IVAN DE OLIVEIRA

MECÂNICA

Blucher

Mecânica

Ivan de Oliveira

Mecânica
© 2023 Ivan de Oliveira
Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher
Editores Eduardo Blücher e Jonatas Eliakim
Coordenação editorial Andressa Lira
Produção editorial Lidiane Pedroso Gonçalves
Revisão de texto Maurício Katayama
Capa Laércio Flenic
Imagem da capa iStockphoto
Editora Blucher
Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, julho de 2021. É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora. Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Oliveira, Ivan de
Mecânica / Ivan de Oliveira. — São Paulo : Blucher, 2023.
370 p.
Bibliografia
ISBN 978-65-5506-761-3
1. Mecânica 2. Física 3. Matemática I. Título
23-1333 CDD 531

Índice para catálogo sistemático: 1. Mecânica

Conteúdo

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Alguns conceitos como posição, velocidade e aceleração são fundamentais para o entendimento e para a descrição do movimento, seja de um ponto material ou de um corpo rígido. Dessa forma, nas seções que seguem iremos descrever esses conceitos.

1.1 Referenciais

A descrição do movimento de uma partícula ou de um corpo rígido tem como princípio fundamental a localização seja da partícula ou das partículas que compõem o corpo rígido no espaço. Entretanto, essa localização deve ser feita com base no que chamamos de referencial.

Um referencial é um sistema de coordenadas que serve para indicar a posição das partículas no espaço. Um relógio também deve ser conectado a esse sistema de coordenadas para indicar o tempo, assim podemos descrever o movimento, ou seja, a mudança da posição com tempo e com relação a um dado referencial.

Um referencial que se movimenta com velocidade constante é chamado de referencial inercial. Nesse referencial os corpos se movimentam livres de forças externas.

A importância de definirmos referencial se traduz, por exemplo, na definição do conceito de repouso. Quando a velocidade medida por um observador em um sistema de referência inercial for nula, dizemos que o objeto está em repouso.

1.2 Vetor posição e trajetória

O vetor posição é um vetor que localiza o ponto material no espaço em relação a um dado referencial. Na Fig.1.1 temos os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ localizando o ponto material em relação à origem do sistema de coordenadas. O conjunto de pontos ocupados no espaço pelo ponto material ao longo do tempo definimos como sendo a trajetória C desse ponto.

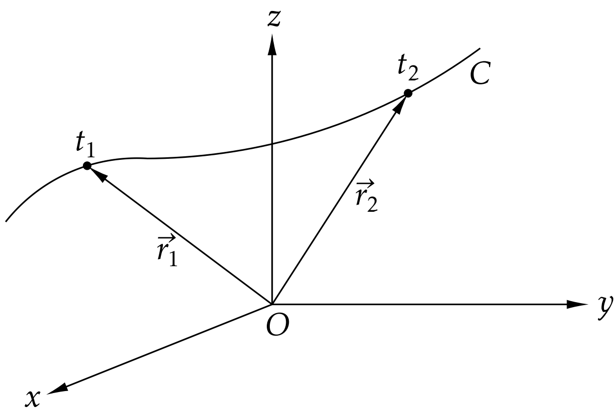

Figura 1.1: Vetores posição $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ ao longo da trajetória C.

Utilizando as coordenadas cartesianas, os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, em relação à origem do sistema de coordenadas, são dados por,

$$\vec{r}_1 = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k} \tag{1.1}$$

$$\vec{r}_2 = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k} \tag{1.2}$$

onde $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ são os vetores unitários ao longo dos eixos x, y e z, respectivamente.

Consideremos agora que o ponto material localizado pelo vetor $\vec{r}_1$ mude de posição, sendo agora localizado pelo vetor $\vec{r}_2$. Definimos como sendo o vetor deslocamento o vetor $\Delta\vec{r}$, que é mostrado na Fig.1.2, e que representa a mudança da posição ao longo da trajetória.

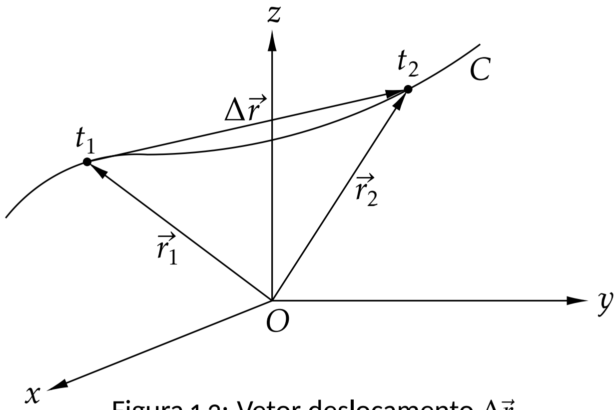

Figura 1.2: Vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$.

É fácil perceber pela Fig.1.2 que

$$\vec{r}_2 = \Delta\vec{r} + \vec{r}_1 \tag{1.3}$$

e, dessa forma, o vetor $\Delta\vec{r}$ fica dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{1.4}$$

Utilizando as Eqs.(1.1) e (1.2), podemos ainda escrever que

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k} \tag{1.5}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k} \tag{1.6}$$

onde Δx, Δy e Δz são as componentes do vetor $\Delta\vec{r}$ ao longo das direções x , y e z, respectivamente.

1.3 Velocidade

O conceito de velocidade é amplo, podendo ser aplicado a diferentes situações e em diferentes áreas do conhecimento. Usamos o conceito de velocidade, por exemplo, na química (velocidade de reação), na biologia (taxa de crescimentos de seres vivos) na economia (taxa de crescimento ou de redução do PIB), entre outras. Dessa forma, intuitivamente podemos perceber que a velocidade está associada à rapidez com que algum fenômeno varia com o tempo. Como estaremos interessados na descrição do movimento de um objeto, a velocidade nos dará a informação da rapidez com que varia a posição desse objeto no tempo. Dessa forma, temos

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{1.7}$$

Consideremos que os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, mostrados na Fig.1.1, sejam os vetores posição do nosso objeto ao longo da trajetória nos instantes de tempos $t_1 = t$ e $t_2 = t + \Delta t$, ou seja,

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t) \tag{1.8}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}(t + \Delta t) \tag{1.9}$$

Dessa forma o vetor deslocamento pode ser escrito como sendo

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{1.10}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \tag{1.11}$$

que, substituindo na Eq.(1.7), resulta em

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \tag{1.12}$$

É importante notarmos que o lado direito da Eq.(1.12) é a definição da derivada de uma função. Sendo assim a velocidade fica sendo definida como a taxa de variação da posição com relação ao tempo, ou seja,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.13}$$

e que pode ser escrita, considerando que $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, da seguinte maneira:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \tag{1.14}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} \tag{1.15}$$

onde v_x, v_y e v_z são as componentes cartesianas do vetor velocidade.

A Eq.(1.7) nos diz que a direção e o sentido do vetor velocidade ficam determinados pelo vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$. Para entendermos um pouco mais sobre o vetor velocidade vamos analisar a Fig.1.3, em que a linha tracejada representa o vetor deslocamento para diferentes instantes de tempo. Pela Fig.1.3 podemos perceber que, à medida que o intervalo de tempo, Δt, diminui o vetor velocidade vai se aproximando de uma reta tangente ao ponto P. Isso quer dizer que, quando $\Delta t \to 0$, o vetor velocidade passa a ser tangente à trajetória.

Essas observações podem ser generalizadas para qualquer tipo de trajetória, ou seja, podemos afirmar que o vetor velocidade é sempre tangente à trajetória percorrida pelo objeto em questão.

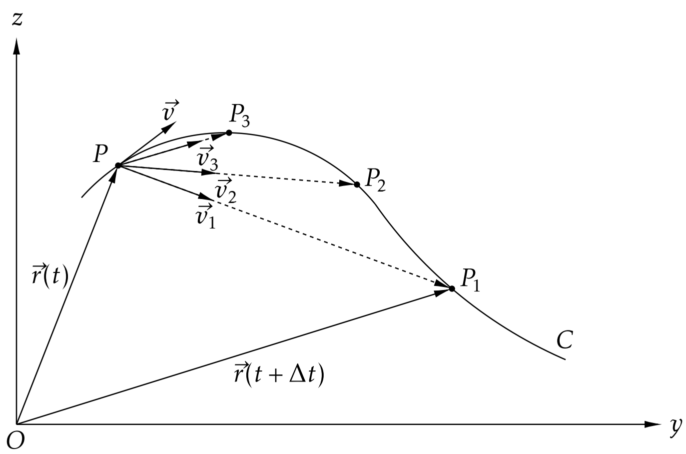

Figura 1.3: Vetor velocidade tangente à trajetória C.

Exemplo 1.3.1

O movimento de partícula no espaço é descrito pelo vetor posição $\vec{r}$ como função do tempo da seguinte forma:

$$\vec{r}(t) = \hat{\imath} + 2t^2\hat{\jmath} - t\hat{k}$$

a) Encontre o vetor velocidade como função do tempo.
b) Descreva a trajetória descrita pela partícula.

SOLUÇÃO:

a) *O vetor velocidade é determinado por*

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Utilizando $\vec{r}(t) = \hat{\imath} + 2t^2\hat{\jmath} - t\hat{k}$ *e fazendo a respectiva derivada, encontramos que*

$$\vec{v} = 4t\hat{\jmath} - \hat{k}$$

■

b) *Para encontrarmos a trajetória percorrida pela partícula devemos escrever o vetor* $\vec{r}$ *como função da posição, ou seja,* $\vec{r} = \vec{r}(x,y,z)$. *Para isso vamos escrever as componentes do vetor* $\vec{r} = \hat{\imath} + 2t^2\hat{\jmath} - t\hat{k}$ *da seguinte forma:*

$$x = 1 \qquad y = 2t^2 \qquad e \qquad z = -t$$

com isso o vetor $\vec{r}(x,y,z)$ *pode ser escrito como sendo*

$$\vec{r}(x,y,z) = \hat{\imath} + 2z^2\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

A trajetória da partícula é o conjunto de pontos determinados pelo vetor $\vec{r}(x,y,z)$ *no espaço. Na Fig.1.4 mostramos a trajetória da partícula no espaço.*

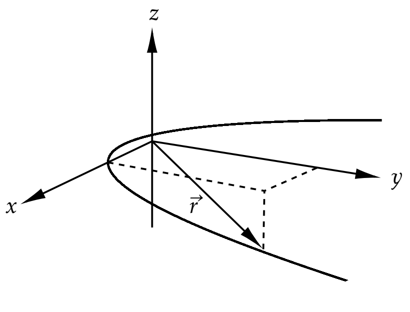

Figura 1.4: *Exemplo 1.3.1 – Trajetória da partícula.*

■

Exemplo 1.3.2

A posição em função do tempo, para $t \geq 0$, de um ponto material que se move ao longo do eixo x é determinada por

$$x(t) = 40 + t^3 - 6t^2 - 15t$$

com x e t medidos em metros e em segundos, respectivamente.
a) Encontre o deslocamento entre os instantes t_1=0 e t_2=5s.
b) Encontre o instante de tempo no qual a velocidade é nula.
c) Faça os gráficos $x(t)$ e $v(t)$ para $0 \leq t \leq 8$ s.

SOLUÇÃO:
a) *Como o movimento ocorre ao longo do eixo x, o deslocamento entre os instantes* t_1 *e* t_2 *é dado por*

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$$

Substituindo t_1*=0 e* t_2*=5 s na função* $x(t)$*, encontramos* $x(t_1)$*=40 m e* $x(t_2)$*=-60 m, respectivamente. Dessa forma o deslocamento entre os instantes* t_1 *e* t_2 *fica sendo* $\Delta x = -60 - 40 = -100$ *m, ou seja, o ponto percorreu uma distância de 100 metros ao longo do eixo x, porém no sentido negativo do eixo.* ■

b) *Para encontrarmos o instante de tempo em que a velocidade é nula, primeiro vamos encontrar a velocidade como função do tempo. Da definição de velocidade temos*

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(40 + t^3 - 6t^2 - 15t\right)$$

Fazendo a respectiva derivada conseguimos

$$v(t) = 3t^2 - 12t - 15$$

Já o instante de tempo onde $v = 0$ *fica então determinado por*

$$3t^2 - 12t - 15 = 0$$

Resolvendo a equação acima encontramos que a velocidade é nula nos instantes $t = -1$ *s e* t*=5 s. Como no instante de* t *=-1 s o movimento ainda não tinha iniciado, podemos concluir que no instante* t*=5 s a velocidade é nula.* ■

c) *Vamos primeiro fazer o gráfico da velocidade em função do tempo, que é dada por*

$$v(t) = 3t^2 - 12t - 15$$

Como a função que descreve a velocidade é uma função do segundo grau, o gráfico é uma parábola. Dessa forma as raízes e os pontos críticos são pontos importantes para traçarmos o gráfico. Da função $v(t)$ é fácil perceber que a parábola tem concavidade voltada para cima e por isso possui um ponto de mínimo que ocorre em t=2 s. Além disso a função $v(t)$ corta o eixo t em t=5 s, uma vez que nesse instante a velocidade é nula. Com essas informações podemos construir o gráfico da velocidade em função do tempo que é mostrado na Fig.1.5.

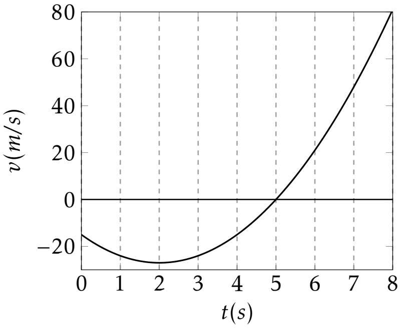

Figura 1.5: *Exemplo 1.3.2 – Velocidade em função do tempo.*

Vamos agora fazer o gráfico da posição em função do tempo, que é dada por

$$x(t) = 40 + t^3 - 6t^2 - 15t$$

Para isso vamos analisar a função $x(t)$ e suas derivadas (pontos críticos)[1] *no intervalo $0 \leq t \leq 8$ s. Os extremos da função ocorrem em $t = 0$ e $t = 8$ s, que correspondem a $x = 40$ m e $x = 48$ m, respectivamente. Como a derivada da posição em relação ao tempo determina a velocidade, podemos ver pela Fig.1.5 que no intervalo $0 \leq t < 2$ s o gráfico $x(t)$ é decrescente e para o intervalo $2 < t \leq 8$ s $x(t)$ é crescente e para $t = 5$ s, $\dfrac{dx}{dt} = 0$. Uma vez que encontramos o intervalo onde a função $x(t)$ é crescente ou decrescente, agora precisamos encontrar o intervalo para o qual a função tem concavidade para cima ou para baixo. Para isso precisamos encontrar o ponto de inflexão do gráfico. O ponto de inflexão é determinado como sendo o ponto onde a derivada segunda é nula $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0\right)$, ou seja, em $t = 2$ s. Então podemos afirmar que no intervalo $0 \leq t \leq 2$ s o gráfico $x(t)$ é decrescente e com concavidade voltada para baixo $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2} < 0\right)$ e, para $2 \leq t \leq 5$ s o gráfico é decrescente com a concavidade voltada para cima. Já para o intervalo $5 \leq t \leq 8$ s o gráfico é crescente com concavidade voltada para cima $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2} > 0\right)$. Com essas*

[1]Ver Apêndice A.6.

informações construímos o gráfico da posição em função do tempo, e o resultado é mostrado na Fig.1.6.

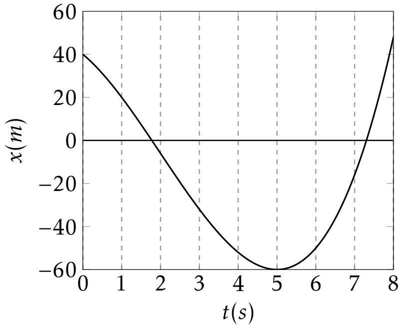

Figura 1.6: *Exemplo 1.3.2 – Posição em função do tempo.*

■

1.4 Aceleração

Na seção anterior definimos a velocidade como sendo a taxa na qual varia a posição, ou seja, a rapidez com que varia no tempo a posição de um objeto. Podemos pensar agora na seguinte pergunta: quem determina a rapidez com que varia a velocidade? A resposta está no conceito da aceleração. A aceleração é definida como sendo

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{1.16}$$

Um vez definido o conceito de aceleração pela Eq.(1.16), vamos analisar o vetor velocidade em dois pontos diferentes (P_1 e P_2), como mostrado na Fig.1.7. Nessa figura C é a trajetória, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ as velocidades nos instantes de tempo t e $t + \Delta t$.

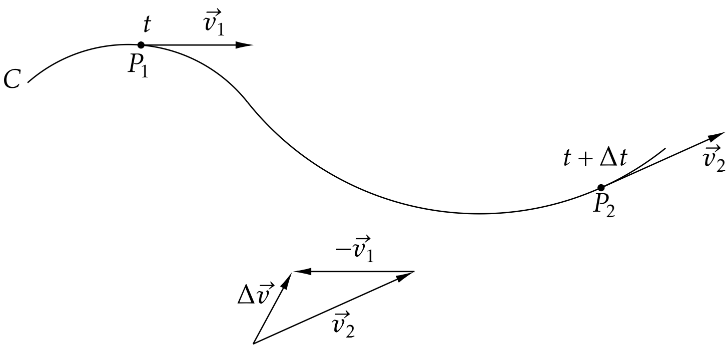

Figura 1.7: Variação da velocidade, $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, entre os instante de tempo t e $t + \Delta t$.

Para determinarmos a aceleração consideremos que

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t) \tag{1.17}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}(t+\Delta t) \tag{1.18}$$

e que, substituindo na Eq.(1.16), conseguimos

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \tag{1.19}$$

que pode ser escrita como

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.20}$$

ou seja, a aceleração é a taxa na qual a velocidade varia. Um ponto importante aqui é perceber que a direção e o sentido da aceleração são determinados por $\Delta\vec{v}$, como podemos ver pela Fig.1.7. Utilizando a Eq.(1.15) a aceleração pode ser determinada em coordenadas cartesianas como sendo

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \tag{1.21}$$

onde a_x, a_y e a_z são as componentes cartesianas do vetor aceleração ao longo dos eixos x, y e z, respectivamente .

Exemplo 1.4.1

Considere que a aceleração de um ponto material seja dada por,

$$a = -kv$$

onde k é uma constante positiva e v a velocidade. Sabendo-se que o ponto material no instante $t = 0$ está na origem com velocidade v_0, determine a velocidade e a posição em função do tempo.

SOLUÇÃO: *Da definição de aceleração temos*

$$a = \frac{dv}{dt}$$

e, como $a = -kv$ *temos*

$$\frac{dv}{dt} = -kv$$

que pode ser escrita como

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{v'} = -\int_0^t k dt'$$

Resolvendo as integrais e rearranjando os termos conseguimos que a velocidade é dada por

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

Para determinamos a posição em função do tempo vamos utilizar a expressão da velocidade encontrada anteriormente. Da definição de velocidade temos

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad\qquad \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$$

que pode ainda ser escrita da seguinte maneira:

$$\int_0^x dx' = \int_0^t v_0 e^{-kt'} dt'$$

As integrais envolvidas são de fácil resolução e por isso deixaremos como exercício. Após a resolução das integrais encontraremos que a posição em função do tempo é dada por

$$x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

■

Exemplo 1.4.2

Em um teste de balística, um projétil penetra em um meio resistente, de comprimento ℓ, com velocidade v_0. Considerando que a velocidade do projetil no meio é dada por

$$v = v_0\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

encontre a aceleração inicial do projétil e o tempo necessário para que o projétil percorra uma distância igual a 0,9ℓ.

SOLUÇÃO: *Para encontrarmos a aceleração inicial do projétil devemos primeiramente encontrar a expressão para a aceleração, porém, como a velocidade é dada em função da posição, devemos escrever que*

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Lembrando que $v = \dfrac{dx}{dt}$, *temos*

$$a = v\frac{dv}{dx}$$

como

$$v = v_0\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

temos que

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v_0}{\ell}$$

Substituindo as expressões para v *e sua derivada em relação a* x *na expressão da aceleração conseguimos*

$$a = -\frac{v_0^2}{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

Para encontrarmos a aceleração inicial, basta fazermos $x = 0$ *na expressão acima e encontramos que a aceleração inicial é dada por*

$$a = -\frac{v_0^2}{\ell}$$

O tempo que o projétil demora para percorrer uma distância igual a 0,9ℓ *pode ser determinada da seguinte forma:*

$$v = \frac{dx}{dt}$$

com v *dada por,*

$$v = v_0\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

Combinando as duas expressões acima conseguimos

$$\frac{dx}{dt} = v_0\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

que pode ser escrita como sendo

$$\int_0^{0,9\ell} \frac{dx}{v_0\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)} = \int_0^t dt$$

Resolvendo as integrais, que deixamos como exercício, encontramos que o tempo necessário para o projétil percorrer uma distância igual a 0,9ℓ *é igual a*

$$t \approx 2,3\frac{\ell}{v_0}$$

■

Exemplo 1.4.3

Uma caixa C está presa a uma corda de comprimento ℓ como mostrado na Fig.1.8. A corda pode deslizar sem qualquer resistência pelas polias fixas A e B. Sabendo-se que a corda é puxada paralela ao chão com uma velocidade constante e igual a v_0 determine a velocidade e aceleração da caixa C presa à corda.

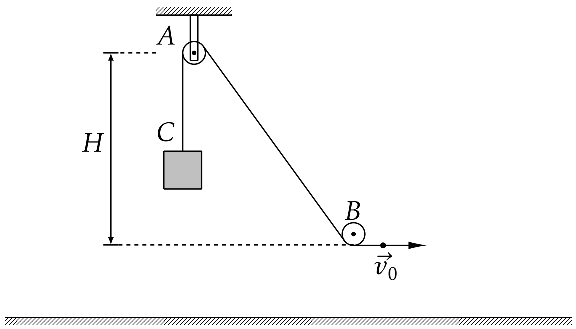

Figura 1.8: *Exemplo 1.4.3.*

SOLUÇÃO: *Para determinarmos a velocidade da caixa vamos analisar a Fig.1.9, onde y_c representa a posição da caixa ao longo do eixo y e x a posição de um ponto na corda que possui velocidade v_0 ao longo do eixo x.*

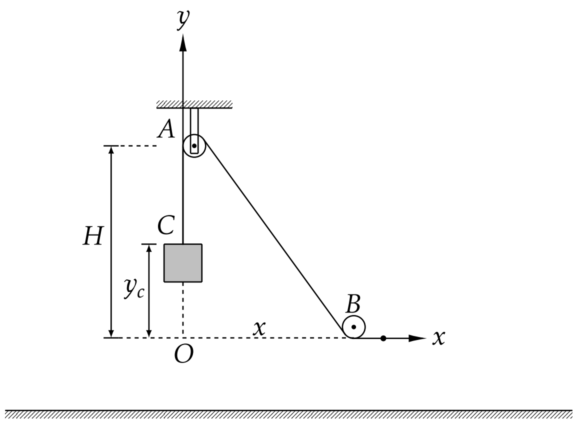

Figura 1.9: *Exemplo 1.4.3.*

Considerando que o tamanho da polia é desprezível em relação ao tamanho da corda, podemos obter a partir da Fig.1.9 a seguinte relação envolvendo o tamanho *da corda ℓ e as posições y_c e x:*

$$\ell = (H - y_c) + \sqrt{H^2 + x^2}$$

Derivando de forma implícita com relação ao tempo ambos os lados da expressão acima e lembrando que a corda mantém o seu tamanho constante ao longo de todo o movimento, conseguimos

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(H - y_c) + \sqrt{H^2 + x^2}\right]$$

$$0 = -\frac{dy_c}{dt} + \frac{x}{\sqrt{H^2 + x^2}}\frac{dx}{dt}$$

Rearranjando os termos e identificando que o termo $\frac{dy_c}{dt}$ determina a velocidade da caixa e o termo $\frac{dx}{dt}$ a velocidade v_0, temos finalmente que a velocidade da caixa é dada por

$$v_c = \frac{x}{\sqrt{H^2 + x^2}}v_0$$

A aceleração da caixa pode ser encontrada utilizando a expressão para v_c da seguinte forma:

$$a_c = \frac{dv_c}{dt}$$

$$a_c = \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{\sqrt{H^2 + x^2}}v_0\right)$$

Fazendo a derivada implícita da expressão acima conseguimos

$$a_c = \frac{v_0^2\sqrt{H^2 + x^2} - x^2 v_0^2 (H^2 + x^2)^{-1/2}}{H^2 + x^2}$$

e, após rearranjarmos os termos, encontramos que a aceleração da caixa é dada por

$$a_c = \frac{H^2}{(H^2 + x^2)^{3/2}}v_0^2$$

■

1.4.1 Aceleração tangencial e normal

Na Fig.1.10 temos representada uma trajetória C, considerada aqui um arco de circunferência de raio R, no plano xy, na qual um ponto material se desloca com velocidade $\vec{v}$ do ponto A ao ponto B. Sabendo-se que a velocidade é sempre tangente à trajetória, podemos escrever que

$$\vec{v} = v\hat{T} \tag{1.22}$$

onde v é o módulo do vetor velocidade e $\hat{T}$ o vetor unitário ao longo da tangente a curva C. Pela Fig.1.10 é fácil perceber que o vetor unitário $\hat{T}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\hat{T} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \tag{1.23}$$

e, por consequência,

$$\vec{v} = v\cos\theta\hat{i} + v\sin\theta\hat{j} \tag{1.24}$$

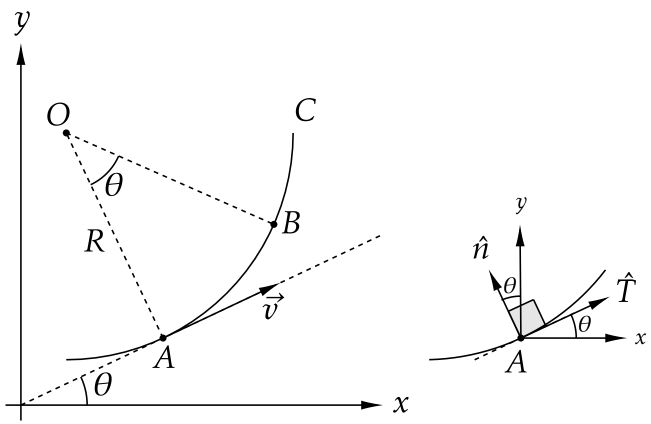

Figura 1.10: Movimento de um ponto material em um arco de circunferência C.

Substituindo a Eq.(1.24) na definição de aceleração dada pela Eq.(1.20) e considerando que ao longo da trajetória o ângulo θ varia com o tempo, temos que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.25}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\left(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}\right) + v\frac{d\theta}{dt}\left(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}\right) \tag{1.26}$$

Na Eq.(1.26) o primeiro termo entre parênteses é o vetor unitário $\hat{T}$ dado pela Eq.(1.23); já o segundo termo entre parênteses é igual a um vetor unitário que é perpendicular (normal) ao vetor $\vec{v}$. É deixado como exercício mostrar que o vetor normal é

$$\hat{n} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} \tag{1.27}$$

Levando-se em conta agora os vetores $\hat{T}$ e $\hat{n}$, a Eq.(1.26) fica sendo

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v\frac{d\theta}{dt}\hat{n} \tag{1.28}$$

É interessante notarmos que a Eq.(1.28) possui dois termos onde o primeiro é a componente do vetor aceleração ao longo da tangente à trajetória, e essa componente chamamos de aceleração tangencial, já o segundo termo corresponde à componente normal do vetor aceleração. Levando-se em consideração que o ângulo θ e o raio da trajetória estão relacionados ao comprimento de arco $\widehat{AB}$ por $\ell = R\theta$, podemos escrever a componente normal da aceleração (a_n) como sendo

$$a_n = v\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}\frac{d\ell}{dt} \tag{1.29}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} \tag{1.30}$$

Com isso temos finalmente que a aceleração do ponto material ao longo de uma trajetória dada por um arco de circunferência é igual a

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{R}\hat{n} \tag{1.31}$$

e cujo o módulo é dado por

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_n^2} \tag{1.32}$$

com

$$a_T = \frac{dv}{dt} \tag{1.33}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} \tag{1.34}$$

Uma constatação imediata da Eq.(1.31) é que a aceleração normal ($\vec{a}_n$) será sempre perpendicular ao vetor $\vec{v}$ e apontará para o centro da trajetória, seja ela um arco de circunferência ou qualquer outra curva, como mostrada na Fig.1.11.

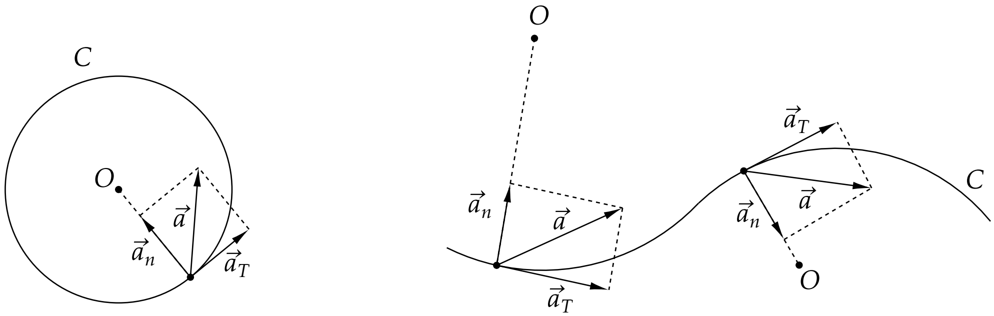

Figura 1.11: Aceleração tangencial $\vec{a}_T$ e aceleração normal $\vec{a}_n$ a trajetória C.

Embora a Eq.(1.31) tenha validade para qualquer tipo de curva, vale salientar que para uma trajetória que é definida por $y = f(x)$ o raio da trajetória é dado por

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} \tag{1.35}$$

Exemplo 1.4.4

Uma partícula move-se no plano xy com uma velocidade $v = 2 + t^2$, onde t é medido em segundos. Sabendo-se que a aceleração é 5 m/s^2, determine o raio da trajetória no instante $t = 2$ s.

SOLUÇÃO: *A aceleração da partícula no plano xy é dada por,*

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_n^2}$$

com

$$a_T = \frac{dv}{dt} \qquad e \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

onde R é o raio da trajetória. Como $v = 2 + t^2$, temos para o instante $t = 2$ s que

$$a_T = 2t \qquad \Rightarrow \qquad a_T = 4\ m/s^2$$

com isso conseguimos

$$5 = \sqrt{4^2 + a_n^2} \qquad \Rightarrow \qquad a_n = 3\ m/s^2$$

Sabendo que $v = 6\ m/s$ quando $t = 2\ s$, podemos determinar o raio da trajetória por

$$a_n = 3\ m/s^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{6^2}{R} = 3$$

logo,

$$R = 12\ m$$

■

Exemplo 1.4.5

Uma partícula move-se no plano xy por uma trajetória dada por $y(x)$ com velocidade constante v_0. Encontre para $x = 0$ a aceleração da partícula quando a trajetória for uma elipse $\frac{x^2}{\gamma^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

SOLUÇÃO: *A aceleração da partícula é dada por*

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_n^2}$$

com

$$a_T = \frac{dv}{dt} \qquad e \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

onde R é o raio da trajetória que é dado por

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

Como o movimento ocorre com velocidade constante, $a_r = 0$, logo a aceleração da partícula fica sendo $\vec{a} = a_n\hat{n}$, ou seja,

$$a = \frac{v_0^2}{R}$$

Para determinarmos então a aceleração devemos encontrar o raio da trajetória. Considerando que a trajetória da partícula é uma elipse, temos que

$$\frac{x^2}{\gamma^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

$$y(x) = \beta\sqrt{1 - \frac{x^2}{\gamma^2}}$$

com isso o raio da trajetória pode ser determinado por

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

com

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta x}{\gamma^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{\gamma^2}}} \qquad e \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\beta}{(\gamma^2 - x^2)\sqrt{1 - \frac{x^2}{\gamma^2}}}$$

Fazendo $x = 0$ *nas expressões acima encontramos que o raio da trajetória é* $R = \dfrac{\gamma^2}{\beta}$ *e com isso a aceleração fica sendo dada por*

$$a = \frac{\beta v_0^2}{\gamma^2}$$

■

1.5 Velocidade e aceleração em coordenadas polares

Na seção 1.3 utilizamos as coordenadas cartesianas para definirmos os conceitos de velocidade e aceleração. Entretanto em várias situações o uso de um outro sistema de coordenadas se torna necessário, pois facilita a resolução dos problemas. Diante disso vamos definir a velocidade e a aceleração utilizando agora as coordenadas polares. Para isso vamos considerar a Fig.1.12, onde o ponto P na trajetória C pode ser localizado pelo vetor

$$\vec{r} = r\hat{r} \tag{1.36}$$

onde r é a distância entre a origem do sistema de coordenadas e o ponto P da trajetória e $\hat{r}$ o vetor unitário ao longo de r. O ângulo θ indica a posição angular do ponto e $\hat{\theta}$ a direção e o sentido da variação do ângulo.

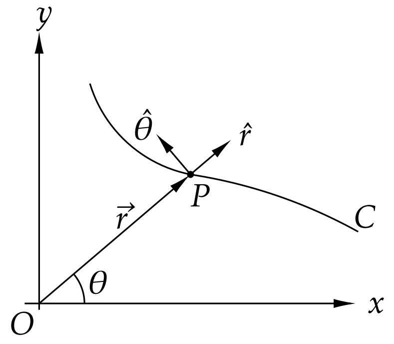

Figura 1.12: Vetor posição em coordenadas polares.

Vale salientar que, independentemente do sistema de coordenadas, a velocidade é dada pela Eq.(1.13) e, sendo assim, temos, utilizando o vetor $\vec{r} = r\hat{r}$, que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.37}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(r\hat{r}\right) \tag{1.38}$$

Considerando que tanto r quanto $\hat{r}$ podem variar com o tempo, temos

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \tag{1.39}$$

Com auxílio da Fig.1.12 podemos escrever que

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \tag{1.40}$$

e com isso temos

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \left(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}\right)\frac{d\theta}{dt} \tag{1.41}$$

Através da Fig.1.12 podemos ainda encontrar que

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} \tag{1.42}$$

e, dessa maneira, a Eq.(1.39) que define a velocidade em coordenadas polares pode ser escrita como

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} \tag{1.43}$$

O primeiro termo da Eq.(1.43) é a componente radial da velocidade, já o segundo termo é a componente angular, ou seja,

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} \tag{1.44}$$

com

$$v_r = \frac{dr}{dt} \tag{1.45}$$

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} \tag{1.46}$$

O termo $\frac{d\theta}{dt}$ na Eq.(1.46) é o que chamamos de velocidade angular e representamos por ω, ou seja,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{1.47}$$

A velocidade angular determina a taxa na qual o ângulo θ varia com o tempo e sua unidade no Sistema Internacional de unidades (SI) é o rad/s, radiano por segundo.

Para determinarmos a aceleração utilizando as coordenadas polares, vamos fazer uso da Eq.(1.20) com $\vec{v}$ dado pela Eq.(1.43), ou seja,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.48}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}\right) \tag{1.49}$$

Realizando as derivadas encontramos

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\theta}}{dt} \tag{1.50}$$

Utilizando a Eq.(1.42) é fácil mostrar, e por isso deixaremos como exercício, que

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r} \tag{1.51}$$

com $\hat{r} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$. Dessa maneira temos finalmente que a aceleração em coordenadas polares é dada por

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\hat{\theta} \tag{1.52}$$

Podemos escrever ainda as componentes radial e angular da aceleração dada por Eq.(1.52) da seguinte forma:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 \tag{1.53}$$

$$a_\theta = r\alpha + 2\omega \frac{dr}{dt} \tag{1.54}$$

com

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{1.55}$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1.56}$$

onde α é a taxa na qual varia a velocidade angular, ou seja,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{1.57}$$

que é chamada de aceleração angular e tem no SI a unidade (rad/s^2).

É importante notarmos que as Eqs.(1.43) e (1.52) descrevem a velocidade e a aceleração para movimentos gerais que ocorrem no plano. Entretanto vários casos interessantes ocorrem quando o vetor posição possui módulo constante, por exemplo, o movimento de rotação ao redor de um ponto fixo. Sendo assim é interessante escrevermos essas equações de outra forma. Considerando o módulo do vetor $\vec{r}$ constante nas Eqs.(1.43) e (1.52) temos

$$\vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} \tag{1.58}$$

$$\vec{a} = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \hat{r} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} \tag{1.59}$$

onde $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ são os vetores unitários mostrados na Fig.1.13. Por essa figura podemos notar que o vetor unitário $\hat{\theta}$ pode ser escrito como sendo $\hat{\theta} = \hat{k} \times \hat{r}$ uma vez que os vetores $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{k}$ são todos perpendiculares entre si. Levando-se isso em consideração e ainda que $d\theta/dt$ é a velocidade angular, podemos escrever que a velocidade é dada por

$$\vec{v} = r\omega\hat{k} \times \hat{r} \tag{1.60}$$

que pode ainda ser escrita como sendo

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1.61}$$

com $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ e $\vec{r} = r\hat{r}$. É interessante notamos que na Eq.(1.61) a velocidade angular é dada como um vetor, indicando que o sentido do movimento é ao redor de um eixo, que no presente caso é o eixo z.

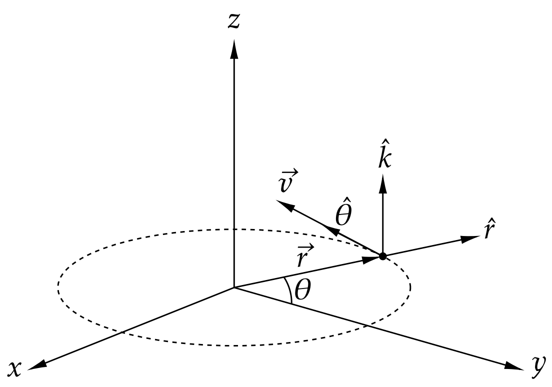

Figura 1.13: Movimento de rotação ao redor de um ponto fixo.

Considerando o fato de que o módulo do vetor $\vec{r}$ é constante e que $d\theta/dt$ é a velocidade angular (ω) e $d^2\theta/dt^2$ é a aceleração angular (α), temos que a aceleração dada pela Eq.(1.59) pode ser escrita como sendo

$$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} + r\alpha\hat{\theta} \tag{1.62}$$

Analisando a Fig.1.13 como fizemos anteriormente em relação ao vetores unitários, encontramos que $\hat{r} = \hat{\theta} \times \hat{k}$ e lembrando que $\hat{\theta} = \hat{k} \times \hat{r}$ o primeiro termo a direita da Eq.(1.62) pode ser escrito como sendo

$$-r\omega^2\hat{r} = r\omega^2(\hat{k} \times \hat{\theta}) \tag{1.63}$$

$$-r\omega^2\hat{r} = \omega\hat{k} \times (\omega\hat{k} \times r\hat{r}) \tag{1.64}$$

$$-r\omega^2\hat{r} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{1.65}$$

Já o segundo termo à direita da Eq.(1.62) é fácil mostrar, e por isso deixaremos como exercício, que ele pode ser escrito da seguinte forma:

$$r\alpha\hat{\theta} = \vec{\alpha} \times \vec{r} \tag{1.66}$$

Com isso podemos escrever finalmente que a aceleração dada pela Eq.(1.59) é igual a

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r} \tag{1.67}$$

ou ainda

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} \tag{1.68}$$

com o primeiro termo sendo a componente radial da aceleração e o segundo termo a componente angular (ou tangencial) da aceleração.

Exemplo 1.5.1

Uma partícula P descreve no plano xy a trajetória mostrada na Fig.1.14. Sabendo-se que a posição em função do tempo da partícula é dada por

$$r = a\left[1+\cos\theta\right]$$

e

$$\theta = \frac{\pi t}{4}$$

com a sendo uma constante, encontre a velocidade e aceleração para os instantes $t = 0$ e $t = 3$ s.

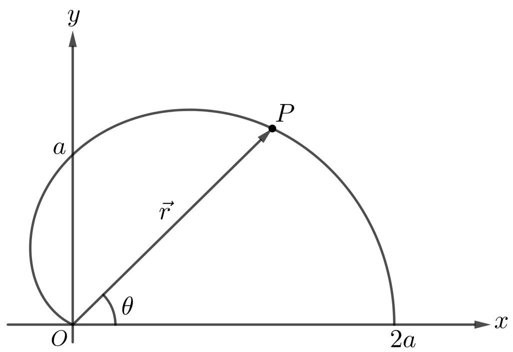

Figura 1.14: Exemplo 1.5.1 – Trajetória da partícula.

SOLUÇÃO: *A velocidade da partícula é dada por*

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}$$

com

$$v_r = \frac{dr}{dt} \qquad e \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

como

$$r = a\left[1+\cos\theta\right]$$

e

$$\theta = \frac{\pi t}{4}$$

temos, após fazermos as derivadas, que a velocidade é dada por

$$\vec{v} = -\frac{a\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\hat{r} + \frac{a\pi}{4}\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right]\hat{\theta}$$

Substituindo na expressão acima os instantes $t = 0$ *e* $t = 3$ *s, conseguimos, respectivamente, que*

$$\vec{v} = \frac{a\pi}{2}\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = -\frac{a\pi\sqrt{2}}{8}\hat{r} + \frac{a\pi(2+\sqrt{2})}{8}\hat{\theta}$$

Já a aceleração podemos calcular da seguinte forma:

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$$

com

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

e

$$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$

Com as informações de r *e* θ *temos, após realizarmos as respectivas derivadas, que a aceleração da partícula é dada por*

$$a_r = -\frac{a\pi^2}{16}\left[1+2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right]$$

e

$$a_\theta = \frac{a\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

Para os instantes de tempo $t = 0$ *e* $t = 3$ *s temos, respectivamente, que a aceleração é igual a*

$$\vec{a} = -\frac{3a\pi^2}{16}\hat{r}$$

$$\vec{a} = -\frac{a\pi^2(1-\sqrt{2})}{16}\hat{r} + \frac{a\pi^2\sqrt{2}}{16}\hat{\theta}$$

Na Fig.1.15 mostramos os vetores velocidade e aceleração para os respectivos instantes de tempo. É importante perceber pela figura que o vetor velocidade em ambos os instantes é sempre tangente à trajetória.

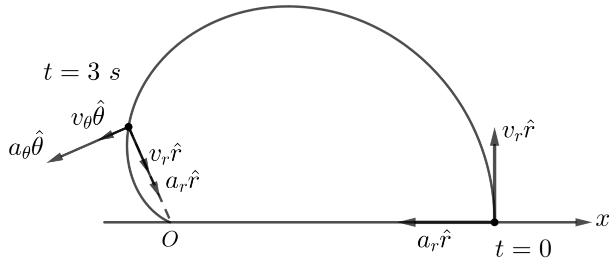

Figura 1.15: Exemplo 1.5.1 – Vetores velocidade e aceleração.

■

1.6 Velocidade e aceleração relativa

Consideremos que os pontos A e B movem-se ao longo da trajetória mostrada na Fig.1.16 com $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$ os vetores posição determinados em relação à origem O do sistema de coordenadas.

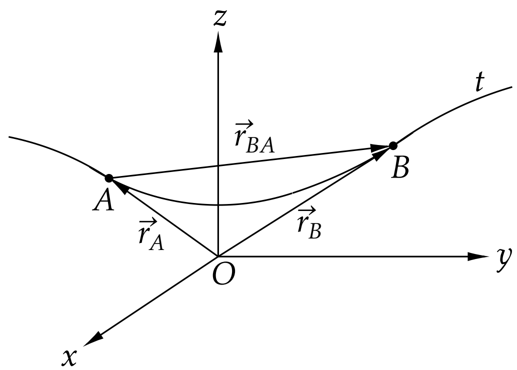

Figura 1.16: Posição dos pontos A e B ao longo da trajetória t.

Além das posições dos pontos A e B ao longo da trajetória t a Fig.1.16 também mostra o vetor posição $\vec{r}_{BA}$ que determina a posição relativa entre o pontos A e B ao longo da trajetória. Pela Fig.1.16 é fácil notar que

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA} \tag{1.69}$$

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \tag{1.70}$$

Utilizando a Eq.(1.70) podemos definir a velocidade relativa entre os pontos A e B da seguinte forma:

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} \tag{1.71}$$

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} \tag{1.72}$$

onde o primeiro termo à direita é a velocidade do ponto B ($\vec{v}_B$) e o segundo termo a velocidade do ponto A ($\vec{v}_A$). Ambas são medidas em relação à origem do sistema de coordenadas e, sendo assim, a velocidade relativa entre A e B é

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \tag{1.73}$$

A aceleração relativa pode ser determinada utilizando a definição de aceleração dada pela Eq.(1.20). Utilizando essa definição temos que a aceleração relativa entre os pontos A e B fica sendo

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A \tag{1.74}$$

As Eqs.(1.73) e (1.74) descrevem a velocidade e a aceleração relativas, porém quando o movimento é de translação. Entretanto é interessante analisarmos o movimento relativo na presença de uma rotação. Para isso vamos considerar os pontos A e B mostrados na Fig.1.17.

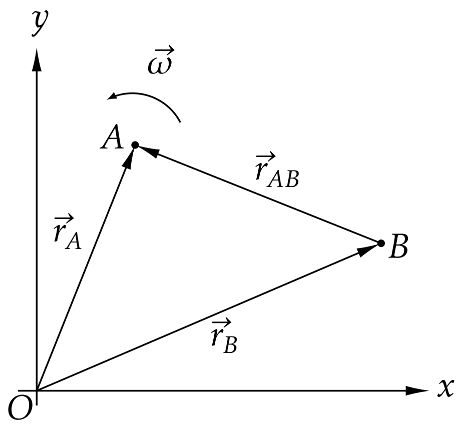

Figura 1.17: Posição dos pontos A e B em movimento relativo de rotação.

Consideremos ainda que o ponto A tenha um movimento de rotação ao redor do ponto fixo O com velocidade angular $\vec{\omega}$. Em relação ao ponto O a velocidade do ponto A esta relacionada à velocidade angular da seguinte forma:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A \tag{1.75}$$

onde $\vec{r}_A$ é o vetor posição em relação ao ponto O, como mostrado na Fig.1.17. Dessa figura podemos ainda escrever que $\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{AB}$, onde $\vec{r}_B$ é o vetor posição do ponto B em relação à origem e $\vec{r}_{AB}$ o vetor posição que localiza o ponto A em relação ao ponto B. Com isso podemos escrever a Eq.(1.75) da seguinte forma:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times (\vec{r}_B + \vec{r}_{AB}) \tag{1.76}$$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \tag{1.77}$$

Na equação anterior é fácil identificar que o primeiro termo à direita é a velocidade do ponto B em relação ao ponto O e, sendo assim, a velocidade do ponto A é dada por

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \tag{1.78}$$

É importante perceber que a velocidade relativa entre os pontos A e B depende da velocidade angular ω e da distância relativa entre os pontos.

Podemos agora, assim como fizemos no movimento de translação, determinar a aceleração do ponto A em relação à origem da seguinte forma,

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} \tag{1.79}$$

com $\vec{v}_A$ dada pela Eq.(1.78) temos

$$\vec{a}_A = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}\right) \tag{1.80}$$

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_B}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} \tag{1.81}$$

Identificando na equação acima que o primeiro termo é a aceleração do ponto B em relação à origem e $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$, a aceleração angular a Eq.(1.81) pode ser escrita como

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} \tag{1.82}$$

Movimentos relativos se apresentam em diferentes situações, como nas mostradas na Fig.1.18. Na figura o movimento de um bloco está vinculado ao movimento do outro.

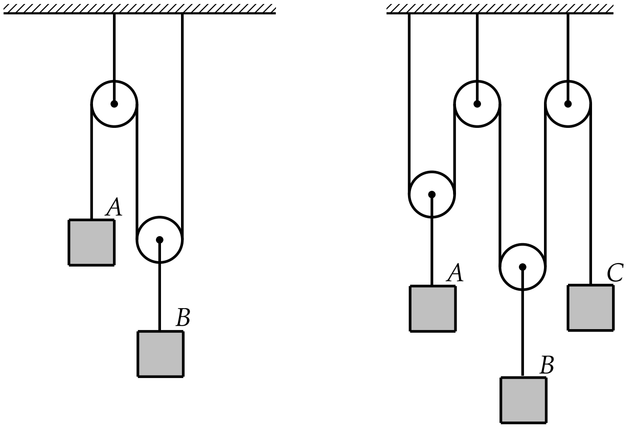

Figura 1.18: Movimento relativo e dependente.

Para encontrarmos uma relação entre o movimento dos blocos precisamos determinar a relação de vínculo entre eles. Para isso vamos analisar primeiramente o sistema de polias mostrado à esquerda na Fig.1.18. Nesse sistema temos duas polias, sendo uma delas fixa e a outra móvel. Consideremos que as duas polias são envolvidas por uma corda de comprimento L. Para encontrarmos a relação de vínculo entre os blocos vamos analisar a Fig.1.19, onde y_A e y_B indicam a posição dos blocos A e B respectivamente.

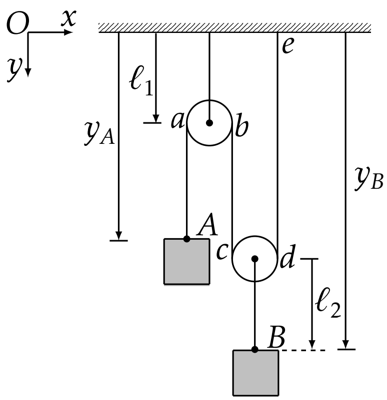

Figura 1.19: Movimento relativo e dependente para um sistema de uma polia fixa e outra móvel.

Pela Fig.1.19 encontramos que o comprimento da corda pode ser determinado por

$$L = \overline{Aa} + \widehat{ab} + \overline{bc} + \widehat{cd} + \overline{de} \tag{1.83}$$

com

$$\overline{Aa} = (y_A - \ell_1) \tag{1.84}$$

$$\overline{bc} = (y_B - \ell_1 - \ell_2) \tag{1.85}$$

$$\overline{de} = (y_B - \ell_2) \tag{1.86}$$

Já os termos $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$ podem ser diferentes, porém são constantes e, dessa maneira, podemos escrever a relação entre y_A e y_B que determina o vínculo entre os blocos como sendo

$$y_A + 2y_B = C \tag{1.87}$$

onde C é uma constante. Através da Eq.(1.87) podemos encontrar uma relação entre as velocidades dos blocos A e B derivando ambos os lados da Eq.(1.87). Procedendo dessa maneira encontramos que

$$v_A + 2v_B = 0 \tag{1.88}$$

Podemos ainda encontrar uma relação entre a aceleração a_A do bloco A e a aceleração a_B do bloco B. Assim como fizemos para encontrar a relação entre as velocidades, podemos derivar ambos os lados da Eq.(1.88) para determinar

$$a_A + 2a_B = 0 \tag{1.89}$$

Consideremos agora o sistema de duas polias fixas e duas móveis, como indica o sistema da direita mostrado na Fig.1.18. Com base nas ideias discutidas anteriormente e com o auxílio da Fig.1.20 é possível mostrar, e por isso deixaremos como exercício, que a relação de vínculo entre os blocos A, B e C é dada por

$$2y_A + 2y_B + y_C = C \tag{1.90}$$

com C sendo uma constante.

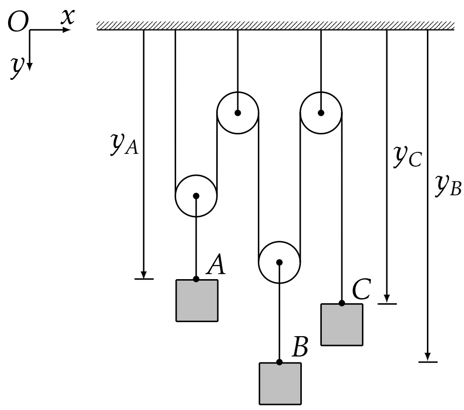

Figura 1.20: Movimento relativo e dependente para um sistema de duas polias fixas e duas móveis.

Podemos ainda encontrar, da mesma maneira que antes, as relações entre as respectivas velocidades e acelerações, que são dadas por

$$2v_A + 2v_B + v_C = 0 \tag{1.91}$$

$$2a_A + 2a_B + a_C = 0 \tag{1.92}$$

Embora as relações encontradas aqui sejam válidas apenas para os sistemas mostrados na Fig.1.18, é possível usar o procedimento discutido aqui para encontrar diferentes relações para distintos sistemas.

Exemplo 1.6.1

Uma partícula A se movimenta em relação a outra B com uma velocidade relativa $\vec{v}_{AB}$. A partícula B se movimenta em relação a outra partícula C com uma velocidade relativa $\vec{v}_{BC}$. Sabendo que

$$\vec{r}_{AB} = 2t\hat{i} - (t+1)\hat{j}$$

$$\vec{r}_{BC} = (t+5)\hat{i} - (2t-8)\hat{j}$$

determinam as posições relativas entre as partículas AB e BC, encontre a velocidade da partícula A em relação à partícula C.

SOLUÇÃO: *Para encontrarmos a velocidade $\vec{v}_{AC}$, ou seja, a velocidade da partícula A em relação à partícula C, vamos primeiro encontrar as velocidade $\vec{v}_{AB}$ e*

$\vec{v}_{BC}$ *da seguinte forma:*

$$\vec{v}_{AB} = \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = 2\hat{i} - \hat{j}$$

$$\vec{v}_{BC} = \frac{d\vec{r}_{BC}}{dt} = \hat{i} - 2\hat{j}$$

Considerando que $\vec{v}_{AB}$ *e* $\vec{v}_{BA}$ *podem ser escritas como sendo*

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

$$\vec{v}_{BC} = \vec{v}_B - \vec{v}_C$$

podemos combinar as expressões acima para $\vec{v}_{AB}$ *e* $\vec{v}_{BA}$ *para encontrarmos*

$$\vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC} = \vec{v}_A - \vec{v}_C$$

Lembrando-se que $\vec{v}_A - \vec{v}_C = \vec{v}_{AC}$*, temos*

$$\vec{v}_{AC} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC}$$

Substituindo os valores de $\vec{v}_{AB}$ *e* $\vec{v}_{BA}$ *temos finalmente que a velocidade da partícula* A *em relação à partícula* C *é*

$$\vec{v}_{AC} = 3\hat{i} - 3\hat{j}$$

■

Exemplo 1.6.2

Na Fig.1.21 há um sistema de três polias, sendo que duas delas são móveis. Sabendo-se que o bloco B sobe com velocidade constante v_0, determine a velocidade do bloco A.

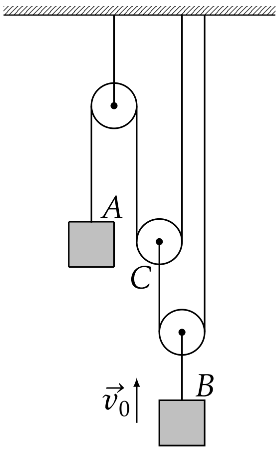

Figura 1.21: *Exemplo 1.6.2.*

SOLUÇÃO: *Para encontrarmos a velocidade do bloco A vamos adotar o referencial mostrado na Fig.1.22, onde as coordenadas* y_A, y_B *e* y_C *determinam as posições dos blocos* A *e* B *assim como da polia* C*, respectivamente.*

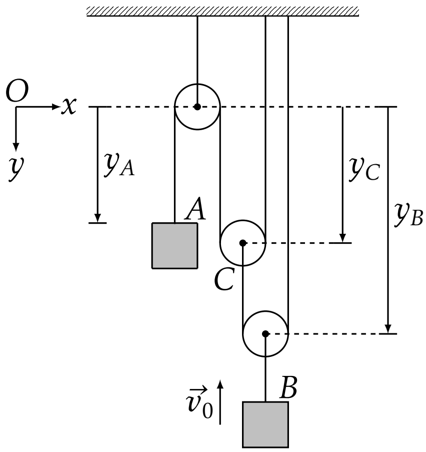

Figura 1.22: *Exemplo 1.6.2.*

Analisando a Fig.1.22 é possível encontrar as seguintes relações de vínculo:

$$y_A + 2y_C = C_1 \qquad e \qquad y_B + (y_B - y_C) = C_2$$

onde C_1 *e* C_2 *são constantes. Derivando ambos os lados das expressões acima conseguimos*

$$v_A + 2v_C = 0 \qquad e \qquad 2v_B - v_C = 0$$

Resolvendo o sistema de equações e lembrando que v_B=-v_0, *encontramos que a velocidade do bloco A é*

$$v_A = 4v_0$$

■

Problemas

1. A posição de uma partícula que se move ao longo do eixo x é dada em centímetros por $x = 10 + 2t^3$, onde t está em segundos. Calcule:
   a) A velocidade média durante o intervalo de tempo t=2,0 s e t=3,0 s.
   b) A velocidade no instante t=2,0 s.
   c) O instante de tempo para o qual a velocidade da partícula é 12 m/s.
   d) Faça o gráfico de v *versus* t.

Mecânica é um livro que apresenta os conceitos descritos pelas leis de Newton. Os assuntos relacionados à mecânica Newtoniana são tratados de forma continuada diferentemente das obras tradicionais em que os assuntos são abordados de forma seccionada. Isso permite ao estudante/leitor perceber ao longo do livro as conexões entre os diferentes assuntos desenvolvidos.

O livro contém exercícios resolvidos e exercícios para cada assunto desenvolvido. Além disso, há um conjunto de problemas no final de cada capítulo com diferentes níveis de aprofundamento. Para os exercícios propostos, assim como para os problemas do final de cada capítulo, são apresentadas as respostas.

Por fim, utiliza-se o formalismo matemático adequado e de forma objetiva ao tratar o conteúdo da obra. Com o objetivo de auxiliar o estudante/leitor, um conjunto de apêndices com a descrição de conceitos fundamentais de matemática elementar, vetores e de cálculo diferencial e integral é apresentado no final do livro.

Ivan de Oliveira

ISBN 978-65-5506-761-3

9 786555 067613

www.blucher.com.br

Blucher

Clique aqui e:

VEJA NA LOJA

Mecânica

Ivan de Oliveira

ISBN: 9786555067613
Páginas: 370
Formato: 24 x 17 cm
Ano de Publicação: 2023