

CARLOS BATISTA

UM CURSO DE MECÂNICA CLÁSSICA



Blucher

Um curso de mecânica clássica

Carlos Batista

Um curso de mecânica clássica

© 2023 Carlos Batista

Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher

Editores Eduardo Blücher e Jonatas Eliakim

Coordenação editorial Addressa Lira

Produção editorial Thaís Pereira

Revisão de texto Maurício Katayama

Capa Laércio Flenic

Imagem da capa Gira pião, Guilherme da Fonte Franca

Editora Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar

CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

contato@blucher.com.br

www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, julho de 2021. É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora. Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Batista, Carlos

Um curso de mecânica clássica / Carlos Batista. — São Paulo : Blucher, 2023.

p. 548

Bibliografia

ISBN 978-85-212-2182-1

1. Mecânica I. Título

23-4693

CDD 531

Índice para catálogo sistemático: 1. Mecânica

Conteúdo

1	Revisão matemática e notação	15
1.1	O espaço vetorial \mathbb{R}^n	15
1.2	Coordenadas cartesianas no \mathbb{R}^3	16
1.3	Rotações	18
1.4	Produto vetorial	19
1.5	Série de Taylor	21
1.6	Equações diferenciais	23
1.7	Exercícios sugeridos	28
2	Leis de Newton e as leis de conservação	31
2.1	Uma visão crítica das leis de Newton	31
2.2	Leis de conservação	36
2.2.1	Conservação do momento linear	37
2.2.2	Conservação da energia	38
2.2.3	Conservação do momento angular	41
2.2.4	Discutindo as leis de conservação	43
2.3	Exercícios sugeridos	45
3	Oscilador harmônico e ressonância	47
3.1	Oscilação livre	48
3.2	Oscilação forçada com $\omega \neq \omega_0$	50
3.3	Oscilação forçada com $\omega = \omega_0$, a ressonância	51
3.4	Oscilação forçada e amortecida	53
3.5	O fator de qualidade de um oscilador amortecido	56
3.6	Amortecimento crítico	58
3.7	Exercícios sugeridos	62
4	Introdução à notação indicial	67
4.1	Matrizes e seus produtos	68
4.2	Convenção de soma de Einstein	69
4.3	O delta de Kronecker	73
4.4	Contrações com índices simétricos e antissimétricos	75
4.5	O símbolo de Levi-Civita	76
4.6	Exercícios sugeridos	78
5	Referenciais acelerados	81
5.1	Rotações no \mathbb{R}^3	83
5.2	Mudança arbitrária de referencial	87
5.3	O caso sem rotação, $\omega = 0$	90

5.4	Força centrífuga	91
5.5	Força de Coriolis	93
5.6	Exercícios sugeridos	97
6	Dinâmica vista da superfície terrestre	101
6.1	Referencial na superfície terrestre	103
6.2	Efeito da força de Coriolis	106
6.3	Objeto em queda livre	109
6.4	Pêndulo de Foucault	113
6.5	Exercícios sugeridos	116
7	Corpos rígidos e os momentos de inércia	119
7.1	Momento angular e o momento de inércia	119
7.2	Energia cinética de um corpo rígido	127
7.3	Eixos principais de inércia	129
7.4	Transladando a origem do referencial	136
7.5	Exercícios sugeridos	139
8	Ângulos de Euler e a dinâmica dos corpos rígidos	143
8.1	Movimentos planares	143
8.2	Equações de Euler	146
8.3	Ângulos de Euler	148
8.4	Lançamento de disco	152
8.5	Piã simétrico	157
8.6	Exercícios sugeridos	163
9	Vínculos e o formalismo lagrangiano	167
9.1	Conta presa a um arame	167
9.2	Vínculos holonômicos e coordenadas generalizadas	171
9.3	Vínculos não holonômicos	174
9.4	Equações de Lagrange	176
9.5	Deslocamento virtual versus deslocamento real	182
9.6	Invariância por mudança de coord. generalizadas	184
9.7	Exercícios sugeridos	187
10	Aplicações do formalismo lagrangiano	189
10.1	Pêndulo com rótula sobre trilho semicircular	189
10.2	Pêndulo com haste elástica	191
10.3	Esfera rolando em ladeira curva	193
10.4	A força de Lorentz na abordagem lagrangiana	196
10.5	Partícula em parabolóide e campo magnético	199
10.6	Exercícios sugeridos	201
11	Cálculo variacional e o princípio da mínima ação	207
11.1	Equação de Euler	208
11.2	O princípio da mínima ação	215
11.3	Funcional com vínculo do tipo integral	217
11.4	Extremizando um funcional com vínculos algébricos	220
11.5	Exercícios sugeridos	224

12 Forças centrais	227
12.1 Massa reduzida	228
12.2 Conservação do momento angular	230
12.3 Equação de movimento e equação da órbita	233
12.4 Conservação de energia e a solução formal para a dinâmica	237
12.5 Análise gráfica das características da órbita	239
12.6 Órbitas limitadas e fechadas	243
12.7 Oscilador harmônico radial	246
12.8 Exercícios sugeridos	250
13 O problema de Kepler	255
13.1 A primeira lei de Kepler	255
13.2 Cônicas em coordenadas polares	258
13.3 Análise gráfica dos tipos de órbitas	261
13.4 Relação entre parâmetros físicos e geométricos	262
13.5 Terceira lei de Kepler	264
13.6 Vetor de Laplace-Runge-Lenz	265
13.7 Órbita na teoria da relatividade geral	268
13.8 Exercícios sugeridos	273
14 Pequenas oscilações – Caso unidimensional	275
14.1 Pequenas oscilações harmônicas	275
14.2 Pequenas oscilações não harmônicas	283
14.3 Correções não lineares: método perturbativo	285
14.4 Exercícios sugeridos	290
15 Pequenas oscilações – Caso geral	293
15.1 Modos e frequências normais	293
15.2 Coordenadas normais	301
15.3 Exercícios sugeridos	308
16 Introdução ao formalismo hamiltoniano	313
16.1 O hamiltoniano	313
16.2 Partícula carregada em campo eletromagnético	319
16.3 Princípio variacional hamiltoniano	320
16.4 A função ação	321
16.5 Hamiltonianos incompatíveis com a mínima ação	325
16.6 Espaço de fase estendido	326
16.7 O princípio de Maupertuis	329
16.8 Teorema do Virial	331
16.9 Exercícios sugeridos	338
17 Simetrias e o teorema de Nöther	343
17.1 Simetrias da mecânica newtoniana	343
17.2 Teorema de Nöther	347
17.3 Simetria \times simetria de Nöther	353
17.4 Exercícios sugeridos	357

18	Simetrias do \mathbb{R}^3, o grupo euclidiano	361
18.1	Grupos: relevância e definição	361
18.2	O Grupo E^3	362
18.3	Os geradores do grupo de Lie	364
18.4	Representando geradores através de op. diferenciais	368
18.5	A álgebra do grupo de Lie	370
18.6	Exercícios sugeridos	372
19	Parênteses de Poisson	375
19.1	Definição e prop. básicas dos parênteses de Poisson	375
19.2	Parênteses de Poisson e a evolução temporal	378
19.3	Parênteses de Poisson e o momento angular	379
19.4	Teorema de Poisson	381
19.5	Exercícios sugeridos	383
20	Transformações canônicas	387
20.1	Mudanças de variáveis e as derivadas parciais	388
20.2	Condições para a invariância das eqs. de Hamilton	390
20.3	Função geratriz de uma transformação canônica	395
20.4	Formalismo hamiltoniano na notação simplética	407
20.5	Exercícios sugeridos	409
21	Transformações canônicas infinitesimais	413
21.1	O gerador de uma transf. canônica infinitesimal	413
21.2	Momento angular como gerador das rotações	416
21.3	Hamiltoniano como gerador da evolução temporal	417
21.4	Simetrias de Nöther e as transformações canônicas	418
21.5	Função geratriz da evolução temporal finita	424
21.6	Transformações canônicas finitas	427
21.7	Exercícios sugeridos	431
22	Teoremas de Liouville e da recorrência de Poincaré	435
22.1	Teorema de Liouville	435
22.2	Teorema da recorrência de Poincaré	444
22.3	Exercícios sugeridos	447
23	Método de Hamilton-Jacobi	449
23.1	Motivação para o método de Hamilton-Jacobi	449
23.2	Descrição do método de Hamilton-Jacobi	450
23.3	Func. ação usando uma sol. da eq. de Hamilton-Jacobi	455
23.4	Separação de variáveis no método de Hamilton-Jacobi	457
23.5	Exercícios sugeridos	466
24	Variáveis de ação-ângulo	469
24.1	Sistemas periódicos \times sistemas oscilatórios	470
24.2	Projeções nos planos canônicos: libração e rotação	472
24.3	Definindo as variáveis de ação e ângulo	478
24.4	Aplicando o método das variáveis de ação-ângulo	482
24.5	Frequências degeneradas	489

24.6 Exercícios sugeridos	491
25 Invariantes adiabáticos	495
25.1 Variável ação como invariante adiabático	497
25.2 Mudanças adiabáticas no sistema massa-mola	502
25.3 Exercícios sugeridos	510
26 Teorias de calibre e os sistemas hamiltonianos vinculados	515
26.1 Vínculos primários e secundários	516
26.2 Superfície de vínculo	521
26.3 Hamiltoniano total e as equações de Hamilton	523
26.4 Encontrando os vínc. secund. no form. hamiltoniano	527
26.5 Separando os vínc. de primeira e de segunda classe	531
26.6 Transf. de calibre e os vínculos de primeira classe	535
26.7 Exercícios sugeridos	539
Referências e Sugestões de Leitura	543
Índice	545

Capítulo 1

Revisão matemática e notação

Os objetivos deste capítulo inicial são relembrar algumas ferramentas matemáticas básicas, com as quais se assume que o/a leitor/a já tenha tido contato mais aprofundado em outros cursos, e estabelecer o padrão de notação que será adotado no restante do livro.

1.1 O espaço vetorial \mathbb{R}^n

O \mathbb{R}^n é um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo dos reais. Isso significa que podemos introduzir uma base composta de n vetores, $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$, de forma que um elemento qualquer desse espaço, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, pode sempre ser escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{b}_1 + v_2 \mathbf{b}_2 + \dots + v_n \mathbf{b}_n = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{b}_i,$$

onde $\{v_i\}$ é um conjunto de n constantes reais. Tais constantes são denominadas as componentes do vetor \mathbf{v} na base $\{\mathbf{b}_i\}$. Essa base não é única. Na verdade, em qualquer espaço vetorial existem infinitas bases que podem ser adotadas. Por exemplo, se usarmos a base $\{\tilde{\mathbf{b}}_i\}$ definida por

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2, \quad \tilde{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \quad \tilde{\mathbf{b}}_j = \mathbf{b}_j \text{ se } j \geq 3,$$

então as componentes do vetor \mathbf{v} mudarão. Mais precisamente, teremos a seguinte expansão:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \tilde{\mathbf{b}}_i, \quad \text{com } \tilde{v}_1 = v_2 - v_1, \quad \tilde{v}_2 = 2v_1 - v_2 \text{ e } \tilde{v}_j = v_j \text{ se } j \geq 3.$$

Um produto interno em um espaço vetorial, também conhecido como produto escalar, é uma operação que age em dois vetores e fornece um número. Dados os vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} , o produto interno entre eles será denotado por $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$. O produto escalar deve sempre ser simétrico e bilinear, ou seja, sendo \mathbf{v} , \mathbf{w} e \mathbf{m} vetores quaisquer e α e β números reais quaisquer, então as seguintes relações devem ser válidas:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} \cdot (\alpha \mathbf{w} + \beta \mathbf{m}) = \alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \beta \mathbf{v} \cdot \mathbf{m}.$$

Um produto interno é dito positivo definido quando temos $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ para todo vetor \mathbf{v} diferente do vetor zero. Nesse caso, define-se a norma do vetor \mathbf{v} como sendo o seguinte número real e positivo:

$$|\mathbf{v}| \equiv \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Um vetor é dito normalizado quando sua norma é 1, em cujo caso muitas vezes ele é chamado de versor. Por exemplo, o vetor

$$\hat{\mathbf{v}} \equiv \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v}$$

é o versor na direção de \mathbf{v} , pois tem a mesma direção e sentido de \mathbf{v} e sua norma é um. Versores serão geralmente denotados por uma letra em negrito com um acento circunflexo acima. Dado um produto interno positivo definido, a seguinte relação é sempre válida:

$$|\mathbf{v}|^2 |\mathbf{w}|^2 \geq (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2,$$

a chamada desigualdade de Schwarz. Por conta disso, a razão $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})/(|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|)$ é sempre um número contido no intervalo $[-1, 1]$ e, portanto, podemos associar esse número ao cosseno de um ângulo θ . Dizemos então que θ é o ângulo entre os vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} . Sendo assim, vale a seguinte relação:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \theta.$$

Em particular, dois vetores são ortogonais entre si quando o produto interno entre eles se anula.

Todo espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno positivo definido admite bases cartesianas $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$, que são bases cujos produtos internos de seus elementos fornecem:

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Esse tipo de base também é chamada de ortonormal. Note que os elementos de uma base cartesiana são normalizados e ortogonais entre si. Dada uma base ortonormal $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$, podemos construir infinitas outras bases cartesianas aplicando transformações ortogonais. Voltaremos a esse ponto mais adiante.

1.2 Coordenadas cartesianas no \mathbb{R}^3

Considere o espaço em que vivemos. Podemos rotular os pontos desse espaço com três coordenadas, razão pela qual dizemos que nosso espaço é tridimensional. Sendo assim, é possível associar os pontos desse espaço a vetores do \mathbb{R}^3 . Para fazer isso, precisamos selecionar um ponto do espaço para ser nossa origem e os vetores serão as setas que conectam a origem aos pontos do espaço. Nessa construção, o vetor zero corresponde ao ponto onde está a origem. Além disso, se introduzirmos três setas ortogonais entre si e de mesmo tamanho, podemos associá-las a uma base ortonormal $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$. Um ponto do espaço pode, então, ser associado ao vetor posição \mathbf{r} expandido nessa base:

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{e}}_1 + y \hat{\mathbf{e}}_2 + z \hat{\mathbf{e}}_3,$$

onde $\{x, y, z\}$ são as chamadas coordenadas cartesianas do ponto cujo vetor associado é \mathbf{r} . Os vetores de uma base cartesiana do \mathbb{R}^3 serão muitas vezes escritos da seguinte forma alternativa: $\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$.

O vetor \mathbf{r} pode denotar a posição de uma partícula que executa determinada trajetória, mudando de posição com o passar do tempo. Nesse caso, as coordenadas cartesianas serão funções do tempo t , de maneira que podemos escrever

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \hat{\mathbf{e}}_x + y(t) \hat{\mathbf{e}}_y + z(t) \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Nesse tipo de situação, geralmente vamos adotar a mesma base cartesiana $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$ em todos os instantes de tempo, de forma que a derivada temporal da base fornece zero. Sendo assim, o vetor velocidade da partícula é dado por

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dy}{dt} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{dz}{dt} \hat{\mathbf{e}}_z = v_x \hat{\mathbf{e}}_x + v_y \hat{\mathbf{e}}_y + v_z \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Analogamente, a aceleração da partícula é dada por:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}_z = a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \hat{\mathbf{e}}_y + a_z \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Agora, suponha que f seja uma grandeza que dependa da posição da partícula e do tempo, ou seja, $f = f(\mathbf{r}, t)$. Equivalentemente, podemos escrever de forma mais explícita $f = f(x, y, z, t)$. Por exemplo, f pode denotar a energia da partícula ou a sua distância em relação a outra partícula. Então, se quisermos calcular a taxa de variação de f no tempo, temos que levar em consideração a dependência temporal explícita no tempo mas também a dependência implícita, pois as coordenadas cartesianas da partícula, $\{x, y, z\}$, também podem variar no tempo. Por isso, ao derivarmos f em relação ao tempo, temos que usar a regra da cadeia:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla f) + \frac{\partial f}{\partial t},$$

onde, no lado direito da equação acima, \mathbf{v} denota o vetor velocidade da partícula e ∇f é o chamado gradiente da função f , que, em coordenadas cartesianas, é definido por

$$\nabla f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (1.1)$$

Um campo vetorial é um mapa que associa a cada ponto do espaço vetorial um vetor. Por exemplo, o seguinte objeto é um campo vetorial no \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{A} = A_1(x, y, z) \hat{\mathbf{e}}_x + A_2(x, y, z) \hat{\mathbf{e}}_y + A_3(x, y, z) \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (1.2)$$

onde as funções A_i podem mudar de valor ponto a ponto. O vetor posição \mathbf{r} é um exemplo de campo vetorial, para o qual valem as seguintes relações: $A_1 = x$, $A_2 = y$ e $A_3 = z$. O gradiente de uma função também é um campo vetorial. Usando o operador gradiente e o produto interno, podemos definir um operador que leva campos vetoriais em funções no \mathbb{R}^3 ; a ação desse operador é denotada por $\nabla \cdot \mathbf{A}$ e definida da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}. \quad (1.3)$$

Denominamos a função $\nabla \cdot \mathbf{A}$ como sendo o divergente do campo vetorial \mathbf{A} . Por exemplo, $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$. Embora não apresentemos a prova aqui, é um fato que a definição do divergente é invariante pela escolha de base cartesiana. Ou seja, independente da base cartesiana que adotemos para expandir o campo vetorial \mathbf{A} , a função resultante será a mesma, desde que nas derivadas parciais da Eq. (1.3) usemos as coordenadas cartesianas definidas a partir da base cartesiana escolhida.

1.3 Rotações

Dada uma transformação linear, $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, para sermos capazes de obter sua atuação em um vetor qualquer, basta saber sua atuação em uma base. De fato, se conhecermos os vetores \mathbf{b}'_i definidos por

$$\mathbf{b}'_i \equiv \mathcal{T}(\mathbf{b}_i),$$

onde $\{\mathbf{b}_i\}$ é alguma base, então segue que, dado um vetor \mathbf{v} qualquer, temos:

$$\mathbf{v}' \equiv \mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathcal{T}\left(\sum_i v_i \mathbf{b}_i\right) = \sum_i v_i \mathcal{T}(\mathbf{b}_i) = \sum_i v_i \mathbf{b}'_i,$$

onde na segunda igualdade foi utilizado o fato de que a transformação \mathcal{T} é linear.

Uma rotação $\mathcal{R} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear nos vetores de um espaço vetorial munido de produto interno positivo definido que preserva a norma dos vetores. Note que, dados dois vetores quaisquer, \mathbf{v} e \mathbf{w} , vale a seguinte identidade:

$$|\mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2 + 2|\mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\theta.$$

Resolvendo essa equação para θ , o ângulo entre os vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} , chega-se ao seguinte resultado:

$$\theta = \arccos\left(\frac{|\mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 - |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2}{2|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}\right).$$

Dessa equação, concluímos que o ângulo entre dois vetores pode ser expresso apenas em termos de normas. Portanto, como uma rotação preserva a norma de todos os vetores, segue que os ângulos entre os vetores também são preservados por rotações. Além disso, o produto interno entre os vetores também é invariante pela ação das rotações. Ou seja, se $\mathbf{v}' = \mathcal{R}(\mathbf{v})$ e $\mathbf{w}' = \mathcal{R}(\mathbf{w})$, então segue que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}'.$$

Em particular, rotações levam bases cartesianas em bases cartesianas, já que após a rotação os vetores continuam tendo norma 1 e sendo ortogonais entre si. Um exemplo de uma rotação no espaço \mathbb{R}^3 é dada por

$$\mathcal{R}(\hat{\mathbf{e}}_1) = \cos\lambda \hat{\mathbf{e}}_1 + \text{sen}\lambda \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \mathcal{R}(\hat{\mathbf{e}}_2) = -\text{sen}\lambda \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\lambda \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \mathcal{R}(\hat{\mathbf{e}}_3) = \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (1.4)$$

onde λ é um número real qualquer. De fato, dessa forma temos, por exemplo,

$$\hat{\mathbf{e}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_1 = \cos^2\lambda + \text{sen}^2\lambda = 1, \quad \hat{\mathbf{e}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 = -\cos\lambda \text{sen}\lambda + \text{sen}\lambda \cos\lambda = 0, \quad \hat{\mathbf{e}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_3 = 0.$$

Além disso, ainda valem $\hat{\mathbf{e}}'_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 = 1$, $\hat{\mathbf{e}}'_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_3 = 1$ e $\hat{\mathbf{e}}'_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_3 = 0$, onde $\hat{\mathbf{e}}'_i \equiv \mathcal{R}(\hat{\mathbf{e}}_i)$. Essa rotação está ilustrada na Fig. 1.1, onde é possível ver que tal operação executa uma rotação de um ângulo λ nos vetores do plano xy , enquanto os vetores ao longo do eixo z não são afetados. A rotação mais geral no espaço \mathbb{R}^3 pode sempre ser escrita como a composição de uma rotação no plano xy , com uma rotação no plano yz seguida de uma rotação no plano zx . Mais geralmente, qualquer rotação no \mathbb{R}^n pode ser escrita como uma composição de rotações nos planos cartesianos.

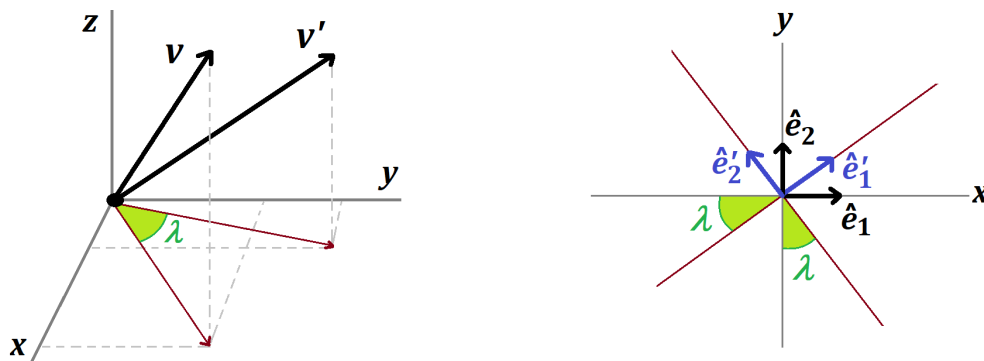


Figura 1.1: À esquerda, vemos a ação da rotação (1.4) em um vetor genérico \mathbf{v} . Vemos que a projeção desse vetor no plano xy sofre uma rotação de um ângulo λ no sentido anti-horário. Na ilustração à direita, vemos a ação dessa rotação na base cartesiana do plano xy . O vetor $\hat{\mathbf{e}}_3$ não é afetado pela rotação.

1.4 Produto vetorial

Uma vez introduzida alguma base cartesiana no \mathbb{R}^3 , podemos definir o produto vetorial. Tal produto age em um par de vetores e é denotado pelo símbolo \times . O resultado dessa operação é também um vetor do \mathbb{R}^3 . O produto vetorial é bilinear e antissimétrico, ou seja,

$$\mathbf{v} \times (\alpha \mathbf{w} + \beta \mathbf{m}) = \alpha (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \beta (\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v},$$

onde α e β são números reais quaisquer, ao passo que \mathbf{v} , \mathbf{w} e \mathbf{m} são vetores quaisquer do \mathbb{R}^3 . Uma consequência imediata da antissimetria é que o produto vetorial de um vetor consigo é sempre zero,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Mais geralmente, a antissimetria com a bilinearidade garantem que se dois vetores apontam na mesma direção, ou seja, se são proporcionais entre si, então o produto vetorial entre eles é nulo.

Dada uma base cartesiana $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, o produto vetorial é completamente definido através das seguintes relações:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (1.5)$$

O produto $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_1$, por exemplo, não precisa ser explicitado, pois é automaticamente zero por conta da antissimetria do produto vetorial. Analogamente, podemos afirmar que $\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = -\hat{\mathbf{e}}_3$, o que é consequência da Eq. (1.5) e da antissimetria. Então, por exemplo,

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2) \times (5\hat{\mathbf{e}}_2 - \hat{\mathbf{e}}_3) &= 5\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 - \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_3 + 10\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_2 - 2\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 \\ &= 5\hat{\mathbf{e}}_3 + \hat{\mathbf{e}}_2 + 0 - 2\hat{\mathbf{e}}_1 = 5\hat{\mathbf{e}}_3 + \hat{\mathbf{e}}_2 - 2\hat{\mathbf{e}}_1. \end{aligned}$$

É importante notar que o produto vetorial não é associativo. Isto é, em geral, temos

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{m}) \neq (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{m}.$$

De fato, um exemplo da não associatividade é explicitado a seguir:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \times (\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2) = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = -\hat{\mathbf{e}}_2, \quad (\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_1) \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0} \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}.$$

Portanto, se em alguma expressão houver uma composição de produtos vetoriais, é necessário que sejam colocados os parênteses a fim de estabelecer a ordem com a qual os produtos devem ser calculados, caso contrário a expressão estará mal definida.

Uma pergunta pertinente é a seguinte: se duas pessoas utilizarem bases cartesianas diferentes para definirem seus produtos vetoriais no \mathbb{R}^3 , esses produtos serão consistentes entre si? A resposta é: “geralmente sim”, a não ser que as bases cartesianas tenham orientações invertidas, em cujo caso os produtos vetoriais serão quase consistentes entre si, diferirão apenas por um sinal. Vejamos isso. Começemos pelo caso em que os produtos coincidem. Suponha que $\{\hat{e}_i\}$ e $\{\hat{e}'_i\}$ sejam as duas bases cartesianas relacionadas pela rotação definida na Eq. (1.4). Então, aquele que decidir adotar a base $\{\hat{e}_i\}$ para definir o produto vetorial usará a Eq. (1.5) para calcular os produtos. Por outro lado, quem preferir usar a base $\{\hat{e}'_i\}$ fará uso das seguintes identidades:

$$\hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2 = \hat{e}'_3, \quad \hat{e}'_2 \times \hat{e}'_3 = \hat{e}'_1, \quad \hat{e}'_3 \times \hat{e}'_1 = \hat{e}'_2. \quad (1.6)$$

Vejamos se essas duas definições são coerentes entre si. Por exemplo, calculemos $\hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2$ usando a definição (1.5) de produto vetorial em conjunto com a Eq. (1.4):

$$\begin{aligned} \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2 &= (\cos \lambda \hat{e}_1 + \operatorname{sen} \lambda \hat{e}_2) \times (-\operatorname{sen} \lambda \hat{e}_1 + \cos \lambda \hat{e}_2) = \cos^2 \lambda \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 - \operatorname{sen}^2 \lambda \hat{e}_2 \times \hat{e}_1 \\ &= \cos^2 \lambda \hat{e}_3 + \operatorname{sen}^2 \lambda \hat{e}_3 = \hat{e}_3 = \hat{e}'_3, \end{aligned}$$

o que está em pleno acordo com a Eq. (1.6). Analogamente, prova-se que o cálculo dos produtos $\hat{e}'_i \times \hat{e}'_j$ através da Eq. (1.5) conduz exatamente às identidades da Eq. (1.6). Por outro lado, um exemplo de base cartesiana que levaria a um produto vetorial distinto é a seguinte:

$$\tilde{e}_1 = -\hat{e}_1, \quad \tilde{e}_2 = -\hat{e}_2, \quad \tilde{e}_3 = -\hat{e}_3. \quad (1.7)$$

Primeiro, note que essa nova base é, de fato, cartesiana. Então, usando a definição (1.5) de produto vetorial, obtemos, por exemplo,

$$\tilde{e}_1 \times \tilde{e}_2 = (-\hat{e}_1) \times (-\hat{e}_2) = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 = -\tilde{e}_3,$$

que é o que deveríamos esperar a menos do sinal, que está trocado. Os demais produtos vetoriais também aparecerão todos com os sinais trocados. Dizemos que as bases $\{\hat{e}_i\}$ e $\{\tilde{e}_i\}$ têm orientações opostas. A transformação linear que conecta essas bases, dada na Eq. (1.7), é chamada de inversão espacial. Na seção anterior, foi argumentado que toda rotação leva uma base cartesiana em uma base cartesiana. Ocorre que o contrário não é verdadeiro. Além das rotações, a composição de uma rotação qualquer com a operação de inversão espacial também leva base cartesiana em base cartesiana, embora inverta a orientação. As transformações lineares que preservam o produto interno são denominadas transformações ortogonais. As rotações formam um subconjunto das transformações ortogonais. O subconjunto complementar é formado pelas transformações que são a composição de uma rotação com a inversão espacial.

Usando o produto vetorial e o operador gradiente, é possível definir um operador chamado de rotacional que age em campos vetoriais e fornece como resultado campos vetoriais. Sua definição é a seguinte:

$$\nabla \times \mathbf{A} \equiv \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \hat{e}_z.$$

O campo vetorial $\nabla \times \mathbf{A}$ é denominado o rotacional de \mathbf{A} . A definição do rotacional é invariante por mudança de base cartesiana, desde que as bases cartesianas tenham a mesma orientação, caso contrário haverá uma discrepância no sinal do rotacional.

Antes de prosseguir, é pertinente comentar que o produto vetorial só pode ser definido no \mathbb{R}^3 ; não há um produto análogo que possa ser definido de forma consistente (canônica) no espaço \mathbb{R}^n para $n \neq 3$.

1.5 Série de Taylor

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **suave** em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ se essa função e todas as suas derivadas forem contínuas no ponto x_0 . Suponha que $f(x)$ e $h(x)$ sejam funções suaves em x_0 , então é fácil ver que

$$a f(x) + b h(x)$$

é uma função suave em x_0 , quaisquer que sejam as constantes reais a e b . Ou seja, combinações lineares de funções suaves em um ponto também são funções suaves nesse ponto. Isso prova que o conjunto das funções suaves em um ponto x_0 forma um espaço vetorial. Esse espaço vetorial tem dimensão infinita e uma base de funções para esse espaço é dada por:

$$\{1, (x - x_0), (x - x_0)^2, (x - x_0)^3, \dots\}.$$

Portanto, se $f(x)$ é suave em x_0 , segue que essa função pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(x - x_0)^p. \quad (1.8)$$

De fato, não é difícil obter as constantes a_p que tornam a igualdade acima verdadeira. Por exemplo, avaliando a Eq. (1.8) no ponto x_0 , obtemos $f(x_0) = a_0$, o que fornece uma expressão para a_0 . Por sua vez, tomando a derivada da Eq. (1.8) em relação a x e depois avaliando o resultado em x_0 , encontramos:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 \dots \Rightarrow f'(x_0) = a_1,$$

o que fornece uma expressão para a_1 . Agora, derivando a expressão para $f'(x)$ e avaliando o resultado em x_0 , obtemos $f''(x_0) = 2a_2$. Analogamente, tomando q derivadas da Eq. (1.8) e depois assumindo $x = x_0$, obtemos:

$$f^{(q)}(x_0) \equiv \left. \frac{d^q f}{dx^q} \right|_{x=x_0} = q! a_q \Rightarrow a_q = \frac{1}{q!} f^{(q)}(x_0).$$

Portanto, qualquer função $f(x)$ suave em x_0 pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} (x - x_0)^p.$$

A expressão no lado direito da equação acima é denominada a **série de Taylor** da função f em torno do ponto x_0 .

Por exemplo, consideremos a série de Taylor da função $f(x) = e^{\alpha x}$ em torno do ponto $x_0 = 0$. As derivadas dessa função são dadas por $f^{(p)}(x) = \alpha^p e^{\alpha x}$, de forma que a série de Taylor é dada por

$$e^{\alpha x} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha^p}{p!} x^p. \quad (1.9)$$

Agora, consideremos a função $h(x) = 1/x$ com $x_0 = 1$. É fácil provar que $h^{(p)}(1) = (-1)^p p!$, de forma que sua série de Taylor em torno de $x_0 = 1$ é a seguinte:

$$\frac{1}{x} = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + \dots = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (x - 1)^p. \quad (1.10)$$

Uma das principais utilidades das séries de Taylor é seu uso para realizar aproximações de funções quando estamos interessados em pontos que estão na vizinhança do ponto de expansão, x_0 , algo que será abordado em breve. Outra aplicação importante é para provar certas identidades que são relevantes na Física e na Matemática. Por exemplo, a chamada fórmula de Euler,

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \quad (1.11)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, pode ser facilmente provada expandindo ambos os lados da equação em série de Taylor e observando que ambas as séries coincidem. Ou, equivalentemente, basta provar que ambas as funções e todas as suas derivadas têm o mesmo valor quando avaliadas no ponto $x = 0$, por exemplo.

É importante, no entanto, notar que nem sempre a série de Taylor é bem definida para qualquer x . De fato, em geral, a soma das infinitas parcelas que compõem a série só converge para x suficientemente próximo de x_0 . Um teste-padrão para saber se a soma infinita

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} A_p$$

tem valor bem definido é o chamado teste da razão, que afirma que, se A_{p+1}/A_p tiver módulo menor que um no limite $p \rightarrow \infty$, então a série convergirá. No caso da série de Taylor, temos:

$$\frac{A_{p+1}}{A_p} = \frac{\frac{f^{(p+1)}(x_0)}{(p+1)!} (x - x_0)^{p+1}}{\frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} (x - x_0)^p} = \frac{f^{(p+1)}(x_0)}{f^{(p)}(x_0)} \cdot \frac{(x - x_0)}{p + 1}.$$

Portanto, se assumirmos que $|x - x_0|$ é suficientemente pequeno, sempre podemos fazer o módulo da expressão anterior ser menor que um. Por exemplo, a série da Eq. (1.10) só converge para $|x - 1| < 1$, ao passo que a série da exponencial $e^{\alpha x}$ em torno de $x = 0$, dada na Eq. (1.9), converge para qualquer valor de x .

Seja $f(x)$ uma função suave em x_0 e denotemos por ϵ o desvio de x em relação a x_0 , ou seja, $\epsilon = x - x_0$. Então, a série de Taylor de $f(x)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = f(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + f'(x_0)\epsilon + \frac{1}{2}f''(x_0)\epsilon^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)\epsilon^3 + \dots \quad (1.12)$$

Agora, note que, se ϵ é um número real cujo módulo é menor que um, $|\epsilon| < 1$, então vale

$$|\epsilon| > |\epsilon^2| > |\epsilon^3| > \dots,$$

ou seja, quanto maior a potência de ϵ , menor seu módulo. Por exemplo, se $\epsilon = 0.1$, então $\epsilon^2 = 0.01$, $\epsilon^3 = 0.001$ e assim por diante. Logo, para ϵ suficientemente pequeno, quanto maior a potência de ϵ na série de Taylor (1.12), menor o módulo do termo e, portanto, menor a relevância do termo. Então, se ϵ for pequeno, podemos desprezar potências altas de ϵ e considerar a série de Taylor apenas até a potência ϵ^n :

$$f(x_0 + \epsilon) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\epsilon + \frac{1}{2}f''(x_0)\epsilon^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\epsilon^n. \quad (1.13)$$

Dizemos então que a função $f(x)$ foi aproximada em série de Taylor até ordem n . Por exemplo, a aproximação de $f(x)$ em primeira ordem é a seguinte:

$$f(x_0 + \epsilon) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \epsilon.$$

Quanto maior a ordem de aproximação, ou seja, quanto maior o n na Eq. (1.13), mais fidedigna será a aproximação. Muitas vezes, a série de Taylor é escrita da seguinte forma:

$$f(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + f'(x_0) \epsilon + O(\epsilon^2).$$

A parcela $O(\epsilon^2)$ denota todos os termos de ordem quadrática em ϵ e de ordem superior. De forma geral, se escrevermos $O(\epsilon^n)$ queremos denotar termos com potência ϵ^n ou ordem superior, como ϵ^{n+1} e assim por diante.

Se uma função não for suave em um determinado ponto x_0 , ela não admitirá série de Taylor em torno desse ponto, até porque a própria função não terá valor bem definido em x_0 ou pelo menos uma de suas derivadas não poderá ser calculada em x_0 , de forma que ao menos um dos coeficientes a_p não poderá ser obtido. Por exemplo, a função $h(x) = 1/x$ não é suave em $x = 0$, pois seu limite à esquerda é $-\infty$ e seu limite à direita é ∞ . Então, ela não admite série de Taylor em torno de $x = 0$. Todavia, essa mesma função admite série de Taylor em torno de qualquer outro ponto da reta real. Por exemplo, na Eq. (1.10) vimos a série de Taylor dessa função em torno de $x_0 = 1$. Analogamente, a função $f(x) = \sqrt{x}$ não admite série de Taylor em torno de $x_0 = 0$, pois suas derivadas divergem nesse ponto.

Se tivermos uma função de duas variáveis, $f = f(x, y)$, que seja suave no ponto (x_0, y_0) , também será possível introduzir sua série de Taylor em torno desse ponto. Mais precisamente, valerá a seguinte igualdade:

$$f(x_0 + \epsilon_x, y_0 + \epsilon_y) = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \frac{f_0^{(n_x, n_y)}}{n_x! n_y!} \epsilon_x^{n_x} \epsilon_y^{n_y}, \quad (1.14)$$

onde na equação acima temos

$$f_0^{(n_x, n_y)} \equiv \left. \frac{\partial^{n_x}}{\partial x^{n_x}} \frac{\partial^{n_y}}{\partial y^{n_y}} f \right|_{(x, y) = (x_0, y_0)}.$$

Em particular, fazendo $\epsilon_y = 0$ na Eq. (1.14) recuperamos a série de Taylor unidimensional na variável x . Uma série de Taylor análoga àquela mostrada na Eq. (1.14) é válida para um número arbitrário de variáveis.

1.6 Equações diferenciais

As equações diferenciais têm um papel absolutamente central na formulação matemática de essencialmente qualquer teoria física, e a mecânica clássica não é exceção. Nesta seção, focaremos as equações diferenciais que têm a seguinte forma:

$$a_2 \frac{d^2 X}{dt^2} + a_1 \frac{dX}{dt} + a_0 X = F(t), \quad (1.15)$$

onde os coeficientes a_i são constantes e $F(t)$ é uma função conhecida. Trata-se de uma equação diferencial ordinária (EDO) linear e de segunda ordem com coeficientes constantes. O objetivo quando nos deparamos com este tipo de problema é encontrar todas as funções $X(t)$ que resolvem a equação acima.

Notemos o seguinte: se $X(t)$ obedecer à Eq. (1.15), então valerá a seguinte relação:

$$X'' = \frac{1}{a_2} [F - a_1 X' - a_0 X]. \quad (1.16)$$

Portanto, se conhecermos os valores de X e X' em um ponto $t = t_0$, então poderemos determinar X'' nesse ponto através da Eq. (1.16). Além disso, derivando a Eq. (1.16) em relação a t sucessivas vezes, poderemos determinar $X^{(n)}$ em termos das derivadas de ordem menor. Logo, se conhecermos os valores de X e X' em um ponto $t = t_0$, é possível determinar o valor de $X^{(n)}(t_0)$ para qualquer $n \geq 2$. Através desses valores poderemos construir a série de Taylor de $X(t)$ em torno de t_0 e, portanto, determinar a função que resolve a equação diferencial. Em suma, para estabelecer por completo uma solução $X(t)$ basta fixar os valores de X e X' em algum ponto $t = t_0$. Ou seja, a solução geral da equação depende de duas constantes, $X(t_0)$ e $X'(t_0)$, as chamadas condições iniciais ou condições de contorno da equação diferencial. Como um exemplo dessa conclusão, consideremos a seguinte equação diferencial: $X'' = 1$. Sua solução é um tanto quanto trivial. Integrando ambos os lados dessa equação em relação ao tempo, encontra-se: $X' = t + c_1$, onde c_1 é alguma constante. Em seguida, integrando ambos os lados da equação $X' = t + c_1$ em relação ao tempo, conclui-se que

$$X(t) = \frac{1}{2} t^2 + c_1 t + c_2,$$

onde c_2 é alguma constante. Essa é a chamada **solução geral** da equação diferencial $X'' = 1$. Note que essa solução depende de duas constantes que, a princípio, podem ser quaisquer. Tais constantes podem ser fixadas impondo condições iniciais ao problema. Por exemplo, se estivermos interessados em soluções tais que $X(0) = 1$ e $X'(0) = 2$, então teremos que adotar $c_1 = 2$ e $c_2 = 1$. A solução será, portanto, $X(t) = \frac{1}{2} t^2 + 2t + 1$, que é uma **solução particular** para a equação diferencial. Via de regra, uma equação diferencial de ordem n deverá ter em sua solução geral n constantes arbitrárias, as chamadas constantes de integração.

No caso especial em que $F(t) = 0$ na Eq. (1.15), dizemos que a equação diferencial é **homogênea**. Em equações lineares e homogêneas, se $X_1(t)$ e $X_2(t)$ forem duas soluções particulares para a equação diferencial, então é imediato provar que

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) \quad (1.17)$$

também será solução da mesma equação, quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2 . Portanto, se X_1 e X_2 forem duas soluções particulares independentes da equação diferencial homogênea de segunda ordem, então a solução (1.17) será a solução geral, pois contém duas constantes arbitrárias.

Começemos nossa introdução aos métodos para resolver as equações diferenciais focando o caso homogêneo. Para resolver equações da forma

$$a_2 X'' + a_1 X' + a_0 X = 0, \quad (1.18)$$

vamos usar o *ansatz* (ou seja, o palpite) $X(t) = e^{\beta t}$, onde β é uma constante. Então, inserindo esse *ansatz* na Eq. (1.18), chega-se à seguinte igualdade:

$$(a_2 \beta^2 + a_1 \beta + a_0) e^{\beta t} = 0.$$

Como a equação acima deve valer para qualquer t , conclui-se que o termo entre parênteses deve ser zero. Portanto, o nosso problema se resume a resolver uma equação algébrica, determinar os valores de β que fazem o polinômio de grau dois $(a_2 \beta^2 + a_1 \beta + a_0)$ se anular. Em geral, há duas soluções para esse problema, pois polinômios de ordem dois sempre têm duas raízes. Denotando essas raízes por β_1 e β_2 , conclui-se que $X_1(t) = e^{\beta_1 t}$ e $X_2(t) = e^{\beta_2 t}$ são soluções particulares para a equação diferencial homogênea. A solução geral, por sua vez, é dada por:

$$X(t) = c_1 e^{\beta_1 t} + c_2 e^{\beta_2 t}. \quad (1.19)$$

Então, por exemplo, para resolver a equação diferencial $X'' + X - 6X = 0$ precisamos encontrar as raízes do polinômio $\beta^2 + \beta - 6$. Usando a fórmula de Bhaskara, vemos que essas raízes são $\beta = 2$ e $\beta = -3$. Logo, a solução geral para essa equação diferencial é

$$X(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}.$$

Um cenário especial ocorre quando as raízes do polinômio são degeneradas, ou seja, $\beta_1 = \beta_2$. Nesse caso, as soluções X_1 e X_2 não são mais independentes e a solução (1.19) não será mais a solução geral, pois terá, efetivamente, apenas uma constante de integração, já que a solução poderá ser escrita da seguinte forma:

$$X(t) = (c_1 + c_2) e^{\beta_1 t} = \tilde{c}_1 e^{\beta_1 t},$$

onde $\tilde{c}_1 \equiv c_1 + c_2$. Nesse cenário especial, devemos procurar uma segunda solução particular independente. A fim de ganharmos intuição, analisemos a seguinte equação diferencial:

$$X'' - (2a + \epsilon)X' + (a^2 + a\epsilon)X = 0,$$

onde a e ϵ são constantes. Usando o método que acabamos de introduzir, conclui-se que $X_1 = e^{at}$ e $X_2 = e^{(a+\epsilon)t}$ são soluções particulares. Note que no limite $\epsilon \rightarrow 0$ as duas soluções coincidem. Como uma combinação linear de soluções é uma solução, para equações diferenciais lineares e homogêneas, segue que a combinação a seguir é uma solução:

$$X(t) = \frac{1}{\epsilon} [e^{(a+\epsilon)t} - e^{at}] = \frac{e^{at}}{\epsilon} [e^{\epsilon t} - 1] = \frac{e^{at}}{\epsilon} \left[\epsilon t + \frac{1}{2} (\epsilon t)^2 + O(\epsilon^3) \right].$$

Tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$ da equação acima, obtemos $X \rightarrow t e^{at}$. Portanto, quando $\epsilon = 0$, caso em que as raízes ficam degeneradas, temos que $t e^{at}$ também é solução, além da solução e^{at} . Em suma, quando $\beta_1 = \beta_2$, a solução geral da equação homogênea é

$$X(t) = c_1 e^{\beta_1 t} + c_2 t e^{\beta_1 t} = (c_1 + c_2 t) e^{\beta_1 t}. \quad (1.20)$$

Um outro caso especial, além do caso degenerado que acabamos de tratar, é quando as raízes β_1 e/ou β_2 são complexas. Aqui, vamos assumir que os coeficientes a_0 , a_1 e a_2 , que aparecem na equação diferencial (1.18), são todos reais. Então, se β for uma raiz, seu conjugado complexo, β^* , também será uma raiz. Isso significa que se $\beta_1 = b_1 + ib_2$ for uma raiz, com b_1 e b_2 reais e $b_2 \neq 0$, então a segunda raiz será $\beta_2 = b_1 - ib_2$. Nesse caso, a solução geral será:

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1 e^{\beta_1 t} + c_2 t e^{\beta_2 t} = e^{b_1 t} [c_1 e^{ib_2 t} + c_2 e^{-ib_2 t}] \\ &= e^{b_1 t} [(c_1 + c_2) \cos(b_2 t) + i(c_1 - c_2) \sin(b_2 t)], \end{aligned}$$

$F = P_n(t) e^{\gamma t}$	$\gamma \neq \beta_1, \beta_2$	$X_p = \tilde{P}_n(t) e^{\gamma t}$
$F = P_n(t) e^{\gamma t}$	$\gamma = \beta_1 \neq \beta_2$	$X_p = \tilde{P}_n(t) t e^{\gamma t}$
$F = P_n(t) e^{\gamma t}$	$\gamma = \beta_1 = \beta_2$	$X_p = \tilde{P}_n(t) t^2 e^{\gamma t}$
$F = P_n(t) \cos(\gamma t)$	$\gamma \neq \beta_1, \beta_2$	$X_p = \tilde{P}_n(t) \cos(\gamma t) + \hat{P}_n(t) \sin(\gamma t)$
$F = P_n(t) \sin(\gamma t)$	$\gamma \neq \beta_1, \beta_2$	$X_p = \tilde{P}_n(t) \cos(\gamma t) + \hat{P}_n(t) \sin(\gamma t)$

Tabela 1.1: Essa tabela mostra os ansatz X_p que devemos adotar para diferentes opções de fontes $F(t)$ que podem aparecer na equação diferencial (1.15).

onde na última igualdade foi utilizada a fórmula de Euler (1.11). Então, definindo as constantes $\tilde{c}_1 \equiv c_1 + c_2$ e $\tilde{c}_2 \equiv i(c_1 - c_2)$, segue que a solução geral pode ser escrita da seguinte forma:

$$X(t) = \tilde{c}_1 e^{b_1 t} \cos(b_2 t) + \tilde{c}_2 e^{b_1 t} \sin(b_2 t), \quad (1.21)$$

onde \tilde{c}_1 e \tilde{c}_2 são constantes complexas quaisquer. Inclusive, se essas constantes forem reais, a solução $X(t)$ será real, que é o desejável no domínio da mecânica clássica.

Uma vez tratados esses casos especiais, estamos prontos para considerar a equação diferencial não homogênea (1.15). Nesse caso, é fácil ver que se X_p é uma solução particular dessa equação e X_h é uma solução para a parte homogênea dessa equação, ou seja, X_h é uma solução para (1.18), então a soma $X = X_p + X_h$ também será solução da equação não homogênea (1.15). Portanto, se X_1 e X_2 forem soluções independentes da equação homogênea, a solução geral da equação não homogênea será:

$$X(t) = X_p(t) + c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t).$$

Podemos afirmar isso porque tal função obedece à equação desejada e possui duas constantes arbitrárias. A questão agora é: como devemos fazer para encontrarmos uma solução particular $X_p(t)$? O procedimento dependerá do formato da função fonte $F(t)$. Por exemplo, se a fonte tiver a forma $F = P_n(t) e^{\gamma t}$, onde $P_n(t)$ é algum polinômio de grau n em t e $\gamma \neq \beta_1, \beta_2$, então devemos adotar o ansatz $X_p = \tilde{P}_n(t) e^{\gamma t}$, onde \tilde{P}_n é algum polinômio de grau n em t cujos $(n + 1)$ coeficientes são desconhecidos. Para determinar esses coeficientes, precisamos inserir o ansatz na equação diferencial e então resolver a equação algébrica que resultará. Por sua vez, se $F = P_n(t) e^{\gamma t}$ e $\gamma = \beta_1 \neq \beta_2$, então devemos adotar o ansatz $X_p = \tilde{P}_n(t) t e^{\gamma t}$. Finalmente, se $F = P_n(t) e^{\gamma t}$ com $\gamma = \beta_1 = \beta_2$, então o ansatz deve ser $X_p = \tilde{P}_n(t) t^2 e^{\gamma t}$. Outras opções de F que são combinações lineares das opções já tratadas podem ser resolvidas considerando combinações lineares dos respectivos ansatz. Por exemplo, se $F = P_n(t) \cos(\gamma t)$, então podemos usar o fato de que $\cos(\gamma t)$ é uma combinação linear de $e^{i\gamma t}$ e $e^{-i\gamma t}$. Portanto, devemos tentar um ansatz do tipo $X_p = \tilde{P}_n(t) e^{i\gamma t} + \hat{P}_n(t) e^{-i\gamma t}$, onde os polinômios \tilde{P}_n e \hat{P}_n devem ambos ter seus coeficientes determinados. Como $e^{\pm i\gamma t}$ são combinações lineares de $\cos(\gamma t)$ e $\sin(\gamma t)$, segue que podemos, equivalentemente, usar o ansatz $X_p = \tilde{P}_n(t) \cos(\gamma t) + \hat{P}_n(t) \sin(\gamma t)$. Outros tipos de funções $F(t)$ não serão cobertas nesta introdução. A Tabela 1.1 resume os casos descritos neste parágrafo.

A melhor forma de entender o conteúdo do parágrafo anterior é através de um exemplo. Consideremos a seguinte equação diferencial para $X(t)$:

$$X'' + X' - 6X = 5t e^{2t}. \quad (1.22)$$

O primeiro passo para achar a solução geral dessa equação é resolver sua parte homogênea, algo que já foi feito no início desta seção. A solução da equação homogênea fornece $\beta_1 = 2$ e $\beta_2 = -3$. Nesse caso, a fonte tem a forma $F = P_1(t) e^{\gamma t}$, onde $P_1 = 5t$ é um polinômio de grau 1. Além disso, vemos que $\gamma = 2 = \beta_1$. Portanto, nosso ansatz deve ser

$$X_p(t) = \tilde{P}_1(t) t e^{\gamma t} = (a + bt) t e^{2t} = (at + bt^2) e^{2t}.$$

Na equação anterior, $\tilde{P}_1(t)$ foi substituído por $(a + bt)$, que é a forma mais geral de um polinômio de grau 1. As constantes a e b devem ser determinadas substituindo esse ansatz na equação diferencial (1.22). Fazendo isso, chega-se à seguinte igualdade, que deve ser válida para um t arbitrário:

$$5te^{2t} = X_p'' + X_p' - 6X_p = [(5a + 2b) + 10bt] e^{2t}.$$

Considerando então que as funções t e t^2 são linearmente independentes, vemos que a equação acima implica que devemos escolher a e b de forma que:

$$(5a + 2b) = 0 \quad \text{e} \quad 10b = 5 \quad \Rightarrow \quad a = -1/5 \quad \text{e} \quad b = 1/2.$$

Portanto, a solução geral para a equação diferencial (1.22) é dada por:

$$X(t) = X_p + c_1 X_1 + c_2 X_2 = \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{5} \right) t e^{2t} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t},$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

1.7 Exercícios sugeridos

Exercício 1

Dada a rotação da Eq. (1.4), que leva a base cartesiana $\{\hat{e}_i\}$ na base $\{\hat{e}'_i\}$, faça o que é pedido.

- Obtenha expressões para as coordenadas $\{x', y', z'\}$ em termos das coordenadas $\{x, y, z\}$.
- Demonstre que, dada uma função qualquer $f(\mathbf{r})$, seu gradiente fornece o mesmo campo vetorial quer usemos a base $\{\hat{e}_i\}$ ou a base $\{\hat{e}'_i\}$ na definição de gradiente dada na Eq. (1.1).
- Demonstre que, dado um campo vetorial \mathbf{A} , seu divergente fornece a mesma função quer usemos a base $\{\hat{e}_i\}$ ou a base $\{\hat{e}'_i\}$.

Exercício 2 – *resolvido*

Considere a transformação linear $\mathcal{R} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja ação em um vetor genérico $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$ é dada por:

$$\mathcal{R}(\mathbf{V}) = A_\phi \mathbf{V} + B_\phi (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} + \cos \phi \mathbf{V} \times \hat{\mathbf{n}},$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor fixo de norma um e ϕ é um parâmetro fixo. Sabendo que essa transformação é uma rotação em torno do versor $\hat{\mathbf{n}}$, determine quais devem ser as funções A_ϕ e B_ϕ .

Exercício 3

Demonstre que o rotacional do gradiente de uma função é sempre zero e que o divergente do rotacional de um campo vetorial é sempre zero.

Exercício 4

Prove que o vetor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ é sempre ortogonal aos vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} .

Exercício 5

Sendo $f(\mathbf{r}) = e^{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}$, onde \mathbf{v} é um vetor constante do \mathbb{R}^3 , obtenha a série de Taylor de $f(\mathbf{r} + \epsilon \hat{\mathbf{n}})$ até segunda ordem no parâmetro ϵ , onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um versor constante.

Exercício 6

Encontre a solução geral para a seguinte equação diferencial:

$$X'' + 16X = t^2 e^{4t}.$$

Solução do Exercício 2

Se a rotação é em torno do eixo paralelo a $\hat{\mathbf{n}}$, então qualquer vetor nessa direção deve ser invariante pela ação da transformação linear. Em particular, deve valer $\mathcal{R}(\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}}$. Impondo essa identidade na definição da ação de \mathcal{R} , obtemos:

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathcal{R}(\hat{\mathbf{n}}) = A_\phi \hat{\mathbf{n}} + B_\phi \hat{\mathbf{n}} + 0 \Rightarrow A_\phi + B_\phi = 1.$$

Agora, seja $\hat{\mathbf{e}}$ um versor que é ortogonal a $\hat{\mathbf{n}}$, ou seja, $\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$. A ação da transformação linear nesse versor é dada por:

$$\mathcal{R}(\hat{\mathbf{e}}) = A_\phi \hat{\mathbf{e}} + 0 + \cos \phi (\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{n}}).$$

Então, calculando a norma ao quadrado de $\mathcal{R}(\hat{\mathbf{e}})$, temos:

$$|\mathcal{R}(\hat{\mathbf{e}})|^2 = A_\phi^2 + \cos^2 \phi |\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{n}}|^2 + 2 A_\phi \cos \phi \hat{\mathbf{e}} \cdot (\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{n}}). \quad (1.23)$$

Ocorre que o vetor $(\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{n}})$ é sempre ortogonal a $\hat{\mathbf{e}}$ e a $\hat{\mathbf{n}}$ (exercício 4), de forma que o último termo na expressão acima é igual a zero. Além disso, como $\hat{\mathbf{e}}$ é ortogonal a $\hat{\mathbf{n}}$, segue que $|\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{n}}| = 1$. De fato, essa última afirmação pode ser extraída do fato de que, dados dois vetores quaisquer, \mathbf{v} e \mathbf{w} , vale a seguinte identidade:

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \sin \theta,$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{v} e \mathbf{w} . Sendo assim, a Eq. (1.23) fornece:

$$|\mathcal{R}(\hat{\mathbf{e}})|^2 = A_\phi^2 + \cos^2 \phi.$$

Como \mathcal{R} é uma rotação, segue que $|\mathcal{R}(\hat{\mathbf{e}})| = |\hat{\mathbf{e}}| = 1$. Portanto,

$$A_\phi^2 + \cos^2 \phi = 1 \Rightarrow A_\phi = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \pm \sin \phi.$$

Por sua vez, usando a identidade $A_\phi + B_\phi = 1$, concluímos que

$$B_\phi = 1 - A_\phi = 1 \mp \sin \phi.$$

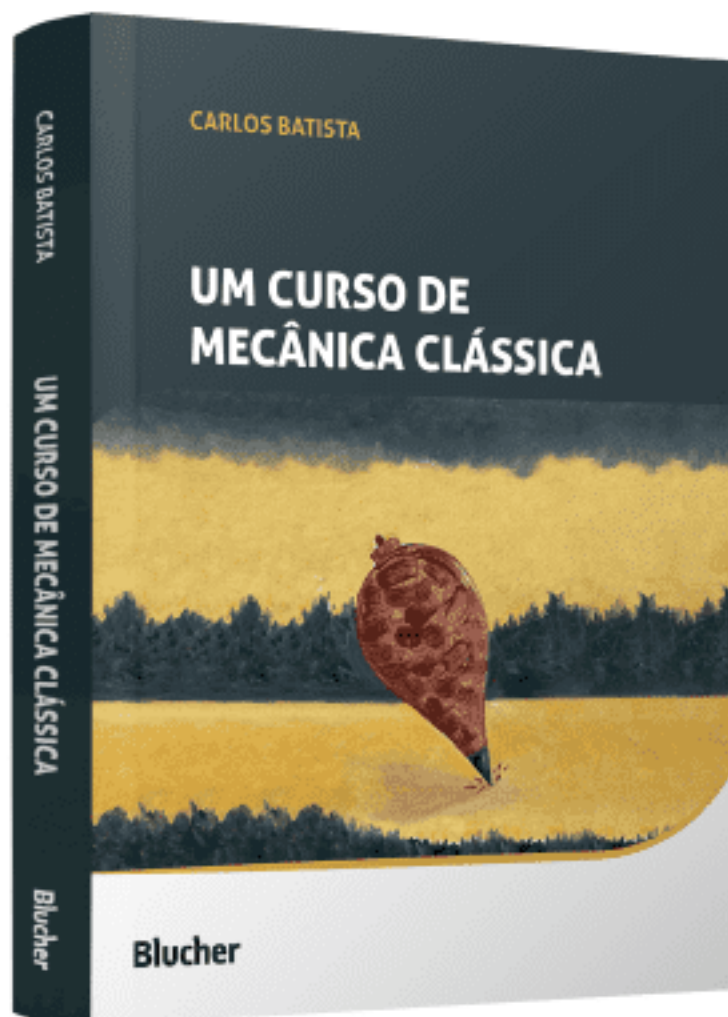
Este livro tem o objetivo de introduzir os formalismos lagrangiano e hamiltoniano, em uma linguagem atual, a fim de abordar problemas de mecânica clássica, como o estudo das oscilações de pêndulos, a obtenção das órbitas dos corpos celestes, a análise da dinâmica de um corpo rígido, entre muitos outros.

O público-alvo são desde universitários a partir do segundo ano de graduação até estudantes em início de mestrado, nos cursos de Física, Matemática e Engenharias. Nesta obra, os conteúdos teóricos são sempre acompanhados de exemplos que ilustram explicitamente a aplicação das ferramentas introduzidas ao longo do texto. Além disso, ao final de cada capítulo, exercícios são sugeridos e parte deles conta com uma resolução completa. Alguns dos tópicos tratados neste livro são: uma discussão crítica e madura sobre as leis de Newton; oscilações amortecidas e ressonância; referenciais acelerados e a força de Coriolis; forças centrais; o teorema de Nöther; uma breve introdução aos grupos de Lie; transformações canônicas; o método de Hamilton-Jacobi; sistemas hamiltonianos com vínculos. Importantes destaques desta obra são a ênfase dada ao conceito de simetria ao longo de todo o livro e o capítulo dedicado aos sistemas com liberdade de calibre, temas de extrema relevância na Física teórica moderna.



www.blucher.com.br

Blucher



Clique aqui e:

[VEJA NA LOJA](#)

Um curso de mecânica clássica

Carlos Batista

ISBN: 9788521221821

Páginas: 594

Formato: 21 x 28 cm

Ano de Publicação: 2023
