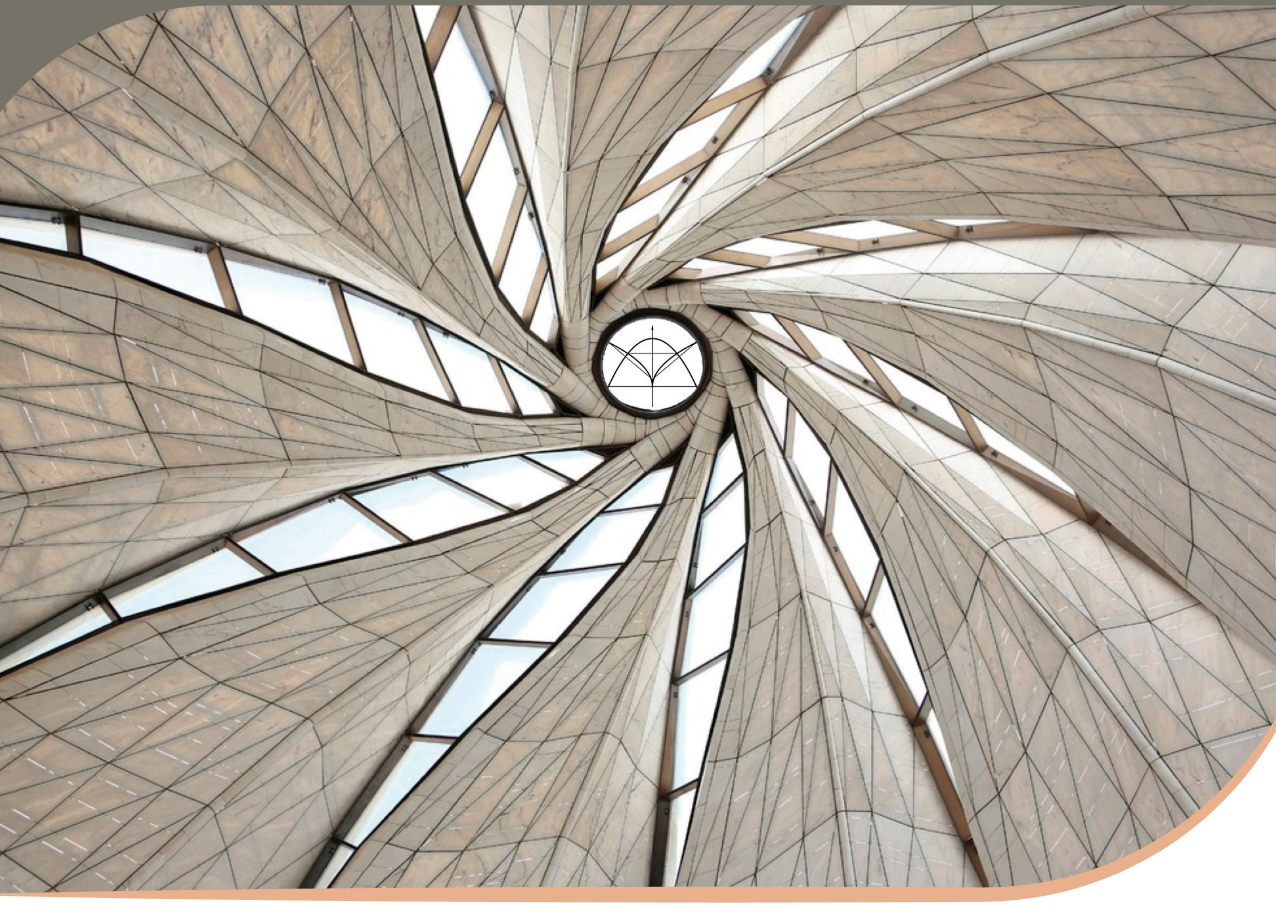
LUDMILA BOURCHTEIN
ANDREI BOURCHTEIN

INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES ELEMENTARES



Blucher

INTRODUÇÃO
ÀS FUNÇÕES ELEMENTARES

Ludmila Bourchtein

Andrei Bourchtein

Publisher Edgard Blücher
Editor Eduardo Blücher
Coordenação editorial Jonatas Eliakim
Produção editorial Kedma Marques
Diagramação Autores
Revisão de texto Lidiane Gonçalves
Capa Laércio Flenic
Imagem da capa Autor

Editora Blucher
Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Bourchtein, Ludmila.
Introdução às funções elementares / Ludmila Bourchtein, Andrei Bourchtein. — São Paulo: Blucher, 2023.
455 p.
ISBN 978-65-5506-778-1 (impresso)
ISBN 978-65-5506-779-8 (eletrônico)
1. Matemática 2. Cálculo 3. Funções. I. Título II. Bourchtein, Andrei
23-0947 CDD 510

Índice para catálogo sistemático: 1. Matemática

Conteúdo

Capítulo 1 Conjuntos numéricos e coordenadas cartesianas 15

1 Conjuntos 16
1.1 Descrição de um conjunto 16
1.2 Operações elementares com conjuntos 17
1.3 Propriedades elementares de conjuntos 19
2 Números racionais e suas propriedades 20
3 Números reais e suas propriedades 23
3.1 Números decimais e reais 23
3.2 Propriedades dos números reais 28
3.3 Módulo 31
4 Reta coordenada e sua equivalência com o conjunto dos reais 34
5 Alguns conjuntos e suas propriedades 39
5.1 Distância entre dois pontos 39
5.2 Intervalos, ponto médio, ponto simétrico, vizinhança 40
6 Coordenadas cartesianas no plano 46
6.1 Definição das coordenadas 46
6.2 Linhas coordenadas 48
6.3 Projeções sobre retas coordenadas 48
7 Algumas relações no plano cartesiano: distância, ponto médio, simetria . 54
7.1 Distância entre dois pontos 54
7.2 Distância de um ponto até uma reta coordenada 54
7.3 Ponto médio de um intervalo 56
7.4 Simetria em relação a um ponto 57
7.5 Simetria em relação a uma reta 58
Exercícios 62

Capítulo 2 Funções e suas propriedades analíticas 71

1 Função: definição, domínio e imagem 71
2 Modos de definição de uma função 74
2.1 Modo analítico (algébrico) 74

2.2 Modo geométrico ... 82
2.3 Modo numérico ... 84
2.4 Modo descritivo ... 84
2.5 Relação entre formas da definição de funções ... 85
3 Funções limitadas ... 85
4 Propriedades de simetria ... 87
4.1 Funções pares ... 87
4.2 Funções ímpares ... 87
4.3 Operações aritméticas com funções pares e ímpares ... 91
4.4 Funções periódicas ... 92
4.5 Operações elementares com funções periódicas ... 97
5 Monotonia de uma função ... 99
5.1 Definições e exemplos ... 99
5.2 Operações aritméticas com funções monótonas ... 104
6 Extremos de uma função ... 105
6.1 Extremos globais ... 105
6.2 Extremos locais ... 111
6.3 Monotonia, extremos e simetria ... 115
7 Concavidade e pontos de inflexão ... 117
7.1 Concavidade geral ... 117
7.2 Concavidade do ponto médio ... 121
7.3 Algumas propriedades elementares de funções côncavas ... 125
7.4 Pontos de inflexão ... 131
7.5 Concavidade, inflexão e simetria ... 134
8 Propriedades complementares ... 136
8.1 Comportamento no infinito e comportamento infinito ... 136
8.2 Assíntotas horizontais e verticais ... 140
9 Funções compostas ... 143
9.1 Composição de funções ... 143
9.2 Decomposição em funções simples ... 148
9.3 Composições de diferentes tipos de funções ... 149
10 Transformações elementares de funções e seus gráficos ... 153
10.1 Deslocamento vertical e horizontal ... 153
10.2 Reflexão vertical e horizontal ... 155
10.3 Extensão/contração vertical e horizontal ... 157
11 Função injetora, sobrejetora, bijetora ... 165
12 Função inversa ... 169
12.1 Inversas laterais ... 169
12.2 Inversa geral: definição e exemplos elementares ... 174
12.3 Condições da existência da inversa ... 177

12.4 Propriedades analíticas da inversa ... 180
12.5 Propriedade geométrica ... 183
13 Classificação de funções elementares ... 187
Exercícios ... 190

Capítulo 3 Funções algébricas: polinomiais, racionais e irracionais ... 227

1 Funções polinomiais ... 228
1.1 Função linear ... 228
1.2 Função quadrática ... 233
1.3 Monômios ... 244
2 Funções racionais ... 254
2.1 Funções do tipo $y = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ ... 254
2.2 Funções lineares fracionárias ... 269
2.3 Algumas propriedades gerais de funções racionais ... 272
3 Funções irracionais ... 276
3.1 Funções raizes $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ ... 278
3.2 Função módulo ... 285
4 Exemplos de estudo de funções algébricas ... 287
4.1 Considerações preliminares ... 287
4.2 Estudo de funções polinomiais ... 292
4.3 Estudo de funções racionais ... 299
4.4 Estudo de funções irracionais ... 312
Exercícios ... 323

Capítulo 4 Funções transcendentais: exponenciais, logarítmicas, trigonométricas ... 365

1 Funções exponenciais e logarítmicas ... 366
1.1 Conceitos preliminares. Expoente real e suas propriedades ... 366
1.2 Função exponencial ... 369
1.3 Função logarítmica ... 372
2 Funções trigonométricas ... 377
2.1 Conceitos e resultados preliminares de trigonometria ... 377
2.2 Função $\sin x$ ... 388
2.3 Função $\cos x$ ... 392
2.4 Função $\arcsin x$ ... 394
2.5 Função $\arccos x$ ... 396
2.6 Função $\tan x$ ... 396
2.7 Função $\cot x$ ... 400
2.8 Função $\arctan x$ ... 401

2.9 Função $\operatorname{arccot} x$ 402
3 Exemplos de estudo de funções transcendentais 403
3.1 Estudo de funções exponenciais 403
3.2 Estudo de funções logarítmicas 409
3.3 Estudo de funções trigonométricas 415
Exercícios 427

Índice remissivo 451

Capítulo 1

Conjuntos numéricos e coordenadas cartesianas

A matéria de Funções Elementares é uma disciplina preliminar, preparatória para estudo de Cálculo que, por sua vez, é a versão simplificada de Análise Real. Um dos principais objetivos de Análise é o estudo de propriedades gerais e específicas de funções partindo da sua definição analítica. Seguindo essa relação natural entre três disciplinas, podemos formular o principal problema no estudo de funções elementares como a investigação de propriedades de funções simples usando os métodos analíticos elementares. Quando falamos de funções simples então temos em vista funções de uma variável real, cuja forma é bastante compreensível (até conhecida da escola), e quando referimos a métodos analíticos elementares, então entendemos aqueles que não envolvem os conceitos e resultados mais finos relacionados a limite (e consequentemente, a continuidade, derivada, etc.) de uma função.

Em Análise/Cálculo, a função usualmente é dada em sua forma analítica (via fórmula) e a partir disso temos que descobrir suas propriedades essenciais, incluindo suas características geométricas refletidas na forma do seu gráfico. A visualização geométrica de uma função é uma ferramenta importante de avaliação do seu comportamento, mas ela normalmente é obtida como resultado de um estudo detalhado de suas propriedades analíticas.

Tendo determinado o problema principal da disciplina de Funções Elementares, podemos ver que, antes de começar o estudo analítico de funções e revelar suas propriedades geométricas, precisamos ter um conhecimento básico de alguns conceitos preliminares usados nesse estudo. Realmente, entre propriedades geométricas de funções que buscamos determinar são: a propriedade do gráfico subir ou descer, de ter a forma de um copo ou de um sino, se o gráfico alcança pontos máximos e mínimos, se ele tem algum tipo de simetria, etc. Para investigar e provar a maioria dessas propriedades precisamos aplicar os métodos analíticos de estudo, trabalhando com números reais, localização de pontos no plano coordenado, critérios de simetria, etc. Dessa forma, o primeiro Capítulo é dedicado a uma revisão concisa desses tópicos, os quais são estudados, num nível básico, no ensino médio, mas requerem uma representação mais sistemática, formal e precisa para estudo analítico de funções nos capítulos posteriores.

1 Conjuntos

Em Análise e Cálculo, e consequentemente em Funções Elementares, o conjunto é considerado geralmente um dos conceitos básicos, intuitivamente claros, que não são definiveis por via de outros conceitos. Portanto, vamos dar apenas uma descrição desse conceito.

1.1 Descrição de um conjunto

Conjunto. Um *conjunto* é uma coleção de objetos unidos por alguma característica comum. Em particular, essa característica pode ser só a propriedade de estar incluído no mesmo conjunto. Os objetos usados na construção de certo conjunto são chamados de elementos desse conjunto.

Obviamente, esta não é uma definição formal, mas simplesmente é uma descrição intuitiva que faz referência aos outros conceitos, que podem parecer intuitivamente claros, mas cuja definição pode ser ainda mais complicada do que a definição do próprio conjunto. No entanto, essa descrição será suficiente para estudar a matéria de Funções Elementares (e até muito mais, para estudar Cálculo e Análise). Nessa definição intuitiva, as palavras "coleção", "família" e "classe" podem ser usadas como sinônimos de conjunto.

Um conjunto pode ser *finito* ou *infinito*, isto é, contendo número finito ou infinito de elementos, respectivamente.

A descrição de conjuntos vai ser feita, por enquanto, usando a representação dos seus elementos. Essa representação pode ser ou exaustiva (citando todos os elementos), o que é possivel só para conjuntos finitos, ou pela característica específica dos seus elementos, o que se aplica tanto a conjuntos finitos como a infinitos. No primeiro caso, os elementos são colocados em alguma ordem (que pode ser modificada), separados por virgula, e, no segundo caso, os elementos são representados de alguma forma apropriada com especificação posterior da característica dos elementos. Em ambos os casos se usam parênteses (usualmente, parênteses-chave) para compreender os elementos do conjunto. Por exemplo, um conjunto A, contendo os dois elementos a e b, pode ser denotado na forma $A = \{a, b\}$. O conjunto B de todos os dias de uma semana pode ser descrito na forma: $B = \{b : b = \textit{ dia de uma semana}\}$ (o símbolo ":" nessa descrição significa "tal que"). Daqui em diante, vamos usar letras maiúsculas para denotar conjuntos e letras minúsculas para seus elementos.

Relação entre conjunto e elemento. Um elemento pode pertencer ou não a um conjunto. Para denotar a pertinência é usado símbolo $\in$ e para não pertinência $\notin$. Usando exemplo do conjunto A, podemos afirmar que $a \in A$ e $b \in A$, mas $c \notin A$.

Exemplos

1. Conjuntos finitos: conjunto dos números naturais de 1 até 5: $A=\{1,2,3,4,5\}$; conjunto B das letras num alfabeto. Para estes dois conjuntos, $2 \in A$, mas $a \notin A$; $a \in B$, mas $3 \notin B$.

2. Conjuntos infinitos: conjunto dos números naturais (aqueles que usamos na contagem de objetos): $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ (mais formalmente, este conjunto é definido como aquele que contém primeiro elemento 1 e cada próximo elemento é obtido do anterior acrescentando 1); conjunto dos números naturais pares, isto é, $A = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$. Para os dois últimos conjuntos, $2 \in \mathbb{N}$, mas $-2 \notin \mathbb{N}$; $2 \in A$, mas $3 \notin A$. (A notação $\mathbb{N}$ é tradicional para o conjunto dos naturais.)

Conjuntos especiais. Os dois conjuntos especiais são o *conjunto vazio*, que não contém nenhum elemento, e o *conjunto universal*, que contém todos os objetos da natureza em consideração. O primeiro é denotado por $\varnothing$ e o segundo muitas vezes é denotado por U. O primeiro sempre é o mesmo, mas o segundo pode mudar, dependendo dos objetivos do estudo. Por exemplo, se o nosso interesse é restrito aos números pares, então esse pode ser o conjunto universal, mas se ampliamos nossa consideração para os números naturais, então $\mathbb{N}$ pode ser o conjunto universal.

Nesse estudo, vamos usar várias relações e operações elementares entre conjuntos que são estudadas ainda na escola. Mas, para manter o texto completo e, também, para fixar a terminologia e notação, reproduzimos essas definições e propriedades a seguir.

1.2 Operações elementares com conjuntos

Relações entre conjuntos. Um conjunto A pode ser parte de outro B (se diz, também, que A está contido em B), isto é, qualquer elemento de A pertence a B. Nesse caso, A é chamado de *subconjunto* de B e se usa a seguinte notação: $A \subset B$. Em particular, o conjunto B é seu próprio subconjunto, qualquer conjunto é subconjunto do conjunto universal e, por convênio, o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

Se A é subconjunto de B e B é subconjunto de A, então os dois conjuntos são *iguais* (coincidem) e usamos a notação $A = B$. Em outras palavras, dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Caso os dois conjuntos não são iguais, escrevemos $A \neq B$. Pode acontecer, também, que nenhum dos dois conjuntos está contido no outro, mesmo quando há elementos em comum entre os dois.

Exemplos

Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, então $B \subset A$ (B está contido em A) ou $A \supset B$ (A contém B). Se $A = \{a, b, c, d\}$ e B é conjunto de todas as letras do alfabeto latino, então $A \subset B$. Se A é conjunto de todas as letras do alfabeto cirílico e B é conjunto de todas as letras do alfabeto latino, então nenhum dos dois conjuntos é subconjunto do outro.

Operações entre conjuntos

1. **União de conjuntos**. A *união de dois conjuntos* A e B é o conjunto C que contém todos os elementos de A e de B (lembramos que os elementos que pertencem tanto a A como a B são tomados uma vez só em C). A notação padrão é $C = A \cup B$. Essa definição é facilmente extendida a união de qualquer número de conjuntos: $C = \bigcup\limits_i A_i$ se para qualquer $x \in C$ existe tal conjunto A_i, entre os considerados na união, que $x \in A_i$.

2. **Interseção de conjuntos**. A *interseção de dois conjuntos* A e B é o conjunto C que contém todos os elementos que pertencem tanto a A como a B. A notação usada é $C = A \cap B$. Extendendo a definição a qualquer número de conjuntos, temos $C = \bigcap\limits_i A_i$ se qualquer elemento $x \in C$ pertence a todos os conjuntos da interseção: $x \in A_i,\ \forall i$.

3. **Diferença de conjuntos**. A *diferença de dois conjuntos* A e B (nessa ordem específica) é o conjunto C, denotado $C = A \backslash B$, que contém todos aqueles elementos de A que não pertencem a B.

4. **Produto cartesiano**. O *produto cartesiano* de dois conjuntos A e B (nessa ordem específica) é o conjunto C cujos elementos são todos os pares ordenados $c = (a, b)$ tais que $a \in A, b \in B$. A notação usual é $C = A \times B$.

Exemplos

1. Se $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{d, e\}$, então $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$. Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{g, h\}$, então $A \cup B = \{a, b, c, d, g, h\}$. Se $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \mathbb{N}$, então $A \cup B = \mathbb{N}$.

2. Se $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então $A \cap B = \{2, 3\}$. Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{d, e\}$, então $A \cap B = \{d\}$. Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{g, h\}$, então $A \cap B = \varnothing$. Se $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \mathbb{N}$, então $A \cap B = A$.

3. Se $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então $A \backslash B = \{4, 5\}$ e $B \backslash A = \{1\}$. Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{d, e\}$, então $A \backslash B = \{a, b, c\}$ e $B \backslash A = \{e\}$. Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{g, h\}$, então $A \backslash B = \{a, b, c, d\}$ e $B \backslash A = \{g, h\}$. Se $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \mathbb{N}$, então $A \backslash B = \varnothing$ e $B \backslash A = \{1, 6, 7, \ldots\}$.

4. Se $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2\}$, então $A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$ e $B \times A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$. Se $A = \{b\}$ e $B = \{a, b\}$, então $A \times B = \{(b, a), (b, b)\}$ e $B \times A = \{(a, b), (b, b)\}$.

1.3 Propriedades elementares de conjuntos

1. **Lei comutativa**: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$. Notamos que $A \backslash B \neq B \backslash A$ e $A \times B \neq B \times A$ (os exemplos acima mostram isso claramente).

2. **Lei associativa**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. **Lei distributiva**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4. **Relações com conjunto vazio**: $\varnothing \subset A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \backslash \varnothing = A$, $A \times \varnothing = \varnothing$. Notamos que essas relações são válidas para qualquer conjunto A.

5. **Relações com conjunto universal** U: $A \subset U$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$, $A \backslash U = \varnothing$. Notamos que essas relações são válidas para qualquer conjunto A.

6. **Número de elementos de conjuntos finitos**: se A e B são conjuntos finitos com m e n elementos, respectivamente, e $A \cap B$ tem k elementos, então, $A \cup B$ tem $m + n - k$ elementos, $A \backslash B$ tem $m - k$ elementos, $B \backslash A$ tem $n - k$ elementos, e $A \times B$ tem mn elementos (assim como $B \times A$).

As demonstrações dessas propriedades são bastante simples, feitas com emprego das definições acima e lógica elementar. Embora isso fuja do escopo deste texto, vamos dar alguns exemplos de tais demonstrações para os leitores interessados.

Demonstração da comutatividade para união: $A \cup B = B \cup A$. Qualquer elemento $x \in A \cup B$, pela definição, tem propriedade de que $x \in A$ ou $x \in B$, o que é o mesmo que dizer que $x \in B$ ou $x \in A$, isto é, $x \in B \cup A$. Do mesmo jeito, qualquer $y \in B \cup A$ também é elemento de $A \cup B$. Assim, os elementos de $A \cup B$ e $B \cup A$ coincidem, isto é, os dois conjuntos são iguais.

Demonstração da associatividade para interseção: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Qualquer elemento $x \in (A \cap B) \cap C$, pela definição, tem propriedade de que $x \in A \cap B$ e, ao mesmo tempo, $x \in C$. Especificando ainda a primeira inclusão, concluímos que x pertence simultaneamente aos três conjuntos – A, B e C. Por outro lado, qualquer $y \in A \cap (B \cap C)$, pela definição, tem propriedade de que $y \in A$ e, ao mesmo tempo, $y \in B \cap C$. Ou, abrindo a última relação, concluímos que y pertence simultaneamente aos três conjuntos – A, B e C. Assim, os elementos de $(A \cap B) \cap C$ e $A \cap (B \cap C)$ têm as mesmas propriedades e, portanto, esses dois conjuntos são compostos pelos mesmos elementos, isto é, são iguais.

Demonstração da primeira lei distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Vamos começar da parte direita. Qualquer elemento x do conjunto $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ pertence ao mesmo tempo a $A \cup B$ e $A \cup C$. Como esses dois conjuntos têm a parte idêntica que é o conjunto A, então a sua interseção pode ser dividida em duas partes – a primeira é A e a segunda é a parte comum entre B e C. Portanto, têm duas opções para x - ele pertence a A ou a $B \cap C$, isso significa que $x \in A \cup (B \cap C)$. Agora começamos do lado esquerdo. Tomamos qualquer elemento y do conjunto $A \cup (B \cap C)$. Pela definição da união, y ou pertence a A ou a parte comum entre B e C. Mas já vimos na passagem do lado direito para esquerdo que essa é a propriedade de qualquer elemento x de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Consequentemente, $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Assim, foi demonstrado que qualquer elemento de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ é elemento de $A \cup (B \cap C)$ e vice-versa. Isso significa que os dois conjuntos são iguais.

Exemplos

1. Demonstrar que $A \backslash B = B \backslash A$ se, e somente se, $A = B$.

Solução.

Supomos que os dois conjuntos são diferentes. Nesse caso, pelo menos um deles tem pelo menos um elemento não contido no outro. Sem perda de generalidade, podemos supor que esse é o elemento a do conjunto A (caso contrário, simplesmente renomeamos os conjuntos). Então, a diferença $A \backslash B$ contém o elemento a, mas $B \backslash A$ não contém esse elemento, porque a não pertence a B. Por outro lado, se $A = B$, então $A \backslash B = B \backslash A = \varnothing$.

2. Seja A conjunto de números pares entre 11 e 19 e B conjunto de múltiplos de 3 entre os mesmos 11 e 19. Encontrar $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ e $B \backslash A$.

Solução.

Primeiro, especificamos que $A = \{12, 14, 16, 18\}$ e $B = \{12, 15, 18\}$. Efetuando operações, obtemos $A \cup B = \{12, 14, 15, 16, 18\}$, $A \cap B = \{12, 18\}$, $A \backslash B = \{14, 16\}$, $B \backslash A = \{15\}$.

2 Números racionais e suas propriedades

Nessa seção consideremos conjuntos numéricos infinitos mais simples que o conjunto de números reais. Como vamos ver, eles fazem parte do conjunto dos reais e também são importantes por si só no desenvolvimento posterior dessa matéria.

Conjunto de números naturais

Vamos começar por um conjunto numérico infinito mais simples entre todos os conjuntos infinitos considerados em Análise, mas ao mesmo tempo muito importante – do conjunto dos números naturais.

Conjunto de *números naturais* $\mathbb{N}$ consiste em números utilizados para contagem $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Essa descrição intuitiva, embora esteja longe de ser uma definição formal, é suficiente para os objetivos dessa matéria.

Conjunto de números inteiros

O próximo conjunto simples infinito, mais amplo que $\mathbb{N}$, é o de inteiros, cuja descrição vem a seguir.

Conjunto dos *números inteiros* $\mathbb{Z}$ é composto dos números naturais, naturais negativos e zero: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

Conjunto de números racionais

Com base nos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, podemos agora definir de modo exato o próximo conjunto infinito, mais amplo que $\mathbb{Z}$, o conjunto de racionais.

Conjunto dos *números racionais* $\mathbb{Q}$ consiste em frações na forma $\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$.

Observação. Se usar $q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, então obtemos o mesmo conjunto.

Obviamente, a relação entre três conjuntos introduzidos é: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

A pergunta natural que pode surgir é por que precisamos "aumentar" os conjuntos de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Q}$? Tem certas operações aritméticas em relação as quais os dois primeiros conjuntos são "fechados". Por exemplo, $\mathbb{N}$ é "fechado" em relação à adição e multiplicação, e $\mathbb{Z}$ é "fechado" em relação à adição, subtração e multiplicação (isto é, essas operações resultam em elementos do mesmo conjunto). No entanto, há operações aritméticas que levam para fora dos dois conjuntos. Para $\mathbb{N}$, isso é subtração e divisão e para $\mathbb{Z}$ é divisão. Vamos verificar que todas as quatro operações aritméticas não levam para fora de $\mathbb{Q}$. Para ver isso, vamos lembrar as definições dessas operações e suas propriedades conhecidas da escola. Faremos isso do modo mais formal, representado a seguir, dentro dos padrões usados em matemática universitária.

Propriedades de números racionais

1. **Soma dos racionais**. Para quaisquer números racionais $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$ a sua soma é o número racional c definido pela fórmula $c = a + b = \frac{mq+pn}{nq}$.

2. **Produto dos racionais**. Para quaisquer números racionais $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$ o seu produto é o número racional c definido pela fórmula $c = ab = \frac{mp}{nq}$.

3. **Propriedades de adição e multiplicação**. Para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ são válidas as seguintes propriedades:

1) comutatividade da adição e da multiplicação: $a + b = b + a, ab = ba$.

2) associatividade da adição e da multiplicação: $(a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc)$.

3) distributividade: $(a + b)c = ac + bc$.

4) monotonia da adição: se $a > b$, então $a + c > b + c$; se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.

5) monotonia da multiplicação: se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$; se $a > b$ e $c < 0$, então $ac < bc$.

6) existência do elemento identidade (neutro) em relação à adição e multiplicação: $a + 0 = 0 + a = a\,,\ \forall a \in \mathbb{Q}$; $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a\,,\ \forall a \in \mathbb{Q}$.
7) existência dos elementos inversos em relação à adição e à multiplicação: para qualquer número racional a existe um número racional $-a$ inverso em relação à adição, isto é, $a + (-a) = 0$; para qualquer número racional $a \neq 0$ existe um número racional $a^{-1} = \frac{1}{a}$ inverso em relação à multiplicação, isto é, $a \cdot a^{-1} = 1$.

Assim, as propriedades 1. e 2. garantem que a soma e o produto de dois números racionais $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$ é de novo um número racional determinado na forma $a + b = \frac{mq+pn}{nq}$ e $ab = \frac{mp}{nq}$, respectivamente. A propriedade 3.7) define a subtração e divisão de dois números racionais $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$ na forma $a - b = a + (-b) = \frac{mq-pn}{nq}$ e $a : b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{mq}{np}$, respectivamente (na segunda operação, deve ser $b \neq 0$).

Podemos acrescentar três propriedades de comparação que aprendemos usar intuitivamente na escola.

4. **Ordenação do conjunto de racionais**. Para quaisquer dois números racionais a e b sempre é válida uma e somente uma das seguintes relações: $a = b$, $a < b$ ou $a > b$. Assim, o conjunto dos números racionais é ordenado.

5. **Propriedades de ordenação** (transitividade de sinais "maior", "menor", "igual"). Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$; se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$; se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$.

6. **Axioma de Arquimedes**. Para qualquer número racional a existe um número natural n tal que $n > a$. Ou uma formulação equivalente: para qualquer número racional $a > 0$ existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < a$.

Observação. Um conjunto que satisfaz as propriedades 1.-6. listadas acima é chamado em matemática de *corpo ordenado*.

Exemplos

1. Mostrar que a expressão $\frac{\frac{13}{2} - \frac{7\cdot 2+1}{4}}{(\frac{1}{2})^3 + 2}$ é um número racional.

Solução.

Primeiro, notamos que a expressão é composta das operações aritméticas – soma, diferença, multiplicação, divisão e elevação numa potência – aplicadas aos números racionais – $\frac{13}{2}$, 7, 2, 1, 4, $\frac{1}{2}$. Como todas essas operações deixam o resultado dentro do conjunto dos racionais, e todas são realizáveis na expressão dada (não tem divisão por 0 ou potência 0^0), então a expressão representa um número racional. Outra maneira de demonstrar isso é levar a expressão à forma da definição, efetuando as operações: $\frac{\frac{13}{2} - \frac{7\cdot 2+1}{4}}{(\frac{1}{2})^3 + 2} = \frac{\frac{13}{2} - \frac{15}{4}}{\frac{1}{8} + 2} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{17}{8}} = \frac{22}{17}$. Assim, chegamos a uma fração com numerador e denominador dos números naturais, o que corresponde à definição de um número racional.

2. Comparar os números racionais $\frac{5}{2^{10}}$ e $\frac{1}{10^2}$.

Solução.

Uma das formas de resolver é reescrever as duas frações com o denominador comum e depois disso comparar os numeradores. Temos então $\frac{5}{2^{10}} = \frac{5 \cdot 10^2}{2^{10} \cdot 10^2}$ e $\frac{2^{10}}{2^{10} \cdot 10^2}$. Como $5 \cdot 10^2 = 500 < 1024 = 2^{10}$, então a primeira fração é menor que a segunda. Nesse exercício, o modo de resolução mais rápido é notar que $2^{10} = 1024 > 10^3$ e, portanto, $\frac{5}{2^{10}} < \frac{5}{10^3} < \frac{10}{10^3} = \frac{1}{10^2}$.

3. Mostrar que um número natural é par se o seu quadrado é par.

Solução.

Denotamos o número dado por p e vamos supor, por absurdo, que p seja um número ímpar, isto é, $p = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$. Então, $p^2 = (2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 = 2(2m^2+2m)+1 = 2k+1$, onde $k = 2m^2+2m \in \mathbb{N}$, o que significa que p^2 também é ímpar. Isso contradiz a condição dada de que p^2 é par e, portanto, a nossa suposição de que p pode ser ímpar é falsa. Assim, p é par.

Observação. O método usado na demonstração desse resultado é chamado do método de contradição.

4. Pode ser demonstrado que $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Nessa fórmula, do lado esquerdo, temos a soma dos naturais que é um número natural, enquanto do lado direito, temos uma fração. Explicar se este resultado é contraditório ou não.

Solução.

Mostremos que o numerador do lado direito é divisível por 2. Realmente, se n for par, então $n(n+1)$ também é par. Se n for ímpar, então $n+1$ é par e, consequentemente, $n(n+1)$ também é par. Logo, para qualquer n natural, o produto $n(n+1)$ sempre é um número par, isto é, múltiplo de 2, e, portanto, $\frac{n(n+1)}{2}$ é um número natural. Assim, não há nenhuma contradição na fórmula.

Observação. A fórmula do último exemplo é conhecida da escola e a sua dedução é simples. Denotamos a soma $S = 1 + 2 + \ldots + n$ e observamos que $2S = S+S = (1+2+\ldots+(n-1)+n)+(1+2+\ldots+(n-1)+n) = (1+2+\ldots+(n-1)+n)+(n+(n-1)+\ldots+2+1) = (1+n)+(2+n-1)+\ldots+(n-1+2)+(n+1)$. Do lado direito obtemos então a soma n vezes do mesmo termo $n+1$, o que resulta em $2S = n(n+1)$. Finalmente, isolando S dessa relação, obtemos a fórmula dada na formulação do exercício.

3 Números reais e suas propriedades

3.1 Números decimais e reais

O conjunto dos racionais é fechado em relação às quatro operações aritméticas, isso quer dizer que a aplicação de qualquer uma dessas quatro operações a quaisquer números racionais resulta de novo em um número racional (exceto na divisão por 0 que não está definida). Naturalmente, surge a pergunta: o conjunto $\mathbb{Q}$ pode ser considerado universal, contendo todos os números que vamos precisar? A resposta é não. Mais uma operação importante é a radiciação, que leva para fora de $\mathbb{Q}$. A necessidade dessa operação surge, por exemplo, na consideração do problema de cálculo da hipotenusa de um triângulo. Conforme o teorema de Pitágoras, o comprimento l da hipotenusa de um triângulo retângulo com dois catetos de comprimento 1 é igual a $l^2 = 1^2 + 1^2$, ou seja $l = \sqrt{2}$. Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Proposição. $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é um número racional e mostrar que essa suposição leva a contradição lógica, o que significa que essa suposição é falsa. Se $\sqrt{2}$ é racional, então $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, onde p, $q \in \mathbb{N}$ (como $\sqrt{2} > 0$, então ambos os números p e q são naturais). Sem perda de generalidade, podemos supor que a última fração é irredutível (numerador e denominador não têm divisores comuns). Então, elevando os dois lados dessa igualdade ao quadrado, temos $2 = \frac{p^2}{q^2}$, donde $p^2 = 2q^2$. Isso significa que o número p^2 é divisível por 2, isto é, p^2 é um número par, e então p é um número par também, isto é, podemos representar o numerador na forma $p = 2m, m \in \mathbb{N}$ (veja exemplo 3 da seção 2). Logo, a relação entre p e q pode ser reescrita na forma: $4m^2 = 2q^2$ ou, simplificando, $2m^2 = q^2$. Daqui segue que q^2 é um número par, e então q é um número par também, isto é, $q = 2n, n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $\frac{p}{q} = \frac{2m}{2n}$, isto é, a fração original é redutível, o que contradiz a nossa suposição. Portanto, a suposição de que $\sqrt{2}$ é um número racional não é válida, isto é, o número $\sqrt{2}$ não é racional.

Observação. O método usado na demonstração desse resultado é chamado de método de contradição. Em geral, ele consiste em assumir, por absurdo, que um resultado conhecidamente falso, contraditório àquilo que pretendemos demonstrar, é válido e, a partir disso, desenvolvendo raciocínio lógico, chegar à contradição com as condições dadas do problema, ou com um fato verdadeiro conhecido, ou com a própria suposição. Nesse caso específico, a suposição falsa, contrária à afirmação verdadeira, foi de que $\sqrt{2}$ é um número racional. Isso nós levou, após algumas transformações aritméticas equivalentes, à contradição com essa própria suposição. O mesmo método foi usado na resolução do exemplo 3 da seção 2. Lá, a suposição falsa foi de que p é um número ímpar, o que nós levou a conclusão de que p^2 também é ímpar, contradizendo a condição dada do exercício de que p^2 deve ser par.

Para incorporar todas as raízes dos números não negativos (e vários outros que, também, não são números racionais) e construir um conjunto numérico "sem furos", vamos introduzir o conceito de *números decimais* que, assim como os racionais, são de uso comum, incluindo seu estudo na escola, embora numa forma menos rigorosa e formal que precisaremos neste texto. Vamos começar partindo da definição.

Números decimais. Um *número decimal* a é a cadeia de *dígitos* (*algarismos*) *decimais* representada na forma $a = (\pm)\, a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, onde $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e os dígitos $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq a_i \leq 9$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$. A parte a_0 é chamada de *parte inteira* de a e toda a parte depois da vírgula é chamada de *parte fracionária* de a.

A referência ao *sistema decimal* se deve ao fato de usar 10 como a base de representação de posição. Para a parte inteira, isso significa que $a_0 = b_n \ldots b_2 b_1 b_0$, $b_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq b_i \leq 9$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, onde b_0 é a parte das unidades, b_1 é a parte de dezenas, b_2 é a parte de centenas, etc., ou expressando em fórmula: $a_0 = b_0 + b_1 \cdot 10^1 + b_2 \cdot 10^2 + \ldots + b_n \cdot 10^n$. Para a parte fracionária, isso significa que a_1 indica a parte de décimos, a_2 – a parte de centésimos, etc., levando a seguinte representação $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots = a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + a_n \cdot 10^{-n} + \ldots$. A última é mais importante para nossos objetivos, porque para a parte inteira vai ser suficiente usar a informação de que ela é um número natural ou zero.

Um número decimal é chamado de *finito* se $a_i = 0$ para todos $i \geq m$, onde m é algum número natural. Caso contrário, o número decimal é chamado de *infinito*. Um número decimal é chamado de *periódico* se $a_{k+i} = a_{k+i+p}$ para alguns $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \in \mathbb{N}$, e todos $i \in \mathbb{N}$, ou seja, existe uma cadeia finita de dígitos (de comprimento p), que se repete infinitamente começando do $(k+1)$-ésimo dígito. Um número decimal finito pode ser considerado o caso especial de um decimal periódico (com todos os dígitos nulos a partir de uma posição). Para os decimais periódicos é usada a seguinte notação: $a = (\pm)\, a_0, a_1 a_2 \ldots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+p})$, onde os dígitos $a_1 a_2 \ldots a_k$ são da parte antes do período, $a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+p}$ é o período e os parênteses indicam a repetição de digitos dentro deles. Finalmente, um número decimal não finito e não periódico é chamado de *infinito aperiódico* ou simplesmente *aperiódico*.

Exemplos

1. Número decimal finito: $1,34 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100}$.
2. Número decimal finito: $-64,84524 = -64 - \frac{8}{10} - \frac{4}{100} - \frac{5}{10^3} - \frac{2}{10^4} - \frac{4}{10^5}$.
3. Número decimal infinito periódico: $0,333\ldots = 0,(3) = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$.
4. Número decimal infinito periódico: $0,1272727\ldots = 0,1(27) = 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{7}{10^3} + \ldots + \frac{2}{10^{2n}} + \frac{7}{10^{2n+1}} + \ldots$.
5. Número decimal infinito não periódico: $0,1010010001\ldots = 0 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{10}} + \ldots$.

Números reais. O conjunto $\mathbb{R}$ dos *números reais* é o conjunto de todos os números decimais.

Observação. O uso de números decimais é uma maneira vantajosa de representar os números reais por ser intuitivamente clara e diretamente ligada com os números e operações entre eles que costumamos efetuar desde a escola. Há outras abordagens no estudo dos números reais, sendo uma delas a introdução axiomática, quando as propriedades desse conjunto são postuladas na forma de axiomas. O sistema de números decimais pode ser considerado como uma das realizações específicas, mais usada na prática, do conjunto axiomático dos números reais. Essas questões, mais teóricas, do estudo dos números reais estão fora do escopo deste texto, mas é importante notar que todas essas abordagens são equivalentes, isto é, qualquer que seja a definição do conjunto dos números reais, ela pode ser transformada em conjunto de números decimais com propriedades respectivas, as quais vamos considerar nessa seção.

Relação entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Vamos demonstrar que o conjunto $\mathbb{R}$ representa a ampliação de $\mathbb{Q}$. Mais especificamente, vamos mostrar que $\mathbb{Q}$ é igual ao conjunto de todos os números decimais finitos ou infinitos periódicos, que no momento vamos denotar por $\tilde{\mathbb{Q}}$.

Primeiro, vamos tomar qualquer elemento de $\mathbb{Q}$ e mostrar que ele pode ser representado via número decimal finito ou infinito periódico. Sem perda de generalidade, podemos considerar a fração $\frac{p}{q}$ positiva, porque a generalização aos números negativos é elementar. Vamos efetuar uma simples divisão de números inteiros, seguindo as regras comuns conhecidas da escola. Se $p \geq q$, então começamos destacando na divisão a parte inteira do número dado. O resto é uma fração própria $\frac{m}{q}$ onde $m < q$. Na divisão do número $m \cdot 10$ e números posteriores por denominador q, podem ocorrer os seguintes restos: $0; 1; 2; ...; q-1$. Se for obtido o resto 0 em algum dos passos da divisão, então a divisão está terminada e temos uma fração decimal finita. Se o resto nunca for igual a 0, então a divisão continua infinitamente. No entanto, como existem só $q-1$ restos distintos (diferentes de 0) na divisão por q, então, no máximo, dentro de q passos dessa divisão encontramos um resto que já foi obtido anteriormente e, portanto, os algarismos do número decimal começam a se repetir a partir desse momento. Assim, se o resto nunca se anula, obtemos uma fração decimal infinita com período menor ou igual a $q-1$ algarismos.

Agora mostremos a implicação recíproca: qualquer elemento de $\tilde{\mathbb{Q}}$ pode ser representado na forma $\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. De novo, é suficiente considerar os números positivos. Seja a um elemento positivo de $\tilde{\mathbb{Q}}$. Há duas opções: a é um número finito ou periódico. Vamos começar da opção mais simples, quando a é finito. Então, $a = a_0, a_1 a_2 ... a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} = a_0 + \frac{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n}{10^n} = a_0 + \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{10^n}$. A última fração do lado direito tem a forma $\frac{p}{q}$, onde $p = a_1 a_2 \ldots a_n \in \mathbb{N}$ e $q = 10^n \in \mathbb{N}$, ou seja, este é um número racional. A soma de um número natural com outro racional é de novo um número racional, o que mostra que um número decimal finito é, ao mesmo tempo, um número racional. Consideremos agora um decimal periódico: $a = a_0, a_1a_2...a_nb_1b_2...b_kb_1b_2...b_k... = a_0, a_1a_2...a_n\,(b_1b_2...b_k)$ onde os parênteses são usados para representar, na forma abreviada, o período desse número que contém k dígitos. Separamos esse número em duas partes – a sem período e o próprio período: $a = a_0, a_1 \dots a_n + 0, 0 \dots 0\,(b_1b_2...b_k)$. A primeira parte já foi considerada antes e foi demonstrado que ela é um número racional. Resta então demonstrar o mesmo resultado para a parte periódica. Para isso, denotamos $s = 0, 0 \dots 0\,(b_1b_2...b_k)$ e $t = s \cdot 10^n = 0, (b_1b_2...b_k)$. Observamos que $t \cdot 10^k = b_1b_2...b_k, (b_1b_2...b_k)$, isto é, $t \cdot 10^k - t = b_1b_2...b_k$ é um número natural. Então $t = \frac{b_1b_2...b_k}{10^k-1}$ é um número racional como a razão de dois números naturais. Portanto, $s = \frac{t}{10^n}$ também é um número racional e, consequentemente, a é um número racional. Dessa maneira, provamos que qualquer elemento de $\tilde{\mathbb{Q}}$ pertence também a $\mathbb{Q}$. Junto com a primeira parte da demonstração, isso comprova que os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\tilde{\mathbb{Q}}$ contêm os mesmos elementos, isto é, são iguais.

Desse resultado segue que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais pode ser definido, de modo equivalente, como o conjunto de todos os números reais finitos e periódicos. A parte restante do conjunto dos reais representa todos os números decimais aperiódicos chamados de números *irracionais*. Assim, o conjunto dos irracionais $\mathbb{I}$ é composto de todos os números decimais aperiódicos.

Observação 1. Embora $\mathbb{I}$ não seja uma notação comum para o conjunto dos números irracionais, vamos usar esse símbolo para abreviar notações (outra opção, mais comum, é $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$).

Observação 2. Da mesma igualdade entre $\mathbb{Q}$ e $\tilde{\mathbb{Q}}$, seguem as seguintes relações entre os conjuntos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

Exemplos

1. Transformar os números decimais finitos e infinitos periódicos dos Exemplos anteriores em frações simples.

Solução.

Para os número decimais finitos $1,34$ e $-64,84524$ temos direto $1,34 = \frac{134}{100}$ e $-64,84524 = -\frac{6484524}{10^5}$.

Para o número decimal infinito periódico $a = 0,(3)$, aplicamos o procedimento geral de transformação. Primeiro, multiplicamos por 10 para trazer o primeiro período para a parte inteira: $10a = 3,(3)$. Depois, subtraindo a de $10a$, obtemos: $10a - a = 9a = 3$. Consequentemente, $a = \frac{1}{3}$.

Para o número periódico $a = 0,1(27)$, aplicamos o mesmo procedimento geral. Primeiro, separamos o período da parte restante: $a = 0,1 + 0,0(27) = 0,1 + b$ e denotamos $t = 10b = 0,(27)$. Para transformar t, multiplicamos ele por 100 para trazer o primeiro período para a parte inteira: $100t = 27,(27)$. Subtraindo t de

$100t$, obtemos $100t - t = 99t = 27$, ou, isolando t e simplificando, $t = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$. Logo, $b = \frac{t}{10} = \frac{3}{110}$ e, acrescentando a parte finita, obtemos $a = 0,1 + b = \frac{1}{10} + \frac{3}{110} = \frac{11+3}{110} = \frac{7}{55}$.

2. Transformar a fração simples $-\frac{13}{7}$ em número decimal.

Solução.

Na transformação desse número, simplesmente usamos o algoritmo comum da divisão de dois números inteiros.

A divisão de 13 por 7 leva ao seguinte resultado:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;13 & \;7 \\
7 & \overline{1{,}857142\ldots} \\
\hline
-\;\mathbf{6}0 & \\
56 & \\
\hline
-\;\mathbf{4}0 & \\
35 & \\
\hline
-\;\mathbf{5}0 & \\
49 & \\
\hline
-\;\mathbf{1}0 & \\
7 & \\
\hline
-\;\mathbf{3}0 & \\
28 & \\
\hline
-\;\mathbf{2}0 & \\
14 & \\
\hline
\mathbf{6} & \\
\ldots &
\end{array}
$$

Notemos que, na divisão da parte fracionária por 7, podem ocorrer, no máximo, 6 restos diferentes. Essa sequência máxima se encontra na fração dada, cujos resíduos da divisão em cada passo estão marcados em negrito: $r_1 = 6$, $r_2 = 4$, $r_3 = 5$, $r_4 = 1$, $r_5 = 3$, $r_6 = 2$. O próximo resíduo necessariamente deve coincidir com um dos já encontrados. Nesse exemplo, ele coincide com o primeiro resíduo $r_1 = r_7 = 6$ e, por isso, a partir do sétimo passo da divisão, as contas vão se repetir, apresentando os mesmos resultados que já foram encontrados nos primeiros seis passos. Assim, $\frac{13}{7} = 1,(857142)$ e o resultado final é $-\frac{13}{7} = -1,(857142)$.

3.2 Propriedades dos números reais

Lista de propriedades: aritméticas, ordenação, densidade e completude

Com base na representação decimal (ou alguma representação equivalente) pode ser mostrado que os números reais satisfazem as mesmas *propriedades aritméticas* e de *ordenação* que já foram listadas antes para os racionais (propriedades 1-6 da seção 2). Isso significa, em particular, que o conjunto $\mathbb{R}$ é um *corpo ordenado*. Adicionalmente, os números reais satisfazem as seguintes propriedades:

1. *Densidade* de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. Para quaisquer dois números reais a e b tais que $a < b$ existe um número racional r que satisfaz a relação $a < r < b$.

O Corolário dessa propriedade trata da densidade de $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$: para quaisquer dois números reais a e b tais que $a < b$ existe um número irracional t que satisfaz a relação $a < t < b$.

2. *Completude* do conjunto $\mathbb{R}$. Em termos muito vagos, o conjunto dos reais é aquele que "não tem furos" (diferentemente do conjunto dos racionais). A ilustração intuitiva desse fato é o resultado sobre equivalência entre $\mathbb{R}$ e a reta coordenada que demonstraremos a seguir.

Observação. Para os leitores interessados, podemos mencionar que a formulação exata da completude pode ser dada em termos de limites ou de supremos/ínfimos: a primeira forma diz que qualquer sequência de Cauchy é convergente e a segunda que qualquer conjunto limitado superiormente (e não vazio) possui supremo. Pode ser visto que a mera formulação da última propriedade numa forma rigorosa exige um conhecimento maior da área de análise. É evidente que a demonstração desses resultados vai muito além do contexto desta obra e os leitores interessados são direcionados para leitura dos livros de Análise Real.

Operações aritméticas entre elementos do conjunto dos reais

Sabemos que da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão com números racionais resultam números racionais. Vamos ver o que acontece nas mesmas operações com números irracionais, e entre racionais e irracionais.

Adição: $\mathbb{I} + \mathbb{I}$. A soma de dois números irracionais pode ser tanto irracional quanto racional, por exemplo, $\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ é um irracional, mas $\sqrt{2}+(-\sqrt{2}) = 0$ é racional.

Adição: $\mathbb{Q} + \mathbb{I}$. Seja a racional e b irracional. Vamos mostrar que $c = a + b$ é irracional. Usamos método de contradição: vamos supor , por absurdo, que c é racional. Então, $b = c + (-a)$ e, como sabemos que a soma de dois racionais é racional, b é racional. Mas isso contradiz a condição original de que b é irracional. Portanto, c é irracional.

Observação. Para a subtração temos os mesmos resultados.

Multiplicação: $\mathbb{I} \cdot \mathbb{I}$. O produto de dois números irracionais pode ser tanto irracional quanto racional, por exemplo, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ é um irracional, mas $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ é racional.

Multiplicação: $\mathbb{Q}\cdot\mathbb{I}$. Seja a racional diferente de zero e b irracional. Vamos mostrar que $c = ab$ é irracional. Usamos método de contradição: vamos supor que c é racional. Então, $b = \frac{c}{a}$ e, como sabemos que o quociente de dois racionais é racional, b é racional. Mas isso contradiz a condição original de que b é irracional. Portanto, c é irracional. Só no caso singular, quando $a = 0$, o produto vai ser racional 0.

Divisão: $\mathbb{I} : \mathbb{I}$. O quociente de dois números irracionais pode ser tanto irracional quanto racional, por exemplo, $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$ é um irracional, mas $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$ é racional.

Divisão: $\mathbb{Q} : \mathbb{I}$. Seja a racional diferente de zero e b irracional. Vamos mostrar que $c = \frac{a}{b}$ é irracional. Usamos método de contradição: vamos supor que c é racional. Então, $b = \frac{a}{c}$ (como $a \neq 0$, então $c \neq 0$) e, como sabemos que o quociente de dois racionais é racional, b é racional. Mas isso contradiz a condição original de que b é irracional. Portanto, c é irracional. Só no caso singular, quando $a = 0$, o quociente vai ser racional 0.

Observação. Para a divisão $\mathbb{I} : \mathbb{Q}$ as considerações são análogas.

Exemplos

1. Transformar o número decimal $5,42(376)$ em uma fração.

Solução.

Primeiro, separamos a parte periódica, representando o número na forma $5{,}42(376) = 5,42 + 0,00(376)$. Para primeira parte, temos $5,42 = \frac{542}{100}$ e a segunda parte reescrevemos como $0,00(376) = 0,(376)\cdot 10^{-2}$. O número $t = 0,(376)$ vamos transformar seguindo o procedimento geral: $t\cdot 10^3 - t = 376,(376) - 0,(376) = 376$ e, portanto, $t = \frac{376}{10^3-1} = \frac{376}{999}$. Juntando as partes, encontramos $5,42(376) = \frac{542}{100} + \frac{376}{999}\cdot 10^{-2} = \frac{542\cdot 999+376}{999\cdot 100}$, o que é uma fração com o numerador inteiro e o denominador natural, isto é, a representação procurada.

2. Responder às seguintes questões:

1) o produto de um número racional com um irracional é sempre um número irracional?

2) existem ou não dois números irracionais cuja soma e produto são racionais?

3) se as potências a^2 e a^3 são irracionais, a potência a^4 deve ser irracional também?

Solução.

1) Caso o número racional seja zero, então o produto vai ser o número racional – 0. Em todos os outros casos, o resultado vai ser um número irracional. Realmente, se o produto $c = a\cdot b$ com $a \neq 0$ racional e b irracional fosse racional, então dividindo c por a deveriamos encontrar um número racional, mas b é irracional, o que leva à contradição.

2) Existem, basta tomar $a = \sqrt{2}$ e $b = -\sqrt{2}$.

3) Não necessariamente, basta considerar $a = \sqrt[4]{2}$.

3. Verificar se os seguintes números são racionais ou irracionais:
1) $\sqrt[5]{50}$;
2) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$;
3) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Solução.

1) Vamos supor que $\sqrt[5]{50}$ é um número racional, isto é, $\sqrt[5]{50}=\frac{m}{n}$, m, $n\in\mathbb{N}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que a última fração é simplificada, isto é, m e n são primos entre si (não têm divisores comuns); caso não seja assim, então cancelamos todos os divisores comuns de m e n antes de iniciar o próximo passo do raciocínio. Da suposição que $\sqrt[5]{50}=\frac{m}{n}$, segue que $50=\frac{m^5}{n^5}$, donde $m^5=50n^5$. Então, o número m^5 é par e, consequentemente, m é um número par também, isto é, $m=2k, k\in\mathbb{N}$. Substituindo essa representação na relação entre m e n, obtemos $2^5k^5=50n^5$ ou $25n^5=2^4k^5$. Como 25 é um número ímpar, então n^5 deve ser um número par e então o mesmo é válido para n. Por isso, m e n têm divisor comum 2, o que contradiz a nossa suposição. Assim, o número $\sqrt[5]{50}$ é irracional.
2) Vamos supor que $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ seja um número racional. Então, o seu quadrado – $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=2+6+2\sqrt{12}=8+4\sqrt{3}$ – também deve ser racional. Disso segue que $\sqrt{3}$ é racional, o que não é verdade (esse último resultado pode ser demonstrado do mesmo modo como foi feita a demonstração para $\sqrt{2}$). Portanto, o número dado é irracional.
3) Observamos, primeiro, que as expressões dentro das raízes externas podem ser transformadas em quadrados completos: $3-2\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^2$ e $3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$. Então, $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=-(1-\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})=-2$, o que é um número racional.

3.3 Módulo

Como veremos em seguida, a operação do *módulo* (aplicada a números e expressões reais) surge naturalmente e frequentemente nas construções geométricas. Portanto, vale a pena relembrar a definição dessa operação e suas propriedades elementares (embora elas sejam conhecidas da escola).

Definição do módulo. O *módulo* de $a\in\mathbb{R}$ é denotado por $|a|$ e é definido analiticamente na forma $|a|=\begin{cases} a\,,\ a\geq 0 \\ -a\,,\ a<0 \end{cases}$.

Propriedades básicas do módulo. Para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$ são válidas as seguintes propriedades:
1. $|a|\geq 0$, $|a|=0\leftrightarrow a=0$;
2. $|a+b|\leq|a|+|b|$;
3. $|a-b|\geq||a|-|b||$;

4. $|ab| = |a||b|$;
5. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

As demonstrações são elementares e ficarão como exercícios para os leitores.

Equações e desigualdades elementares com o módulo

A *equação elementar modular* tem a forma $|x| = c$. Caso $c > 0$, então essa equação tem duas soluções $x = \pm c$. Realmente, se $x \geq 0$, então a equação $|x| = c$ equivale a $x = c$ e essa é solução da equação original uma vez que $c > 0$. Se $x < 0$, então a equação $|x| = c$ se torna $-x = c$ ou $x = -c$ que é a segunda solução da equação modular, porque $-c < 0$.

Caso $c = 0$, a solução é única $x = 0$. Finalmente, se $c < 0$, então não há soluções, uma vez que $|x|$ é uma grandeza não negativa pela definição.

As *desigualdades elementares modulares* têm uma das quatro formas: $|x| < c$, $|x| \leq c$, $|x| > c$ e $|x| \geq c$. Vamos resolver a primeira e a última e as duas outras deixamos a cargo do leitor (elas têm considerações semelhantes).

Consideremos primeiro a desigualdade $|x| < c$. O caso $c \leq 0$ não gera soluções, porque implica que $|x|$ deve ser negativo, o que é impossível de acordo com a definição. Então tomamos $c > 0$ e consideremos duas aberturas de $|x|$. Se $x \geq 0$, então a desigualdade $|x| < c$ equivale a $x < c$ e a solução da desigualdade original (a sua primeira parte) fica $0 \leq x < c$. Se $x < 0$, então a desigualdade $|x| < c$ se torna $-x < c$ ou $x > -c$ e obtemos a segunda parte da solução da desigualdade original $-c < x < 0$. Juntando essas duas partes, obtemos a solução $-c < x < c$.

Para desigualdade $|x| \geq c$, o caso $c \leq 0$ leva a qualquer número real ser a solução, porque o módulo de qualquer número é não negativo. Então, nesse caso, o conjunto da solução é $\mathbb{R}$. Se $c > 0$, então para encontrar soluções, temos que abrir o módulo. Se $x \geq 0$, então a desigualdade $|x| \geq c$ equivale a $x \geq c$ e, como $c > 0$, a primeira parte da solução da desigualdade original fica $x \geq c$. Se $x < 0$, então a desigualdade $|x| \geq c$ se torna $-x \geq c$ ou $x \leq -c$ e essa é a segunda parte da solução da desigualdade original. Juntando as duas partes, obtemos a solução na forma $S = \{x : x \geq c\} \cup \{x : x \leq -c\}$.

Exemplos

1. Resolver a equação modular $|2x-1|=5$ e a desigualdade modular $|3x-2|<4$.

Solução.

1) A equação modular equivale às duas equações sem módulo: $2x - 1 = 5$ e $2x - 1 = -5$ (lembremos que $|a| = 5$ significa que $a = 5$ e $a = -5$). Resolvendo a primeira, obtemos $x_1 = 3$, e para segunda temos $x_2 = -2$. Essas são as duas soluções da equação modular.

2) Reescrevemos a desigualdade modular na forma sem módulo $-4 < 3x - 2 < 4$ (lembremos que $|a| < 4$ significa que $-4 < a < 4$). Essa desigualdade dupla pode

ser reescrita na forma $-2 < 3x < 6$ ou, isolando x, $-\frac{2}{3} < x < 2$. Essa é a a solução da desigualdade original. Ela pode ser escrita em termos de conjuntos: $S = \{x : -\frac{2}{3} < x < 2\}$.

2. Resolver a equação modular $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| = 3$ e a desigualdade modular $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 3$.
Solução.

1) A equação modular equivale às duas equações sem módulo: $\frac{x-1}{x+2} = 3$ e $\frac{x-1}{x+2} = -3$ (lembremos que $|a| = 3$ significa que $a = 3$ e $a = -3$). Resolvendo a primeira, obtemos $x - 1 = 3x + 6$ e então $x_1 = -\frac{7}{2}$. Da segunda temos $x - 1 = -3x - 6$ e então $x_2 = -\frac{5}{4}$. Essas são as duas soluções da equação modular.

2) Reescrevemos a desigualdade modular na forma sem módulo $-3 < \frac{x-1}{x+2} < 3$ (lembremos que $|a| < 3$ significa que $-3 < a < 3$). Para resolver a desigualdade à direita, temos que considerar duas situações. Primeiro, se $x + 2 > 0$, então a desigualdade direita se reduz a $x - 1 < 3x + 6$, cuja solução é $x > -\frac{7}{2}$. Como a última solução deve ser escolhida do conjunto $x > -2$ (onde $x + 2 > 0$), então a primeira solução é $x > -2$. Segundo, se $x + 2 < 0$, então a desigualdade direita se reduz a $x - 1 > 3x + 6$ com a solução $x < -\frac{7}{2}$. Como essa solução satisfaz a condição $x < -2$ (i.e. $x + 2 < 0$), então ela é a segunda solução. Portanto, a solução da desigualdade direita é $x > -2$ e $x < -\frac{7}{2}$, expressando essa em termos de conjuntos, temos $S_d = \{x : x > -2\} \cup \{x : x < -\frac{7}{2}\}$. Passamos à desigualdade esquerda, que resolvemos seguindo o mesmo algoritmo. Se $x+2 > 0$, então a desigualdade esquerda se reescreve como $x - 1 > -3x - 6$, levando à solução $x > -\frac{5}{4}$. Essa última satisfaz a condição $x > -2$ e, por isso, toda ela é a primeira parte da solução. Se $x + 2 < 0$, então a desigualdade esquerda se reduz a $x - 1 < -3x - 6$, cuja solução é $x < -\frac{5}{4}$. Dela, temos que tomar a parte que satisfaz a condição $x < -2$ e, portanto, a segunda parte da solução é $x < -2$. Portanto, a solução da desigualdade esquerda é $x > -\frac{5}{4}$ e $x < -2$, ou, em termos de conjuntos, $S_e = \{x : x > -\frac{5}{4}\} \cup \{x : x < -2\}$. Finalmente, voltamos à desigualdade original. Como as desigualdades direita e esquerda devem ser satisfeitas ao mesmo tempo, temos que considerar a interseção das soluções das duas. Assim, a solução da desigualdade original é $x < -\frac{7}{2}$ e $x > -\frac{5}{4}$, ou, em termos de conjuntos, $S = S_d \cap S_e = \{x : x < -\frac{7}{2}\} \cup \{x : x > -\frac{5}{4}\}$.

Notamos que, nesse algoritmo, resolvemos primeiro a desigualdade direita, depois a esquerda (para cada uma delas considerando ambas as opções do denominador) e depois achamos a solução final como interseção das duas soluções obtidas. Naturalmente, alguns passos da resolução podem mudar de ordem. Por exemplo, primeiro, poderíamos fixar o sinal positivo do denominador e resolver a desigualdade dupla correspondente. Depois, fixamos o sinal negativo do denominador e resolvemos a segunda desigualdade dupla. Para finalizar, encontramos a união das soluções obtidas para os sinais diferentes. Obviamente, os dois algoritmos levam à mesma solução. Recomendamos ao leitor efetuar esse segundo procedimento e conferir dessa maneira a solução obtida acima.

Observação. O método de solução pode ser representado na forma mais transparente se juntarmos abordagem analítica e geométrica no método chamado de método de intervalos. Exploramos essa possibilidade nos exercícios da seção 5.2, depois de introduzir a relação entre números reais e pontos da reta, necessária para aplicação desse método.

4 Reta coordenada e sua equivalência com o conjunto dos reais

Definição da reta coordenada. Uma *reta coordenada* é a reta com as seguintes características introduzidas: o *ponto origem*, o *sentido positivo e negativo*, e, finalmente, a *unidade de medida*. É preciso fazer alguns comentários sobre essas características. Notamos que a origem O é um ponto escolhido de modo arbitrário, mas, depois de ser escolhido, ele é fixo. O sentido positivo é a parte da reta que fica de um dos lados do ponto origem, e então o negativo fica do lado oposto. A escolha da parte positiva é arbitrária, mas, caso a reta tenha orientação horizontal, então é tradicional chamar a parte à direita da origem de sentido positivo e, então, a parte negativa fica à esquerda da origem. Se a reta tem orientação vertical, então, normalmente, o sentido positivo é a parte acima da origem e o negativo fica abaixo. O sentido positivo é marcado pela letra x (ou qualquer outra letra apropriada) (veja Fig.1.1). Finalmente, a unidade de medida é da escolha arbitrária que representa a distância igual a 1 entre ponto origem e o ponto específico I (usualmente) localizado na parte positiva da reta coordenada (veja Fig.1.1). A reta coordenada também é chamada de *eixo coordenado* ou eixo Ox (caso x seja usado para marcar o sentido positivo).

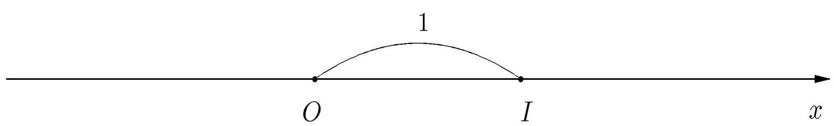


Figura 1.1 Reta coordenada: origem, sentido positivo e unidade de medida.

Equivalência entre reta coordenada e o conjunto dos reais

Vamos estabelecer uma relação de *equivalência* entre o conjunto de todos os pontos de uma reta coordenada e todos os números reais, isto é, vamos associar a cada ponto um único número real, e vice-versa, a cada número real vai corresponder um único ponto da reta (tal relação também é chamada de biunívoca ou bijetora). Notamos que há diferentes formas de gerar uma relação de equivalência entre os dois conjuntos. A especificidade da relação que vamos introduzir é que ela está intimamente ligada com a medida da distância do ponto origem até o ponto corrente da reta coordenada.

Primeiramente, observamos que basta nós conseguirmos estabelecer a equivalência procurada entre a parte positiva da reta coordenada e o conjunto dos números reais positivos. De fato, relacionamos (de modo único) o ponto origem com o número 0 e, usando a equivalência construída entre as partes positivas dos dois conjuntos, a cada ponto P_- da parte negativa, que é simétrico (em relação à origem) ao ponto P da parte positiva, associamos o número negativo $-x_P$, onde x_P é aquele número positivo que corresponde a P. Assim, a relação entre as partes positivas é realmente o problema principal, cuja resolução será suficiente para solucionar todo o problema de imediato.

Vamos fixar que o ponto origem O corresponde ao número 0. Marcamos um ponto arbitrário P e elaboramos o algoritmo que possibilita associar a P um único número real positivo. Inicialmente, marcamos os pontos (à direita de O) que correspondem aos múltiplos da unidade de medida: $I_1 \equiv I$ corresponde à unidade da medida, I_2 a duas unidades (têm distância igual a 2 até a origem), ..., I_n a n unidades (têm distância igual a n até a origem), etc. (veja Fig.1.2). A cada um desses pontos, associamos o número positivo igual àquela distância que o ponto tem até a origem: $I_1 \leftrightarrow 1$, $I_2 \leftrightarrow 2$, ..., $I_n \leftrightarrow n$, ... (veja Fig.1.2). Dessa maneira, nós estabelecemos a equivalência entre todos os pontos múltiplos da unidade de medida e todos os números naturais. Se P coincide com um desses pontos, por exemplo, com I_n, então o número correspondente x já é encontrado – $x = n$ – e o algoritmo terminou. Caso isso não ocorra, como P não coincide com nenhum dos I_n, então ele deve ficar entre os dois pontos consecutivos destes. Vamos supor (sem perda da generalidade) que ele fica entre I_n e I_{n+1}. Nesse caso, determinamos a parte inteira do número procurado x na forma $x_0 = n$ e finalizamos o passo 0 do nosso algoritmo, prosseguindo então para o próximo passo. Começamos este passo dividindo o segmento $[I_n, I_{n+1}]$ com uso de um décimo da medida original. Obviamente, neste caso, $[I_n, I_{n+1}]$ (cujo comprimento é igual a 1) será dividido em dez partes de mesmo comprimento e os pontos da divisão marcaremos por (na ordem de esquerda para direita) $A_{1,0} \equiv I_n$, $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{1,4}$, $A_{1,5}$, $A_{1,6}$, $A_{1,7}$, $A_{1,8}$, $A_{1,9}$,$A_{1,10} \equiv I_{n+1}$ (veja Fig.1.3). Se P coincidir com um desses pontos da primeira subdivisão, por exemplo, com $A_{1,7}$, então o número procurado já foi encontrado – $x = n,7$ – e terminamos o algoritmo. Caso contrário, supondo que P fica entre $A_{1,7}$ e $A_{1,8}$, determinamos o primeiro algarismo decimal após a vírgula, $x_1 = 7$, na representação decimal do número real $x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_i \ldots$ e finalizamos o passo número 1. Já é possível deduzir como determinamos o segundo algarismo decimal de x no passo número 2. Faremos uma subdivisão do intervalo $[A_{1,7}, A_{1,8}]$ da localização corrente de P em dez partes iguais, usando, então, um centésimo da medida original da unidade, e marcamos os pontos dessa subdivisão por $A_{2,0} \equiv A_{1,7}$, $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, $A_{2,3}$, $A_{2,4}$, $A_{2,5}$, $A_{2,6}$, $A_{2,7}$, $A_{2,8}$, $A_{2,9}$, $A_{2,10} \equiv A_{1,8}$ (veja Fig.1.4). Se P coincidir com um dos pontos dessa segunda subdivisão, por exemplo, com $A_{2,3}$, então o número procurado já foi encontrado – $x = n,73$ – e terminamos o algoritmo. Caso contrário, supondo que P fica entre $A_{2,3}$ e $A_{2,4}$, determinamos o segundo algarismo decimal de x após a vírgula $x_2 = 3$ e finalizamos o passo número 2. E assim por diante.

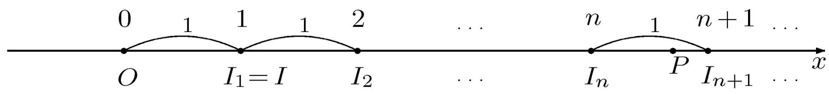


Figura 1.2 Determinação da parte inteira de x.

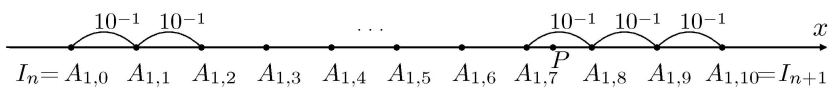


Figura 1.3 Determinação do primeiro algarismo decimal de x.

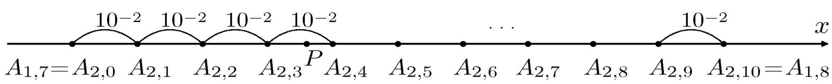


Figura 1.4 Determinação do segundo algarismo decimal de x.

No i-ésimo passo, determinamos o i-ésimo algarismo decimal x_i usando a i-ésima subdivisão do intervalo corrente de localização de P em dez partes de comprimento igual a 10^{-i} da medida unitária original. Se P coincidir com um dos pontos da i-ésima subdivisão, por exemplo, com $A_{i,1}$, então $x_i = 1$ e o número procurado é $x = x_0, x_1 x_2 \dots x_i$, finalizando o algoritmo neste passo. Caso contrário, supondo que P fica entre $A_{i,1}$ e $A_{i,2}$, determinamos $x_i = 1$, finalizamos o passo número i e passamos para o próximo. Dessa maneira, em cada passo do algoritmo, determinamos o algarismo corrente e, dependendo da localização de P, ou paramos o algoritmo (o que significa que os demais algarismos são nulos) ou passamos para o próximo passo, no qual será encontrado o próximo algarismo de x. Em qualquer uma das duas situações – um algoritmo finito ou infinito –, todos os algarismos de x serão definidos de modo único e, assim, vamos construir um único número x correspondente ao ponto escolhido P.

É importante notar que o número encontrado representa a distância de O a P, que denotamos via $d(O,P)$. Realmente, no passo 0, encontramos a distância de

O até o primeiro ponto I_n à esquerda de P. Se $P = I_n$, então o número $x_P = n$ é igual à distância $d(O, P) = n$. Caso contrário, temos uma aproximação $x_0 = n$, inferior, para essa distância, sabendo que $d(O, P)$ é maior que n e menor que $n+1$ (uma vez que P fica entre I_n e I_{n+1}). Isso quer dizer que temos avaliação com erro $\epsilon_0 = d(O, P) - x_0$ menor que 1. No passo número 1, encontramos a distância exata x_0, x_1 caso P coincidir com um dos pontos da primeira subdivisão, ou sua aproximação inferior com precisão melhor que 10^{-1}. E assim por diante. No i-ésimo passo, ou encontramos a distância exata $d(O, P) = x_0, x_1 x_2 \dots x_i$ caso P coincida com um dos pontos da i-ésima subdivisão, ou achamos sua aproximação inferior $x_0, x_1 x_2 \dots x_i$ com erro $\epsilon_i = d(O, P) - x_0, x_1 x_2 \dots x_i$ menor que 10^{-i} (uma vez que, no último caso, P fica entre os dois pontos consecutivos da subdivisão com distância entre estes igual a 10^{-i}). Notamos que, em cada passo, o erro ϵ_i definido acima é a diferença entre a distância exata $d(O, P)$ e a sua aproximação inferior $x_0, x_1 x_2 \dots x_i$, isto é, $\epsilon_i \geq 0$ em todos os passos do algoritmo. Assim, se o algoritmo for finito, então determinamos a distância exata em i passos. Se for infinito, então, depois do i-ésimo passo, encontramos a aproximação para distância com erro menor que 10^{-i} e, em cada passo posterior, melhoramos a precisão de avaliação em 10 vezes comparando com o passo anterior. Dessa maneira, efetuando um número bastante grande de passos, faremos com que o erro ϵ_i de aproximação da distância seja menor que qualquer número positivo. Como o erro considerado de aproximação é uma grandeza não negativa e o único número não negativo menor que qualquer positivo é 0, então, no final do algoritmo, encontramos a distância exata de O até P.

Usando o algoritmo similar no sentido inverso, isto é, partindo de um número real positivo e gerando o único ponto correspondente, podemos ver que a cada número real positivo corresponde um único ponto da reta coordenada (deixamos os detalhes desse algoritmo inverso como exercício para os leitores). Assim, a cada ponto da parte positiva da reta coordenada corresponde um único número real positivo e vice-versa. Isso significa que entre os dois conjuntos – o da parte positiva da reta coordenada e o dos números reais positivos – foi estabelecida uma relação de equivalência.

Como já foi comentado anteriormente, o resto é simples: o ponto O corresponde ao número 0 e, para qualquer ponto P_- da parte negativa da reta coordenada, basta encontrar o ponto simétrico P (que fica na mesma distância de O, mas na parte positiva), tomar o número positivo x_P correspondente a P e acrescentar a ele sinal menos – o número negativo $-x_P$ vai ser aquele que corresponde a P_-. Assim, usando o algoritmo proposto, é estabelecida uma relação de equivalência entre todos os pontos da reta coordenada e todos os números reais. O número x_P que corresponde a P é chamado de *coordenada do ponto* P. Devido à relação de equivalência, vamos usar com frequência a notação $P = x_P$, o que não significa a igualdade entre um ponto e um número e sim a equivalência entre os dois.

É importante notar que a aplicação do algoritmo específico na elaboração da equivalência permitiu gerar as coordenadas intimamente ligadas com as distâncias até o ponto origem: se $P = O$, então a coordenada correspondente $x_P = 0$ representa a distância entre dois pontos coincidentes; se P fica na parte positiva, então x_P é igual à distância de O até P; finalmente, para qualquer P da parte negativa, x_P representa a distância de O até P acrescida do sinal negativo. Usando, como antes, a notação $d(O,P)$ para distâncias, reescrevemos isso na forma: $d(O,P) = 0$ caso $x_P = 0$ (o que equivale à condição $P = O$); $d(O,P) = x_P$ caso $x_P > 0$ (a última desigualdade equivale à condição de que P fica à direita de O); $d(O,P) = -x_P$ caso $x_P < 0$ (a última desigualdade equivale à condição de que P fica à esquerda de O). Lembrando a definição de *módulo* de uma grandeza, concluímos, imediatamente, que $d(O,P) = |x_P|$.

Observação 1. Devido à relação de equivalência entre o conjunto dos reais e o dos pontos de uma reta coordenada, muitas vezes, os números reais são chamados de pontos reais e os pontos são chamados de números. A reta coordenada (eixo coordenado) é chamada de *reta real* (*eixo real*). Prosseguindo com essa analogia, dizer que o ponto A fica à direita de B é dar a mesma informação que pode ser expressa em termos das suas coordenadas como $x_A > x_B$; afirmar que o ponto A fica entre B e C (com C localizado mais à direita entre os três pontos) é o mesmo que relacionar suas coordenadas via desigualdade $x_B < x_A < x_C$; e assim por diante. Isso quer dizer que, daqui para frente, podemos misturar no texto os conceitos de pontos e suas coordenadas, sem perder a precisão de raciocínio.

Observação 2. Às vezes, é conveniente considerar o *eixo real extendido*, incluindo infinitos positivo ($+\infty$) e negativo ($-\infty$). Nesse caso, todos os pontos reais (geométricos) são chamados de *pontos finitos* e os infinitos são chamados de *pontos infinitos*.

Exemplos

1. Marcar (aproximadamente) os pontos A e B com coordenadas $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$, respectivamente, explicando porque um fica à esquerda/direita de outro.

Solução.

Usamos as seguintes avaliações simples dos números irracionais: $\sqrt{5} < 2,5$, $\sqrt{3} > 1,5$, $\sqrt{2} > 1$. Então $\sqrt{5}-\sqrt{3} < 2,5 - 1,5 = 1 < \sqrt{2}$. Assim, o ponto A fica à esquerda de B (veja Fig.1.5).

Outra maneira de comparar a localização de A e B, é usando as propriedades das expressões envolvidas. Podemos mostrar que, em geral, o ponto A de coordenada $x_A = \sqrt{a}-\sqrt{b}$ fica à esquerda de B de coordenada $x_B = \sqrt{a-b}$ se $a > b \geq 0$. Realmente, como as duas coordenadas são positivas, podemos elevar ao quadrado sem modificar a sua relação: $x_A^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$ e $x_B^2 = a - b$. Então, temos que

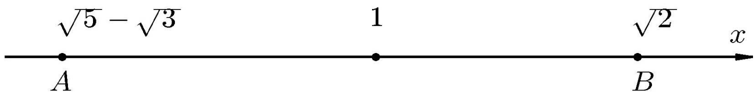


Figura 1.5 Pontos $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$ na reta coordenada.

comparar $b-2\sqrt{ab}$ e $-b$. Como $a > b$, segue que $b-2\sqrt{ab} < b-2\sqrt{b^2} = b-2b = -b$, isto é, x_A é menor que x_B e, portanto, A fica à esquerda de B.

2. Encontrar as coordenadas de todos os pontos cuja distância até a origem é igual a π.

Solução.

A distância pode ser medida tanto para direita da origem O como para esquerda (isto é, na parte positiva e negativa da reta coordenada). A coordenada do ponto A à direita de O é igual à distância dada, isto é, $x_A = \pi$. A coordenada do ponto B à esquerda de O é igual à distância com sinal menos, isto é, $x_B = -\pi$.

5 Alguns conjuntos e suas propriedades

5.1 Distância entre dois pontos

Usando o módulo, podemos expressar a *distância entre quaisquer dois pontos* de uma reta coordenada numa forma compacta. Primeiro, lembramos mais uma vez que a distância de qualquer ponto P até a origem O é o módulo da coordenada de P: $d(O,P) = |x_P|$. Consideremos agora dois pontos arbitrários A e B. Vamos supor, inicialmente, que B fica à direita de A, ou seja, $x_B > x_A$. Se ambos os pontos ficam na parte positiva da reta coordenada, então $d(A,B) = d(O,B) - d(O,A) = x_B - x_A$ (Fig.1.6). Se a origem fica entre A e B, então $d(A,B) = d(O,B) + d(O,A) = x_B + (-x_A) = x_B - x_A$ (Fig.1.7). Finalmente, se A e B ficam à esquerda do ponto O, então $d(A,B) = d(O,A) - d(O,B) = -x_A - (-x_B) = x_B - x_A$ (Fig.1.8). Portanto, em qualquer situação, temos $d(A,B) = x_B - x_A$. Se a relacão entre os pontos é diferente – A fica à direita de B – então basta trocar a nomeação dos pontos e suas coordenadas na fórmula já deduzida e obtemos $d(A,B) = x_A - x_B$. Assim, se $x_B > x_A$ (B fica à direita de A), logo $d(A,B) = x_B - x_A$, se $x_A > x_B$ (A fica à direita de B), então $d(A,B) = x_A - x_B$, e se $x_B = x_A$ (A coincide com B), então $d(A,B) = 0$. Expressando com o módulo, temos

$$d(A,B) = |x_A - x_B| \tag{1.1}$$

qualquer que seja a posição de A e B.

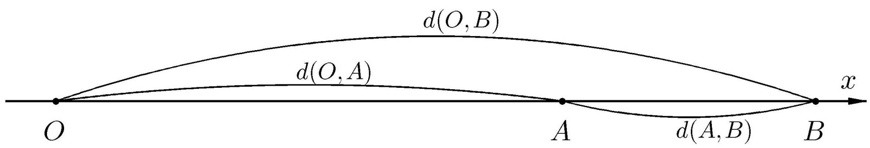


Figura 1.6 Distância entre A e B: B fica à direita de A, que fica à direita de O.

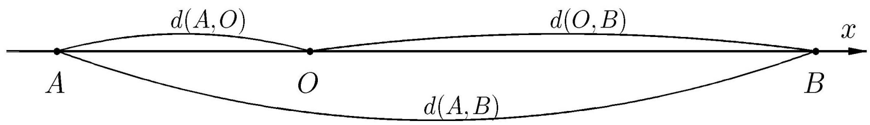


Figura 1.7 Distância entre A e B: B fica à direita de O, que fica à direita de A.

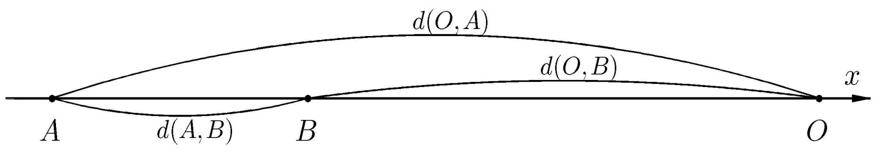


Figura 1.8 Distância entre A e B: O fica à direita de B, que fica à direita de A.

5.2 Intervalos, ponto médio, ponto simétrico, vizinhança

A seguir, vamos usar as seguintes notações naturais para coordenadas de pontos: a coordenada do ponto A denotamos por a, de B – por b, de C – por c, etc.

Intervalo. Um *intervalo (segmento)* é o conjunto de todos os pontos da reta coordenada que ficam entre dois pontos dados A e B. Em termos de coordenadas, a formulação equivalente pode ser dada na forma: um intervalo é o conjunto de todos os números reais que ficam entre os dois dados a e b. Os pontos A e B (ou a e b), chamados de extremidades do intervalo, podem fazer ou não parte do intervalo. Dependendo disso, são diferenciados os seguintes tipos de intervalos: $a < x < b$ (*intervalo aberto*), ou $a \leq x \leq b$ (*intervalo fechado*), ou $a \leq x < b$, ou $a < x \leq b$ (os dois últimos intervalos são chamados *semi-abertos ou semi-fechados*). A notação comum é (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ e $(a, b]$, respectivamente. Em termos de pontos da reta coordenada, as notações correspondentes são (A, B), $[A, B]$, $[A, B)$ e $(A, B]$. A menos que seja dito o contrário, vamos considerar os intervalos “normais”, isto é, aqueles onde a primeira extremidade A fica à esquerda da ou coincide com a segunda B (ou, equivalentemente, $a \leq b$).

Observação 1. Devido à relação de equivalência entre conjuntos numéricos e geométricos, o convênio comum, já apontado na seção anterior, é usar as notações de intervalos numéricos para os geométricos e vice-versa, quando for conveniente.

Observação 2. No caso de uma desigualdade estrita, o ponto a pode ser $-\infty$ e o ponto b pode ser $+\infty$. No primeiro caso, a desigualdade formal $-\infty < x < b$ (ou $-\infty < x \leq b$) significa simplesmente $x < b$ (ou $x \leq b$), e uma interpretação similar é usada no segundo caso.

Observação 3. Em alguns problemas, o tipo de intervalo (aberto, fechado ou semi-aberto) não importa. Em particular, isso vale quando encontramos o comprimento de um intervalo ou o seu ponto médio. Nesses casos, não vamos especificar o tipo de intervalo.

Intervalo limitado. Um intervalo aberto (a,b) é *limitado* quando a e b são pontos finitos (ou seja, alguns pontos do eixo real). Se a ou b são infinitos, então o intervalo é *ilimitado*. Um intervalo fechado $[a,b]$ é considerado sempre limitado.

Observação. Às vezes, um intervalo limitado é chamado *intervalo finito* e um ilimitado de *infinito*. Obviamente, o número de pontos em qualquer intervalo não singular ($a < b$) é infinito. Usualmente, o significado específico do termo "finito/infinito" aplicado a intervalos fica claro no contexto em consideração.

A definição de um intervalo limitado naturalmente se estende à definição de um conjunto limitado.

Conjunto limitado. Um conjunto S dos números reais é chamado *limitado superiormente* (ou *limitado à direita*) se existe um número real M tal que para qualquer $x \in S$ temos $x \leq M$. Da mesma maneira, um conjunto S dos números reais é chamado *limitado inferiormente* (ou *limitado à esquerda*) se existe um número real m tal que para qualquer $x \in S$ temos $x \geq m$. Finalmente, um conjunto dos números reais é chamado *limitado* se ele é limitado tanto superiormente como inferiormente.

Observação. Como podemos ver, um intervalo limitado (a,b) (ou $[a,b]$) é um caso particular de um conjunto limitado, porque qualquer x de (a,b) (ou $[a,b]$) é limitado superiormente pelo número b e inferiormente – por a: $a \leq x \leq b$, $\forall x \in (a,b)$ (ou $\forall x \in [a,b]$).

Comprimento de intervalo. Pela definição, o *comprimento de um intervalo* é a distância entre suas extremidades. (Obviamente, o tipo do intervalo aqui não importa.)

Ponto médio. O *ponto médio de um intervalo* é definido como aquele ponto que equidista das suas extremidades.

Para encontrar a coordenada do ponto médio C do intervalo $[A,B]$, expressamos a sua definição geométrica em termos analíticos: $d(A,C) = d(C,B)$ ou $c - a = b - c$ (veja Fig.1.9) ou, explicitando c:

$$c = \frac{a+b}{2}\,. \tag{1.2}$$

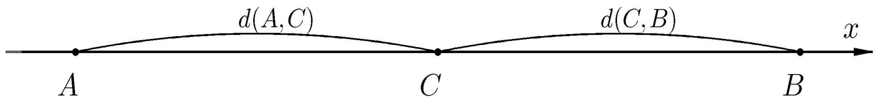


Figura 1.9 Encontro do ponto médio C do intervalo $[A, B]$.

Ponto simétrico. O *ponto B é simétrico* ao ponto dado A em relação a um terceiro ponto C (chamado de *centro de simetria*), se B e A equidistam de C (sendo B e A dois pontos diferentes).

A partir da definição, notamos que a condição $d(B, C) = d(A, C)$ significa que C é o ponto médio do intervalo $[A, B]$ (veja Fig.1.9). Então, $c = \frac{a+b}{2}$ e, isolando b, obtemos

$$b = 2c - a\,. \tag{1.3}$$

Num caso particular, mais simples, quando o centro de simetria é a origem O, obtemos $b = -a$, a relação que já foi observada antes.

Observação. O conceito de simetria de um par de pontos em relação a um ponto C naturalmente se estende a um conjunto de pontos: um conjunto é simétrico em relação a C se qualquer ponto desse conjunto tem o ponto simétrico que também pertence a esse conjunto. Como vamos ver no estudo de funções, os domínios de funções pares e ímpares são conjuntos simétricos em relação à origem.

Vizinhança. Uma *vizinhança* de ponto a é o intervalo aberto centralizado em a. Para determinar a extensão de uma vizinhança se usa a distância de a até as suas extremidades, chamada de *raio da vizinhança.* Desse modo, a vizinhança de a de raio r é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$.

Obviamente, o ponto central a é o ponto médio da sua vizinhança $(a-r, a+r)$. Em termos de módulos, a equação de vizinhança de a de raio r pode ser escrita na forma $|x - a| < r$. Realmente, denotando $t = x - a$, temos a desigualdade elementar $|t| < r$ cuja solução é $-r < t < r$ ou, voltando a x, $-r < x - a < r$. Isolando x, obtemos então $a - r < x < a + r$.

Vizinhança direita/esquerda. Uma *vizinhança direita* de a é o intervalo aberto a direita de a de comprimento r: $(a, a+r)$, onde r continua sendo chamado de raio. Analogamente, uma *vizinhança esquerda* de a é o intervalo aberto a esquerda de a: $(a - r, a)$. Claramente, a vizinhança direita representa a metade direita da vizinhança “completa” e a esquerda representa a metade esquerda. A união das duas vizinhanças laterais é a vizinhança completa sem o seu ponto central.

Ponto interior. Dado um conjunto S, um ponto c é chamado *interior* em relação a S se ele pertence a S junto com alguma sua vizinhança. Por exemplo, qualquer ponto do intervalo aberto (a, b) é o seu ponto interior. Obviamente, um ponto interior deve pertencer ao conjunto em consideração, mas essa é somente a condição necessária: nem todos pontos de um conjunto são obrigatoriamente seus pontos interiores. Por exemplo, qualquer ponto $c \in (a, b)$ do intervalo fechado $[a, b]$ é o seu ponto interior, mas as extremidades do intervalo não são pontos interiores (embora pertençam a $[a, b]$).

Ponto exterior. Dado um conjunto S, um ponto c é chamado *exterior* em relação a S se ele não pertence a S junto com alguma sua vizinhança. Por exemplo, qualquer ponto que não pertence a $[a, b]$ é o seu ponto exterior. No entanto, se considerarmos um intervalo aberto (a, b), então qualquer ponto $c < a$ ou $c > b$ é o seu ponto exterior, mas as extremidades a e b não são pontos exteriores (embora não pertençam a (a, b)).

Ponto de fronteira. Dado um conjunto S, um ponto c é chamado *ponto de fronteira* em relação a S se qualquer vizinhança de c contém tanto pontos de S como os fora de S. Por exemplo, as extremidades do intervalo (a, b) são seus pontos de fronteira. O mesmo é válido para as extremidades do intervalo $[a, b]$.

Exemplos

1. Caracterizar geometricamente os pontos cujas coordenadas satisfazem as seguintes relações:
1) $|1 + 3x| \leq 2$;
2) $x^3 + x^2 - 12x > 0$;
3) $\left|\frac{3-x}{x+1}\right| = 2$;
4) $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 3$.

Solução.

Notamos que existem poucas situações em que as relações dadas admitem uma solução geométrica direta, isto é, podem ser interpretadas geometricamente sem a prévia solução analítica. A maioria absoluta das equações e desigualdades é tratada, primeiro, analiticamente e só depois de uma solução ser encontrada na forma analítica, se aplica sua interpretação geométrica. Nesse ponto, o uso das coordenadas se revela como uma ferramenta importante e até indispensável com maior clareza.

1) Reescrevemos a desigualdade dada na forma $-2 \leq 1 + 3x \leq 2$ (lembrando que $|a| \leq 2$ equivale a $-2 \leq a \leq 2$). Daí, segue que $-3 \leq 3x \leq 1$ ou $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$. Assim, a solução geométrica é o intervalo fechado $[-1, \frac{1}{3}]$. Observamos que, nesse caso particular simples, a desigualdade pode ser resolvida diretamente do modo geométrico, aplicando a caracterização do módulo. Realmente, a desigualdade original pode ser reescrita na forma $|x - (-\frac{1}{3})| \leq \frac{2}{3}$, o que significa que os pontos procurados devem ficar afastados do ponto $-\frac{1}{3}$ numa distância menor ou igual a $\frac{2}{3}$ (para esquerda e para direita). Então, marcamos o ponto central $-\frac{1}{3}$ do intervalo

procurado e medimos dele a distância $\frac{2}{3}$ para os dois lados, obtendo à esquerda o ponto -1 e à direita $\frac{1}{3}$ (veja Fig.1.10). Todos os pontos desse intervalo $[-1, \frac{1}{3}]$ (incluindo as suas extremidades) representam soluções da desigualdade original.

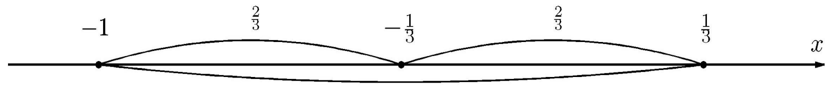


Figura 1.10 Solução geométrica da desigualdade $|x - (-\frac{1}{3})| \leq \frac{2}{3}$.

2) A desigualdade $x^3+x^2-12x > 0$ não se resolve geometricamente direto. Temos que, primeiro, procurar sua solução analítica. Para isso, fatoramos o polinômio do lado esquerdo: $x(x-3)(x+4) > 0$ (isso é simples de fazer colocando x em evidência e encontrando duas raízes do polinômio quadrático restante). Observamos que os pontos críticos, onde cada termo linear muda seu sinal, são (na ordem crescente) -4, 0 e 3. Por conveniência, colocamos os fatores na mesma ordem: $(x+4)x(x-3) > 0$. Se $x < -4$, então todos os fatores são negativos e, consequentemente, o produto é negativo, isto é, a desigualdade não está satisfeita; se $-4 < x < 0$, então o primeiro fator é positivo e os dois restantes – negativos, resultando em produto positivo, isto é, a desigualdade está satisfeita; para $0 < x < 3$, os dois primeiros fatores são positivos e o último é negativo, resultando em produto negativo, isto é, a desigualdade não está satisfeita; finalmente, para $x > 3$, todos os três fatores são positivos e, portanto, o produto positivo, isto é, a desigualdade está satisfeita. Assim, a solução analítica é a união dos intervalos abertos $(-4, 0)$ e $(3, +\infty)$, e a sua forma geométrica são dois intervalos correspondentes na reta coordenada.

Podemos chegar à mesma solução usando o método analítico-geométrico de intervalos. O raciocínio segue as considerações acima, mas, para melhor visualização, é acompanhado pela representação geométrica. Então, comecemos da desigualdade $(x+4)x(x-3) > 0$ e seus pontos críticos -4, 0 e 3. Marcamos na reta coordenada os intervalos de sinal positivo e negativo para cada fator do lado esquerdo e, depois, interceptando esses sinais, fazemos a conclusão sobre o sinal do produto. Na Fig.1.11, são mostrados os intervalos do sinal fixo para os primeiros dois fatores (marcação do primeiro termo fica em cima e do segundo – abaixo da reta). A Fig.1.12 representa os intervalos do terceiro fator acima da reta coordenada e o sinal resultante do produto abaixo da reta, com a parte ondular representando a solução da desigualdade.

3) A equação modular equivale às duas sem módulo: $\frac{3-x}{x+1} = 2$ e $\frac{3-x}{x+1} = -2$ (lembramos que $|a| = 2$ significa $a = 2$ e $a = -2$). Resolvendo a primeira, obtemos $x_1 = \frac{1}{3}$ e da segunda temos $x_2 = -5$. Assim, temos dois pontos na reta real com coordenadas $\frac{1}{3}$ e -5. Notemos que, nesse caso, embora a resolução analítica seja simples, a equação não dispõe de uma solução geométrica direta.

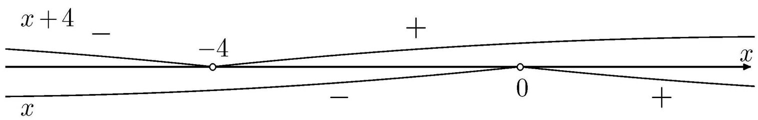


Figura 1.11 Pontos críticos e sinais dos termos $x+4$ e x.

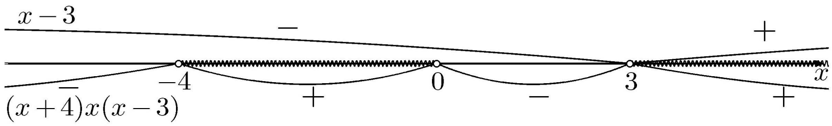


Figura 1.12 Pontos críticos e sinais do termo x–3 e do lado esquerdo $(x$+4$)x(x$–3$)$.

4) A desigualdade modular $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 3$ já foi resolvida analiticamente no Exercício 2 da seção 3.3. Vamos refazê-la usando método analítico-geométrico de intervalos. Reescrevemos essa desigualdade na forma sem módulo $-3 < \frac{x-1}{x+2} < 3$. A desigualdade direita pode ser reescrita na forma $\frac{x-1}{x+2} - 3 = \frac{-2x-7}{x+2} < 0$ ou ainda $\frac{2x+7}{x+2} > 0$. Os zeros do numerador e denominador são $x = -\frac{7}{2}$ e $x = -2$, respectivamente. Marcamos esses pontos na reta coordenada e anotamos os intervalos onde o numerador e denominador mantêm o mesmo sinal com símbolos "+" e "−": para não confundir, as anotações para o numerador fazemos acima da reta coordenada e para o denominador, abaixo (veja Fig.1.13). A razão $\frac{2x+7}{x+2}$ fica positiva quando os sinais do numerador e denominador coincidem, e essa parte da reta é marcada na forma ondulada. Da mesma maneira, a desigualdade esquerda pode ser reescrita na forma $\frac{x-1}{x+2} + 3 = \frac{4x+5}{x+2} > 0$. Fazendo as marcações semelhantes em relação aos zeros $x = -\frac{5}{4}$ e $x = -2$, concluímos imediatamente que a razão $\frac{4x+5}{x+2}$ tem sinal positivo na parte ondulada da reta coordenada (veja Fig.1.14). Para satisfazer ambas as desigualdades, devemos escolher a parte comum (fazer interseção) das partes onduladas no primeiro e segundo desenho. Assim, chegamos à solução final $S = \{x : x < -\frac{7}{2}\} \cup \{x : x > -\frac{5}{4}\}$.

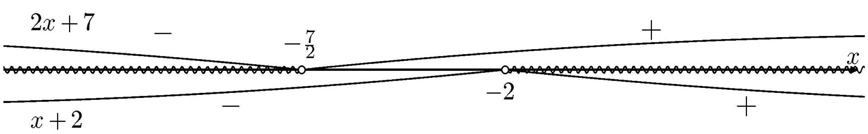


Figura 1.13 Pontos críticos e sinais das expressões da desigualdade direita.

2. Encontrar o ponto médio do intervalo AB, onde $A = -2$, $B = 6$.
Solução.

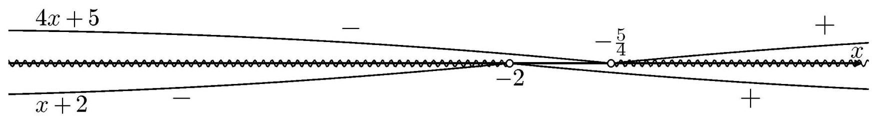


Figura 1.14 Pontos críticos e sinais das expressões da desigualdade esquerda.

Da fórmula (2.2), segue imediatamente que o ponto médio D tem coordenada $d=\frac{-2+6}{2}=2$.

3. Encontrar o ponto B simétrico a A em relação a C se:
1) $A=5$ e $C=-1$;
2) $A=-1$ e $d(A,C)=3$;
3) $d(A,B)=6$ e $C=2$.

Solução.
1) Usando fórmula (2.3), obtemos imediatamente $B=2\cdot(-1)-5=-7$.
2) Nas condições desse problema, temos duas opções. Se C ficar à direita de A, então $C=2$ e $B=2\cdot 2-(-1)=5$. Se C ficar à esquerda de A, então $C=-4$ e $B=2\cdot(-4)-(-1)=-7$.
3) Nas condições desse problema, temos duas opções. Se A ficar à direita de B, então $A=2+3=5$ e $B=2-3=-1$. Caso contrário, $A=-1$ e $B=5$.

6 Coordenadas cartesianas no plano

6.1 Definição das coordenadas

Definimos o *sistema cartesiano* no plano em dois passos: primeiro, introduzimos os *eixos de coordenadas* e depois descrevemos o algoritmo que permite associar a cada ponto do plano uma única *dupla ordenada dos números reais* e vice-versa.

Os *eixos de coordenadas* são introduzidos da seguinte maneira. Inicialmente, escolhemos uma reta qualquer no plano e fazemos dela uma reta coordenada, isto é, atribuímos a ela três características – ponto origem, unidade de medida e orientação positiva. Em seguida, construímos a segunda reta coordenada de tal maneira que ela é perpendicular à primeira, seu ponto origem coincide com o da primeira reta, a sua unidade de medida é igual à da primeira reta e, finalmente, a sua orientação positiva se encontra rotacionando a parte positiva da primeira reta no ângulo de $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário (que normalmente é considerado sentido positivo de rotação no plano). A primeira reta coordenada usualmente é chamada de eixo Ox e a segunda de Oy. Dessa maneira, os dois eixos coordenados são bem definidos e podemos passar à segunda etapa.

Agora, com eixos coordenados à nossa disposição, elaboramos o algoritmo (um dos vários possíveis) que leva à definição de *coordenadas cartesianas*. Consideremos um ponto arbitrário P no plano e encontremos os pontos respectivos da sua *projeção sobre eixos* Ox e Oy. Para isso, passamos por P uma reta perpendicular a Ox (paralela a Oy) e o ponto P_x, de interseção dessa reta com Ox, chamamos de *projeção de* P *sobre* Ox. Da mesma maneira, passando por P uma reta perpendicular a Oy (paralela a Ox), encontramos o ponto P_y de interseção dela com Oy e este é chamado de *projeção de* P *sobre* Oy (veja Fig.1.15). Como P_x fica na reta coordenada Ox, então a esse ponto corresponde, de modo único, a coordenada x. Da mesma maneira, o ponto P_y da reta coordenada Oy gera uma única coordenada y. O par ordenado (x, y) é chamado de *coordenadas cartesianas do ponto* P, a primeira coordenada é chamada de *abscissa* e a segunda, de *ordenada*. Como, nesse algoritmo, P gera de modo único os pontos de projeção P_x e P_y, os quais, em sua vez, geram os únicos números reais x e y, então a dupla (x, y) é unicamente definida pela escolha de P. Notamos que, caso P tenha coordenadas (x, y), então suas projeções P_x e P_y têm as coordenadas $(x, 0)$ e $(0, y)$, respectivamente.

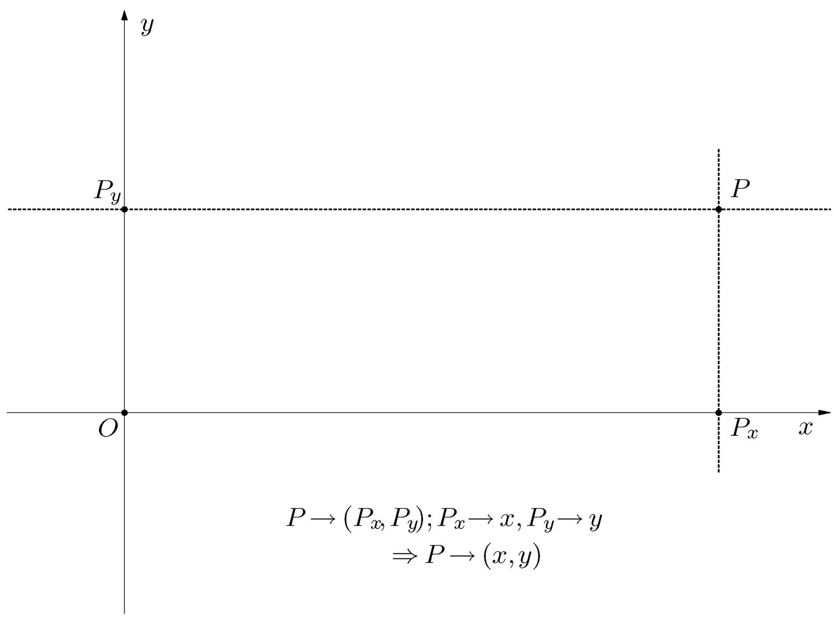


Figura 1.15 Determinição de coordenadas cartesianas de um ponto no plano.

Usando a mesma construção na direção inversa (partindo da dupla arbitrária (x, y) e chegando a um único ponto correspondente P), pode ser visto que cada par ordenado dos números reais (x, y) define um único ponto no plano (deixamos os detalhes dessa implicação inversa a cargo do leitor). Assim, o algoritmo proposto estabelece a relação de equivalência entre todos os pontos do plano e todos os pares ordenados de números reais. Em virtude dessa equivalência, vamos usar a seguinte notação para os pontos e suas coordenadas $P = (x, y)$, entendendo aqui que a igualdade indica a relação de equivalência. Como os pares ordenados dos números reais podem ser obtidos considerando a operação do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o plano com coordenadas cartesianas muitas vezes é denotado por $\mathbb{R}^2$.

6.2 Linhas coordenadas

De acordo com a definição geral, as *linhas coordenadas cartesianas* são definidas como conjuntos que satisfazem as equações $x = C_1$ e $y = C_2$, onde C_1 e C_2 são constantes. Em particular, se $y = 0$, então temos o conjunto de todos os pontos cuja projeção no eixo Oy fica na origem das coordenadas. Obviamente, todos os pontos com essa propriedade ficam na reta perpendicular a Oy que passa pela origem, ou seja, esses pontos representam o eixo Ox. Analogamente, os pontos da linha coordenada $x = 0$ formam o eixo Oy. Essas são duas *retas coordenadas principais*. As demais curvas coordenadas também são visualisadas de modo simples. A equação $y = C_2$ define o conjunto dos pontos no plano cuja projeção sobre Oy tem a ordenada C_2, isto é, todos os pontos que ficam na reta perpendicular a Oy (paralela a Ox) e que passa pelo ponto $P_y = (0, C_2)$ (veja Fig.1.16). De modo análogo, $x = C_1$ representa a reta perpendicular a Ox (paralela a Oy) que passa pelo ponto $P_x = (C_1, 0)$. Assim, qualquer linha coordenada em coordenadas cartesianas é uma reta que coincide com um dos eixos de coordenadas (as *duas retas coordenadas principais*) ou é paralela a um dos eixos (as *demais retas coordenadas*).

Os eixos de coordenadas dividem todo o plano em quatro partes chamadas *quadrantes*: a região do plano localizada entre as partes positivas de Ox e Oy é chamada de I quadrante; a próxima no sentido anti-horário, que fica entre a parte negativa de Ox e a positiva de Oy, é o II quadrante; a terceira no sentido anti-horário é o III quadrante; e a última, entre a parte positiva de Ox e a negativa de Oy, é o IV quadrante (veja Fig.1.16).

6.3 Projeções sobre retas coordenadas

Já definimos antes as projeções de um ponto sobre eixos de coordenadas. Essa definição é facilmente estendida a *projeções sobre qualquer reta coordenada*. Consideremos o ponto $P = (x, y)$ e a reta coordenada $y = C$. A projeção de P sobre $y = C$ é o ponto $P_{y=C}$ de interseção dessa reta com a reta perpendicular a $y = C$ (ela também é perpendicular ao eixo Ox) que passa por P. Obviamente, as coordenadas desse ponto são $P_{y=C} = (x, C)$. Da mesma maneira se define o ponto $P_{x=C}$ de projeção de $P = (x, y)$ sobre $x = C$ cujas coordenadas são $P_{x=C} = (C, y)$. No caso particular de $C = 0$, voltamos às projeções sobre eixos de coordenadas.

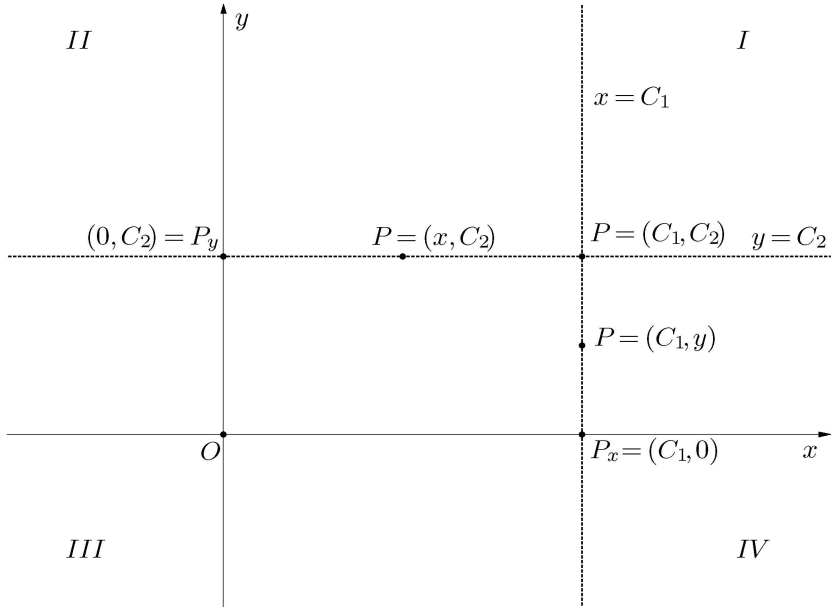


Figura 1.16 Retas coordenadas cartesianas.

Na próxima seção vamos deduzir a fórmula simples da distância entre dois pontos. No entanto, a situação é ainda mais simples quando os pontos ficam na mesma reta coordenada, pois essa situação é equivalente ao caso uni-dimensional, e podemos dar as fórmulas correspondentes agora mesmo. Realmente, se os pontos P_1 e P_2 pertencem ao eixo Ox, então suas coordenadas são $P_1 = (x_1, 0)$ e $P_2 = (x_2, 0)$, e a distância entre eles depende somente da primeira coordenada x, como foi no caso da reta real. Portanto, usando a fórmula conhecida para pontos da reta coordenada, obtemos prontamente que $d(P_2, P_1) = |x_2 - x_1|$. No caso quando P_1 e P_2 pertencem à linha coordenada $y = C$, suas coordenadas são $P_1 = (x_1, C)$ e $P_2 = (x_2, C)$. De novo, a segunda coordenada é a mesma e podemos usar a mesma fórmula da reta real: $d(P_2, P_1) = |x_2 - x_1|$. (De modo um pouco mais rigoroso e formal: a distância entre $P_1 = (x_1, C)$ e $P_2 = (x_2, C)$ é igual a distância entre suas projeções sobre o eixo Ox – $P_{1x} = (x_1, 0)$ e $P_{2x} = (x_2, 0)$ –, ou seja, $d(P_2, P_1) = d(P_{2x}, P_{1x}) = |x_2 - x_1|$.) O mesmo raciocínio se aplica aos pontos $P_1 = (C, y_1)$ e $P_2 = (C, y_2)$ que ficam na mesma linha coordenada $x = C$: a distância entre eles é $d(P_2, P_1) = |y_2 - y_1|$.

Consideremos agora a *projeção de um intervalo* P_1P_2 sobre o eixo Ox. Primeiramente, definimos (na forma geométrica) o que é um *intervalo* (*segmento*) no plano.

Definição (geométrica) de um intervalo. Um *intervalo* (*segmento*) P_1P_2 é a parte da reta passando por pontos P_1 e P_2 que fica entre esses dois pontos.

Obviamente, P_2P_1 determina o mesmo intervalo que P_1P_2. Em particular, vamos considerar intervalos OP onde um dos pontos é a origem O das coordenadas (a ordem dos pontos não importa, mas, por conveniência, vamos colocar a origem como o primeiro ponto na denotação desses segmentos).

De modo semelhante a um intervalo numa reta coordenada, os intervalos no plano podem ser *fechados* (incluindo extremidades), *abertos* (excluindo extremidades) ou *semi-abertos/semi-fechados*. De agora em diante, neste texto, a menos que se diga o contrário, toda vez que nos referirmos a segmentos, eles serão considerados fechados.

A definição da projeção de um intervalo P_1P_2 sobre Ox se reduz à projeção das extremidades $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ sobre Ox.

Definição da projeção de um intervalo. Sejam $P_{1x} = (x_1, 0)$ e $P_{2x} = (x_2, 0)$ projeções sobre Ox das extremidades P_1 e P_2, respectivamente, do intervalo P_1P_2. O intervalo $P_{1x}P_{2x}$ é chamado de *projeção do intervalo* P_1P_2 *sobre o eixo* Ox (veja Fig.1.17).

De modo semelhante se define a *projeção sobre o eixo* Oy (veja Fig.1.17).

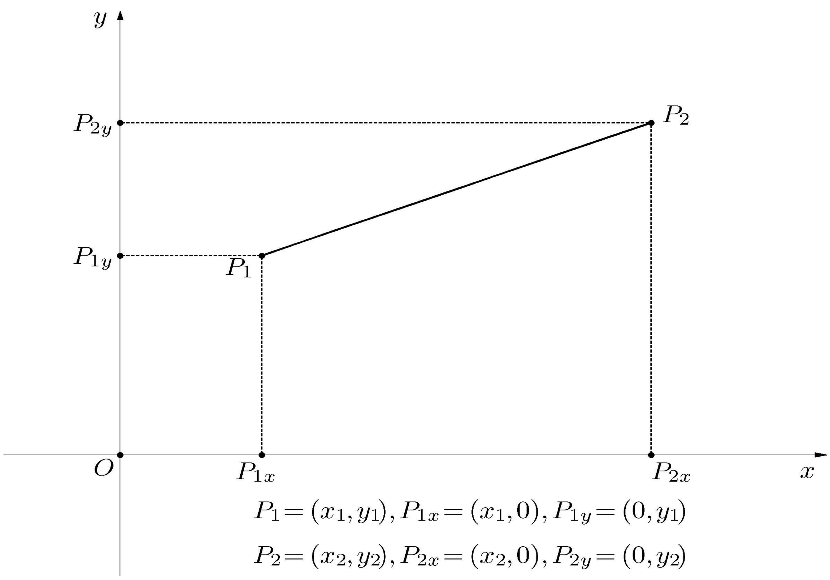


Figura 1.17 Projeção de um segmento.

Notamos que essa projeção pode resultar num intervalo "anormal" $P_{1x}P_{2x}$ para o qual $x_1 > x_2$. O mesmo pode ser dito sobre o intervalo $P_{1y}P_{2y}$, com $P_{1y} = (0, y_1)$ e $P_{2y} = (0, y_2)$, que representa a projeção do P_1P_2 sobre o eixo Oy (veja Fig.1.18). Vamos esclarecer por que um intervalo "anormal" de projeção pode surgir. Lembramos que há uma notação natural (normal) de intervalos numa reta coordenada: um intervalo é denotado AB se o ponto A fica à esquerda do ou coincide com o ponto B (caso contrário, a notação normal é BA). A possibilidade

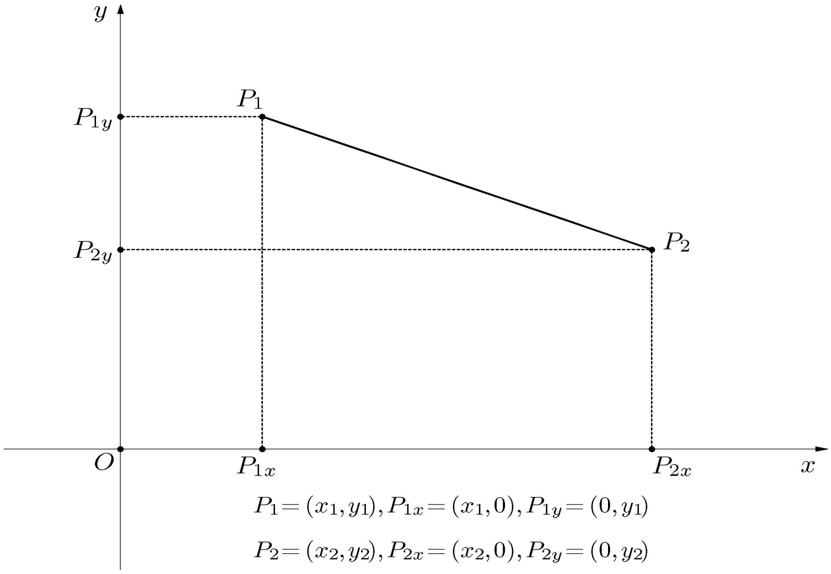


Figura 1.18 Projeção de um segmento, ordem invertida.

de estabelecer essa regra se deve ao fato de $\mathbb{R}$ ser um conjunto ordenado. A situação é diferente no plano: se $x_1 < x_2$, mas $y_1 > y_2$ (ou contrário), então não há uma forma natural de estabelecer uma regra se o ponto P_1 precede o ponto P_2 ou contrário, isto é, se o intervalo P_1P_2 é um intervalo normal ou P_2P_1. Isso está ligado com a impossibilidade de estabelecer a ordenação no conjunto $\mathbb{R}^2$ da mesma maneira como foi feito em $\mathbb{R}$.

Devido a essa ambiguidade da notação de intervalos no plano e, consequentemente, a possibilidade de encontrar intervalos "anormais" na projeção, às vezes, a definição da projeção de um intervalo é dada da seguinte maneira: a projeção de P_1P_2 sobre o eixo Ox é o intervalo $P_{1x}P_{2x}$ se $x_1 \leq x_2$, e $P_{2x}P_{1x}$ caso $x_1 > x_2$. E o mesmo se faz com a projeção sobre Oy. Isso evita os intervalos "anormais" nas retas coordenadas. Nos problemas a seguir (por exemplo, na divisão de um intervalo ou encontro do ponto simétrico), é mais conveniente seguir a primeira definição da projeção que mantém a ordem dos pontos observada no intervalo original. De qualquer maneira, a ambiguidade vai ser eliminada dentro do contexto específico de cada problema.

A projeção de um intervalo sobre eixo de coordenadas é naturalmente estendida ao caso de retas coordenadas. No caso de uma reta coordenada $y = C$, a definição é a seguinte: o intervalo $P_{1C}P_{2C}$ é chamado de *projeção do intervalo P_1P_2 sobre a reta $y = C$* se P_{1C} e P_{2C} são projeções sobre $y = C$ dos pontos P_1 e P_2, respectivamente, ou seja, se $P_{1C} = (x_1, C)$ e $P_{2C} = (x_2, C)$. A definição análoga é válida para projeção sobre $x = C$.

Exemplos

1. Marcar o ponto cujas coordenadas cartesianas são $A = (-3, 4)$ e encontrar suas projeções para os eixos coordenados e para as retas $x = 1$ e $y = -2$.

Solução.

De acordo com a relação de equivalência estabelecida na parte teórica, para encontrar o ponto no plano a partir das suas coordenadas cartesianas x_0 e y_0 precisamos, primeiro, localizar os pontos auxiliares (pontos de projeção) A_x e A_y nos eixos Ox e Oy, respectivamente. Como $x_0 = -3$, então temos que medir distância de 3 unidades à esquerda da origem no eixo Ox e lá marcar o ponto A_x. Em seguida, medimos 4 unidades para cima ($y_0 = 4$) da origem no eixo Oy e marcamos o ponto A_y. Traçamos agora a reta paralela ao eixo Oy que passa por A_x e a segunda, que é paralela a Ox e passa por A_y. Essas duas retas são perpendiculares e, portanto, possuem um único ponto de interseção que é o ponto procurado A (veja a Fig.1.19).

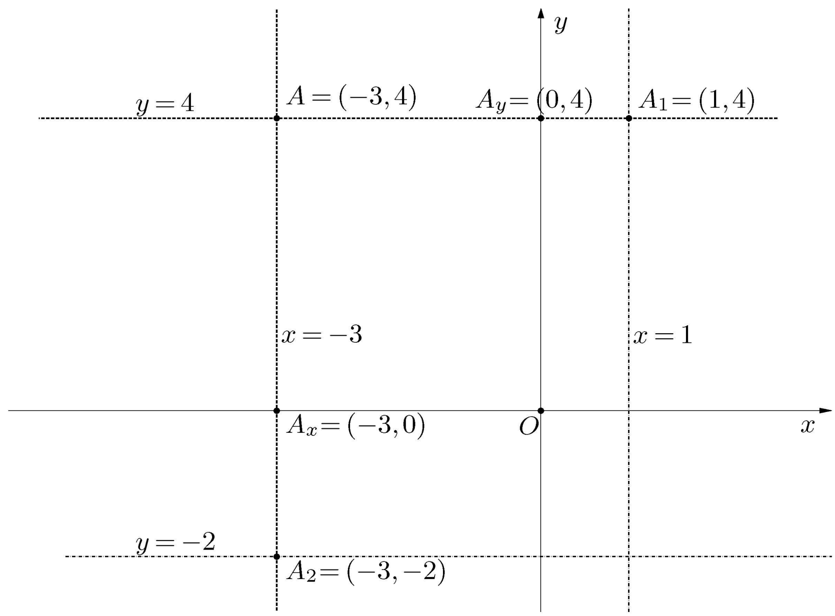


Figura 1.19 Construção do ponto e suas projeções a partir das coordenadas.

No meio do procedimento acima, criamos as projeções $A_x = (-3, 0)$ e $A_y = (0, 4)$ nos eixos Ox e Oy, respectivamente. Para encontrar a projeção sobre a reta $x = 1$, devemos passar pelo ponto A a reta paralela ao eixo Ox (isto é, a reta coordenada $y = 4$). O ponto de interseção dessa reta com $x = 1$ é a projeção procurada com coordenadas $A_1 = (1, 4)$. Da mesma maneira, passando por A a reta paralela ao eixo Oy (isto é, a reta coordenada $x = -3$), encontramos a sua interseção com $y = -2$ que é a última projeção procurada com coordenadas $A_2 = (-3, -2)$. (Veja a ilustração na Fig.1.19.)

2. Encontrar o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem a relação $x - y < 0$.

Solução.

Primeiro, consideremos a equação correspondente $x - y = 0$. Como as coordenadas têm o mesmo sinal ($x = y$), então os pontos respectivos são localizados no I e III quadrantes. No I quadrante, o ponto $P_0 = (x_0, x_0)$ fica na mesma distância x_0 de cada um dos eixos coordenados: a distância até Ox é a distância entre P_0 e sua projeção $P_{0x} = (x_0, 0)$, ambos pertencendo à reta coordenada $x = x_0$ (e por isso sabemos como medir essa distância); analogamente, a distância até Oy é a distância entre P_0 e sua projeção $P_{0y} = (0, x_0)$ que ficam na reta coordenada $y = x_0$. Da mesma maneira, no III quadrante, as distâncias de P_0 até os eixos Ox e Oy também coincidem e são iguais a $-x_0$. Assim, temos o conjunto de todos os pontos equidistantes dos dois eixos de coordenadas, o que quer dizer que $y = x$ é a equação da bissetriz do I e III quadrantes. (Veja a ilustração na Fig.1.20.)

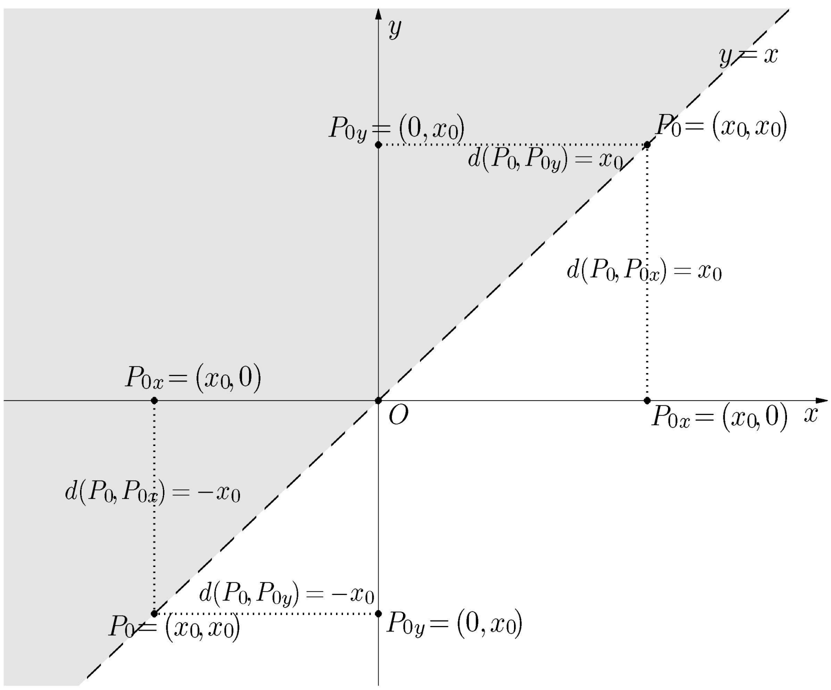


Figura 1.20 Encontro dos pontos a partir da relação $x - y < 0$, relações na bissetriz $y = x$.

Voltando à desigualdade original, vemos que precisamos escolher os pontos cuja ordenada é maior que a abscissa. Como os pontos com abscissas e ordenadas iguais ficam na reta-bissetriz $y = x$, então a solução da desigualdade representa todos os pontos acima dessa bissetriz. (Veja a ilustração na Fig.1.20.)

3. Encontrar o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem a desigualdade $4y^2 - 7y - 2 < 0$.

Solução.

Comecemos, de novo, da equação correspondente $4y^2 - 7y - 2 = 0$. As raízes dessa equação são $y_1 = -\frac{1}{4}$ e $y_2 = 2$, o que quer dizer que a expressão quadrática original pode ser fatorada em termos lineares $4y^2 - 7y - 2 = (4y+1)(y-2) = 0$ e as duas soluções $y = y_1$ e $y = y_2$ representam, como sabemos da teoria, duas retas coordenadas (paralelas ao eixo Ox).

Voltando à desigualdade original, a reescrevemos de modo respectivo $(4y + 1)(y-2) < 0$. A última desigualdade é satisfeita quando os dois fatores lineares têm sinais opostos, o que ocorre nos dois casos: 1) $4y + 1 > 0$ e $y - 2 < 0$, e 2) $4y + 1 < 0$ e $y - 2 > 0$. No primeiro caso, temos a solução que pode ser reescrita na forma $-\frac{1}{4} < y < 2$, enquanto no segundo não há soluções, porque uma desigualdade $y < -\frac{1}{4}$ contradiz a outra $y > 2$. Assim, os pontos procurados têm as ordenadas satisfazendo a desigualdade dupla $-\frac{1}{4} < y < 2$. Da análise das equações respectivas que acabamos de fazer segue que esses pontos têm que ficar acima da reta coordenada $y = -\frac{1}{4}$ e abaixo da reta coordenada $y = 2$, ou, em outras palavras, a solução da desigualdade é a faixa compreendida entre as retas paralelas $y = -\frac{1}{4}$ e $y = 2$ (sem incluir os pontos dessas duas retas).

7 Algumas relações no plano cartesiano: distância, ponto médio, simetria

7.1 Distância entre dois pontos

Deduzimos a fórmula conhecida da escola da *distância entre dois pontos* arbitrários $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Do triângulo retângulo $P_1P_2P_3$, onde $P_3 = (x_2, y_1)$, segue que $d^2(P_1, P_2) = d^2(P_1, P_3) + d^2(P_3, P_2)$ (veja Fig.1.21). Como P_1 e P_3 ficam na mesma reta coordenada $y = y_1$, então $d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1|$; como P_3 e P_2 ficam na mesma reta coordenada $x = x_2$, então $d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|$. Portanto, $d^2(P_1, P_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ ou

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{1.4}$$

A mesma distância representa o *comprimento do intervalo* P_1P_2.

7.2 Distância de um ponto até uma reta coordenada

No caso de uma reta geral, a *distância entre um ponto e uma reta* pode ser definida da seguinte maneira.

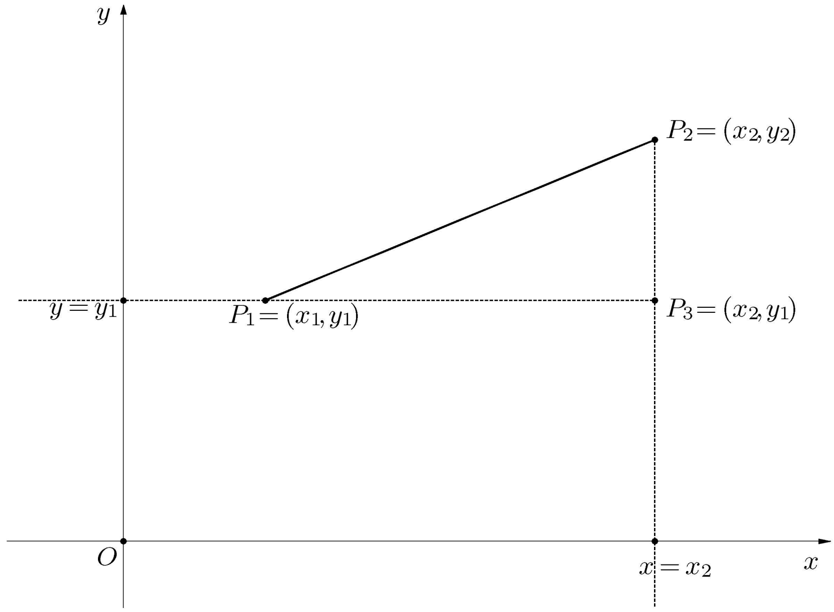


Figura 1.21 Distância entre dois pontos.

Definição. Chamamos de *distância* $d(P, R)$ *entre um ponto* P *e uma reta* R a distância entre P e o ponto Q obtido na interseção de R e a reta perpendicular a R que passa por P. O ponto Q é chamado de projeção de P sobre R (veja Fig.1.22). Em particular, se P pertence a R, então, pela definição, a distância é igual a 0.

Observação. Naturalmente a distância de P até a reta R é a menor distância entre P e todos os pontos da reta R (veja Fig.1.22).

Agora, nos restringimos às retas coordenadas. Na seção 6.3, já foram definidas as projeções dos pontos sobre retas coordenadas. Pela definição, a projeção $P_{y=C}$ do ponto P sobre a reta coordenada $y = C$ é o ponto de interseção da reta $y = C$ com a reta perpendicular a $y = C$ que passa por P, ou seja, $P_{y=C}$ é o ponto procurado Q da Definição da distância entre P e R. Como as coordenadas $P_{y=C}$ são $P_{y=C} = (x, C)$, então, aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, encontramos que

$$d(P, y = C) = d(P, P_{y=C}) = \sqrt{(x - x)^2 + (y - C)^2} = |y - C| \,. \tag{1.5}$$

Em particular, a distância de P até o eixo Ox é igual a $|y|$.

Do mesmo modo, a distância do ponto P até a reta coordenada $x = C$ é a distância entre P e sua projeção sobre $x = C$ que é o ponto $P_{x=C} = (C, y)$. Então,

$$d(P, x = C) = d(P, P_{x=C}) = \sqrt{(x - C)^2 + (y - y)^2} = |x - C| \,. \tag{1.6}$$

Em particular, a distância de P até o eixo Oy é igual a $|x|$.

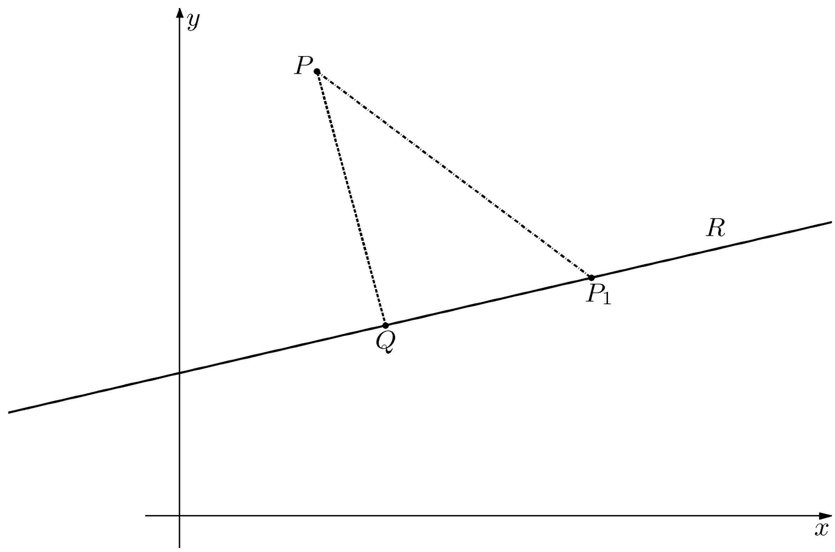


Figura 1.22 Distância de um ponto até uma reta.

7.3 Ponto médio de um intervalo

Definição. Dados dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, definimos o *ponto médio* P_m do intervalo P_1P_2 como o ponto equidistante de P_1 e P_2: $d(P_1, P_m) = d(P_2, P_m)$.

Para encontrar as coordenadas (x_m, y_m) de P_m, reduzimos este problema ao caso unidimensional. Para isso, passamos as retas coordenadas $x = x_1, x = x_2$ e $x = x_m$ por pontos P_1, P_2 e P_m (veja Fig.1.23). As projeções destes pontos $P_{1x} = (x_1, 0)$, $P_{2x} = (x_2, 0)$ e $P_{mx} = (x_m, 0)$ ficam na mesma reta coordenada $y = 0$ e, por isso, são unicamente caracterizadas pela sua abscissa. Como as três retas $x = x_1, x = x_2$ e $x = x_m$ são paralelas, os segmentos $P_{1x}P_{mx}$ e $P_{mx}P_{2x}$ mantêm a relação dos segmentos originais: $d(P_{1x}, P_{mx}) = d(P_{2x}, P_{mx})$, ou seja, P_{mx} é o ponto médio do intervalo $P_{1x}P_{2x}$ no eixo Ox (veja Fig.1.23). A coordenada x do ponto médio de um segmento na reta coordenada se encontra pela fórmula $x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$, conforme foi deduzido na seção 5.2 (veja fórmula (2.2)). Da mesma maneira, fazendo projeções sobre Oy, encontramos os pontos $P_{1y} = (0, y_1)$, $P_{2y} = (0, y_2)$ e $P_{my} = (0, y_m)$, cujas coordenadas satisfazem a relação $y_m = \frac{y_1+y_2}{2}$. Assim, as coordenadas do ponto médio são definidas:

$$P_m = (x_m, y_m) : \; x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \, . \tag{1.7}$$

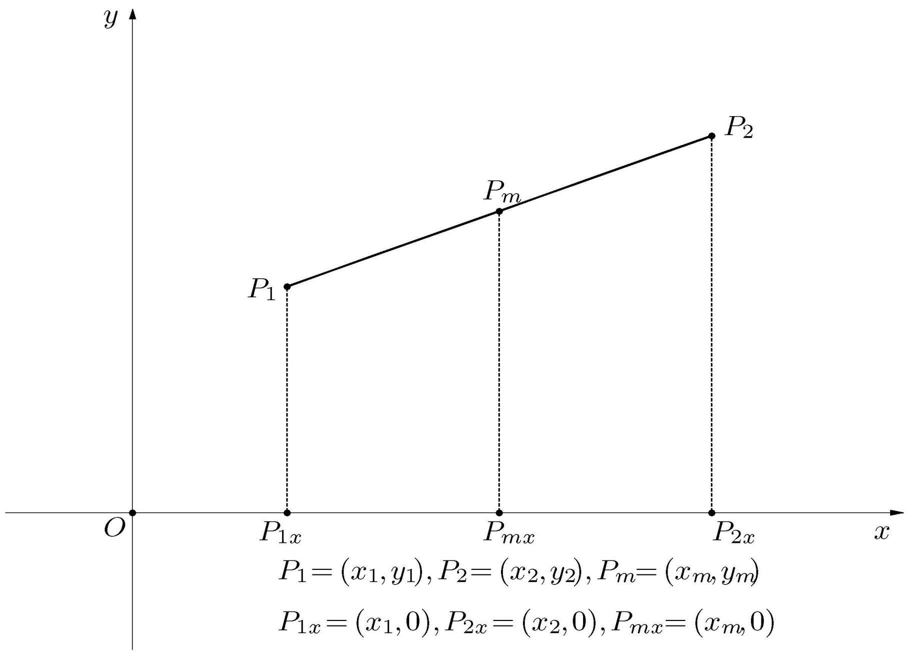


Figura 1.23 Ponto médio.

7.4 Simetria em relação a um ponto

Consideremos agora o problema de encontro de um ponto P_2 simétrico ao ponto dado P_1 em relação ao ponto central da simetria P_0.

Definição. Dado um ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, chamamos $P_2 = (x_2, y_2)$ de *ponto simétrico a P_1 em relação ao ponto central* $P_0 = (x_0, y_0)$, se todos os três pontos ficam na mesma reta e os pontos P_1 e P_2 são equidistantes de P_0, isto é, $d(P_1, P_0) = d(P_2, P_0)$.

Da definição segue que P_0 é o ponto médio do segmento P_1P_2 (isto é, P_0 coincide com P_m da Fig.1.23). Portanto, $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$, donde obtemos

$$P_2 = (x_2, y_2) : x_2 = 2x_0 - x_1 \, , \; y_2 = 2y_0 - y_1 \, . \tag{1.8}$$

Em particular, se a simetria é realizada em relação à origem das coordenadas, isto é, $P_0 = O = (0, 0)$, então o ponto P_2 simétrico a $P_1 = (x_1, y_1)$ tem coordenadas $P_2 = (-x_1, -y_1)$.

Uma outra maneira de representar as relações (1.8) é escolhendo a forma mais simétrica das coordenadas dos pontos P_1 e P_2 (simétricos em relação a P_0):

$$P_1 = (x_0 - x_1, y_0 - y_1), P_2 = (x_0 + x_1, y_0 + y_1). \tag{1.9}$$

Observação 1. O conceito de simetria de um par de pontos em relação a um ponto P_0 naturalmente se estende a um conjunto de pontos ou uma figura no plano. Uma *figura é simétrica em relação a* P_0 se todos os seus pontos podem ser divididos em duplas, cada uma delas representando um par simétrico em relação a P_0. Em outras palavras, uma figura é simétrica em relação a P_0 se para qualquer ponto P dessa figura o seu ponto simétrico P_s em relação a P_0 também pertence a essa figura.

Observação 2. Como vamos ver no estudo de funções, os gráficos de *funções ímpares* têm a propriedade de simetria em relação à origem. Detalhando, isso significa que qualquer ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, que pertence ao gráfico de uma função ímpar, tem o seu ponto simétrico (em relação a origem) $P_2 = (-x_1, -y_1)$ também pertencendo ao gráfico dessa função. Essa situação naturalmente se estende à *simetria em relação a um ponto* $P_0 = (x_0, y_0)$ *diferente da origem.* No entanto, em Cálculo e Análise, a simetria dos gráficos em relação a um ponto é frequentemente restrita ao caso em que o centro da simetria é a origem.

7.5 Simetria em relação a uma reta

Outro tipo importante de simetria é a simetria em relação a uma reta.

Definição. Dado ponto P_1 e reta R, chamamos o ponto $P_2 \neq P_1$ de *ponto simétrico a* P_1 *em relação à reta* R (*eixo de simetria*), se P_1 e P_2 ficam na reta S perpendicular a R e são equidistantes do ponto P_0 da interseção entre R e S.

Dessa definição segue que a simetria em relação a uma reta se reduz à simetria em relação a um ponto específico – projeção do ponto original sobre a reta.

A última definição é válida para qualquer reta, mas a fórmula para encontro das coordenadas de P_2 vamos deduzir só no caso de uma reta coordenada.

Consideremos a reta coordenada $R : x = C$. Nesse caso, a reta perpendicular a R que passa pelo ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ é a reta coordenada $S : y = y_1$. A interseção de R e S é o ponto $P_0 = (C, y_1)$ de projeção de P_1 sobre R (veja Fig.1.24). A condição de equidistância de P_1 até P_0 e de P_0 até o ponto procurado $P_2 = (x_2, y_2)$ – $d(P_1, P_0) = d(P_0, P_2)$ – diz que o ponto P_0 é o ponto médio do segmento P_1P_2 da reta S e, portanto, as suas coordenadas são $P_0 = (C, y_1) = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$, donde segue imediatamente que

$$P_2 = (x_2, y_2) : \; x_2 = 2C - x_1 \, , \; y_2 = y_1 \, . \tag{1.10}$$

Em particular, se a simetria é realizada em relação ao eixo Oy (isto é, $C = 0$), então o ponto P_2 simétrico a $P_1 = (x_1, y_1)$ tem coordenadas $P_2 = (-x_1, y_1)$. A forma mais simples de lembrar as relações (1.10) é utilizando a representação simétrica das coordenadas de P_1 e P_2:

$$P_1 = (C - x_1, y_1), P_2 = (C + x_1, y_1) \, . \tag{1.11}$$

De modo análogo, o ponto P_3 simétrico a $P_1 = (x_1, y_1)$ em relação à reta

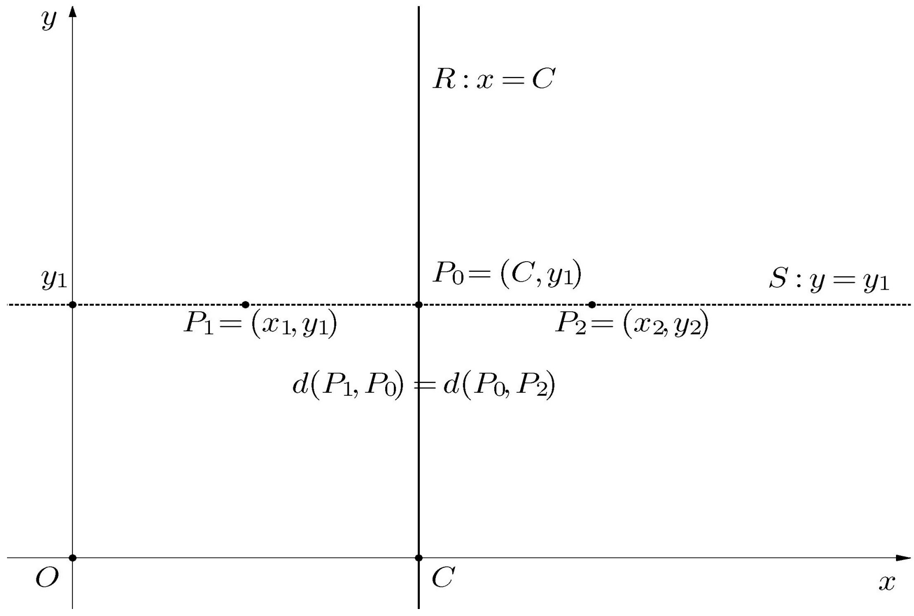


Figura 1.24 Ponto simétrico em relação à reta coordenada $x = C$.

coordenada $y = C$ tem coordenadas

$$P_3 = (x_3, y_3) : \ x_3 = x_1 \, , \ y_3 = 2C - y_1 \, . \tag{1.12}$$

Em particular, se a simetria é realizada em relação ao eixo Ox, então o ponto P_3 simétrico a $P_1 = (x_1, y_1)$ tem coordenadas $P_3 = (x_1, -y_1)$.

As duas Observações semelhantes às dadas no item de simetria em relação a um ponto estão em ordem aqui.

Observação 1. O conceito de simetria de um par dos pontos em relação a uma reta R naturalmente se estende a um conjunto de pontos ou uma figura no plano. Uma *figura é simétrica em relação a* R se todos os seus pontos puderem ser divididos em duplas, cada uma delas representando um par simétrico em relação a R. Em outras palavras, uma figura é simétrica em relação a R se para qualquer ponto P dessa figura o seu ponto simétrico P_s em relação a R também faz parte dessa figura.

Observação 2. Posteriormente, no estudo de propriedades geométricas de funções, vamos ver que gráficos de *funções pares* têm a propriedade de simetria em relação ao eixo Oy. Detalhando, isso significa que qualquer ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, que pertence ao gráfico de uma função par, tem o seu ponto simétrico (em relação a Oy) $P_3 = (-x_1, y_1)$ também pertencendo ao gráfico dessa função. Essa situação naturalmente se estende à *simetria em relação a uma reta coordenada* $x = x_0$ diferente do eixo Oy. No entanto, em Cálculo e Análise, a simetria de gráficos em relação a linhas coordenadas diferentes do eixo Oy é raramente considerada.

Exemplos

1. Calcular a distância entre os pontos $A = (-4, 3)$ e $B = (2, -1)$. Encontrar o ponto médio do intervalo AB.

Solução.

Substituindo as coordenadas dos pontos na fórmula (1.4), encontramos a distância $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-4-2)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{52}$. As coordenadas do ponto médio encontramos a partir das fórmulas (2.6): $x_m = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1, y_m = \frac{3+(-1)}{2} = 1$.

2. Os pontos $A = (5, 5)$ e $B = (x, y)$ ficam na bissetriz do I e III quadrantes e a distância entre os pontos é igual a 8. Encontrar as coordenadas do ponto B.

Solução.

Como B pertence à bissetriz do I e III quadrantes, então $B = (x, x)$. Da condição da distância encontramos $d(A, B) = \sqrt{(5-x)^2 + (5-x)^2} = \sqrt{2}|5 - x| = 8$. A última equação tem duas raízes: $x - 5 = \pm 4\sqrt{2}$, ou seja, $x_1 = 5 - 4\sqrt{2}$ e $x_2 = 5 + 4\sqrt{2}$. Assim, temos dois pontos que satisfazem às condições do problema: primeiro, $B_1 = (5 - 4\sqrt{2}, 5 - 4\sqrt{2})$ fica no III quadrante e o segundo, $B_2 = (5 + 4\sqrt{2}, 5 + 4\sqrt{2})$ fica no I quadrante.

3. Encontrar os pontos simétricos a $A = (-3, 2)$ em relação à origem das coordenadas, em relação aos eixos coordenados e em relação às retas coordenadas $x = 1$ e $y = -\frac{3}{2}$.

Solução.

Das fórmulas de simetria (1.8), (1.10) e (1.12) segue imediatamente que:
1) para simetria em relação à origem, temos $B = (3, -2)$;
2) para simetria em relação ao eixo Ox, temos $C = (-3, -2)$;
3) para simetria em relação ao eixo Oy, temos $D = (3, 2)$;
4) para simetria em relação à reta $x = 1$, temos $E = (5, 2)$;
5) para simetria em relação à reta $y = -\frac{3}{2}$, temos $F = (-3, -5)$.
(A ilustração se encontra na Fig.1.25.)

4. Dados os pontos médios $D = (7, 8)$, $E = (-4, 5)$ e $F = (1, -4)$ de três lados de um triângulo, encontrar os seus vértices.

Solução.

Denotamos os vértices procurados de $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ de tal modo que D é o ponto médio de AB, E, de AC e F, de BC. De acordo com as fórmulas do ponto médio, temos as seguintes relações: $\frac{x_A + x_B}{2} = 7$, $\frac{y_A + y_B}{2} = 8$, $\frac{x_A + x_C}{2} = -4$, $\frac{y_A + y_C}{2} = 5$ e $\frac{x_B + x_C}{2} = 1$, $\frac{y_B + y_C}{2} = -4$. As relações ímpares formam o subsitema separado:

$$x_A + x_B = 14\,,\ x_A + x_C = -8\,,\ x_B + x_C = 2\,.$$

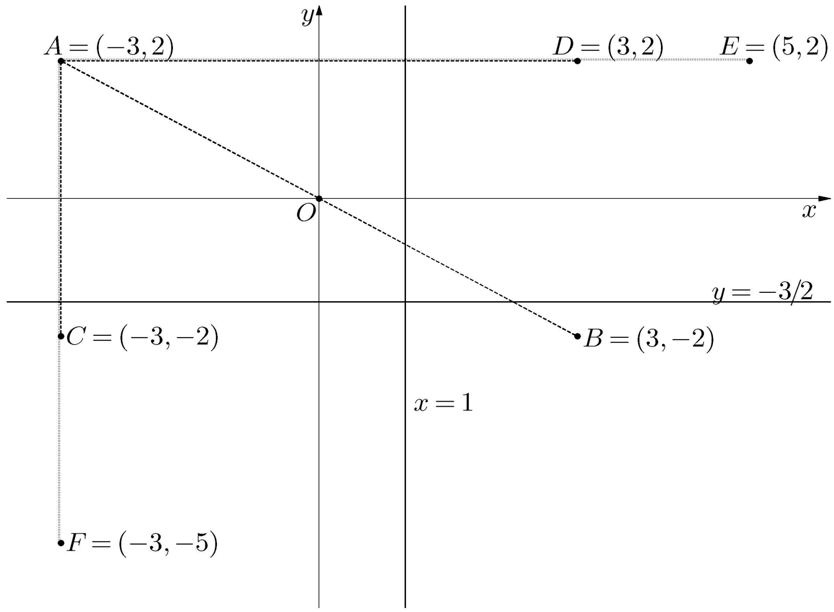


Figura 1.25 Pontos simétricos a $A = (-3, 2)$.

A resolução desse é elementar. Por exemplo, somando as duas primeiras equações, obtemos $2x_A + x_B + x_C = 6$ e, com ajuda da terceira, concluímos que $2x_A + 2 = 6$, isto é, $x_A = 2$. Então, das primeiras duas equações imediatamente encontramos $x_B = 12$ e $x_C = -10$. Outro sistema desacoplado é formado pelas equações com ordenadas:

$$y_A + y_B = 16\,,\ y_A + y_C = 10\,,\ y_B + y_C = -8\,.$$

Resolvendo o último de maneira semelhante, obtemos $y_A = 17$, $y_B = -1$ e $y_C = -7$. Assim, os vértices são $A = (2, 17)$, $B = (12, -1)$ e $C = (-10, -7)$.

Este livro considera métodos analíticos de investigação de funções elementares relativos ao nível de Pré-Cálculo, o que corresponde a disciplinas introdutórias de matemática na universidade e cursos avançados de Álgebra no ensino médio. O texto é direcionado para os ingressantes nos cursos universitários de matemática e afins, e para os alunos do ensino médio interessados em aprofundar seu conhecimento.

As abordagens desenvolvidas mostram como as propriedades importantes de funções elementares podem ser deduzidas seguindo o caminho lógico rigoroso, sem necessidade de suposições adicionais e memorização mecânica. Isso deve preparar estudantes para o uso de raciocínio analítico nas disciplinas matemáticas mais avançadas e criar uma base sólida para cursar as disciplinas de Cálculo e Análise.

ISBN 978-65-5506-778-1

9 786555 067781

www.blucher.com.br

Blucher