA SUFICIENTE**

Uma estatística  $T = T(\mathbf{Y})$  é suficiente para um parâmetro  $\theta$  (que pode ser um vetor) quando resume toda informação sobre esse parâmetro contida na amostra aleatória  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$ . Se  $T$  é suficiente para  $\theta$ , então, a distribuição condicional de  $\mathbf{Y}$  dada a estatística  $T(\mathbf{Y})$  é independente de  $\theta$ , isto é,

$$P(\mathbf{Y} = \mathbf{y} | T = t, \theta) = P(\mathbf{Y} = \mathbf{y} | T = t).$$

Segundo o critério da fatoração, uma condição necessária e suficiente para  $T$  ser suficiente para um parâmetro  $\theta$  é que a função (densidade ou de probabilidade)  $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta)$  possa ser decomposta como

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta) = h(\mathbf{y})g(t, \theta),$$

em que  $t = T(\mathbf{y})$  e  $h(\mathbf{y})$  não dependem de  $\theta$ .

Sendo  $Y_1, \dots, Y_n$  uma amostra aleatória (a.a.) de uma distribuição que pertence à família (1.4). A distribuição conjunta de  $Y_1, \dots, Y_n$  é expressa por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}; \theta, \phi) &= \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta, \phi) = \prod_{i=1}^n \exp\{\phi^{-1} [y_i\theta - b(\theta)] + c(y_i, \phi)\} \\ &= \exp\left\{\phi^{-1} \left[\theta \sum_{i=1}^n y_i - n b(\theta)\right]\right\} \exp\left[\sum_{i=1}^n c(y_i, \phi)\right]. \end{aligned}$$

Pelo teorema da fatoração de Neyman-Fisher e supondo  $\phi$  conhecido, tem-se que  $T = \sum_{i=1}^n Y_i$  é uma estatística suficiente para  $\theta$ , pois

$$f(\mathbf{y}; \theta, \phi) = g(t, \theta) h(y_1, \dots, y_n),$$

em que  $g(t, \theta)$  depende de  $\theta$  e de  $\mathbf{y}$  apenas por meio de  $t$  e  $h(y_1, \dots, y_n)$  independe de  $\theta$ .

Esse fato revela que, se uma distribuição pertence à família exponencial uniparamétrica, então, existe uma estatística suficiente. Na realidade, usando-se o Teorema de Lehmann-Scheffé Mendenhall, Scheaffer e Wackerly (1981) demonstra-se que  $T = \sum_{i=1}^n Y_i$  é uma estatística suficiente minimal.

Geralmente, a estatística suficiente de um modelo da família exponencial tem distribuição, também, pertencente à família exponencial. Por exemplo, se  $Y_1, \dots, Y_n$  são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição de Poisson  $P(\theta)$ , então, a estatística suficiente  $T = \sum_{i=1}^n Y_i$  tem, ainda, distribuição de Poisson  $P(n\theta)$  e, assim, é um modelo exponencial uniparamétrico.

## 1.6 FAMÍLIA EXPONENCIAL MULTIPARAMÉTRICA

A família exponencial multiparamétrica de dimensão  $k$  é caracterizada por uma função (de probabilidade ou densidade) da forma

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = h(\mathbf{x}) \exp \left[ \sum_{i=1}^k \eta_i(\boldsymbol{\theta}) t_i(\mathbf{x}) - b(\boldsymbol{\theta}) \right], \quad (1.10)$$

em que  $\boldsymbol{\theta}$  é um vetor de parâmetros, usualmente, de dimensão  $k$ , e as funções  $\eta_i(\boldsymbol{\theta})$ ,  $b(\boldsymbol{\theta})$ ,  $t_i(\mathbf{x})$  e  $h(\mathbf{x})$  têm valores em subconjuntos dos reais. Obviamente, a forma (1.1) é um caso especial de (1.10). Pelo teorema da fatoração, o vetor  $\mathbf{T} = [T_1(\mathbf{X}), \dots, T_k(\mathbf{X})]^T$  é suficiente para o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$ . Quando  $\eta_i(\boldsymbol{\theta}) = \theta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , obtém-se de (1.10) a família exponencial multiparamétrica na forma canônica com parâmetros canônicos  $\theta_1, \dots, \theta_k$  e estatísticas canônicas  $T_1(\mathbf{X}), \dots, T_k(\mathbf{X})$ . Tem-se

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = h(\mathbf{x}) \exp \left[ \sum_{i=1}^k \theta_i t_i(\mathbf{x}) - b(\boldsymbol{\theta}) \right]. \quad (1.11)$$

Pode-se verificar (Exercício 12) que as distribuições normal, gama, normal inversa e beta pertencem à família exponencial biparamétrica canônica (1.11) com  $k = 2$ .

Gelfand e Dalal (1990) estudaram a família exponencial biparamétrica  $f(x; \theta, \tau) = h(x) \exp[\theta x + \tau t(x) - b(\theta, \tau)]$ , que é um caso especial de (1.10), com  $k = 2$ . Essa família tem despertado interesse, recentemente, como o componente aleatório dos MLGs superdispersos (DEY; GELFAND; PENG, 1997). Dois casos especiais importantes dessa família são diretamente obtidos:

- (a) a família exponencial canônica uniparamétrica (1.2) surge, naturalmente, quando  $\tau = 0$ ;
- (b) o componente aleatório (1.4) dos MLGs é obtido incorporando o parâmetro de dispersão  $\phi$ .

**Exemplo 1.11**

Considere a distribuição multinomial com função de probabilidade

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\pi}) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \pi_1^{x_1} \dots \pi_k^{x_k},$$

em que  $\sum_{i=1}^k x_i = n$  e  $\sum_{i=1}^k \pi_i = 1$ . Essa distribuição pertence à família exponencial canônica (1.11) com vetor de parâmetros canônicos  $\boldsymbol{\theta} = [\log(\pi_1), \dots, \log(\pi_k)]^T$  e estatística canônica  $\mathbf{T} = (X_1, \dots, X_k)^T$ . Entretanto, devido à restrição  $\sum_{i=1}^k \pi_i = 1$ , a representação mínima da família exponencial é obtida considerando  $\boldsymbol{\theta} = [\log(\pi_1/\pi_k), \dots, \log(\pi_{k-1}/\pi_k)]^T$  e  $\mathbf{T} = (X_1, \dots, X_{k-1})^T$ , ambos vetores de dimensão  $k - 1$ , resultando na família exponencial multiparamétrica de dimensão  $k - 1$

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \exp \left[ \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i x_i - b(\boldsymbol{\theta}) \right], \tag{1.12}$$

com  $\theta_i = \log(\pi_i/\pi_k)$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ , e  $b(\boldsymbol{\theta}) = n \log \left( 1 + \sum_{i=1}^{k-1} e^{\theta_i} \right)$ , pois  $\pi_i = \pi_k e^{\theta_i}$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$  e  $\pi_k = \left( 1 + \sum_{i=1}^{k-1} e^{\theta_i} \right)^{-1}$ .

Pode-se demonstrar que os dois primeiros momentos da estatística suficiente  $\mathbf{T} = [T_1(\mathbf{X}), \dots, T_k(\mathbf{X})]^T$  na família exponencial canônica (1.11) são iguais a

$$E(\mathbf{T}) = \frac{\partial b(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad \text{Cov}(\mathbf{T}) = \frac{\partial^2 b(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}. \tag{1.13}$$

As expressões (1.13) generalizam (1.3). Nas equações (1.13), o vetor  $\partial b(\boldsymbol{\theta})/\partial \boldsymbol{\theta}$  de dimensão  $k$  tem um componente típico  $E[T_i(\mathbf{X})] = \partial b(\boldsymbol{\theta})/\partial \theta_i$  e a matriz  $\partial^2 b(\boldsymbol{\theta})/\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T$  de ordem  $k$  tem como elemento típico  $\text{Cov}(T_i(\mathbf{X}), T_j(\mathbf{X})) = \partial^2 b(\boldsymbol{\theta})/\partial \theta_i \partial \theta_j$ . Assim, os valores esperados e as covariâncias das estatísticas

suficientes do modelo (1.11) são facilmente obtidos por simples diferenciação. A demonstração das equações (1.13) é proposta no Exercício 19.

Para o modelo multinomial (1.12), usando as equações (1.13), têm-se

$$E(X_i) = n \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log \left( 1 + \sum_{i=1}^{k-1} e^{\theta_i} \right) = \frac{ne^{\theta_i}}{1 + \sum_{i=1}^{k-1} e^{\theta_i}} = \frac{n \frac{\pi_i}{\pi_k}}{1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\pi_i}{\pi_k}} = n\pi_i,$$

para  $i = j$

$$\text{Var}(X_i) = n \frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} \log \left( 1 + \sum_{i=1}^{k-1} e^{\theta_i} \right) = n\pi_i(1 - \pi_i),$$

e para  $i \neq j$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = n \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log \left( 1 + \sum_{i=1}^{k-1} e^{\theta_i} \right) = \frac{-ne^{\theta_i} e^{\theta_j}}{\left( 1 + \sum_{i=1}^{k-1} e^{\theta_i} \right)^2} = -n\pi_i \pi_j.$$

Finalmente, apresenta-se mais uma distribuição na família exponencial canônica (1.11) com  $k = 2$ , no exemplo que se segue.

### Exemplo 1.12

Considere a distribuição Gaussiana inversa reparametrizada por  $(\alpha, \beta > 0)$

$$f(x; \alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} e^{\sqrt{\alpha\beta} x^{-3/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2}(\alpha x^{-1} + \beta x) \right], \quad x > 0.$$

Pode-se escrever essa f.d.p. na forma (1.11) com  $\mathbf{t} = \left( -\frac{1}{2}x^{-1}, -\frac{1}{2}x \right)^T$ ,  $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^T$  e  $b(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \log(\alpha) - \sqrt{\alpha\beta}$ . Usando-se as equações (1.13), obtêm-se, por simples diferenciação,

$$E(X) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad E(X^{-1}) = \alpha^{-1} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

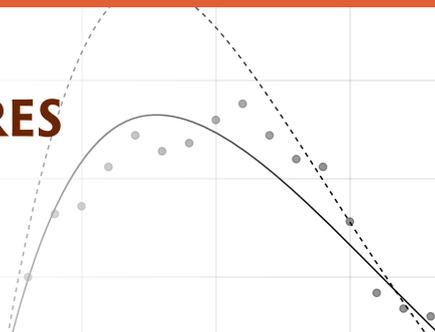
e

$$\text{Cov}(X, X^{-1}) = \begin{pmatrix} \alpha^{1/2} \beta^{-3/2} & -(\alpha\beta)^{-1/2} \\ -(\alpha\beta)^{-1/2} & 2\alpha^{-2} + \alpha^{-3/2} \beta^{1/2} \end{pmatrix}.$$

# MODELOS LINEARES GENERALIZADOS E APLICAÇÕES

0.75-

0.50-



## Gauss M. Cordeiro

Obteve seu PhD em Estatística no Imperial College, Universidade de Londres (1982), e tem pós-doutorado no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (1990-1992). Publicou mais de 400 artigos em periódicos internacionais e orientou mais de 60 alunos de pós-graduação. Trabalha na área de Análise de Sobrevivência, Distribuições de Probabilidade e Modelos de Regressão.

## Clarice G. B. Demétrio

Tem graduação em Engenharia Agrônoma (1972-75), e mestrado (1976-79) e doutorado (1979-85) em Estatística e Experimentação Agrônoma na ESALQ/USP, pós-doutorado no Imperial College of Science and Technology, Londres (1986-87) e Doctor Honoris Causa (2019) pela University of Hasselt, Bélgica. É professora titular no Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, desenvolvendo pesquisa e orientando, principalmente, em Modelos Lineares Generalizados e Extensões.

## Rafael A. Moral

Professor associado de Estatística e diretor do grupo de pesquisas em Ecologia Teórica e Estatística na Maynooth University, Irlanda. Tem graduação em Ciências Biológicas (2007-11), e mestrado (2012-14) e doutorado (2014-17) em Estatística e Experimentação Agrônoma pela ESALQ/USP. Desenvolve pesquisa em Modelagem Estatística Aplicada a Ecologia, Manejo da Vida Selvagem, Agricultura e Ciências Ambientais.

[www.blucher.com.br](http://www.blucher.com.br)

ISBN 978-85-212-2012-1

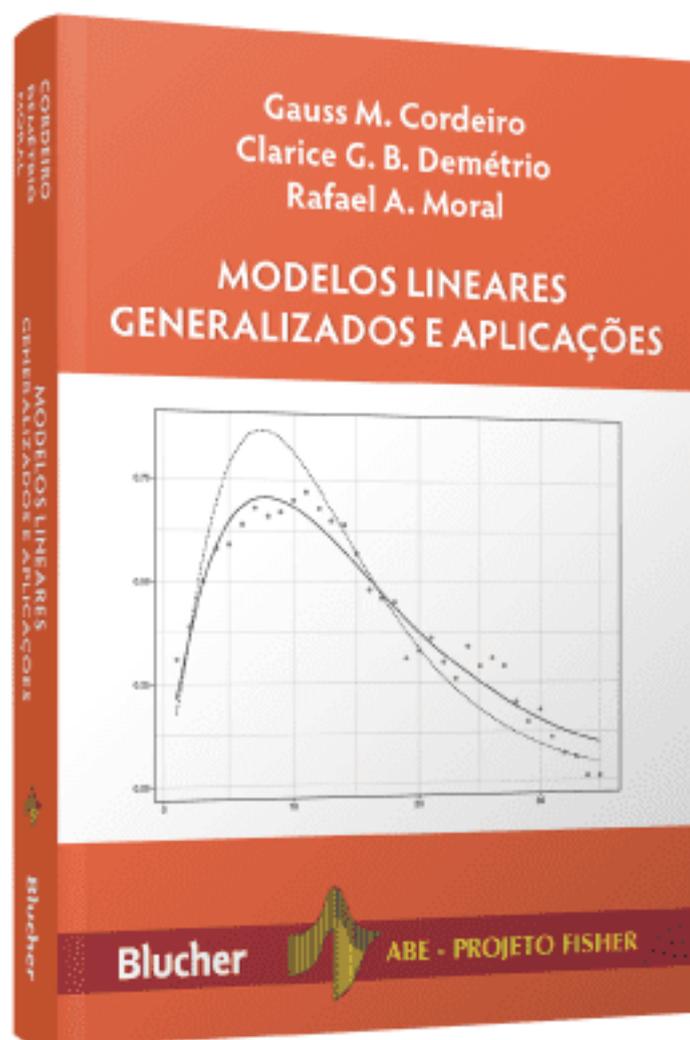


9 788521 220121



ABE - PROJETO FISHER

**Blucher**



Clique aqui e:

[VEJA NA LOJA](#)

## Modelos lineares generalizados e aplicações

---

Gauss M. Cordeiro, Clarice G. B. Demétrio, Rafael A. Moral

ISBN: 9788521220121

Páginas: 256

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2024

---