

MARCO AURÉLIO CREMASCO  
ALESSANDRA SUZIN BERTAN

# TRANSFERÊNCIA DE MASSA

Difusão mássica em meios não convencionais



**Blucher**

Volume 2

Marco Aurélio Cremasco

&

Alessandra Suzin Bertan

# TRANSFERÊNCIA DE MASSA

Difusão mássica em meios não convencionais

Volume 2

*Transferência de massa: difusão mássica em meios não convencionais* vol. 2

© 2024 Marco Aurélio Cremasco & Alessandra Suzin Bertan

Editora Edgard Blücher Ltda.

*Publisher* Edgard Blücher

*Editor* Eduardo Blücher

*Coordenador editorial* Rafael Fulanetti

*Coordenação de produção* Andressa Lira

*Produção editorial* Kedma Marques

*Preparação de texto* Samira Panini

*Diagramação* Alessandra de Proença

*Revisão de texto* Bruna Marques

*Capa* Laércio Flenic

*Imagem da capa* Istockphoto

# Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar

04531-934 – São Paulo – SP – Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

**contato@blucher.com.br**

**www.blucher.com.br**

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, julho de 2021.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Cremasco, Marco Aurélio

Transferência de massa : difusão mássica em meios não convencionais / Marco Aurélio Cremasco, Alessandra Suzin Bertan. – São Paulo : Blucher, 2024.  
259 p. (Vol 2)

Bibliografia

ISBN 978-85-212-2373-3 (impresso)

1. Engenharia química 2. Massa – Transferência  
I. Título II. Bertan, Alessandra Suzin

24-1499

CDD 660

Índice para catálogo sistemático:

1. Engenharia química

# Conteúdo

|  |            |
|--|------------|
| <b>1. PASSEIO NA AURORA BOREAL</b>       | <b>11</b>  |
| <b>2. RAIOS</b>                          | <b>31</b>  |
| <b>3. VULCÃO</b>                         | <b>43</b>  |
| <b>4. ESTÁ NO DNA</b>                    | <b>67</b>  |
| <b>5. ENTRE A FLOR E O CARRAPICHO</b>    | <b>81</b>  |
| <b>6. O QUE SE PASSA POR SUA CABEÇA?</b> | <b>95</b>  |
| <b>7. HORA DO LEITE</b>                  | <b>107</b> |
| <b>8. A VIDA POR UM MICRORGANISMO</b>    | <b>123</b> |

|   |            |
|---|------------|
| <b>9. QUE SOJA</b>                          | <b>139</b> |
| <b>10. AROMAS</b>                           | <b>157</b> |
| <b>11. O PERFUME</b>                        | <b>175</b> |
| <b>12. NÃO É CULPA DO VENTO</b>             | <b>191</b> |
| <b>13. O QUE SE RESPIRA?</b>                | <b>205</b> |
| <b>14. O QUE NOS AQUECE?</b>                | <b>217</b> |
| <b>15. OURO DE TOLO OU PEDRA FILOSOFAL?</b> | <b>229</b> |
| <b>NOMENCLATURA</b>                         | <b>247</b> |
| <b>ÍNDICE REMISSIVO</b>                     | <b>253</b> |

## CAPÍTULO 1

# Passeio na aurora boreal



O que está por vir? Tudo o que existe, existe em potência, em estado de latência, feito luz escondida no breu? Inimaginável a luminosidade do *Big Bang*, mas testemunhamos a intensidade do raio nas chuvas de primavera; podemos ver, no verão, o brilho do Sol, que nos leva a pensar nas estrelas no céu noturno do outono ou no magnetismo da aurora boreal. Brilhos que fascinam o ser humano desde tempos imemoriais, em que se apreciava o fogo trazido por Prometeu à humanidade e, assim, simbolizava o conhecimento. Mesmo você, que se debruça sobre esta leitura artificialmente iluminada, talvez por lâmpada fluorescente, talvez se esquecendo que mais de 99% da matéria do universo visível esteja no mesmo estado material que flui da descarga elétrica do raio, daquele que palpita no coração das estrelas, bem como explode em cores nos girassóis e noites estreladas de Van Gogh, como também crepita da chama do fogo que traduz o conhecimento, que enleia a luz sobre a sua cabeça, que pensa e delira (Cremasco; Bertan; Miranda, 2021). Plasma, que muitos denominam quarto estado da matéria, é, de fato, o primeiro estado e de onde todos os demais originaram-se.

A Terra é bombardeada por energia vinda do espaço exterior (Baranoski *et al.*, 2005), principalmente do Sol, que espalha, por exemplo, partículas atômicas constituintes do vento solar. Uma fração dessas partículas interage com o campo magnético terrestre, sendo guiadas para as regiões magnéticas norte e sul do Planeta. Os elétrons, ao percorrerem ao longo das linhas do campo magnético, sofrem deflexões aleatórias, causadas por colisões com átomos de gases atmosférico, como oxigênio e nitrogênio. Quando os elétrons colidem com os constituintes atmosféricos, os átomos são excitados e emitem fótons (Baranoski *et al.*, 2005), promovendo o espetáculo de luzes conhecido como aurora boreal (no norte magnético da Terra) e aurora austral (no sul magnético da Terra). O meio em que ocorre o fenômeno da aurora boreal é um gás ionizado naturalmente, ou seja, plasma, e a camada da atmosfera em que acontece tal fenômeno é a ionosfera, sendo ela própria plasma (Eliezer; Eliezer, 2001; Chen, 2016). Desse modo, pretende-se ter uma ideia de como ocorre a difusão de elétrons e íons em determinada região da ionosfera (conhecida como região E) onde ocorre a aurora boreal (entre 90 km a 150 km de altitude). Encontram-se, nessa região, majoritariamente os íons  $\text{NO}^+$  e  $\text{O}_2^+$ , cujas concentrações, bem como a de elétrons, podem ser obtidas a partir da Figura 1.1, enquanto as temperaturas dos elétrons ( $T_e$ ) e íons ( $T_i$ ) estão apresentadas na Figura 1.2.

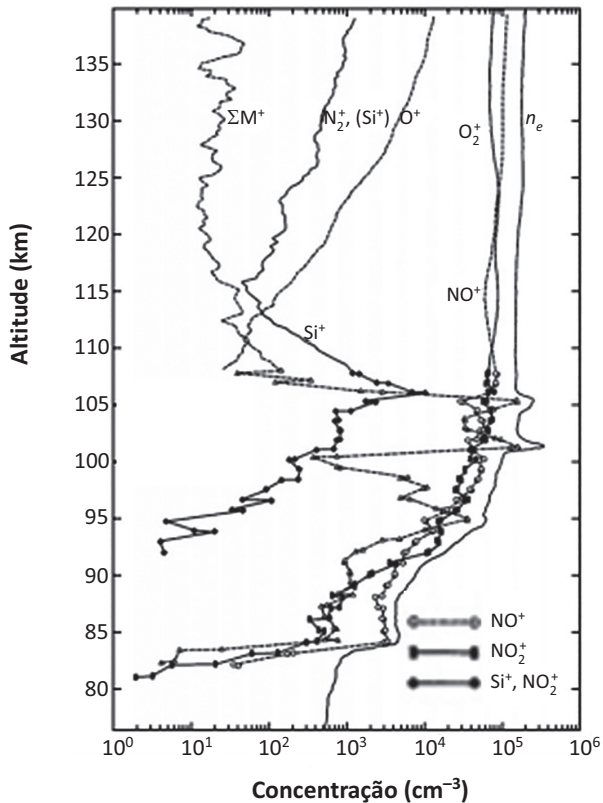
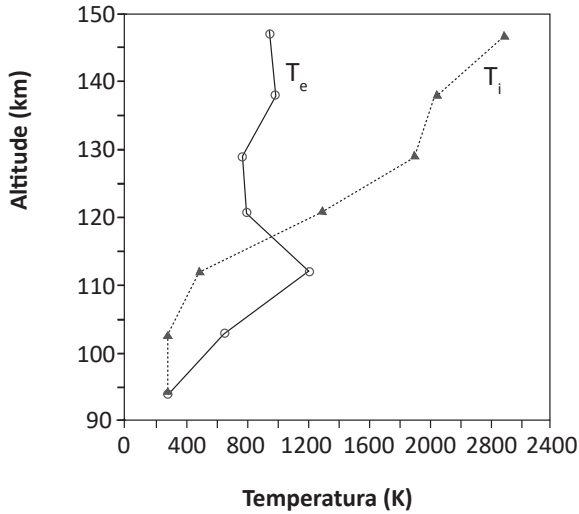


Figura 1.1 – Concentrações de íons e de elétrons na região E da ionosfera.

Fonte: adaptada de Kelley (2009).



**Figura 1.2** – Temperaturas de elétrons ( $T_e$ ) e íons ( $T_i$ ) na região polar E em presença de elevado campo elétrico.

Fonte: adaptada de Kelley (2009).

Uma das estratégias para analisar o espalhamento ou dispersão de íons e elétrons livres na região E, em particular naquela em que ocorre o fenômeno da aurora boreal, é o emprego da abordagem de difusão estocástica. Para tanto, assumo o modelo de difusão ambipolar, considerando-se o modelo de passeio aleatório tridimensional (3D) para a descrição estocástica. Tendo em vista que a massa dos elétrons é  $m_e = 9,109 \times 10^{-31}$  kg, e dos íons  $O_2^+$  e  $NO^+$ , bem como os respectivos números atômicos iguais a  $m_{O_2^+} = 5,315 \times 10^{-26}$  kg,  $m_{NO^+} = 4,983 \times 10^{-26}$  kg,  $Z_{O_2^+} = 16$ ,  $Z_{NO^+} = 15$ , pede-se:

- Obtenha os valores do coeficiente de difusão livre dos íons  $O_2^+$  e  $NO^+$ , bem como os respectivos valores dos coeficientes de difusão ambipolar nas altitudes 100 km e 130 km.
- Construa os cartogramas 3D do deslocamento dos íons  $O_2^+$  e  $NO^+$  a 100 km, nos tempos 0,25 s e 0,75 s.
- Construa os cartogramas 3D do deslocamento dos íons  $O_2^+$  e  $NO^+$  a 0,5 s, nas altitudes 100 km e 130 km.

## COMENTÁRIOS

Além de se identificar o plasma no Sol, nas estrelas, nos raios e na aurora boreal, destaca-se que a difusão em plasma está presente em algumas aplicações de engenharia, como no processo de deposição e difusão de níquel via plasma em amostras de ferro (Cardoso, 2003), em processos de nitretação a plasma (Ramos, 2003) e no pré-



-tratamento do bagaço de cana-de-açúcar visando à produção de álcool de segunda geração (Miranda, 2013). É crucial entender a natureza desse estado da matéria, contextualizando-o em relação aos demais: gás, líquido e sólido (Figura 1.3), bem como em relação à energia associada às transições de fases, conforme ilustra a Figura 1.4. A transição de gás para plasma denomina-se ionização, enquanto o processo inverso, recombinação.

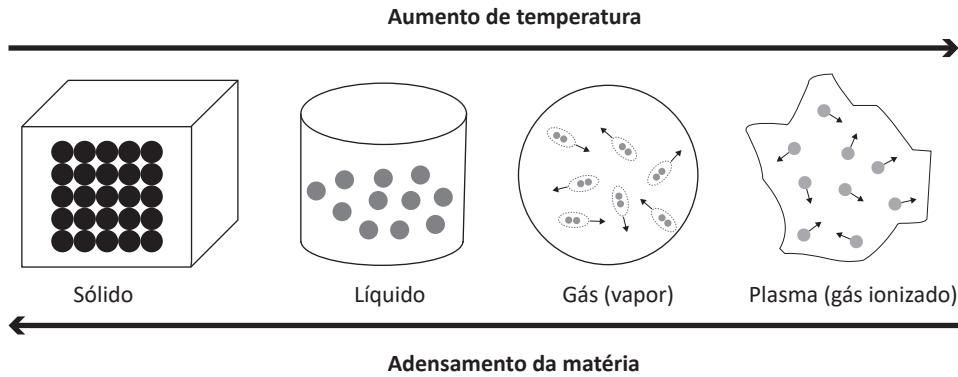


Figura 1.3 – Os estados da matéria.

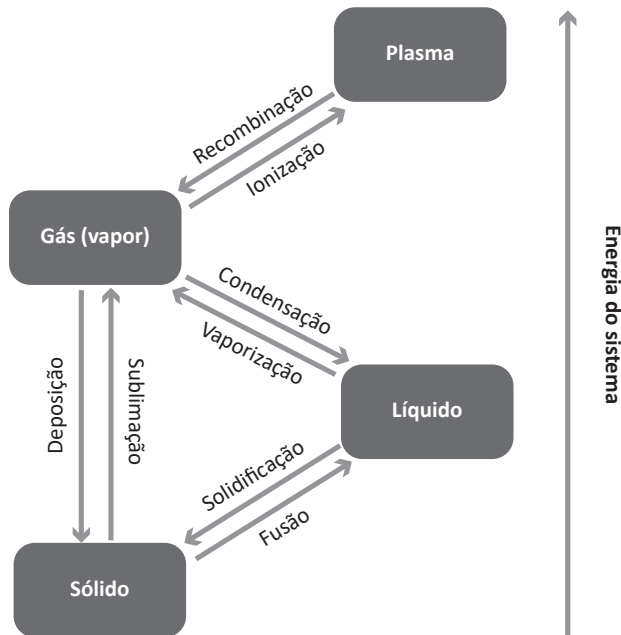


Figura 1.4 – Transição de fases em distintos estados da matéria.

Fonte: adaptada de Wikipédia (2022).

Intui-se, naturalmente, a natureza errática das partículas que compõem o plasma, de tal modo que a difusão de matéria ocorre entre as regiões mais densas para as regiões menos densas ou entre regiões com maior temperatura para regiões de menor temperatura (Motta, 1996). Tendo em vista que os elétrons apresentam massa bem menor do que a dos íons, aqueles tendem a se difundir mais rápido, arrastando o excesso de cargas positivas. O movimento dos elétrons, portanto, provoca desequilíbrio de cargas, acelerando a difusão dos íons, mas desacelerando a de elétrons, provocando a advecção de ambas as partículas, de modo que o fluxo de matéria associado aos elétrons e íons pode ser escrito, respectivamente, como

$$\mathbf{J}_e = -D_e \nabla n_e - \mu_e n_e \mathbf{E} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{J}_i = -D_i \nabla n_i - \mu_i n_i \mathbf{E} \quad (1.2)$$

em que  $n_e$  se refere à concentração de elétrons por volume de plasma;  $n_i$ , concentração de íons por volume;  $\mu_e$  e  $\mu_i$ , mobilidades dos elétrons e dos íons no campo elétrico,  $\mathbf{E}$ ;  $D_e$  e  $D_i$  referem-se aos coeficientes de difusão livre dos elétrons e dos íons advindos, respectivamente, de

$$D_e = \frac{k_B T_e}{m_e \nu_e} \quad (1.3)$$

$$D_i = \frac{k_B T_i}{m_i \nu_i} \quad (1.4)$$

sendo a constante de Boltzmann,  $k_B = 1,381 \times 10^{-23}$  J/K;  $m_e$  e  $m_i$ , massa do elétron e do íon, respectivamente;  $\nu_e$  e  $\nu_i$ , frequência de colisão, no plasma, de elétrons e de íons, respectivamente (Bittencourt, 2018)

$$\nu_e = 8,992 n_e^{1/2} \quad (1.5)$$

$$\nu_i = 8,569 \times 10^{-15} Z \left( \frac{n_i}{m_i} \right)^{1/2} \quad (1.6)$$

em que as frequências resultam em  $s^{-1}$ , utilizando-se concentrações das partículas em  $m^{-3}$ , sendo  $Z$ , o número atômico do íon considerado. Ao se assumir que o desequilíbrio entre fluxo e concentração é pequeno, ou seja, a situação de quase-equilíbrio, considera-se a igualdade entre os fluxos de elétrons e de íons, permitindo a igualdade entre as Equações (1.1) e (1.2), cujo resultado para o campo elétrico é posto na forma

$$\mathbf{E} = \left( \frac{D_i - D_e}{\mu_e + \mu_i} \right) \left( \frac{\nabla n_e}{n_e} \right) = \left( \frac{D_i - D_e}{\mu_e + \mu_i} \right) \left( \frac{\nabla n_i}{n_i} \right) = \left( \frac{D_i - D_e}{\mu_e + \mu_i} \right) \left( \frac{\nabla n}{n} \right) \quad (1.7)$$

Substituindo-se a Equação (1.7) ou na Equação (1.1) ou na Equação (1.2), obtém-se, após manipulações algébricas,

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i = \mathbf{J}_n = \left( \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_e + \mu_i} \right) \nabla n \quad (1.8)$$

O fluxo de partículas representado pela Equação (1.8) refere-se à difusão ambipolar, implicando no mesmo fluxo de matéria entre elétrons e íons. O termo entre parênteses denomina-se coeficiente de difusão ambipolar, ou

$$D_a = \left( \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_e + \mu_i} \right) \quad (1.9)$$

Ao se identificar as Equações (1.3) e (1.4) na Equação (1.9), e sabendo-se que as mobilidades elétrica e iônica são iguais, respectivamente, a  $\mu_e = e/m_e v_e$  e  $\mu_i = e/m_i v_i$  (com  $e = 1,602 \times 10^{-19}$  Coulomb), tem-se a equação para o coeficiente de difusão ambipolar na forma da equação de Einstein,

$$D_a = \frac{k_B (T_e + T_i)}{(m_e v_e + m_i v_i)} \quad (1.10)$$

É importante ressaltar que, ainda que se observe a existência do coeficiente de difusão ambipolar, este pode estar sujeito a campo magnético, o qual pode ser expresso segundo o coeficiente perpendicular de difusão na forma (Fridman, 2008)

$$D_{\perp} = \frac{D_a}{\gamma} \quad (1.11)$$

com

$$\gamma = 1 + \left( \frac{w_{B,i}}{v_i} \right)^2 + \frac{\mu_i}{\mu_e} \left[ 1 + \left( \frac{w_{B,e}}{v_e} \right)^2 \right] \quad (1.12)$$

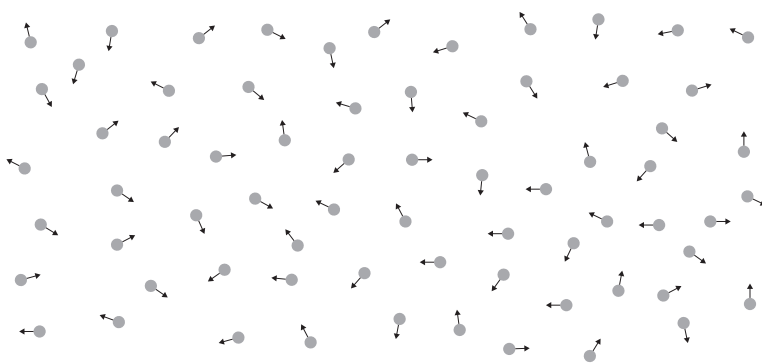
onde  $w_{B,i} = eB/m_i$ ;  $w_{B,e} = eB/m_e$ , em que  $B$  é a densidade do campo magnético. Uma vez que  $B \approx 10^{-5}$  Tesla (Bittencourt, 2018) na ionosfera,  $\gamma$  é aproximadamente igual a 1, podendo-se considerar (Cremasco; Bertan; Miranda, 2021)

$$D_{\perp} \cong D_a \quad (1.13)$$

Destaque-se que a migração iônica pode ser avaliada pelo seu passeio aleatório de acordo com o processo estocástico markoviano. O passeio aleatório é utilizado na descrição do deslocamento errático de uma partícula material (íon, átomo ou molécula – Figura 1.5), cuja matriz de transição para qualquer dimensão se dá por (Cremasco; Bertan; Miranda, 2021)

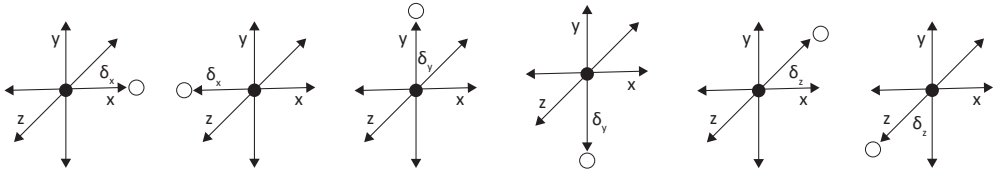
$$P\{U_N = k | U_{N-1} = i\} = \begin{cases} 1/2d, & \text{se } i \text{ é adjacente à } k, \\ 0 & \text{se não} \end{cases} \quad (1.14)$$

sendo  $d$  a dimensão, em que  $d = 1$ , unidimensional;  $d = 2$ , bidimensional;  $d = 3$ , tridimensional. Quanto à abordagem de difusão estocástica, assume-se que os íons no plasma seguem trajetórias aleatórias (Figura 1.5), de modo que são avaliadas quanto à sua transitoriedade/recorrência.



**Figura 1.5** – Deslocamento errático de uma partícula material.

Considere determinada partícula situada em  $(0,0,0)$  de maneira que ela escolhe um de seus vizinhos (ou lócus) mais próximo  $i - \delta_j$  ou  $i + \delta_j$  ( $j = x, y$  ou  $z$ ) para seguir (Cremasco; Bertan; Miranda, 2021). Em três dimensões, pode-se considerar um de seus seis vizinhos (Figura 1.6).



**Figura 1.6** – Possibilidades de deslocamento centrada no vértice.

Fonte: adaptada de Cremasco; Bertan; Miranda (2021).

Assume-se, portanto, passeio aleatório tridimensional, simples, simétrico e independente, em que a partícula se move para a posição vizinha independentemente do deslocamento anterior, caracterizando um processo estocástico com incrementos independentes (Bhattacharya; Waymire, 1990), ou seja, estatisticamente independente implicando, por exemplo, na nulidade da matriz de covariância. Tendo em vista que o passeio é simétrico para cada vizinho e que este seja escolhido com probabilidade  $1/6$ , decorrendo, portanto, da hipótese de transitoriedade/recorrência, não importa a definição da escolha do caminho, pois, em cada situação, existem seis vizinhos igualmente prováveis. Assim, tem-se uma relação recursiva para a probabilidade de uma partícula percorrer  $N$  passos, a partir do ponto  $x$ , até atingir o ponto  $y$ . Ao identificar tal probabilidade a  $P(N: x, y)$ , tem-se a relação recursiva (Rudnick; Gaspari, 2004)

$$P(N: x, y) = \frac{1}{2d} \sum_{\text{nns}} P(N-1: x, y - w_i) \quad (1.15)$$

A Equação (1.15) refere-se às trajetórias independentes de uma partícula em  $d$  dimensões, enquanto  $\text{nns}$  se refere à localização dos vizinhos mais próximos dessa mesma partícula. No caso de passeio tridimensional, a Equação (1.15) é retomada na forma (Cremasco; Bertan; Miranda, 2021)

$$P(N: x, y) = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 \left[ P(N-1: x, y - \mathbf{e}_j \delta_j) + P(N-1: x, y + \mathbf{e}_j \delta_j) \right] \quad (1.16)$$

na qual  $\mathbf{e}_j$  são os vetores unitários ao longo dos eixos positivo  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Subtraindo-se  $P(N-1; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  na Equação (1.16), esta é reescrita como (Rudnick; Gaspari, 2004)

$$P(N; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - P(N-1; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 \left[ P(N-1; \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{e}_j \delta_j) + P(N-1; \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{e}_j \delta_j) - 2P(N-1; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \quad (1.17)$$

Para número de passos muito elevados ( $N \gg 1$ ), pode-se considerar a seguinte expansão em série de Taylor (Cremasco; Bertan; Miranda, 2021)

$$P(N; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx P(N-1; \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial N} P(N-1; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1.18)$$

que, substituída na Equação (1.17), resulta em

$$\frac{\partial}{\partial N} P(N; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 \left[ P(N-1; \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{e}_j \delta_j) + P(N-1; \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{e}_j \delta_j) - 2P(N-1; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \quad (1.19)$$

Adotando procedimento semelhante para o lado direito da Equação (1.18), ou seja, considerando-se a expansão da série de Taylor para cada coordenada e lembrando que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são variáveis independentes entre si (ou seja, não existem correlações), tem-se, em coordenadas retangulares e assumindo que a origem em  $(x, y, z)$  venha a ser igual a zero nas três dimensões,

$$\frac{\partial}{\partial N} P(N, x, y, z) \approx \frac{\delta_x^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(N, x, y, z) + \frac{\delta_y^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(N, x, y, z) + \frac{\delta_z^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial z^2} P(N, x, y, z) \quad (1.20)$$

Assumindo que  $N$  se refere ao tempo adimensional de certo tempo característico,  $\tau$ ,

$$N \equiv \frac{t}{\tau} \quad (1.21)$$

resulta em (Cremasco; Bertan; Miranda, 2021)

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, x, y, z) \approx \frac{\delta_x^2}{6\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(t, x, y, z) + \frac{\delta_y^2}{6\tau} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(t, x, y, z) + \frac{\delta_z^2}{6\tau} \frac{\partial^2}{\partial z^2} P(t, x, y, z) \quad (1.22)$$

que pode ser identificada à equação de transporte de matéria, em coordenadas cartesianas, para meios anisotrópicos na forma

$$\frac{\partial}{\partial t} n(t, x, y, z) = D_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(t, x, y, z) + D_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} n(t, x, y, z) + D_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} n(t, x, y, z) \quad (1.23)$$

com os coeficientes de difusão nas direções x, y e z definidos de acordo com

$$D_x \equiv \frac{\delta_x^2}{6\tau}; D_y \equiv \frac{\delta_y^2}{6\tau}; D_z \equiv \frac{\delta_z^2}{6\tau} \quad (1.24)$$

A Equação (1.23) pode ser resolvida mediante as seguintes condições de contorno

$$n(0, x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (1.25)$$

em que  $\delta(x)$ ,  $\delta(y)$  e  $\delta(z)$  são deltas de Dirac, e

$$n(t, x, y, z) = 0; \quad x, y, z \rightarrow \pm\infty \quad (1.26)$$

cuja solução é

$$n(t, x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad (1.27)$$

da qual se identificam

$$\sigma_x^2 = 2D_x \tau; \quad \sigma_y^2 = 2D_y \tau; \quad \sigma_z^2 = 2D_z \tau \quad (1.28)$$

Observa-se que a Equação (1.27) representa uma distribuição normal multivariada (tridimensional), cujo coeficiente de correlação é nulo; característica da hipótese (forte) assumida de o passeio aleatório 3D ser um processo estocástico independente (Cremasco; Bertan; Miranda, 2021). Em se tratando da difusão ambipolar em plasma sujeito a campo magnético fraco ( $\mathbf{B} \ll \mathbf{E}$ ;  $\gamma = 1$ ), tem-se nas definições 1.28

$$\sigma_x^2 = 2D_{\perp} \tau; \quad \sigma_y^2 = 2D_{\perp} \tau; \quad \sigma_z^2 = 2D_a \tau \quad (1.29)$$

A Equação (1.23) é retomada como

$$\frac{\partial}{\partial t} n(t,x,y,z) = D_{\perp} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(t,x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} n(t,x,y,z) \right] + D_a \frac{\partial^2}{\partial z^2} n(t,x,y,z) \quad (1.30)$$

que se assemelha àquela encontrada em Bittencourt (2018) para a descrição da equação de transporte de elétrons em plasma (Cremasco; Bertan; Miranda, 2021).

O desafio de especificar as trajetórias dos íons na região em que ocorre a aurora boreal é o de associar tais trajetórias à difusão de matéria, esta contemplada por sua natureza intrínseca, presente em seu coeficiente de difusão e influenciada pela concentração iônica, conforme apresenta a Figura 1.1. Para o passeio aleatório 3D, assume-se que existem  $L$  passos na direção  $x$ , associados ao seu respectivo trajeto;  $M$  passos na direção  $y$ ;  $N$  passos na direção  $z$ . A estratégia para a difusão estocástica baseia-se, neste caso, na relação da natureza dispersiva do coeficiente de difusão em tais passos. É possível, portanto, associar os coeficientes de difusão com a variância relativa à distribuição gaussiana, e o deslocamento dos íons  $O_2^+$  e  $NO^+$  em diferentes tempos (item b) e altitudes (item c). Ressalte-se que o passeio aleatório está no escopo dos processos estocásticos markovianos (Billingsley, 1995), empregado para descrever a trajetória errática de determinada partícula material (elétron ou íon), cuja matriz de transição é dada pela Equação (1.14). Assume-se a independência de escolha para o novo deslocamento para qualquer que seja a direção  $x$ ,  $y$  e  $z$ , implicando na simetria do passeio aleatório na forma  $p = q = 1/2$ , (ou para  $x$  ou para  $y$  ou para  $z$ , independentemente). Este também pode ser descrito pela distribuição de Bernoulli, especificamente pela distribuição binomial, de modo que se tem (Cremasco; Bertan; Miranda, 2021).

$$\sigma_x^2 = p(1-p)L \quad (1.31)$$

$$\sigma_y^2 = p(1-p)M \quad (1.32)$$

$$\sigma_z^2 = p(1-p)N \quad (1.33)$$

sendo  $p = 1/2$ , resultando, portanto, para qualquer direção,

$$L = 4\sigma_x^2 \quad (1.34)$$

$$M = 4\sigma_y^2 \quad (1.35)$$

$$N = 4\sigma_z^2 \quad (1.36)$$



Ao se considerar as definições 1.29 nas Equações (1.34) a (1.36), estas são reescritas como

$$L = 8D_{\perp} \tau \quad (1.37)$$

$$M = 8D_{\perp} \tau \quad (1.38)$$

$$N = 8D_a \tau \quad (1.39)$$

Em atenção à hipótese de que o campo magnético é fraco ( $\mathbf{B} \ll \mathbf{E}$ ;  $\gamma = 1$ ), ou seja,  $D_{\perp} \approx D_a$ , tem-se, necessariamente (Cremasco; Bertan; Miranda, 2021),

$$L = M = N = 8D_a \tau \quad (1.40)$$

## FORMULÁRIO

A descrição do mecanismo da dispersão molecular dos íons no plasma resulta da implementação da matriz de transição, Equação (1.14), para  $d = 3$ , considerando-se que a única variável a ser fornecida é o valor do passo  $L$ , conforme apresentado na Figura 1.7.

---

**Input:**  $j$  (espécie  $j$ ),  $L$  (número de passos)

**Output:** cartogramas 3D para diferentes tempos e altitudes

```

1:      enquanto  $i = 0$  faça
2:           $x \leftarrow 0$ ;
3:           $y \leftarrow 0$ ;
4:           $z \leftarrow 0$ ;
5:      para  $i = 1 \rightarrow L$  faça
6:           $r \leftarrow$  número pseudoaleatório
7:          if  $r < 1/6$ 
8:               $x \leftarrow x + 1$ ;
9:               $x \leftarrow x + 1$ ;
10:              $z \leftarrow z$ ;
11:          else if  $r < 2/6$ 
12:               $x \leftarrow x - 1$ ;
13:               $y \leftarrow y$ ;
14:               $z \leftarrow z$ ;
15:          else if  $r < 3/6$ 

```

```

16:             x ← x;
17:             y ← y + 1;
18:             z ← z;
19:         else if r < 4/6
20:             x ← x;
21:             y ← y - 1;
22:             z ← z;
23:         else if r < 5/6
24:             x ← x;
25:             y ← y;
26:             z ← z + 1;
27:         else r > 5/6
28:             x ← x;
29:             y ← y;
30:             z ← z - 1;
31:         return (recomece com novo j)
32:     end

```

**Figura 1.7** – Algoritmo para a descrição do passeio aleatório 3D.

Fonte: adaptada de Cremasco; Bertan; Miranda (2021).

### *Informação adicional*

Constante de Boltzmann:  $k_B = 1,381 \times 10^{-23}$  J/K.

## SOLUÇÃO

O modelo que descreve o passeio aleatório na camada da ionosfera em que ocorre o fenômeno da aurora boreal é descrito pelas Equações (1.10) a (1.13) (item a), utilizando-se o algoritmo apresentado na Figura 1.7 (lembrando-se que  $L = M = N$  tanto para o item b quanto para o item c deste capítulo). Independentemente do item, deve-se conhecer as concentrações das partículas sujeitas ao fenômeno difusivo em questão, bem como as temperaturas a que estão sujeitas. Neste caso, lança-se mão das Figuras 1.1 e 1.2 para obter os valores das temperaturas dos elétrons ( $T_e$ ) e íons ( $T_i$ ), bem como dos valores de concentração íons  $O_2^+$  e  $NO^+$ , cujos resultados (já convertidos para  $m^{-3}$ ) encontram-se na Tabela 1.

**Tabela 1** – Valores aproximados de temperatura e concentração de elétrons e íons majoritários na região da aurora boreal

| Altitude (km) | $T_e$ (K) | $T_i$ (K) | $e \times 10^{-11}$ (m <sup>-3</sup> ) | $O_2^+ \times 10^{-11}$ (m <sup>-3</sup> ) | $NO^+ \times 10^{-11}$ (m <sup>-3</sup> ) |
|---------------|-----------|-----------|--|--|---|
| 100           | 250       | 500       | 0,95                                   | 0,40                                       | 0,55                                      |
| 130           | 750       | 1.800     | 1,70                                   | 0,65                                       | 0,90                                      |

- a) Os valores do coeficiente de difusão livre dos íons  $O_2^+$  e  $NO^+$ , nas altitudes 100 km e 130 km, são fornecidos, respectivamente, pela Equação (1.4), retomada

$$D_i = \frac{k_B T_i}{m_i v_i} \quad (1)$$

com a constante de Boltzmann,  $k_B = 1,381 \times 10^{-23}$  J/K, e as frequências de colisão dos íons a partir da Equação (1.6), ou

$$v_i = 8,569 \times 10^{-15} Z \left( \frac{n_i}{m_i} \right)^{1/2} \quad (2)$$

Para efeito de ilustração de cálculos, serão tomadas como partículas de teste os íons  $O_2^+$  e  $NO^+$ , na altitude de 100 km, sendo que a metodologia empregada pode ser estendida para 130 km. Uma vez que a 100 km,  $T_i = 500$  K (Tabela 1), e resgatando do enunciado as informações  $m_{O_2^+} = 5,315 \times 10^{-26}$  kg,  $m_{NO^+} = 4,983 \times 10^{-26}$  kg,  $Z_{O_2^+} = 16$ ,  $Z_{NO^+} = 15$ , tem-se na Equação (2) para os íons  $O_2^+$  e  $NO^+$ , respectivamente,

$$v_{O_2^+} = (8,569 \times 10^{-15})(16) \left( \frac{0,40 \times 10^{11}}{5,315 \times 10^{-26}} \right)^{1/2} = 1,189 \times 10^5 \text{ s}^{-1} \quad (3)$$

$$v_{NO^+} = (8,569 \times 10^{-15})(15) \left( \frac{0,55 \times 10^{11}}{4,983 \times 10^{-26}} \right)^{1/2} = 1,350 \times 10^5 \text{ s}^{-1} \quad (4)$$

Uma vez que se conhece o valor da constante de Boltzmann,  $k_B = 1,381 \times 10^{-23}$  J/K, e de posse dos resultados de 3 e 4, calculam-se os valores dos coeficientes livres de difusão dos elétrons dos íons  $O_2^+$  e  $NO^+$  a 100 km, em que  $T_i = 500$  K, segundo a Equação (1)

$$D_{O_2^+} = \frac{k_B T_i}{m_{O_2^+} v_{O_2^+}} = \frac{(1,381 \times 10^{-23})(500)}{(5,315 \times 10^{-26})(1,189 \times 10^5)} = 1,093 \text{ m}^2/\text{s} = 10.930 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (5)$$

$$D_{NO^+} = \frac{k_B T_i}{m_{NO^+} v_{NO^+}} = \frac{(1,381 \times 10^{-23})(500)}{(4,983 \times 10^{-26})(1,350 \times 10^5)} = 1,026 \text{ m}^2/\text{s} = 10.260 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (6)$$

A obtenção dos valores do coeficiente ambipolar resulta da Equação (1.10), ou

$$D_a = \frac{k_B (T_e + T_i)}{(m_e v_e + m_i v_i)} \quad (7)$$

em que o valor da frequência de colisão dos elétrons é obtido da Equação (1.5),

$$v_e = 8,992 n_e^{1/2} \quad (8)$$

Uma vez que a 100 km de altitude  $n_e = 0,95 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$ , tem-se na Equação (8),

$$v_e = (8,992)(0,95 \times 10^{11})^{1/2} = 2,772 \times 10^6 \text{ s}^{-1} \quad (9)$$

Tendo em vista que a massa dos elétrons é  $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$  kg e a 100 km, a temperatura dessas partículas é igual a 250 K

$$D_{a,O_2^+} = \frac{(1,381 \times 10^{-23})(250 + 500)}{[(9,109 \times 10^{-31})(2,772 \times 10^6) + (5,315 \times 10^{-26})(1,189 \times 10^5)]} = 1,638 \text{ m}^2/\text{s} = 16.380 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (10)$$

$$D_{a,O_2^+} = \frac{(1,381 \times 10^{-23})(250 + 500)}{[(9,109 \times 10^{-31})(2,772 \times 10^6) + (4,983 \times 10^{-26})(1,350 \times 10^5)]} = 1,539 \text{ m}^2/\text{s} = 15.390 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (11)$$

Os resultados teóricos dos valores dos coeficientes de difusão livre,  $D_i$ , e ambipolar,  $D_a$ , tanto para 100 km quanto para 130 km, encontram-se na Tabela 2.

**Tabela 2** – Valores dos coeficientes de difusão livre,  $D_i$ , e ambipolar,  $D_a$ 

| Íons | $O_2^+$       |   | $NO^+$                                    |   |   |
|------|---------------|---|---|---|---|
|      | Altitude (km) | $D_i \times 10^{-4}$ (cm <sup>2</sup> /s) | $D_a \times 10^{-4}$ (cm <sup>2</sup> /s) | $D_i \times 10^{-4}$ (cm <sup>2</sup> /s) | $D_a \times 10^{-4}$ (cm <sup>2</sup> /s) |
| 100  |               | 1,093                                     | 1,638                                     | 1,026                                     | 1,539                                     |
| 130  |               | 3,085                                     | 4,368                                     | 2,888                                     | 4,090                                     |

O valor do coeficiente de difusão livre dos íons é afetado tanto por sua natureza quanto pela concentração. Observa-se que há o incremento dos valores dos coeficientes de difusão com o incremento da altitude. Isto decorre do aumento da temperatura dos íons, o que eleva a sua energia cinética aumentando, dessa maneira, a sua difusão.

b) A construção dos cartogramas 3D para a trajetória dos íons  $O_2^+$  e  $NO^+$  a 100 km, nos tempos 0,1 s e 1 s, decorre do estabelecimento do número de passos  $N$  (recordando que  $N = M = L$ , ou seja, o mesmo número de passos em todas as direções), por meio da Equação (1.40), ou

$$L = M = N = 8D_a \tau \quad (12)$$

Para efeito de exemplificação, tomam-se os resultados avaliados a 100 km, considerando-se o tempo igual a 0,25 s. Desse modo, tem-se para os íons  $O_2^+$  e  $NO^+$ , respectivamente,

$$N_{O_2^+} = 8D_a \tau = (8)(16.380)(0,25) = 32.764 \text{ cm}^2 \quad (13)$$

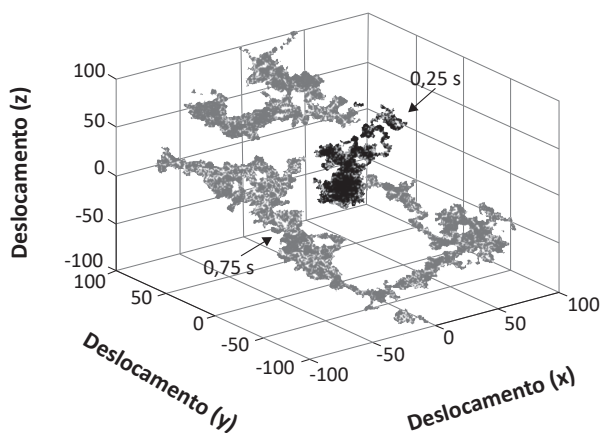
$$N_{NO^+} = 8D_a \tau = (8)(15.390)(0,25) = 30.781 \text{ cm}^2 \quad (14)$$

Procedimento similar é empregado para a obtenção do número de passos para  $\tau = 0,75$  s, cujos resultados estão apresentados na Tabela 3.

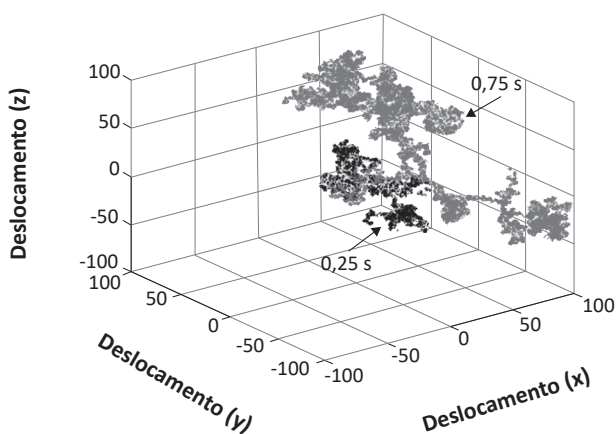
**Tabela 3** – Número de passos ( $N$ ) para o passeio aleatório 3D a 100 km de altitude: influência do tempo

| $\tau$ (s) | $O_2^+$ | $NO^+$ |
|------------|---------|--------|
| 0,25       | 32.764  | 30.781 |
| 0,75       | 98.266  | 92.322 |

De posse do número de passos e do algoritmo apresentado na Figura 1.7, é possível construir o cartograma 3D, conforme apresentado na Figura 1. A partir da análise dessa figura, observa-se claramente a trajetória dos íons ao longo do tempo, espalhando-se aleatoriamente, todavia aumentando com o incremento do tempo e corroborando a natureza dispersiva do fenômeno de difusão da matéria.



(a)



(b)

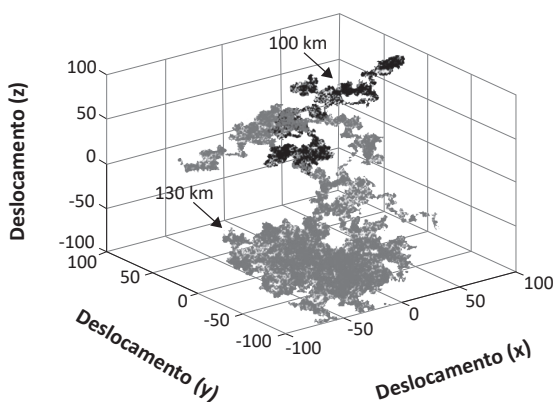
**Figura 1** – Cartograma ilustrativo do passeio aleatório a 100 km nos tempos  $\tau = 0,25$  s e  $0,73$  s para os íons: (a)  $O_2^+$ ; (b)  $NO^+$ .

c) A construção dos cartogramas 3D representativos da trajetória dos íons  $O_2^+$  e  $NO^+$  a  $0,5$  s, nas altitudes  $100$  km e  $130$  km, segue a metodologia apresentada no item anterior. Adotando procedimento semelhante ao que possibilitou os resultados de

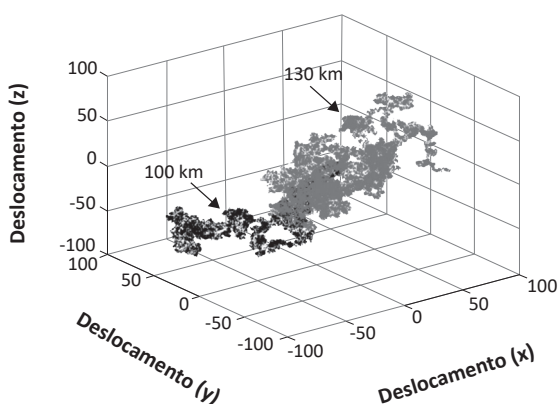
13 e 14, foram obtidos os números de passos, a 0,5 s, e nas altitudes pretendidas, cujos resultados estão apresentados na Tabela 4. De posse de tais informações e do algoritmo sugerido na Figura 1.7, são apresentados os cartogramas 3D na Figura 2.

**Tabela 4** – Número de passos (N) para o passeio aleatório 3D a 0,5 s: influência da altitude

| Altitude (km) | O <sub>2</sub> <sup>+</sup> | NO <sup>+</sup> |
|---------------|-----------------------------|-----------------|
| 100           | 65.511                      | 61.548          |
| 130           | 174.725                     | 163.586         |



(a)



(b)

**Figura 2** – Cartograma ilustrativo do passeio aleatório a 0,5 s nas altitudes de 100 km e 130 km para os íons: (a) O<sub>2</sub><sup>+</sup>; (b) NO<sup>+</sup>.

O valor do coeficiente de difusão livre dos íons é afetado tanto por sua natureza quanto pela concentração. A 110 km (Figura 1.1), há praticamente igualdade entre as concentrações de íons  $O_2^+$  e  $NO^+$ . Uma vez que o número atômico desses íons é próximo, pode-se verificar, por inspeção da Equação (2), que a frequência de colisões dos íons  $NO^+$ , devido à sua massa ( $4,983 \times 10^{-26}$  kg), é maior do que a do íon  $O_2^+$  ( $5,315 \times 10^{-26}$  kg). O aumento da frequência de colisões resultaria em menor valor para o coeficiente de difusão iônica; no entanto, quando se tem concentrações iônicas iguais, isso é inversamente proporcional à  $m_i^{1/2}$ . Para as outras altitudes, há claramente o efeito tanto da natureza do íon quanto de sua concentração. Tal análise pode ser estendida aos resultados do coeficiente de difusão ambipolar. No entanto, observa-se que há o incremento dos valores dos coeficientes de difusão com o incremento da altitude. Isso decorre do aumento da temperatura dos íons, o que eleva sua energia cinética, aumentando, dessa maneira, a sua difusão.

## REFERÊNCIAS

- BARANOSKI, G. V. G.; WAN, J.; ROKNE, J. G.; BELL, I. Simulating the dynamics of auroral phenomena. *ACM Transactions on Graphics*, v. 24, n. 1, p. 37-59, 2005.
- BHATTACHARYA, R. N.; WAYMIRE, E. C. *Stochastic processes with applications*. New York: Wiley, 1990. 676 p.
- BILLINGSLEY, P. *Probability and measure*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1995. 593 p.
- BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of plasma physics*. 4. ed. New York: Springer-Verlag, 2018. 678 p.
- CARDOSO, R. P. *Estudo numérico e experimental do processo de deposição e difusão de níquel via plasma em amostras de ferro na configuração ânodo-cátodo confinado*. 2003. 104 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.
- CHEN, F. F. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. 3. ed. Cham: Springer, 2016. 497 p.
- CREMASCO, M. A.; BERTAN, A. S.; MIRANDA, N. T. Stochastic diffusion: walking at Northern lights. *Jökull Journal*, v. 71, n. 1, p. 2-14, 2021.
- ELIEZER, S.; ELIEZER, Y. *The fourth state of matter: an introduction to plasma science*. 2. ed. Bristol: Institute of Physics Publishing, 2001. 224 p.
- FRIDMAN, A. *Plasma chemistry*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 1.022 p.
- KELLEY, M. C. *The Earth's ionosphere: plasma physics and eletrodynamics*. 2. ed. New York: Academic Press, 2009. 572 p.



MIRANDA, F. S. *Estudo do pré-tratamento do bagaço de cana-de-açúcar utilizando plasma em líquidos*. 2013. 72 f. Dissertação (Mestrado em Processamento de Materiais e Catálise) – Universidade do Vale do Paraíba, São José dos Campos, 2013.

MOTTA, C. C. *Modelo auto-consistente para a cinética da descarga do laser a vapor de cobre*. 1996. 206 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

RAMOS, F. D. *A influência das tensões sobre a difusão de nitrogênio no processo de nitretação a plasma*. 2003. 96 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

RUDNICK, J.; GASPARI, G. *Elements of the random walk – An introduction for advanced students and reseachers*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 329 p.

WIKIPÉDIA. *Transição de fase*. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Transi%C3%A7%C3%A3o\\_de\\_fase](https://pt.wikipedia.org/wiki/Transi%C3%A7%C3%A3o_de_fase). Acesso em: 28 dez. 2022.

**Esta obra trata de tópicos sobre difusão mássica que não são oferecidos habitualmente no escopo de transferência de massa, enfocando o transporte de matéria em meios difusivos complexos, como na natureza plasmática da aurora boreal e dos raios, no magma e gases de vulcões, no citosol foliar do crisântemo e do carrapicho, e no transporte de neurotransmissores.**

Estuda-se a difusão em leite, em meio de cultivo fermentescível, em fluidos supercríticos e líquidos iônicos, como também se avalia a difusão de voláteis, como os encontrados em perfumes. Se o perfume emana o que há de bom da vida, existem os agrotóxicos nas lavouras, o mercúrio nas lavras e os gases do efeito estufa na atmosfera para traduzir o outro lado da humanidade. Este livro, sobretudo, dirige o olhar às consciências social e ambiental enquanto complementos necessários à formação técnica de quem se envereda nas ciências exatas e tecnológicas.



**Blucher**



Clique aqui e:

[VEJA NA LOJA](#)

## Transferência de massa - Vol. 2

Difusão mássica em meios não convencionais

---

Marco Aurélio Cremasco, Alessandra Suzin Bertan

ISBN: 9788521223733

Páginas: 259

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2024

---