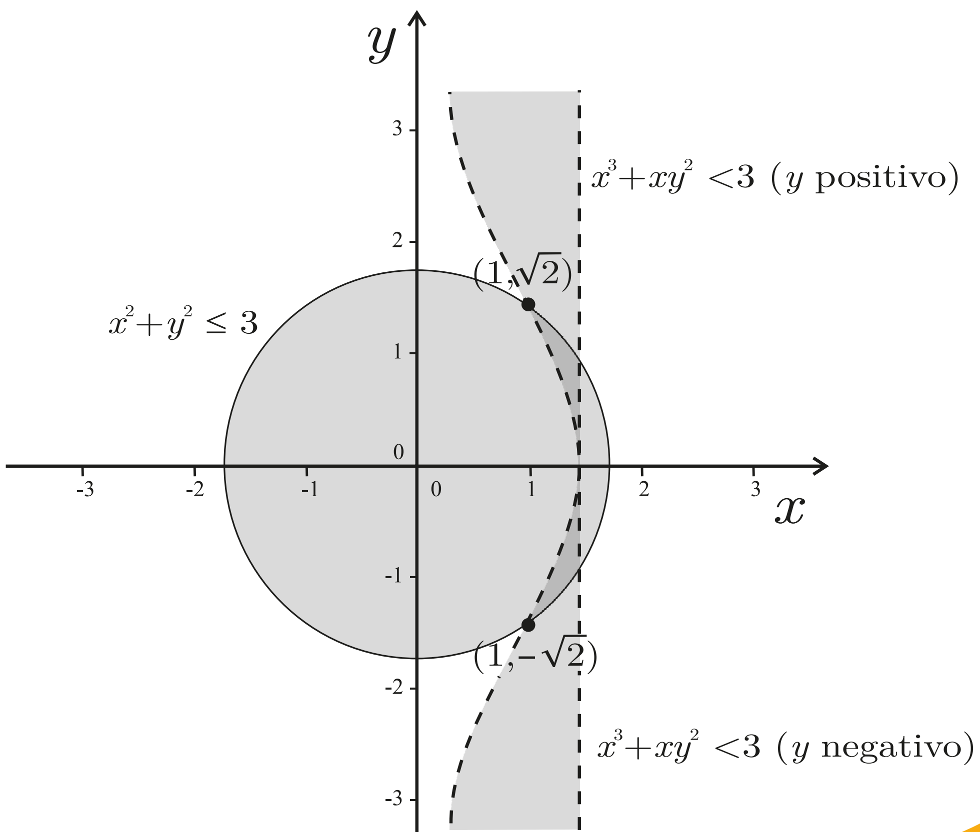
GILMAR PIRES NOVAES

FUNÇÕES REAIS DE DUAS VARIÁVEIS REAIS, LIMITES E CONTINUIDADE



Blucher

Gilmar Pires Novaes

FUNÇÕES REAIS DE DUAS VARIÁVEIS REAIS, LIMITES E CONTINUIDADE

Funções reais de duas variáveis reais, limites e continuidade

Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher
Editores Eduardo Blücher e Jonatas Eliakim
Coordenação editorial Andressa Lira
Produção editorial Regiane da Silva Miyashiro
Revisão de texto Maurício Katayama
Diagramação Horizon Soluções Editoriais
Capa Laércio Flenic
Imagem da capa Gilmar Pires Novaes

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4° andar
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, julho de 2021.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Novaes, Gilmar Pires
Funções reais de duas variáveis reais, limites e continuidade / Gilmar Pires Novaes. – São Paulo: Blucher, 2024.
276 p.: il.

Bibliografia
ISBN 978-85-212-2186-9

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Funções reais I. Título

23-4683 CDD 510.07

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática – Estudo e ensino

Conteúdo

Capítulo 1

Funções reais de duas variáveis reais

Apesar de ser possível descrever uma grande variedade de situações-problema por meio de funções reais de uma variável real, muitas outras requerem o uso de funções reais de duas variáveis reais. Há muitas fórmulas familiares ao leitor em que uma variável dada depende (do ponto de vista do conceito de função) de outras duas variáveis. Em última análise, funções reais de duas (mais precisamente, várias) variáveis reais constituem o objeto matemático por excelência para modelar determinados problemas.

Motivados pelo ora exposto, iniciamos este capítulo tornando preciso o conceito de função real de duas variáveis reais em toda a sua generalidade, o qual é a base para todo o estudo subsequente, de modo que, relativamente a tal classe de funções, tratamos dos seguintes assuntos:

a) **alguns tipos especiais de funções reais de duas variáveis reais** que desempenham papel importante, tanto em Matemática como nas mais diversas áreas do conhecimento humano;

b) **conceito de gráfico de uma função real de duas variáveis reais**, cuja representação, por meio de um software apropriado, apresentamos associada à correspondente função, tendo como objetivo a sua ulterior aplicação nesse livro;

c) **conceito de conjunto de nível de uma função real de duas variáveis reais**, o qual empregamos nas seguintes aplicações:

i) aplicação (clássica) de conjuntos de nível à representação geométrica de uma função real de duas variáveis reais;

ii) aplicação de conjuntos de nível à obtenção das imagens de algumas funções reais de duas variáveis reais;

iii) aplicação de conjuntos de nível à obtenção de máximos e mínimos de algumas funções reais de duas variáveis reais condicionadas a determinados subconjuntos dos seus domínios.

1.1 Funções reais de duas variáveis reais

A definição de função real de duas variáveis reais é análoga à de função real de uma variável real.

Definição 1.1.1. Uma *função real de duas variáveis reais* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$[1] é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais $(x, y) \in A$ um único valor $f(x, y) \in \mathbb{R}$.

Assim, uma função real de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ consiste no seguinte:

i) um conjunto A, denominado *domínio* de f (conjunto que contém todos os pontos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ para os quais há sentido em calcular $f(x, y) \in \mathbb{R}$ — *valor* da função f em (x, y), ou seja, o conjunto em que a função está definida);

ii) o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), denominado *contradomínio* de f (conjunto que contém os valores $f(x, y)$ da função f, ou seja, o conjunto em que a função toma valores);

iii) uma *regra*[2] f que permite associar, de modo bem determinado, a cada par ordenado $(x, y) \in A$, um único $f(x, y) \in \mathbb{R}$.

[1] Daqui em diante, admitiremos, tacitamente, que $A \neq \emptyset$.

[2] Tal regra, a qual prescreve as operações a serem realizadas com cada par ordenado $(x, y) \in A$ para obter o correspondente valor $f(x, y)$ da função f, é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas às seguintes condições:

1) não deve haver exceções: para que a função f tenha A como domínio, a regra deve fornecer $f(x, y)$ para *todo* $(x, y) \in A$;

2) não deve haver ambiguidades: a cada $(x, y) \in A$, a regra deve fazer corresponder um *único* $f(x, y) \in \mathbb{R}$.

Formalmente falando, conforme essa definição, $(A, \mathbb{R}, f)$ é uma função real de duas variáveis reais, embora seja comum referirmo-nos a ela simplesmente por f, ou seja, apenas pela regra que define tal função (apenas um dos três conceitos que definimos, intrínsecos àquele de função). Entretanto, esse uso do mesmo símbolo para expressar a função e sua regra nos fornece um modo muito mais maleável para tratar funções. Tal uso já é corrente não apenas em Matemática mas também em toda área que emprega funções, de modo que é também o que empregaremos, às vezes, ao nos referirmos à f mais precisamente como "uma função real de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$". Ademais, existem várias outras terminologias que são comumente usadas como sinônimos de "função", por exemplo, "aplicação", "operador" ou "transformação". Tais terminologias são usadas em contextos que melhor sugerem a transmissão do papel desempenhado por uma dada função específica.

O conjunto que consiste propriamente nos valores da função, ou seja, o conjunto $Im(f) = \{f(x, y) : (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}$, é denominado *imagem* da função: cada elemento $f(x, y)$ desse conjunto é a imagem, por f, de um elemento (x, y) de A. (Também referida na literatura matemática como *imagem direta* de A por f, denotada por $f(A)$.)

Às vezes, escrevemos $z = f(x, y)$, para tornar explícitos os valores de f em (x, y). Denominamos x e y *variáveis independentes*, e z, *variável dependente*. Em resumo: z é uma função de x e y, no sentido de que valores específicos (porém arbitrários) das variáveis independentes x e y determinam um *único* valor real da variável dependente z.

Dada uma função real de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, consideremos a sua regra de associação aquela expressa por meio de uma *fórmula*[3]. Ao nos referirmos a problemas sobre obtenção do domínio de tal função, entenderemos

[3] Dada uma função real de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, uma *fórmula* (algébrica) que representa f é uma expressão que estabelece operações (algébricas) a serem realizadas com todos os pares ordenados $(x, y) \in A$ para obter os valores $f(x, y)$ correspondentes. Consideraremos apenas funções que podem ser representadas por meio de fórmulas, a menos de menção em contrário.

por *domínio* de f **o maior subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ tal que a fórmula dada nos forneça, para cada par $(x, y) \in A$, um único número real $f(x, y)$ bem definido**. Em outras palavras, podem constituir o domínio de f todos (e somente) os elementos de $\mathbb{R}^2$ para os quais é possível efetuarmos todas as operações mencionadas na expressão algébrica que define f. Em particular, no caso em que a função modela um problema de natureza prática (nas ciências em geral), entenderemos que o seu domínio será determinado também pelas restrições físicas sobre suas variáveis independentes, restrições essas inerentes a uma situação-problema de interesse específico em cada qual de tais ciências).

Em geral, a fórmula que expressa uma dada função real de duas variáveis reais consiste em combinações de outras funções expressas por frações, potências, raízes, logaritmos ou funções inversas de senos e cossenos, de modo que, para obter efetivamente o domínio daquela função, devemos considerar as interseções dos domínios dessas funções. Em outras palavras, dada uma função real de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (expressa por uma fórmula), para obter o seu domínio A, devemos considerar simultaneamente todas as condições a que devem satisfazer as coordenadas do par ordenado $(x, y) \in A$ para os quais tal fórmula tenha sentido.

Uma classe geral particularmente importante de funções é aquela de uma função composta, conforme definimos a seguir[4].

Definição 1.1.2. Dadas as funções $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a *função composta* $g \circ f : C \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a função real de duas variáveis reais definida por $(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y))$, cujo domínio C é dado por $C \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in A : f(x, y) \in B\}$.

De acordo com essa definição, para formarmos a composta de f e g, é suficiente que a imagem de f seja subconjunto do domínio de g.

[4] O leitor pode consultar a definição de função composta que apresentamos no exercício da Subseção 1.1.2, de modo que ambas as opções são possíveis, bem como equivalentes para o desenvolvimento da teoria.

Grosso modo, no caso em que o contradomínio de f coincide com o domínio de g (ambos subconjuntos de $\mathbb{R}$, denotados por B), essa definição significa que, para obtermos a imagem de $(x, y) \in A$ por $g \circ f$, é suficiente obtermos a imagem de $f(x, y) \in B$ por g.

Uma vez obtido o domínio de f, podemos descrevê-lo por meio de palavras, bem como representá-lo geometricamente (esboçá-lo).

No Exemplo 1 a seguir, apresentamos o procedimento para obter, descrever e esboçar os domínios de algumas funções reais de duas variáveis reais.

Exemplo 1. Obtenha, descreva e esboce o domínio de cada uma das funções reais de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujas expressões são dadas a seguir:

a) $f(x, y) = \dfrac{y(y^2 - x^2)(y + y^2 - x^2)}{y^3 - (y^2 - x^2)^3}$.

b) $f(x, y) = arcos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^3 - y^2}}\right)$.

c) $f(x, y) = ln[cos(x^2 + y^2)]$.

Resolução.

a) Uma vez que a divisão por zero não está definida, decorre que o domínio de f consiste em todos os pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y^3 - (y^2 - x^2)^3 \neq 0$. Como

$$
\begin{aligned}
y^3 - (y^2 - x^2)^3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y^3 = (y^2 - x^2)^3 \\
&\Leftrightarrow \quad y = y^2 - x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad y^2 - y = x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad y^2 - y + \frac{1}{4} = x^2 + \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4x^2 + 1}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad y - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{4x^2 + 1}}{2},
\end{aligned}
$$

resulta que $y^3 - (y^2 - x^2)^3 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{4x^2+1}}{2}$. Logo, o domínio de f é o conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{4x^2+1}}{2}\right\}$. Na Figura 1.1 a seguir, apresentamos o esboço do domínio de f.

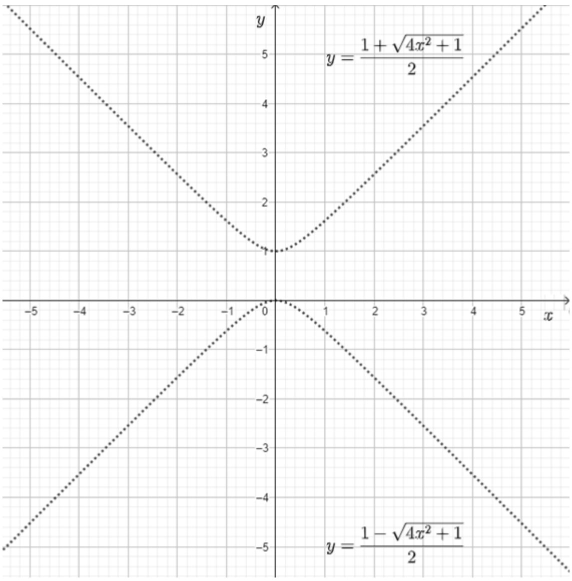


Figura 1.1: domínio de $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{y(y^2-x^2)(y+y^2-x^2)}{y^3-(y^2-x^2)^3}$.

b) Uma vez que a raiz quadrada (em $\mathbb{R}$) está definida apenas para números reais não negativos, a divisão por zero não está definida e o argumento da função arccos deve pertencer ao intervalo $[-1,1]$, decorre que o domínio de f consiste em todos os pares ordenados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x^3 - y^2 > 0 \\ -1 \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^3-y^2}} \leq 1 \end{cases}.$$

Observando que x deve ser estritamente positivo, esse sistema se resume à $0 < x \leq \sqrt{x^3-y^2}$. Assim, o domínio de f é $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \sqrt{x^3-y^2}\}$. Na Figura 1.2 a seguir, apresentamos o esboço do domínio de f.

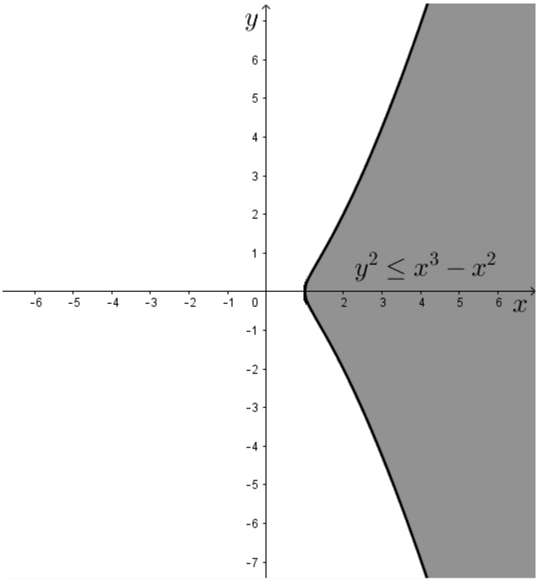


Figura 1.2: domínio de $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = arcos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^3 - y^2}}\right)$.

c) Uma vez que a função logarítmica natural está definida apenas para números reais positivos, decorre que o domínio de f consiste em todos os pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $cos(x^2 + y^2) > 0$, ou seja, $-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi < x^2 + y^2 < \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{N}$ (uma vez que $x^2 + y^2 \geq 0$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, interessam-nos apenas valores de $n \geq 1$, de modo que $-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi > 0$). Para cada número natural $n \geq 1$ fixado, essas desigualdades correspondem, geometricamente, à interseção do interior do círculo de centro na origem e raio $\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$ com o exterior do círculo de centro na origem e raio $\sqrt{-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$, de modo que o domínio de f consiste na união de todas essas regiões, quando $n \geq 1$ varia no conjunto dos números naturais. Na Figura 1.3 a seguir, apresentamos o esboço do domínio de f para alguns valores particulares de n $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$.

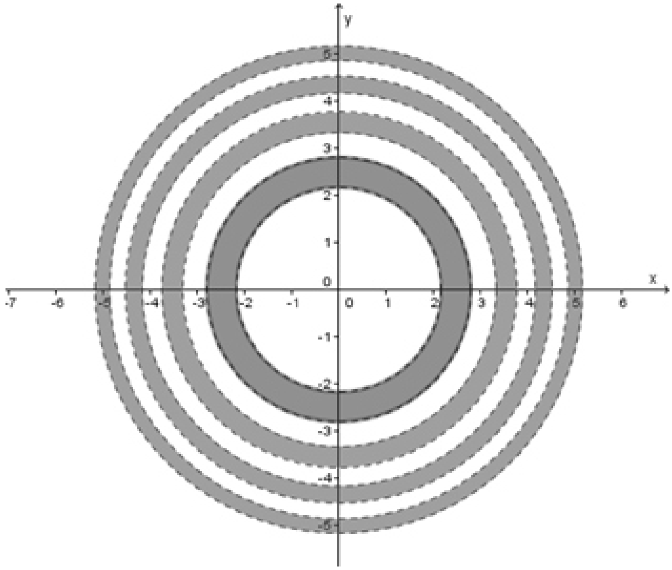


Figura 1.3: domínio de $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = ln[cos(x^2 + y^2)]$.

Conhecida uma função real de duas variáveis reais, dada em termos de operações algébricas efetuadas em suas variáveis, às vezes é possível obter a sua expressão explicitamente, em termos das suas próprias variáveis, conforme o Exemplo 2 a seguir.

Exemplo 2. Dada $f\left(x + y, \dfrac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$ ($x \neq 0$), obtenha $f(x, y)$.

Resolução.

Consideremos o seguinte sistema de mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x + y = u \\ \dfrac{y}{x} = v \end{cases}.$$

Da segunda equação desse sistema, obtemos $y = vx$. Substituindo esse valor de y na primeira equação, obtemos $x = \dfrac{u}{1 + v}$, desde que $v \neq -1$. Substituindo esse valor de x na expressão que obtivemos para y, obtemos, finalmente, $y = \dfrac{uv}{1 + v}$.

Logo, para todo $v \neq -1$, temos que

$$f(u,v) = \frac{u^2}{(1+v)^2} - \frac{u^2v^2}{(1+v)^2} \Rightarrow f(u,v) = \frac{u^2(1-v)}{1+v}.$$

Portanto, uma vez que as variáveis u e v são "mudas", temos $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -1\} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y}.$$

Desempenha fundamental importância (notadamente em aplicações) a modelagem matemática de uma dado problema por meio de uma função real de duas variáveis reais, conforme o Exemplo 3 a seguir.

Exemplo 3. De uma longa folha de metal galvanizado com a metros de largura deseja-se fabricar uma calha dobrando-se as bordas dessa folha de iguais quantidades (x), de modo que as abas façam o mesmo ângulo (θ) com a horizontal (Figura 1.4 a seguir). Obtenha a expressão da área $A(x,\theta)$ da seção transversal dessa calha.

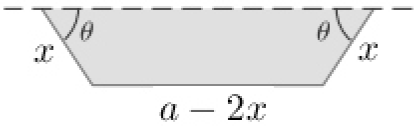


Figura 1.4: calha (Exemplo 3).

Resolução.

Inicialmente, observemos que $0 < x < \dfrac{a}{2}$ e $0 < \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Uma vez que a seção transversal da calha é um trapézio, a sua área $A(x,\theta)$ é dada por

$$A(x,\theta) = \frac{(B+b)h}{2},$$

em que B denota a base maior, b a base menor, e h a altura, todas em função de a e de x.

De acordo com a Figura 1.5 a seguir, temos
$B = (a - 2x) + 2t \Rightarrow B = (a - 2x) + 2xcos\theta$;
$b = a - 2x$;
$h = xsen\theta$.

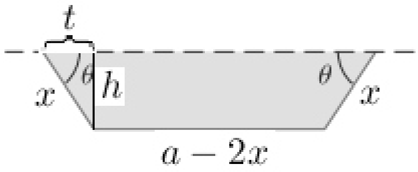


Figura 1.5: calha (Exemplo 3).

Logo,

$$A(x, \theta) = axsen\theta - 2x^2 sen\theta + x^2 sen\theta cos\theta, \quad 0 < x < \frac{a}{2} \text{ e } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

1.2 Alguns tipos especiais de funções reais de duas variáveis reais

Nessa seção, apresentamos alguns tipos especiais de funções reais de duas variáveis reais que desempenham papel importante, tanto em Matemática quanto em outras áreas do conhecimento humano.

1. (**Função polinomial**) Uma função real de duas variáveis reais $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é denominada *função polinomial* se sua expressão algébrica é dada por

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j.^{(5)},$$

em que $m, n \in \mathbb{N}$ e $a_{ij}s \in \mathbb{R}$, para todos i, j tais que $0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n$.

[5] Podemos também expressar uma função polinomial real de duas variáveis reais $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \sum\limits_{m+n \leq p} a_{mn} x^m y^n$, em que p é um número natural arbitrário fixado, os a_{mn}s são números reais dados, e o somatório é estendido a todas as soluções (m, n), m e n números naturais, da inequação $m + n \leq p$.

Toda função polinomial é completamente determinada pelos valores dos seus coeficientes $a_{ij}s$.

1.1. (**Função afim**) Uma função polinomial real de duas variáveis reais $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é denominada *função afim* se sua expressão algébrica é dada por

$$f(x, y) = ax + by + c,$$

em que a, b, c são números reais arbitrários dados.

Em particular, toda *função constante* ($a = b = 0$) é uma função afim. Um tipo particular importante de função constante é a *função nula* ($a = b = c = 0$).

1.2. (**Função linear**) Uma função polinomial real de duas variáveis reais $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é denominada *função linear* se sua expressão algébrica é dada por

$$f(x, y) = ax + by,$$

em que a, b são números reais arbitrários dados.

Em particular, toda função linear é uma função afim ($c = 0$).

Toda função linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é completamente determinada pelos seus valores nos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$: para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, decorre que $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, de modo que a linearidade de f nos permite escrever

$$f(x, y) = f(x(1, 0) + y(0, 1)) = f(1, 0)x + f(0, 1)y = ax + by,$$

em que $a = f(1, 0)$ e $b = f(0, 1)$.

2. (**Função racional**) Uma função real de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é denominada *função racional* se sua expressão algébrica é dada por

$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)},$$

em que p e q são funções polinomiais reais de duas variáveis reais, $q(x, y) \neq 0$, para todo $(x, y) \in A$.

Em particular, toda função polinomial é racional (basta considerar o caso em que $q(x, y) = c, c \in \mathbb{R} - \{0\}$, para todo $(x, y) \in A$).

Exemplo. Dada uma função polinomial $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, quais são os seus possíveis conjuntos imagens?

Resolução.

Afirmação: os possíveis conjuntos imagens são $[k, k]$, $[k, +\infty)$, $(-\infty, k]$, $(-\infty, +\infty)$, $(k, +\infty)$ e $(-\infty, k)$, para todo $k \in \mathbb{R}$.

As quatro primeiras possibilidades dadas nessa afirmação são facilmente realizadas pelas seguintes funções polinomiais, respectivamente:

i) $p(x, y) = k$;

ii) $p(x, y) = x^2 + k$;

iii) $p(x, y) = k - x^2$;

iv) $p(x, y) = x$.

Agora, se p não é constante, então, sem perda de generalidade, existe uma potência positiva de x. Consideremos n a mais alta potência desse tipo. Fixemos y de modo que p se torne uma função polinomial em x com um termo não nulo em x^n (o que deve ser possível, pois apenas uma quantidade finita arbitrária de valores de y pode fornecer um termo nulo). Quando x tende a ∞, esse termo será dominante, de modo que tenderá a $-\infty$ ou a $+\infty$. Dado que p é uma função contínua, cujo domínio ($\mathbb{R}^2$) é conexo, decorre que o seu conjunto imagem deve também ser conexo. Portanto, não existem outras possibilidades além daquelas que mencionamos na afirmação.

Nota. É tentador pensar que não podemos obter $(k, +\infty)$, porém tentativas de demonstrá-lo falham. O leitor pode se convencer de que tal possibilidade realmente ocorre. Podemos, por exemplo, considerar o polinômio constituído por dois termos quadrados que não podem ser simultaneamente nulos, tal como $p(x, y) = (xy - 1)^2 + x^2 + k$. Podemos tornar x arbitrariamente pequeno (diferente de zero) e escolher y para tornar o primeiro termo nulo, porém se $x = 0$, então o primeiro termo é 1.

3. (**Função algébrica**) Uma função real de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é denominada *função algébrica* se $z = f(x, y)$ satisfaz uma equação da forma

$$p_0(x,y)z^n + p_1(x,y)z^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x,y)z + p_n(x,y) = 0,$$

em que $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n$ são funções polinomiais com coeficientes racionais (ou inteiros) em x e y, e $n \in \mathbb{N}$.

Em outras palavras, uma função é algébrica se ela satisfaz uma equação polinomial.

De modo geral, uma equação do tipo acima pode ou não definir z como função de x e y[6]. Mesmo nos casos afirmativos, não é possível, em geral, obter a expressão que define tal função. Entretanto, em qualquer de tais casos afirmativos, dizemos que a equação acima define z como *função implícita* de x e y (ou define *implicitamente* z como função de x e y). Assim, é muito comum representarmos a equação acima na forma $F(x, y, z) = 0$ (o símbolo $F(x, y, z)$ denota simplesmente uma função polinomial qualquer das variáveis x, y e z). No caso particular em que é possível obter a expressão que define tal função, ou seja, é possível resolver a equação acima para z como função de x e y, dizemos que a solução ($z = f(x, y)$) define z como *função explícita* de x e y (ou define *explicitamente* z como função de x e y).

A seguir, apresentamos os possíveis tipos de funções algébricas.

No caso em que $n = 1$, a equação

$$p_0(x,y)z^n + p_1(x,y)z^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x,y)z + p_n(x,y) = 0$$

reduz-se à

$$p_0(x,y)z + p_1(x,y) = 0,$$

a qual define uma *função* (algébrica) *racional fracionária*, a saber, $z(x, y) = -\dfrac{p_1(x,y)}{p_0(x,y)}$, se p_0 não é a função polinomial nula. Essa função racional é polino-

[6] Ao leitor interessado, informamos que o resultado que garante a existência de tal solução é o Teorema da Função Implícita, o qual ele terá a oportunidade de estudar em um Curso de Análise em $\mathbb{R}^n$.

mial (*racional inteira*), se p_0 é uma constante não nula (função polinomial constante não nula).

Ao resolver a equação $F(x, y, z) = 0$, com o objetivo de obter z como função de x e y, devemos, às vezes, extrair raízes de funções racionais, as quais conduzem às *funções algébricas irracionais*.

Exemplo. Em Geometria Analítica Espacial, curvas são frequentemente representadas não por equações em função apenas de x e y (ou de x e z ou de y e z), $z = f(x, y)$ (ou $y = g(x, z)$ ou $x = h(y, z)$), mas por equações em função de x, y e z simultaneamente, na forma $\overline{F}(x, y, z) = k$, em que k é uma constante real dada, tais como, por exemplo, as seguintes:

i) esfera: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$;

ii) elipsoide: $\dfrac{(x-a)^2}{p^2} + \dfrac{(y-b)^2}{q^2} + \dfrac{(z-c)^2}{r^2} = 1$ $(p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0)$;

iii) hiperboloide (de uma folha): $\dfrac{(x-a)^2}{p^2} + \dfrac{(y-b)^2}{q^2} - \dfrac{(z-c)^2}{r^2} = 1$ $(p \neq 0,$ $q \neq 0, r \neq 0)$.

Ao resolver essas equações, obtemos as seguintes funções explícitas z de x e y:

i')

$$z = -\sqrt{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} + c$$

ou

$$z = \sqrt{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} + c,$$

para todo (x, y) tal que $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$.

ii')

$$z = -\left|\frac{r}{pq}\right| \sqrt{p^2q^2 - q^2(x-a)^2 - p^2(y-b)^2} + c$$

ou

$$z = \left|\frac{r}{pq}\right| \sqrt{p^2q^2 - q^2(x-a)^2 - p^2(y-b)^2} + c,$$

para todo (x, y) tal que $\dfrac{(x-a)^2}{p^2} + \dfrac{(y-b)^2}{q^2} < 1$.

iii')

$$z = -\left|\frac{r}{pq}\right| \sqrt{q^2(x-a)^2 + p^2(y-b)^2 - p^2q^2} + c$$

ou

$$z = \left|\frac{r}{pq}\right| \sqrt{q^2(x-a)^2 + p^2(y-b)^2 - p^2q^2} + c,$$

para todo (x, y) tal que $\dfrac{(x-a)^2}{p^2} + \dfrac{(y-b)^2}{q^2} > 1.$

Em resumo, temos a seguinte classificação das funções algébricas:

$$\text{Funções Algébricas} \begin{cases} \text{Explícitas} \begin{cases} \text{Racionais} \begin{cases} \text{Inteiras} \\ \text{Fracionárias} \end{cases} \\ \text{Irracionais} \end{cases} \\ \text{Implícitas} \end{cases}$$

4. (**Função transcendente**) Uma função real de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é denominada *função transcendente* se não é algébrica.

São funções transcendentes bem conhecidas do leitor as funções *trigonométricas*, *exponenciais*, *logarítmicas* ou qualquer combinação delas, de modo que lhe pedimos permissão para apresentar-lhe uma possivelmente não tão bem conhecida.

Exemplo. A **função *W* de Lambert** (a qual teremos a oportunidade de aplicar ao último exemplo na Seção 2.3) resolve a equação em y:

$$ye^y = x,$$

ou seja, se $y = W(x)$, então y resolve $ye^y = x$.

Trata-se de uma função transcendente, a qual pode ser considerada como a função inversa de $f(y) = ye^y$, decrescente para $y < -1$, crescente para $y > -1$, cujo mínimo global é dado por $f(-1) = -\dfrac{1}{e}$, motivo pelo qual W é uma função multivalorada, embora possa ser definida univocamente como uma função real no intervalo $\left(-\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$.

5. **(Função homogênea)** Uma função real de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é denominada *função homogênea de grau* n ($n \in \mathbb{R}$) se satisfaz a seguinte condição

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $(x, y) \in A$, tais que $(tx, ty) \in A$.

No caso particular em que $t > 0$, dizemos que f, assim definida, é uma *função real positivamente homogênea de grau* n ($n \in \mathbb{R}$).

Exemplo. Para todo $n \in \mathbb{R}$, demonstre que existe uma função $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, positivamente homogênea de grau n, tal que $f(x, y) > 0$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, que não é uma função polinomial.

Resolução.

Definamos $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = \sqrt{x^{2n} + y^{2n}}$.

Claramente, f, assim definida, satisfaz as seguintes condições:

i) é de classe C^∞ (pois existem as derivadas parciais de f de todas as ordens em todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, as quais são contínuas);

ii) $f(x, y) > 0$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$;

iii) não é uma função polinomial.

Finalmente, para todo $t > 0$ tal que $(tx, ty) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, temos

$$f(tx, ty) = \sqrt{(tx)^{2n} + (ty)^{2n}} = t^n \sqrt{x^{2n} + y^{2n}} = t^n f(x, y),$$

de modo que f é positivamente homogênea de grau n.

Nota. Tal exemplo é facilmente estendível a uma função real de n variáveis reais.

1.3 Gráfico

Ao tratar do conceito de gráfico de uma função real de duas variáveis reais, temos como principal objetivo a sua posterior aplicação ao estudo do limite desse tipo de função, a qual apresentaremos no próximo capítulo.

A definição de gráfico de uma função real de duas variáveis reais é análoga à definição de gráfico de função real de uma variável real.

Definição 1.3.1. O *gráfico* de uma função real de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é o subconjunto $G(f)$ de $\mathbb{R}^3$ que consiste nos ternos ordenados (x, y, z) tais que $z = f(x, y)$, para todo $(x, y) \in A$.

Em linguagem simbólica:

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), \text{ para todo } (x, y) \in A\}.$$

Ao introduzir um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no espaço tridimensional, podemos considerar o gráfico de f como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, y, f(x, y))$, quando (x, y) varia no domínio A de f.

O gráfico de uma função real de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é, em geral, uma superfície[7] que representa o conjunto de todos os pontos no espaço tridimensional cujas coordenadas cartesianas são dadas pelos ternos ordenados de números reais (x, y, z), em que $z = f(x, y)$. Como, pela definição de função, a cada par ordenado de números reais (x, y) no domínio de f (um conjunto de pontos no plano xy) corresponde um único valor de z, nenhuma reta perpendicular ao plano xy pode intersectar o gráfico de f em mais de um ponto.

Tendo em vista o amplo acesso a programas que esboçam gráficos, remetemos o leitor ao seu uso destinado ao estudo de limites de algumas funções reais de duas variáveis reais (*vide* Capítulo 3 (Seção 3.15)).

Por ora, permita-nos o leitor apresentar-lhe o exemplo a seguir.

Exemplo. Dada a função $F(t) = f(cost, sent)$, em que

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad y \geq x \\ 0, & \text{se} \quad y < x \end{cases},$$

7 A equação $z = f(x, y)$ define uma superfície $\mathbb{S}$ (subconjunto de $\mathbb{R}^3$) dada pela equação $z = f(x, y)$, ou seja, $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$, **desde que *A* seja uma porção do (ou todo o) plano $\mathbb{R}^2$**. Caso A se reduza a um conjunto finito de pontos, o gráfico de f se reduzirá, também, a apenas um conjunto finito de pontos – as imagens dos pontos de A por f.

forneça uma interpretação geométrica do gráfico de F como a interseção de duas superfícies.

Resolução. Inicialmente, interpretemos geometricamente a superfície $z = f(x, y)$, como segue. Consideremos o plano $y = x$. De acordo com a definição de f, toda a parte do gráfico contida no semiespaço $y \geq x$ está em $z = 1$, bem como toda a parte contida no semiespaço $y < x$ está em $z = 0$. Observemos que $cost = sent$ para $t = \dfrac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. No intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $cost > sent \Leftrightarrow y < x$, de modo que $F(t) = 0$. No intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$, $sent \geq cost \Leftrightarrow y \geq x$, de modo que $F(t) = 1$. No intervalo $\left(\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$, $cost > sent \Leftrightarrow y > x$, de modo que $F(t) = 0$.

Logo,

$$F(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \in \left[\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi, \dfrac{5\pi}{4} + 2n\pi\right] \\ 0, & \text{se} \quad t \in \left(\dfrac{5\pi}{4} + 2n\pi, \dfrac{9\pi}{4} + 2n\pi\right) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, o gráfico de F é a interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

1.4 Conjuntos de nível

Dada uma função real de duas variáveis reais, consideremos os seguintes problemas:

i) como obter uma noção do gráfico de tal função?

ii) como obter todos os possíveis valores das suas variáveis independentes cujas imagens por tal função sejam um valor fixo?

iii) como obter o menor (respectivamente, maior) valor que tal função pode atingir?

Todos esses problemas têm em comum um dos conceitos mais importantes da teoria das funções reais de duas variáveis reais, com o qual nos ocuparemos em toda essa seção: o conceito de *conjunto de nível*. Trata-se do que podemos interpretar simplesmente como a equação $f(x, y) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Sob tal ponto de vista, o primeiro problema acima equivale a interpretar essa equação como as seções retas horizontais, de "altura" k, do gráfico de f; o segundo equivale a obter todos os pares ordenados (x, y) pertencentes ao domínio de f que satisfazem essa equação, para algum k fixado; finalmente, o terceiro equivale a obter o menor (respectivamente, maior) valor de k dentre aqueles fixados mencionados no problema anterior.

A definição formal de conjunto de nível de uma função real de duas variáveis reais é a seguinte.

Definição 1.4.1. Dada uma função real de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o *conjunto de nível* de f é o subconjunto do domínio de f no qual f tem um valor fixo.

Referimo-nos ao *conjunto de nível* de f correspondente ao *nível* $f(x, y) = k$, de modo que f é constante sobre cada conjunto de nível.

De acordo com essa definição, o conjunto de nível de f é determinado pelas soluções da equação $f(x, y) = k$, em que k é uma constante real arbitrária fixada, ou, de outro modo, o conjunto de nível $f(x, y) = k$ é a imagem inversa $f^{-1}(k)$, a qual, por definição, é dada por $f^{-1}(k) = \{(x, y) \in A : f(x, y) = k\}$.

Em geral, o conjunto de nível de uma função real de duas variáveis reais f pode conter (ou coincidir com algum conjunto conveniente de) ponto(s) isolado(s), curvas (denominadas *curvas de nível* de f), ou mesmo outras porções do plano[8].

[8] É precisamente sob esse aspecto que a terminologia "conjunto de nível" é mais apropriada que a terminologia clássica "curva de nível", único motivo pelo qual preferimos aquela a esta. Porém, a terminologia "curva de nível" já está amplamente instituída em todas as áreas do conhecimento humano que dela se utilizam. A justificativa para o emprego de tal termi-

A definição a seguir nos fornece a terminologia característica do conjunto das curvas de nível de uma função real de duas variáveis reais.

Definição 1.4.2. O conjunto das curvas de nível de uma função real de duas variáveis reais é denominado *mapa* (*esboço* ou *diagrama*) *de contornos* dessa função.

Um mapa de contornos de uma função é, por vezes, uma ferramenta bastante útil para estudar o comportamento qualitativo de tal função[9].

Dada uma função real de duas variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, consideremos o mapa de contornos de f, o qual consiste nas curvas de nível $C_i, i = 1, 2, 3, \ldots, f(x, y) = k_i$ (valores de f em C_i), em que $k_{i+1} - k_i = \Delta k$ é fixado, de modo que os valores de f ao longo de quaisquer curvas vizinhas C_i e C_{i+1} diferem por Δk.

Afirmação: na região em que as curvas de nível estão mais próximas umas das outras (respectivamente, mais afastadas umas das outras), o comportamento da função muda rapidamente (respectivamente, lentamente).

Demonstração: para demonstrar essa afirmação, consideremos um ponto P de C_i. Denotando por Δs a distância de P à C_{i+1} ao longo da reta normal à C_i em P, decorre que a taxa de variação de f em P naquela direção é, por definição, dada por $\dfrac{\Delta k}{\Delta s}$. Logo, quanto mais próximas as curvas C_is estão umas das outras, mais rápido a função muda.

Interpretando como inclinação do gráfico de f a taxa de variação de f que mencionamos acima, podemos reformular a afirmação precedente do seguinte modo: a superfície será mais inclinada (respectivamente, mais ou menos plana) onde as curvas de nível estiverem mais próximas (respectivamente, mais afastadas) umas das outras.

nologia se deve a $f^{-1}(k)$ ser mesmo uma curva, **sempre que o gradiente de f é não nulo ($\nabla f(x, y) \neq 0$), para todo $(x, y) \in A$ tal que $f(x, y) = k$.** (*Vide* Capítulo III, Seção 5, p. 141, da referência [3].)

[9] Tal estudo é frequentemente realizado, por exemplo, na área de Equações Diferenciais Ordinárias, ao considerar os denominados *retratos de fase*.

Uma aplicação típica desse fato é a obtenção de uma noção geral de declividade em um mapa topográfico bidimensional de uma paisagem, para a qual se considera a distância entre as suas curvas de nível.

Para alguns propósitos, tais como a obtenção de informações numéricas, o mapa de contornos é mais útil do que o gráfico.

No Exemplo 1 a seguir, obtemos, descrevemos e esboçamos as curvas de nível de uma dada função real de duas variáveis reais.

Exemplo 1. Obtenha, descreva e esboce as curvas de nível (mapas de contornos) de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = e^{-xy}$.

Resolução.

Os conjuntos de nível k de f são determinados pelas soluções da equação $f(x, y) = k$.

Para descrever os conjuntos de nível k de f, observemos, inicialmente, que, se $k \leq 0$, então a equação $e^{-xy} = k$ não tem solução (a função exponencial é, por definição, positiva), de modo que o conjunto de nível k $(k \leq 0)$ de f é **vazio**. Assim, podemos nos ater ao caso em que $k > 0$, o que nos permite aplicar ln a ambos os membros da equação $e^{-xy} = k$, como segue:

$$\begin{aligned} e^{-xy} = k \quad &\Leftrightarrow \quad ln(e^{-xy}) = lnk \\ &\Leftrightarrow \quad -xy = lnk. \ (*) \end{aligned}$$

Com base em (*), devemos analisar, separadamente, os seguintes casos:

Caso 1: $0 < k < 1$.

Nesse caso, $lnk < 0$, de modo que, de acordo com (*), x e y devem ter sinais iguais. Assim, podemos expressar (*) na forma $y = -\dfrac{lnk}{x}$, equação essa que, para todo $0 < k < 1$, representa **hipérboles contidas nos quadrantes ímpares**.

Caso 2: $k = 1$.

Nesse caso, $lnk = 0$. Assim, (*) reduz-se à equação $-xy = 0$, a qual corresponde aos **eixos coordenados**.

Caso 3: $k > 1$.

Nesse caso, $lnk > 0$, de modo que, de acordo com (*), x e y devem ter sinais contrários. Assim, podemos expressar (*) na forma $y = -\dfrac{lnk}{x}$, equação essa que, para todo $k > 1$, representa **hipérboles contidas nos quadrantes pares**.

Finalmente, para esboçar convenientemente algumas das curvas de nível de f, observamos que, como a função exponencial é sobrejetiva, podemos considerar, sem perda de generalidade, valores de k tais que $k = e^a$ $(a \in \mathbb{R})$, de modo que $y = -\dfrac{lnk}{x} \Leftrightarrow y = -\dfrac{a}{x}$, o que está de acordo com as descrições acima.

Na Figura 1.6 a seguir, apresentamos o mapa de contornos de f.

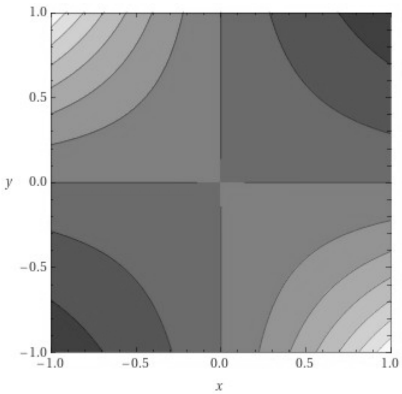


Figura 1.6: mapa de contornos de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = e^{-xy}$.

No Exemplo 2 a seguir, descrevemos os conjuntos de nível de uma dada função real de duas variáveis reais.

Exemplo 2. Descreva os conjuntos de nível (mapas de contornos) de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2$.

Este livro é destinado a estudantes de graduação em Matemática que necessitem se aprofundar em funções reais de duas variáveis reais, limites e continuidade, como preparação para a disciplina de Análise em $\mathbb{R}^n$.

Características:

- Aplicação de conjuntos de nível para obtenção das imagens de algumas funções reais de duas variáveis reais.
- Aplicação de conjuntos de nível para obtenção de máximos e mínimos de algumas funções reais de duas variáveis reais condicionadas a determinados subconjuntos dos seus domínios.
- Tratamento extensivo de todas as expressões indeterminadas.
- Apresentação de três estudos exaustivos de limites: limites iterados, análise geométrica do limite e limites infinitos.
- Tratamento da continuidade de uma função real de duas variáveis reais, sob seus aspectos práticos.
- Sugestões de projetos que desenvolvem um tópico específico em uma sequência de exercícios.

ISBN 978-85-212-2186-9

9 788521 221869

www.blucher.com.br

Blucher