LENIMAR NUNES DE ANDRADE

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA

Questões comentadas e resolvidas

Blucher

Lenimar Nunes de Andrade

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA

Questões comentadas e resolvidas

Introdução à Álgebra: questões comentadas e resolvidas

Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher
Editor Eduardo Blucher
Coordenador editorial Rafael Fulanetti
Coordenação de produção Andressa Lira
Produção editorial Kedma Marques
Diagramação Horizon Soluções Editoriais
Revisão de texto Maurício Katayama
Capa Laércio Flenic
Imagem da capa iStockphoto

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4° andar
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa,* Academia Brasileira de Letras, julho de 2021.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Andrade, Lenimar Nunes
Introdução à Álgebra: questões comentadas e resolvidas / Lenimar Nunes de Andrade -- São Paulo: Blucher, 2025.
330 p.

Bibliografia
ISBN 978-85-212-2477-8 (impresso)
ISBN 978-85-212-2476-1 (eletrônico)

1. Álgebra I. Título

25-0293 CDD 512.9

Índice para catálogo sistemático:
1. Álgebra

Conteúdo

CAPÍTULO 1

Conjuntos

1.1 NOÇÕES PRIMITIVAS

Os conceitos de *conjunto, elemento* e *pertinência* costumam ser aceitos sem definição e, por isso, são chamados *noções primitivas.* A noção matemática de conjunto que se usa é praticamente a mesma do idioma comum, ou seja, é o mesmo que agrupamento, classe, coleção.

Um *conjunto* é qualquer coleção de objetos. Os objetos que compõem a coleção são chamados *elementos.* Os elementos *pertencem* à sua respectiva coleção. Convencionamos representar conjuntos por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas.

Um conjunto fica determinado quando:

- listamos todos os seus elementos. Neste caso, usaremos vírgulas separando cada elemento e os agruparemos entre chaves. Por exemplo, $V = \{a, e, i, o, u\}$ representa o conjunto das vogais do nosso alfabeto.

- indicamos alguma propriedade que seja característica dos seus elementos. Por exemplo, $P = \{x \mid x \text{ é um inteiro positivo par}\}$ (lê-se: *"P é o conjunto dos x tais que x é um inteiro positivo par"*) é o conjunto formado pelos elementos $2, 4, 6, 8, \ldots$ As reticências denotam que a listagem dos elementos tem continuidade.

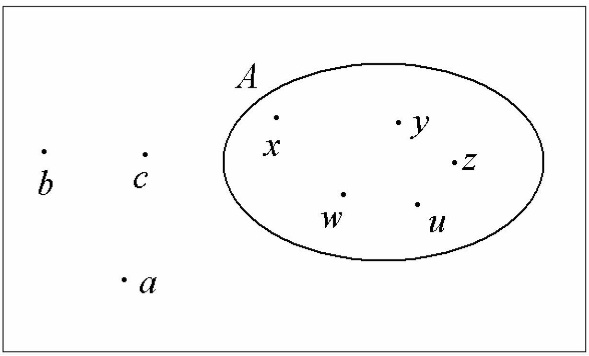


Figura 1.1 Diagrama representando um conjunto.

Usaremos a notação $x \in A$ para indicar que o elemento x pertence ao conjunto A e $x \notin A$ em caso contrário, ou seja, indicando que x não pertence a A.

Dois conjuntos são *iguais* quando tiverem os mesmos elementos. Equivalentemente, dois conjuntos A e B são considerados iguais quando todo elemento de A for elemento de B e todo elemento de B também for elemento de A. Não importa se há repetição de elementos e nem a ordem em que os elementos são listados. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 3, 4, 3, 1, 1, 2\}$, então temos que $A = B$, ou seja, são conjuntos iguais.

1.2 DIAGRAMAS DE VENN

É usual representar os conjuntos por curvas fechadas, sem autointerseção, contendo no seu interior pontos que são os seus elementos. Elementos que não pertencem ao conjunto são representados por ponto no exterior da curva. Por exemplo, na Figura 1.1 representamos um conjunto $A = \{x, y, z, u, w\}$. Representamos também que $a \notin A$, $b \notin A$ e $c \notin A$.

Essa forma de representação de conjuntos é chamada *diagrama de Euler-Venn* ou, simplesmente, *diagrama de Venn.*

1.3 CONJUNTO UNITÁRIO, CONJUNTO VAZIO, CONJUNTO UNIVERSO

Um conjunto que contenha um único elemento é chamado *unitário.* Por exemplo, $X = \{y \mid y \text{ é um número par positivo e primo }\}$ é um conjunto unitário.

Fazemos distinção entre um conjunto unitário $X = \{x\}$ e o seu único elemento x. Neste caso, escrevemos $x \in \{x\}$ e consideramos sem sentido igualdades do tipo $x = \{x\}$.

Um conjunto sem elementos é chamado *conjunto vazio* que é representado por $\varnothing$ ou por $\{\ \}$.

Ao estudarmos determinados conjuntos, admitimos a existência de um conjunto U ao qual pertencem todos os elementos de todos os conjuntos envolvidos. Esse conjunto U é chamado *conjunto universo.*

É comum a solução de um problema depender do conjunto universo utilizado. Por exemplo, se resolvermos a equação $x^2 + 5x + 6 = 0$ usando como conjunto universo o dos inteiros positivos, então diremos que ela não tem solução. No entanto, se o conjunto universo das possíveis soluções fosse o conjunto de todos os inteiros, então diríamos que ela admite duas soluções, -2 e -3.

Outro exemplo: escolhamos um segmento de reta $\overline{AB}$ em uma reta r. Se escolhermos como conjunto universo a reta r, então os pontos que estão a uma mesma distância tanto de A quanto de B é formado por apenas um único ponto: o ponto médio do segmento

$\overline{AB}$. Por outro lado, se escolhermos o conjunto universo como sendo um plano que passe pela reta r, então o conjunto de todos os pontos a uma mesma distância de A e B é formado por uma reta s que é perpendicular a r e que passa no ponto médio de $\overline{AB}$.

1.4 SUBCONJUNTOS

Consideremos dois conjuntos A e B. Se todo elemento de A também for elemento de B, então diremos que *A está contido em B* e também que A é *subconjunto* de B. Simbolicamente, representaremos por $A \subset B$ ou por $A \subseteq B$. Neste caso, dizemos também que B contém A e representamos por $B \supset A$ ou $B \supseteq A$.

Usaremos $A \not\subset B$ significando "*A não está contido em B*" e $B \not\supset A$ significando "*B não contém B*".

Qualquer conjunto está contido em si mesmo, ou seja, $A \subset A$ para qualquer conjunto A.

Temos também que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto, ou seja, $\varnothing \subset A$ para todo A. Para entender melhor essa afirmação, vamos supor que fosse diferente, que existisse algum conjunto X tal que $\varnothing \not\subset X$. Isso só seria possível se existisse algum elemento a pertencente a $\varnothing$ que não fosse elemento de X. Como tal elemento a não existe, não podemos ter $\varnothing \not\subset X$, e, consequentemente, o conjunto $\varnothing$ está contido em qualquer outro conjunto.

Exemplos:

- $\{a, c\} \subset \{a, c, d, f\}$
- $\{a\} \subset \{a, d, e\}$
- $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c, d\} \not\subset \{a, b\}$

Quando $A \subset B$, representamos no diagrama A como sendo uma curva fechada dentro de outra curva fechada B.

1.5 UNIÃO DE CONJUNTOS

Se A e B são conjuntos quaisquer, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um deles é chamado *união* de A com B e é representado por $A \cup B$ (lê-se: "*A união B*"). Ver Figura 1.2. Simbolicamente,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

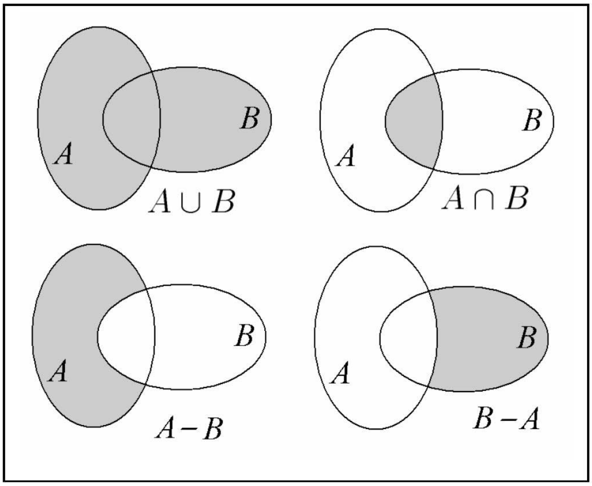


Figura 1.2 União, interseção e diferenças de conjuntos.

Exemplos:

- $\{a, c, d\} \cup \{a, c, f\} = \{a, c, d, f\}$
- $\{a, b, c, f\} \cup \{a, d, e\} = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $\{a, b, c\} \cup \{d, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $\{a, b, c\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \cup \varnothing = \{a, b, c\}$

Para quaisquer conjuntos A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U temos as seguintes propriedades:

- $A \cup A = A$
- $A \cup U = U$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup B \supset A$ e $A \cup B \supset B$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

1.6 INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS

Se A e B são conjuntos quaisquer, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a ambos é chamado *interseção* de A e B e é representado por $A \cap B$ (lê-se: "A *inter* B"). Ver Figura 1.2. Simbolicamente,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Exemplos:

- $\{a, b, c, d\} \cap \{a, c, e, f\} = \{a, c\}$
- $\{a, b, c, f\} \cap \{a, d, e\} = \{a\}$
- $\{a, b, c\} \cap \{d, e, f\} = \varnothing$
- $\{a, b, c\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \cap \varnothing = \varnothing$

Para quaisquer conjuntos A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U temos as seguintes propriedades:

- $A \cap A = A$
- $A \cap U = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1.7 DIFERENÇA DE CONJUNTOS

Se A e B são conjuntos quaisquer, o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B é chamado *diferença* entre A e B e é representado por $A - B$ (lê-se: "A *menos* B"). Ver Figura 1.1. Simbolicamente,

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Analogamente, definimos:

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

Exemplos:

- $\{a, b, c, d\} - \{a, c, e, f\} = \{b, d\}$
- $\{a, b\} - \{a, b, d, e\} = \varnothing$
- $\{a, b, d, e\} - \{a, b\} = \{d, e\}$
- $\{a, b, c\} - \{a, b, c\} = \varnothing$
- $\{a, b, c\} - \varnothing = \{a, b, c\}$

1.8 COMPLEMENTAR

Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, chama-se *complementar de B com relação a A* o conjunto $A - B$ formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B, representado por $\overline{B}$ ou por $\complement_A B$ (lê-se: "*complementar de B com relação a A*"). Simbolicamente,

$$\complement_A B = A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplos: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2\}$, $X = \{4, 5\}$ e $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

- $\complement_A B = \{3, 4, 5\}$
- $\complement_A X = \{1, 2, 3\}$
- $\complement_U A = \{6, 7, 8\}$
- $\complement_U X = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$
- $\complement_B B = \varnothing$
- $\complement_A \varnothing = A$

Para quaisquer conjuntos A, B subconjuntos de um conjunto U temos as seguintes propriedades:

- $A \cap \complement_U A = \varnothing$ e $A \cup \complement_U A = U$
- $\complement_A A = \varnothing$ e $\complement_A \varnothing = A$

- $\complement_U\,(\complement_U A) = A$
- $\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$
- $\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$

1.9 CONJUNTO DE CONJUNTOS

Os elementos de um conjunto também podem ser conjuntos. Por exemplo,

$$A = \{\{1,4\},\ \{0,5,6\},\ \{9\}\}$$

é um conjunto formado por três elementos (que também são conjuntos):

$$\{1,4\},\ \{0,5,6\},\ \{9\}$$

Aqui, podemos escrever $\{1,4\} \in A$, $\{0,5,6\} \in A$, $\{9\} \in A$, e $\{\{1,4\},\ \{0,5,6\}\} \subset A$, mas não podemos escrever algo como $\{0,5,6\} \subset A, 4 \in A, 9 \in A$.

Considerando A um conjunto qualquer, o *conjunto das partes de* A, denotado por $\wp(A)$, é o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A. Simbolicamente:

$$\wp(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

Por exemplo, se $A = \{1,3,5\}$, então os subconjuntos de A são

$$\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}$$

portanto

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}$$

É possível mostrar que se A for formado por n elementos distintos, então $\wp(A)$ é formado por 2^n elementos distintos.

1.10 TABELA DE SÍMBOLOS

Tabela 1.1 Símbolos utilizados com conjuntos.

símbolos	como se lê
$a \in A$	a **pertence** a A
$a \notin A$	a **não pertence** a A
$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } P\}$	A é o conjunto dos x tal que x tem a propriedade P
$A = B$	A é **igual** a B
$A \neq B$	A é **diferente** de B
$A \subset B$	A **está contido** em B
$A \not\subset B$	A **não está contido** em B
$A \supset B$	A **contém** B
$A \not\supset B$	A **não contém** B
$\varnothing$	conjunto **vazio**
$A - B$	A **menos** B
$A \cup B$	A **união** B
$A \cap B$	A **inter** B
$\complement_B A$	**complementar** de A com relação a B
$\wp(A)$	Conjunto das **partes** de A
$\exists x$	**existe** um x
$\forall x$	**para todo** x

1.11 NÚMEROS NATURAIS E INTEIROS

Chamamos *conjunto dos números naturais* (denotado por $\mathbb{N}$) o conjunto formado por $0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

e *conjunto dos números inteiros* (denotado por $\mathbb{Z}$) o seguinte conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Destacamos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$$

$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Em $\mathbb{Z}$, além das operações de *adição* e *multiplicação*, uma importante definição é a de *divisor*: dados $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que a é um divisor de b (em símbolos: $a \mid b$) quando existir um inteiro c tal que $ac = b$. Neste caso, dizemos também que b é um *múltiplo* de a. Por exemplo, $3 \mid 12$, ou seja, 3 é um divisor de 12 (porque existe um inteiro, 4, tal que $3 \cdot 4 = 12$).

1.12 NÚMEROS RACIONAIS

Chamamos *conjunto dos números racionais* (denotado por $\mathbb{Q}$) o conjunto formado por todas as frações (pares de inteiros) $\frac{p}{q}$ onde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Em $\mathbb{Q}$ definimos os seguintes conceitos:

- igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ equivale a $ad = bc$;
- adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$;
- multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

1.13 NÚMEROS REAIS

Uma raiz de um número racional nem sempre é um número racional. Por exemplo, $\sqrt{2}$ não é racional.

Um número que não é racional é chamado *irracional*. Existe uma infinidade de números irracionais conhecidos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\ldots$, $\pi = 3,1415926\ldots$, $e = 2,7182818\ldots$, $\log_{10} 2 = 0,301030\ldots$

A união de todos os racionais com todos os irracionais é chamado *conjunto dos números reais*, denotado por $\mathbb{R}$. O conjunto dos irracionais é o complementar dos racionais com relação aos reais, por isso ele costuma ser denotado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Destacamos aqui os seguintes subconjuntos dos reais: $\mathbb{R}^*$ dos reais não nulos, $\mathbb{R}_+$ dos reais não negativos,$\mathbb{R}_-$ dos reais não positivos.

1.14 INTERVALOS

Dados dois números reais a e b com $a < b$, definimos:

- *intervalo aberto* de extremidades a e b como sendo o conjunto

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

- *intervalo fechado* de extremidades a e b como sendo o conjunto

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$$

- *intervalo fechado à esquerda* de extremidades a e b como sendo o conjunto

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$$

- *intervalo fechado à direita* de extremidades a e b como sendo o conjunto

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$$

Também definimos intervalos *infinitos*:

- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq a\}$
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

1.15 NÚMEROS COMPLEXOS

Um número complexo é um número da forma $a+bi$ onde a e b são reais e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária cuja propriedade básica é $i^2 = -1$. O conjunto de todos os números complexos é denotado por $\mathbb{C}$. Se $b = 0$, então z é um número real e, se a=0, z é dito **imaginário puro**.

Um número complexo $a + bi$ pode ser representado como o ponto (a, b) no plano cartesiano e o conjunto $\mathbb{C}$ pode ser pensado como se fosse o plano $\mathbb{R}^2$.

Se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, então a é denominado parte real de z e b é a parte imaginária. Em símbolos: $a = \mathrm{Re}(z)$ e $b = \mathrm{Im}(z)$.

Se $z = a+bi$, o **conjugado** de z é o número $\overline{z} = a-bi$, o **módulo** de z é a distância do ponto (a, b) à origem $(0, 0)$, ou seja $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. O **argumento** de $z \neq 0$, denotado por $\arg(z)$, é o ângulo formado pelo eixo dos x e o segmento Oz. Se $0 \leq \arg(z) < 2\pi$, então $\arg(z)$ é denominado **argumento principal**.

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, a adição e a multiplicação de z e w são definidas por: $z + w = (a + c) + (b + d)i$ e $zw = z \cdot w = (ac - bd) +$

$i(ad + bc)$. O inverso aditivo e multiplicativo de $z \neq 0$ são calculados por $-z = -a - bi$ e $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$. A partir daí, definimos subtração e divisão de z por w: $z - w = z + (-w)$ e $\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$, se $w \neq 0$.

Exemplo: Escrever na forma $a + bi$ o número $z = \frac{3 + 2i}{1 + 7i}$. Para isso, basta multiplicar numerador e denominador da fração pelo conjugado do denominador:

$$z = \frac{3 + 2i}{1 + 7i} = \frac{(3 + 2i)(1 - 7i)}{(1 + 7i)(1 - 7i)} = \frac{3 - 21i + 2i - 14i^2}{1^2 - (7i)^2} = \frac{3 - 19i + 14}{1 + 49} = \frac{17}{50} - \frac{19}{50}i$$

1.16 POTÊNCIAS DA UNIDADE IMAGINÁRIA

As potências de i são $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = i \cdot i = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$. A partir daí, as potências com expoente inteiro se repetem de 4 em 4: $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$, $i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$ etc.

Em geral, se n for inteiro positivo, para calcular uma potência i^n, basta dividir n por 4, ou seja, escrever $n = 4q + r$ com $0 \leq r < 4$ e considerar o resto da divisão como expoente: $i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$. Por exemplo, para calcular i^{2019}, dividimos 2019 por 4 e obtemos um resto igual a 3 e daí $i^{2019} = i^3 = -i$.

1.17 FORMA POLAR E FÓRMULA DE DE MOIVRE

Se $z \neq 0$, $r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$, então a **forma polar** de z é definida como sendo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Se $z = a + bi$, então $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}$ e daí $\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}$. Logo, $\theta = \arg(z) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Por exemplo, se $z = 2 + 5i$, então $|z| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{5}{2}$. Logo, a forma polar de z é $z = \sqrt{29}(\cos(\operatorname{arctg}\frac{5}{2}) + i(\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}\frac{5}{2}))$.

Se $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)).$$

Se $z_1 = z_2 = z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, obtemos $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$ e, de modo geral,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta),$$

para todo inteiro n. Essa é a conhecida fórmula de De Moivre[1] para o cálculo de potências de números complexos.

A partir daí, obtemos a fórmula para o cálculo de raízes:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right],$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Se for feito um gráfico com todas as raízes enésimas de um número complexo z, obtemos sempre os vértices de um polígono regular com n lados e de raio igual a $\sqrt[n]{|z|}$.

1.18 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1) Sejam A e B subconjuntos de um universo U. Mostre que:

a) $(A - B) \subset (A \cup B)$

b) $\complement_U A - \complement_U B = B - A$

c) $A \subset B \Rightarrow \complement_U B \subset \complement_U A$

Solução:

a) $x \in A - B \Rightarrow x \in A$ e $x \notin B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$. Assim, todo elemento de $A - B$ também é elemento de $A \cup B$ e isso significa que $(A - B) \subset A \cup B$.

b) Seja $x \in U$. Então $x \in \complement_U A - \complement_U B \Leftrightarrow x \in \complement_U A$ e $x \notin \complement_U B \Leftrightarrow x \notin A$ e $x \in B \Leftrightarrow x \in B - A$. Logo, todo elemento de $\complement_U A - \complement_U B$ também é elemento de $B - A$ e vice-versa. Isso significa que $\complement_U A - \complement_U B = B - A$.

c) Suponhamos $A \subset B$. Se $x \in \complement_U B$, então $x \notin B$. Como $A \subset B$, temos também $x \notin A$, ou seja, $x \in \complement_U A$. Portanto, todo elemento de $\complement_U B$ também é elemento de $\complement_U A$, ou seja, $\complement_U B \subset \complement_U A$.

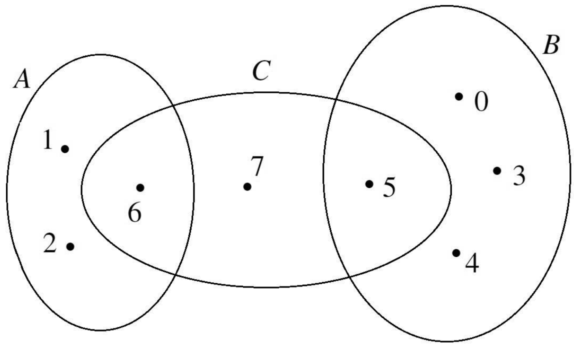
[1] Abraham de Moivre (1667–1754), matemático francês.

R2) Sendo A e B conjuntos quaisquer, é verdade que $A - (A - B) = B$?

Solução: Essa fórmula não é válida para quaisquer conjuntos. Para mostrar isso, devemos encontrar exemplos de conjuntos A e B para os quais $A - (A - B) \neq B$. Por exemplo, considerando $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$ temos que $A - B = A$ e daí $A - (A - B) = A - A = \emptyset \neq B$.

R3) Sejam A, B e C conjuntos não vazios contidos em $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determine A, B e C sabendo que $A \cup B \cup C = U$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \{6\}$, $\complement_U(A \cup B) = \{7\}$, $A - C = \{1, 2\}$ e $B \cap C = \{5\}$.

Solução: Baseando-se no que foi dado, construímos o seguinte diagrama. Desenhamos o A separado do B porque $A \cap B = \emptyset$. Preenchemos $A \cap C$ com o elemento 6 e $B \cap C$ com o 5. Completamos o C com o 7 e os demais elementos 0, 3 e 4 devem ser usados para completar o conjunto B.



Observando o diagrama, chegamos à conclusão de que $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{0, 3, 4, 5\}$ e $C = \{5, 6, 7\}$.

R4) Em uma comunidade são consumidos três produtos A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado sobre o consumo desses produtos, foram obtidos os resultados mostrados na tabela:

Produtos	A	B	C	A e B	B e C	A e C	A, B e C	nenhum
N. consumidores	100	150	200	20	40	30	10	130

Pergunta-se:

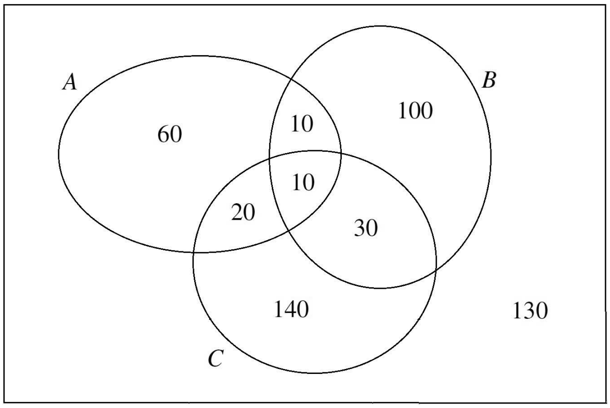
a) quantas pessoas foram consultadas?

b) quantas pessoas consomem só dois produtos?

c) quantas pessoas não consomem o produto B?

d) quantas pessoas não consomem A ou não consomem C?

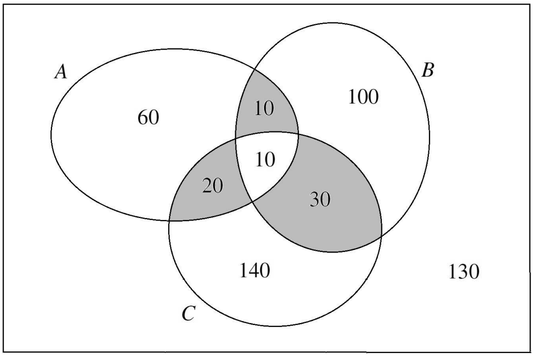
Solução: Baseandos-se nos dados dessa tabela, construímos o seguinte diagrama:



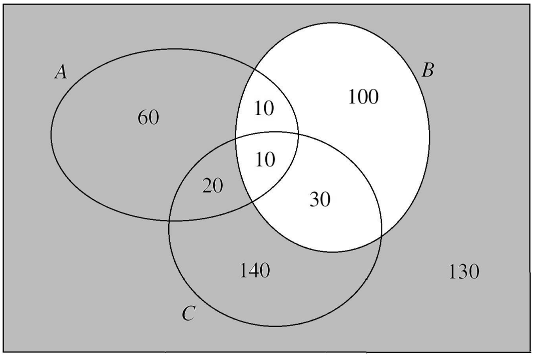
Inicialmente, colocamos na interseção de A, B e C o valor 10. Depois, completamos com o valor $20 - 10 = 10$ a interseção de A e B, com $40 - 10 = 30$ a interseção de B e C e com $30 - 10 = 20$ a interseção de B e C. Colocamos 130 fora dos conjuntos A, B e C e completamos o conjunto A com o valor $100 - 10 - 10 - 20 = 60$, completamos B com $150 - 10 - 10 - 30 = 100$ e C com $200 - 10 - 20 - 30 = 140$.

a) O total de pessoas consultadas é $60 + 10 + 10 + 20 + 30 + 100 + 140 + 130 = 500$.

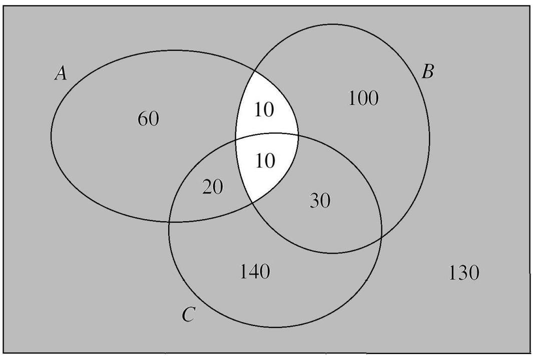
b) Temos 10 pessoas que consomem só A e B, 20 consomem só A e C e 30 consomem só B e C. Logo, o total das que consomem só dois produtos é $10 + 20 + 30 = 60$.



c) As que não consomem o produto B é $500 - 150 = 350$. Esse total também pode ser obtido do seguinte modo: $60 + 20 + 140 + 130 = 350$.



d) As pessoas que não consomem A ou não consomem B são as mesmas que não consomem A e B, logo o total dessas pessoas é $500 - 20 = 480$. Também pode ser obtido através da seguinte soma: $130 + 60 + 20 + 140 + 30 + 100 = 480$.



R5) Sendo $A = \{0, 3, 5, 9\}$ escreva todos os elementos do conjunto das partes de A, denotado por $\wp(A)$. Se um conjunto B tivesse apenas um elemento a mais do que A, quantos elementos teria $\wp(B)$?

Solução: O conjunto das partes de A é dado por

$$\begin{aligned}\wp(A) \;=\; &\{\varnothing, \{0\}, \{3\}, \{5\}, \{9\}, \{0,3\}, \{0,5\}, \{0,9\}, \{3,5\}, \{3,9\}, \{5,9\},\\ &\{0,3,5\}, \{0,3,9\}, \{0,5,9\}, \{3,5,9\}, \{0,3,5,9\}\}\end{aligned}$$

Se o conjunto B tiver um elemento a mais do que A, então $B = A \cup \{b\}$, onde $b \notin A$. Assim, um subconjunto de B seria igual a um subconjunto de A ou a um subconjunto de A unido a $\{b\}$:

$$\wp(B) \;=\; \underbrace{\{X \mid X \in \wp(A)\}}_{n(\wp(A))\text{ elementos}} \;\cup\; \underbrace{\{X \cup \{b\} \mid X \in \wp(A)\}}_{n(\wp(A))\text{ elementos}}$$

Portanto, o número de elementos de $\wp(B)$ é o dobro do de $\wp(A)$. No exemplo atual, $\wp(A)$ tem 16 elementos e $\wp(B)$ tem 32.

R6) Uma cidade tem dois jornais A e B que têm juntos 10000 leitores. O jornal A tem 4000 leitores e os dois jornais têm 800 leitores comuns. Quantos leitores tem o jornal B?
Solução: A quantidade de leitores que leem só o jornal A é de $4000 - 800 = 3200$ leitores. Seja x a quantidade de leitores de B. Então, os que leem só o jornal B é $x - 800$ leitores. Assim, somando-se os leitores exclusivos de A com os leitores exclusivos de B com os leitores em comum, obtemos o número total de leitores da cidade. Simbolicamente: $3200 + (x - 800) + 800 = 10000$, de onde obtemos $x = 6800$.
Portanto, na cidade, 6800 leitores tem o jornal B.

R7) Dados dois conjuntos A e B, a *diferença simétrica* $A \Delta B$ de A com B é definida por

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Calcule $\{1, 2, 3, 4\} \Delta \{2, 4, 6, 8\}$ e mostre que, em geral, $A \Delta A = \varnothing$, $A \Delta \varnothing = A$ e $A \Delta B = B \Delta A$.

Solução: Usando a definição dada, temos:

- $\{1, 2, 3, 4\} \Delta \{2, 4, 6, 8\} = (\{1, 2, 3, 4\} - \{2, 4, 6, 8\}) \cup (\{2, 4, 6, 8\} - \{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 3\} \cup \{6, 8\} = \{1, 3, 6, 8\}$;

- $A \,\Delta\, A = (A - A) \cup (A - A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$;
- $A \,\Delta\, \varnothing = (A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) = A \cup \varnothing = A$.

R8) Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, mostre que

$$(A \cup B) - (A \cap B) \;=\; (A - B) \cup (B - A).$$

Solução:

- Inicialmente, mostramos que todo elemento de $(A \cup B) - (A \cap B)$ também é elemento de $(A - B) \cup (B - A)$:
  $x \in (A \cup B) - (A \cap B) \Rightarrow x \in A \cup B$ e $x \notin A \cap B \Rightarrow (x \in A$ ou $x \in B)$ e $(x \notin A$ ou $x \notin B) \Rightarrow (x \in A$ e $x \notin B)$ ou $(x \in B$ e $x \notin A)$ $\Rightarrow x \in A - B$ ou $x \in B - A \Rightarrow x \in (A - B) \cup (B - A)$. E assim fica mostrado que $(A \cup B) - (A \cap B) \subset (A - B) \cup (B - A)$.
- Depois, mostramos que todo elemento de $(A - B) \cup (B - A)$ também é elemento de $(A \cup B) - (A \cap B)$:
  $x \in (A - B) \cup (B - A) \Rightarrow x \in A - B$ ou $x \in B - A$. Vamos considerar dois casos:
  - $x \in A - B \Rightarrow x \in A$ e $x \notin B \Rightarrow x \in A \cup B$ e $x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B)$
  - $x \in B - A \Rightarrow x \in B$ e $x \notin A \Rightarrow x \in A \cup B$ e $x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B)$

  Em qualquer caso, $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$. Logo, $(A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B) - (A \cap B)$.

Portanto, $(A \cup B) - (A \cap B) \subset (A - B) \cup (B - A)$ e $(A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B) - (A \cap B)$ e isso implica $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

R9) Mostre que, para quaisquer conjuntos A, B subconjuntos de um conjunto U, temos

$$\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B.$$

Solução: Vamos mostrar que todo elemento de $\complement_U (A \cap B)$ também é elemento de $\complement_U A \cup \complement_U B$ e vice-versa:

$x \in \complement_U (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Leftrightarrow x \complement_U A$ ou $\complement_U B \Leftrightarrow x \complement_U A \cup \complement_U B$.

Observação: Note que $x \in A \cap B$ é o mesmo que $x \in A$ e $x \in B$ e, no entanto, $x \notin A \cap B$ é o mesmo que $x \notin A$ ou $x \notin B$. De modo semelhante, $x \in A \cup B$ é o mesmo que $x \in A$ ou $x \in B$ e, no entanto, $x \notin A \cup B$ é o mesmo que $x \notin A$ e $x \notin B$.

R10) Calcular todas as raízes cúbicas de $z = 27 - 27i$.

Solução: Inicialmente, escrevemos z na forma polar. Para isso, determinamos seus módulo e argumento.

- $|z| = \sqrt{27^2 + (-27)^2} = \sqrt{2 \cdot 27^2} = 27\sqrt{2}$
- $z = |z| \cdot (\frac{z}{|z|}) = 27\sqrt{2}(\frac{27}{27\sqrt{2}} - \frac{27}{27\sqrt{2}}i) = 27\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = 27\sqrt{2}(\overbrace{\sqrt{2}/2}^{\cos\theta} \ \overbrace{-\sqrt{2}/2}^{\operatorname{sen}\theta}\, i)$
- Se $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, então $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$
- Logo, $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{3})$, com $k = 0, 1, 2$.
- $k = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{27\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{7\pi}{4}}{3}) = 3\sqrt[6]{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12})$
- $k = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{27\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{3}) = 3\sqrt[6]{2}(\cos\frac{15\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{15\pi}{12})$
- $k = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{27\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+4\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{7\pi}{4}+4\pi}{3}) = 3\sqrt[6]{2}(\cos\frac{23\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{23\pi}{12})$

Portanto, as três raízes cúbicas encontradas são:
$z_1 = 3\sqrt[6]{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12})$, $z_2 = 3\sqrt[6]{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4})$ e $z_3 = 3\sqrt[6]{2}(\cos\frac{23\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{23\pi}{12})$.

R11) Determine todas as raízes complexas da equação $x^6 - 11x^3 + 10 = 0$.

Solução: Substituindo x^3 por y, obtemos a equação do segundo grau $y^2 - 11y + 10 = 0$ cujas raízes são $y = 1$ e $y = 10$.
Se $y = 1$, então $x^3 = 1$, o que implica $x = \sqrt[3]{1}$. Todo número real $r > 0$ tem forma polar dada por $r(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)$. Logo, $1 = 1(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)$, e daí $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{0+2k\pi}{3})$, com $k = 0, 1, 2$. Isso significa que as três raízes cúbicas de 1 são $z_1 = 1(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0) = 1$, $z_2 = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_3 = 1(\cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Se $y = 10$, então $x^3 = 10$, o que implica $x = \sqrt[3]{10}$. Como $10 = 10(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$, temos $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{10}(\cos \frac{0+2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{0+2k\pi}{3})$, com $k = 0, 1, 2$. Isso significa que as três raízes cúbicas de 10 são $z_4 = \sqrt[3]{10}(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = \sqrt[3]{10}$, $z_5 = \sqrt[3]{10}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}) = \sqrt[3]{10}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $z_6 = \sqrt[3]{10}(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}) = \sqrt[3]{10}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$. Portanto, as seis raízes da equação dada são z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6 citados acima.

R12) Calcule as raízes quadradas de $-15 + 8i$.

Solução: O cálculo de raízes complexas normalmente é feito através da forma polar do número. No caso de $z = -15 + 8i$, a forma polar não é muito conveniente para realização de cálculos porque ela envolve uma função arco-tangente:

$$z = 17(\cos(\pi - \operatorname{arctg} \frac{8}{15}) + i \operatorname{sen}(\pi - \operatorname{arctg} \frac{8}{15})).$$

Logo, é melhor tentar outro caminho.
Se $z = a + bi$ for uma raiz quadrada de $-15 + 8i$, então $z^2 = -15 + 8i$. Como $z^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$ temos que a e b são as soluções do sistema de equações $\begin{cases} a^2 - b^2 &= -15 \\ 2ab &= 8 \end{cases}$. Isolando o valor de b na segunda equação, obtemos $b = 4/a$ e daí, substituindo na primeira equação obtemos $a^2 - (4/a)^2 = -15$, ou seja, $a^4 + 15a^2 - 16 = 0$, que é uma equação biquadrada na variável a. Fazendo $a^2 = y$, obtemos a seguinte equação do segundo grau: $y^2 + 15y - 16 = 0$, cujas raízes são $y = 1$ e $y = -16$. Substituindo $y = a^2$, obtemos as equações $a^2 = 1$ e $a^2 = -16$. Como $a \in \mathbb{R}$, temos que a única equação que tem solução real é $a^2 = 1$, o que implica $a = 1$ ou $a = -1$. Substituindo $b = 4/a$, obtemos $b = 4$ ou $b = -4$. Finalmente, substituindo a e b em z, obtemos que as raízes quadradas de $-15 + 8i$ são $1 + 4i$ e $-1 - 4i$.

R13) Sendo $n > 1$ um número inteiro, mostre que:

$$(\sqrt{3} - i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6}\right)$$

Solução: Se $z = \sqrt{3} - i$, então o módulo de z é $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$. A partir daí obtemos a sua forma polar:

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Pela fórmula de De Moivre, temos que

$$z^n = (\sqrt{3} - i)^n = 2^n \left[\cos\left(-\frac{n\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{n\pi}{6}\right)\right] = 2^n \left(\cos\frac{n\pi}{6} - i \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right).$$

R14) A partir do desenvolvimento de $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^5$, mostre que

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

e que

$$\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x} = 16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1,$$

se $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Solução: Usando a fórmula do *binômio de Newton*

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

temos que $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^5$ é igual a

$$\cos^5 x + 5\cos^4 x \operatorname{sen} x i + 10\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x i^2 + 10\cos^2 x \operatorname{sen}^3 x i^3 + 5\cos x \operatorname{sen}^4 x i^4 + \operatorname{sen}^5 x i^5$$

$$= \cos^5 x + 5i\cos^4 x \operatorname{sen} x - 10\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x - 10i\cos^2 x \operatorname{sen}^3 x + 5\cos x \operatorname{sen}^4 x + i\operatorname{sen}^5 x.$$

Por outro lado, usando a fórmula de De Moivre, $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^5 = \cos 5x + i\operatorname{sen} 5x$. Logo, comparando-se as partes reais e imaginárias dessas expressões, obtemos:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x + 5\cos x \operatorname{sen}^4 x,$$

$$\operatorname{sen} 5x = 5\cos^4 x \operatorname{sen} x - 10\cos^2 x \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^5 x.$$

Por fim, substituindo $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, obtemos o resultado desejado:

$$\begin{aligned}\cos 5x &= \cos^5 x - 10\cos^3 x(1 - \cos^2 x) + 5\cos x(1 - \cos^2 x)^2 \\ &= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 5x &= 5\cos^4 x \operatorname{sen} x - 10\cos^2 x(1 - \cos^2 x)\operatorname{sen} x + (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x \\ &= (16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1)\operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

R15) Se z_1 e z_2 são dois números complexos, mostre que

$$|z_1\overline{z_2}+1|^2+|z_1-z_2|^2=(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2).$$

Solução: Sejam $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$ com $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

- $|z_1\overline{z_2}+1|^2+|z_1-z_2|^2=|(a+bi)(c-di)+1|^2+|a+bi-c-di|^2=|(ac+bd+1)+i(bc-ad)|^2+|(a-c)+i(b-d)|^2=(ac+bd+1)^2+(bc-ad)^2+(a-c)^2+(b-d)^2=a^2c^2+b^2d^2+1+\cancel{2ac}+\cancel{2bd}+\cancel{2abcd}+b^2c^2-\cancel{2abcd}+a^2d^2$ $+a^2-\cancel{2ac}+c^2+b^2-\cancel{2bd}+d^2=a^2c^2+b^2d^2+1+b^2c^2+a^2d^2+a^2+c^2+b^2+d^2$

- $(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)=(1+a^2+b^2)(1+c^2+d^2)=1+a^2+b^2+c^2+a^2c^2+b^2c^2+d^2+a^2d^2+b^2d^2$

Concluímos assim que $|z_1\overline{z_2}+1|^2+|z_1-z_2|^2=(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$.

1.19 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

P1) Sendo A e B subconjuntos de U, mostre que $A-\complement_U B=A\cap B$.
Resposta: mostre que $x\in A-\complement_U B\Leftrightarrow x\in A\cap B$

P2) Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, mostre que $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
Resposta: mostre que $x\in A\cap(B\cup C)\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

P3) Mostre que, para quaisquer conjuntos A, B subconjuntos de um conjunto U, temos

$$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B.$$

Resposta: mostre que $x\in\complement_U(A\cup B)\Leftrightarrow x\in\complement_U A\cap\complement_U B$

P4) Escreva os seguintes números na forma algébrica $a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$.

a) $(-2i)^{11}$ b) $\dfrac{i^{2023}+3i^{239}}{i^{101}}$ c) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2024}$ d) $\dfrac{(1+2i)^2-(\overline{1+i})^3}{(3+2i)^3-(\overline{2-i})^2}$ e) $\dfrac{(\overline{1-i})^{2021}}{(1-i)^{2019}}$

Resposta: a) $2048i$; b) -4; c) 1; d) $\frac{78}{661}-\frac{11i}{1322}$; e) 2

P5) Se z_1 e z_2 são dois números complexos, mostre que

$$|z_1\overline{z_2} - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1).$$

Resposta: proceda como no exercício R15

P6) Se $z \in \mathbb{C}$, mostre que $|z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leqslant \sqrt{2}|z|$.
Resposta: use que, se $z = a + bi$, então $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|\operatorname{Re} z| = |a|$ e $|\operatorname{Im} z| = |b|$

P7) Mostre que $z = \dfrac{(5+i)^4(239-i)}{1+i}$ é um número real.
Resposta: $z = 114244$

Observação: Calculando-se os argumentos de todos os números envolvidos, podemos obter a seguinte fórmula, que é conhecida como *fórmula de Machin*:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Essa fórmula foi utilizada em 1706 para calcular pela primeira vez o valor de π com 100 casas decimais.

P8) Se $\theta \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\frac{1 + \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

e deduza que

$$\left(1 + \cos\frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)^5 + \left(1 + \cos\frac{\pi}{5} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)^5 = 0.$$

Resposta: depois de simplificar a fração, eleve à quinta potência e faça $\theta = \frac{\pi}{5}$

Observação: Em geral, se $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, então

$$\left(1 + \cos\frac{\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right)^n + \left(1 + \cos\frac{\pi}{n} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right)^n = 0.$$

CAPÍTULO 2

Relações e funções

2.1 RELAÇÕES

2.1.1 Produto cartesiano

Definição: Dados dois conjuntos A e B não vazios, o **produto cartesiano** de A por B, denotado por $A \times B$, é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) nos quais $x \in A$ e $y \in B$.

$$\boxed{A \times B \;=\; \{(x, y) \,|\, x \in A \;\text{ e }\; y \in B\}}$$

Exemplo: Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$, então $A \times B$ e $B \times A$ são os seguintes conjuntos:

- $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$
- $B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$

Observações:

- Note que o número de elementos de $A = n(A) = 3$, $n(B) = 2$ e $n(A \times B) = n(B \times A) = 6$ e que $6 = 3 \cdot 2$, ou seja, $n(A \times B) = n(A)n(B)$. Essa fórmula é sempre válida quando A e B forem conjuntos finitos.
- Em um par ordenado, a ordem dos elementos é importante e não deve ser mudada. Se $x \neq y$, então $(x, y) \neq (y, x)$.

2.1.2 Relação binária

Definição: Todo subconjunto de $A \times B$ é denominado **relação binária** de A em B, ou, simplesmente, **relação** de A em B.

$$\boxed{R \subset A \times B \iff R \text{ é relação de } A \text{ em } B}$$

Se $(a, b) \in R$, então dizemos que a está relacionado com b, segundo R, e denotamos isso por $a\,R\,b$. Por outro lado, $(a, b) \notin R$ é denotado por $a \not R\, b$.

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{7, 8, 9\}$. Nesse caso, o produto cartesiano de A por B é dado por

$A{\times}B = \{(1, 7), (1, 8), (1, 9), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (3, 7), (3, 8), (3, 9), (4, 7), (4, 8), (4, 9)\}.$

Os seguintes subconjuntos de $A \times B$ são exemplos de relações de A em B:

- $R_1 = \varnothing$
- $R_2 = \{(1, 7), (3, 9)\}$
- $R_3 = \{(2, 7), (2, 8), (2, 9)\}$
- $R_4 = \{(1, 8), (2, 7), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (4, 8)\}$

2.1.3 Domínio e imagem

Definição: O **domínio** de uma relação R de A em B é denotado por $\mathrm{Dom}(R)$ ou $D(R)$ e é formado por todos os elementos de A para os quais existe $y \in B$ tal que $x\,R\,y$.

$$\boxed{\mathrm{Dom}(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B, x\,R\,y\}}$$

ou seja, $\mathrm{Dom}(R)$ é formado pelos primeiros elementos dos pares ordenados da relação.

Definição: A **imagem** de uma relação R é denotada por $\mathrm{Im}(R)$ e é formada pelos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $x\,R\,y$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A, x\,R\,y\}}$$

ou seja, $\mathrm{Dom}(R)$ é formado pelos segundos elementos dos pares ordenados da relação.

Exemplo: Consideremos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e as seguintes relações

$$R_1 = \{(0, 2), (0, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (7, 8)\}$$
$$R_2 = \{(1, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6), (9, 4), (9, 6)\}$$

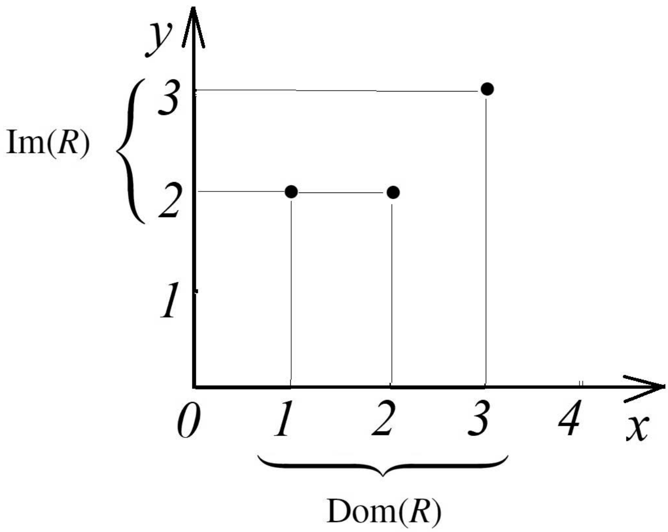
então temos que

- $\mathrm{Dom}(R_1) = \{x \in A \mid \exists y \in B, x\, R_1\, y\} = \{0, 3, 7\}$
- $\mathrm{Im}(R_1) = \{y \in B \mid \exists x \in A, x\, R_1\, y\} = \{2, 4, 6, 8\}$
- $\mathrm{Dom}(R_2) = \{x \in A \mid \exists y \in B, x\, R_2\, y\} = \{1, 3, 5, 9\}$
- $\mathrm{Im}(R_2) = \{y \in B \mid \exists x \in A, x\, R_2\, y\} = \{4, 6\}$

2.1.4 Representação de uma relação

O gráfico da relação R de A em B é formado pelo conjunto de pontos (x, y) do plano cartesiano que pertencem à relação. O domínio de R está contido no eixo dos x e a imagem, no eixo dos y.

Exemplo: Se $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$, o gráfico de R é



É muito comum representar A e B por diagramas de Venn e, se $x\, R\, y$, desenhar uma seta que vai de x para y.

Neste livro, apresentamos um resumo da teoria e uma significativa quantidade de exercícios resolvidos a respeito dos assuntos: conjuntos, relações, funções, noções de aritmética, princípio de indução, congruências, critérios de divisibilidade, relações de equivalência, operações binárias, grupos, subgrupos, homomorfismos, isomorfismos, classes laterais, grupos-quocientes, anéis, subanéis, corpos, ideais, anéis-quocientes, polinômios e equações polinomiais.

São apresentados também exercícios de revisão, exercícios propostos e testes do tipo múltipla escolha, todos com respostas.

É dedicado a alunos dos cursos de licenciatura ou bacharelado em Matemática, Física, Química, Engenharia Elétrica e área de Telecomunicações.

ISBN 978-85-212-2477-8

9 788521 224778

Blucher

www.blucher.com.br