SBA PRESS

JULIO ELIAS NORMEY-RICO
RODOLFO CÉSAR COSTA FLESCH
DANIEL MARTINS LIMA
VINÍCIUS BERNDSEN PECCIN

CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO

TÓPICOS AVANÇADOS

Blucher

VOLUME 2

sociedade brasileira de AUTOMÁTICA

Julio Elias Normey-Rico
Rodolfo César Costa Flesch
Daniel Martins Lima
Vinícius Berndsen Peccin

CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO

Tópicos Avançados

Volume 2

Controle preditivo baseado em modelo: volume 2: tópicos avançados

© 2024 Julio Elias Normey-Rico, Rodolfo César Costa Flesch, Daniel Martins Lima e Vinícius Berndsen Peccin

Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher
Editor Eduardo Blucher
Coordenador editorial Rafael Fulanetti
Coordenação de produção Andressa Lira
Pré-produção: Aline Fernandes
Produção editorial Lidiane Pedroso Gonçalves
Diagramação Daniel Martins Lima
Revisão de texto Maurício Katayama
Capa Laércio Flenic
Imagem de capa iStockphoto

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4° andar
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa,* Academia Brasileira de Letras, julho de 2021.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Controle preditivo baseado em modelo : volume 2 : tópicos avançados / Julio Elias Normey-Rico ... [et al]. – São Paulo: Blucher, 2024.
432 p. : il.

Bibliografia
ISBN 978-85-212-2500-3

1. Engenharia 2. Controle preditivo 1. Normey-Rico, Julio Elias

24-5368 CDD 620

Índice para catálogo sistemático:
1. Engenharia

Conteúdo

1 Introdução **11**

2 Revisitando o MPC SISO **13**
2.1 MPC SISO – Ideias básicas e notação . . . 13
2.2 Um exemplo motivador . . . 17
2.3 Comentários finais . . . 21
2.4 Exercício proposto . . . 22

3 DMC e GPC multivariáveis **23**
3.1 Obtenção da lei de controle . . . 28
3.2 DMC multivariável . . . 39
3.2.1 Cálculo das predições no caso estável . . . 40
3.2.2 Ação antecipativa (*Feed-forward*) . . . 49
3.2.3 DMC multivariável recursivo . . . 52
3.2.4 DMC filtrado . . . 57
3.2.5 DMC MIMO para plantas integradoras . . . 60
3.2.6 DMC generalizado multivariável . . . 62
3.3 GPC multivariável . . . 70
3.3.1 Cálculo das predições (caso $C_l(z^{-1}) = 1$) . . . 76
3.3.2 Cálculo das predições (caso $C_l(z^{-1}) \neq 1$) . . . 87
3.4 Estudos de caso . . . 99
3.4.1 Coluna de destilação água-metanol . . . 99
3.4.2 Fracionador de óleo pesado . . . 102
3.4.3 Sistema de quatro tanques . . . 108
3.4.4 Reator continuamente agitado (CSTR) . . . 115
3.5 Comentários finais . . . 121
3.6 Exercícios propostos . . . 121

4 MPC em espaço de estados **125**
4.1 Formulação do SSMPC . . . 128
4.2 Ação antecipativa (*feed-forward*) . . . 135
4.3 Obtenção da lei de controle . . . 139
4.3.1 Caso sem restrições . . . 140
4.3.2 Inclusão de restrições . . . 143
4.4 Exemplos . . . 149
4.5 Controlador equivalente . . . 154
4.6 Estudo de caso – CSTR . . . 159
4.7 Comentários finais . . . 162
4.8 Exercícios propostos . . . 163

5 Controle preditivo não linear 167
5.1 Controle preditivo não linear: uma visão geral . . . 168
5.2 Controle NMPC direto . . . 172
5.2.1 CasADi – Generalidades . . . 173
5.2.2 Montando o NMPC em CasADi . . . 175
5.2.3 NMPC direto com erro de predição . . . 180
5.3 Controle Autoadaptativo de Predição Estendida Não Linear (NEPSAC) . . . 182
5.3.1 Modelo de predição . . . 183
5.3.2 Decomposição da sequência de controle . . . 191
5.3.3 Restrições . . . 204
5.3.4 Extensão para o caso multivariável . . . 206
5.4 Controle Preditivo Não Linear Prático (PNMPC) . . . 207
5.4.1 Obtenção da resposta livre . . . 208
5.4.2 Obtenção da resposta forçada . . . 209
5.4.3 Implementação algorítmica . . . 214
5.4.4 Extensão para o caso multivariável . . . 216
5.5 Estudo de caso – CSTR . . . 218
5.6 Comentários finais . . . 229
5.7 Exercícios propostos . . . 229

6 MPC para sistemas com atraso 233
6.1 Entendendo o efeito do atraso no MPC . . . 233
6.2 Interpretação do GPC como um DTC . . . 256
6.2.1 Análise do GPC para sistemas com atraso . . . 256
6.2.2 Algoritmo DTC-GPC . . . 269
6.2.3 Exemplos . . . 274
6.2.4 Extensão para o caso multivariável . . . 282
6.3 DMC para sistemas com atraso . . . 287
6.3.1 DMC como um DTC: plantas estáveis . . . 287
6.3.2 DMC filtrado: plantas estáveis . . . 291
6.3.3 DMC Filtrado MIMO: plantas estáveis . . . 295
6.3.4 GDMC: plantas integradoras e instáveis . . . 297
6.4 Caso não linear . . . 304
6.5 Estudo de caso – Fracionador de óleo pesado . . . 308
6.6 Comentários finais . . . 313
6.7 Exercícios propostos . . . 314

7 Algoritmos MPC e de otimização 317
7.1 Algoritmos MPC . . . 320
7.1.1 Algoritmo DMC recursivo . . . 320
7.1.2 Algoritmo GPC recursivo . . . 324
7.2 Algoritmos de otimização . . . 328
7.2.1 Método de ponto interior com barreira logarítmica . . . 328
7.2.2 Método de projeção de gradiente . . . 351
7.2.3 Métodos de operador de partição . . . 360

7.3 Estudo de caso 373
7.4 Considerações finais 379
7.5 Exercícios propostos 380

A Simulador para GPC MIMO 383

B Definições de otimização convexa 387

C Resumo dos algoritmos MPC 391
C.1 Formulação Geral do MPC 391
C.2 Controle por Matriz Dinâmica (DMC) 396
C.2.1 Implementação recursiva do DMC 399
C.2.2 DMC filtrado 400
C.3 DMC generalizado (GDMC) 400
C.4 Controle Preditivo Generalizado (GPC) 402
C.4.1 GPC com polinômio $C_l(z) \neq 1$ 406
C.4.2 DTC-GPC 408
C.5 MPC em espaço de estados 410
C.6 Controle Preditivo Não Linear Direto (NMPC) 415
C.7 Controle Autoadaptativo de Predição Estendida Não Linear (NEPSAC) 416
C.7.1 Restrições no NEPSAC 419
C.7.2 Caso multivariável 421
C.8 Practical NMPC (PNMPC) 422
C.8.1 Caso multivariável 423

Referências 425

CAPÍTULO 1

Introdução

Este livro é o Volume 2 da obra que tem como objetivo principal apresentar aos estudantes de engenharia e de áreas afins os fundamentos do controle preditivo baseado em modelo (MPC, do inglês *Model Predictive Control*), também denominado controle preditivo. O MPC é uma das metodologias de controle mais usadas na indústria de processos e vem ganhando diversas contribuições teóricas ano após ano.

Seguindo a mesma linha do Volume 1, aqui a abordagem também é teórico-prática, apresentando o desenvolvimento da teoria clássica do MPC, aspectos de implementação dos algoritmos de controle e estudos de caso, alguns deles retirados do ambiente industrial, como do setor de energia solar e da indústria de petróleo e gás. Neste volume, são apresentadas as versões multivariáveis (MIMO, do inglês *Multi-Input Multi-Output*) dos controladores DMC (do inglês *Dynamic Matrix Control*) e GPC (do inglês *Generalized Predictive Control*) estudados no Volume 1, além de outras estratégias de MPC linear e não linear. Ainda, analisamos aspectos relacionados com o controle MPC de processos com atraso e apresentamos os principais algoritmos de otimização utilizados no contexto de MPC.

Dando continuidade ao apresentado no Volume 1, aqui o desenvolvimento teórico apresentado segue, também, uma abordagem no domínio do tempo discreto, recorrendo a conceitos e ferramentas básicas da teoria de controle digital clássico, como equações a diferenças e transformada Z, e a ferramentas de sistemas multivariáveis, como descrições em variáveis de estado e matriz de transferência. O livro é orientado a estudantes que possuem conhecimentos básicos de teoria de controle em tempo contínuo e em tempo discreto. Além disso, para o bom acompanhamento do conteúdo deste volume, é necessário que os leitores conheçam a teoria de controle MPC SISO e os controladores GPC e DMC na sua versão monovariável, seja por meio do estudo do conteúdo do Volume 1 desta obra ou de outro material bibliográfico. Assim, este Volume 2 é mais orientado a disciplinas de mestrado e de doutorado, mas também pode ser usado em cursos de graduação, nas fases finais.

Os próximos capítulos estão organizados da seguinte maneira:

- No Capítulo 2, revisamos os principais conceitos de MPC para o caso monovariável e a notação empregada. Aqueles que já tenham lido o Volume 1 desta obra não encontrarão novidades no capítulo, porém encorajamos sua leitura caso o leitor

tenha adquirido conhecimentos de MPC de outras fontes, como forma de evitar confusão com a notação empregada, que pode ser diferente de outros livros sobre o tema.

- No Capítulo 3, é apresentada a generalização dos algoritmos DMC e GPC do caso SISO para o caso MIMO, mas o estudo é iniciado discutindo aspectos particulares do tratamento de sistemas com múltiplas entradas e saídas, que são válidos para todo tipo de sistema de controle MIMO.

- O Capítulo 4 é dedicado ao SSMPC (do inglês *State-Space Model Predictive Control*), que, assim como o DMC e o GPC, também é uma abordagem muito usada, principalmente no estudo de problemas mais teóricos de MPC. O SSMPC é apresentado diretamente para o caso MIMO, sendo os sistemas SISO tratados como um caso particular. Isso se justifica pelas próprias caraterísticas da representação de sistemas em variáveis de estado, que, de forma unificada, trata tanto sistemas SISO quanto MIMO.

- No Capítulo 5, é apresentado um panorama geral sobre o MPC não linear (NMPC, do inglês *Nonlinear Model Predictive Control*) e como implementar algoritmos que sejam passíveis de uso na prática industrial, na qual muitos processos apresentam dinâmicas não lineares. O capítulo trata, inicialmente, do caso SISO e depois generaliza os resultados para o caso MIMO.

- No Capítulo 6, é apresentado o problema de controle preditivo de processos com atraso. A estrutura do MPC é analisada de forma a entender como a compensação do atraso dentro da estrutura do controlador é realizada. Assim, traçando um paralelo com as estruturas de compensadores de tempo morto (DTC, do inglês *Dead-Time Compensators*), analisamos diversos aspectos relacionados com a robustez do MPC e a rejeição de perturbações. Finalmente, estudamos uma forma de modificar o preditor para conseguir controladores preditivos lineares e não lineares mais robustos e mais simples de ajustar quando controlam processos com atraso.

- Por fim, no Capítulo 7, são tratados aspectos relacionados com os algoritmos de otimização e metodologias para poder implementar o MPC em sistemas rápidos, que precisam de períodos de amostragem muito pequenos.

Para fins de revisão dos conteúdos apresentados, no final de cada capítulo, são propostos exercícios e atividades de simulação. Ainda, nos apêndices, são apresentados uma ferramenta de simulação gratuitas, definições importantes de otimização convexa e um resumo dos algoritmos MPC discutidos no livro. Os códigos dos exemplos são disponibilizados para *download* na página web do livro.[1]

[1] https://danielml.paginas.ufsc.br/livro-mpc/

CAPÍTULO 2

Revisitando o MPC SISO

Como já comentado, na apresentação do conteúdo deste livro consideramos que o leitor conhece a teoria de controle preditivo SISO, mas, para facilitar o entendimento, neste capítulo revisamos as principais ideias do MPC SISO apresentadas no Volume 1, assim como definimos alguns aspectos de notação, de forma tal que o leitor que conhece o assunto possa prosseguir com a análise dos próximos capítulos sem necessidade de recorrer constantemente àquele volume. Ainda, para motivar o estudo dos próximos capítulos, também apresentamos um exemplo simulado do uso do controle GPC MIMO, que mostra o potencial do MPC.

2.1 MPC SISO – IDEIAS BÁSICAS E NOTAÇÃO

No caso SISO, consideramos um processo com saída ou variável controlada y, variável de controle ou manipulada u e perturbação mensurável q. O MPC SISO estudado no Volume 1 utiliza um modelo matemático linear e em tempo discreto, que aproxima o comportamento do processo, de forma tal que se pode escrever $y(k)$ como função de $u(k)$ e $q(k)$. Usando esse modelo, o MPC calcula as predições da saída do processo em uma janela de tempo futura (denominada horizonte de predição) e, usando um otimizador, encontra as ações de controle futuras (no horizonte de controle) que minimizam uma determinada função custo, considerando as restrições de operação do processo (por exemplo, valores máximos e mínimos das variáveis envolvidas).

O MPC é uma estratégia de controle que utiliza realimentação, dado que o modelo utiliza os valores passados das variáveis controladas para calcular as predições, que, por sua vez, são usadas para encontrar a ação de controle. Dessa forma, a ação de controle depende da saída medida. Por outro lado, o MPC pode ter também uma ação antecipativa, ou de pré-alimentação, caso utilize informações das perturbações medidas ou tenha conhecimento das referências futuras que a variável controlada deve seguir.

De forma geral, o MPC calcula a ação de controle a ser aplicada no instante atual, k, a partir da predição do comportamento da planta, baseado em um modelo dinâmico dela, em um horizonte finito N. São computados N_u sinais de controle futuros por meio da otimização de uma função custo que representa algum critério de comportamento do sistema e condições de operação da planta. Apenas a primeira ação de controle é aplicada no sistema e o MPC recalcula uma nova sequência de controle a cada novo instante

de amostragem (horizonte deslizante), uma vez que novas informações da planta são adquiridas.

O MPC não é uma estratégia de controle específica, mas uma filosofia de controle que contempla uma família de estratégias ou técnicas de controle que têm alguns elementos em comum (CAMACHO; BORDONS, 2004):

- modelo de predição;
- função custo (ou função objetivo);
- procedimento para a obtenção da lei de controle, com base em um algoritmo de otimização.

O que diferencia cada tipo de técnica é basicamente como as perturbações são consideradas, o modelo utilizado na predição e a função custo, como visto no Volume 1 para o DMC e o GPC. Vamos, aqui, apenas revisar as ideias principais.

O DMC SISO utiliza um modelo de resposta ao degrau do processo:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(k-i), \tag{2.1}$$

onde Δu é o incremento de controle, e g_i representa cada um dos coeficientes da resposta ao degrau que relaciona a variável manipulada com a saída. O modelo utilizado para as predições considera os efeitos de perturbações não medidas, $\hat{\eta}$, com a suposição de que elas são constantes no horizonte: $\hat{\eta}(k+j \mid k) = \hat{\eta}(k \mid k)$ para todo j. Assim, as predições podem ser escritas, para um elemento j no horizonte, como:

$$\hat{y}(k+j \mid k) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(k+j-i) + \hat{\eta}(k \mid k),$$

onde $\hat{y}\left(k+j \mid k\right)$ é uma predição da saída em um tempo futuro $k+j$, dadas as informações em k, e $\hat{\eta}(k \mid k) = y(k) - \hat{y}_o(k \mid k)$, sendo $\hat{y}_o$ a estimação da saída do sistema sem correção, obtida a partir de (2.1).

Já o GPC SISO utiliza um modelo de função de transferência para representar as relações entre a saída do processo, a variável manipulada u e as perturbações não medidas n:

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})z^{-d}}{A(z^{-1})}u(k-1) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}n(k),$$

com A, B e C polinômios no operador atraso z^{-1} e d o atraso do processo. As perturbações são modeladas por:

$$n(k) = \frac{1}{1-z^{-1}}e(k),$$

com $e(k)$ um ruído branco de média nula. Assim, para um elemento j no horizonte, as predições são calculadas usando:

$$\hat{y}(k+j \mid k) = \frac{B(z^{-1})z^{-d}}{A(z^{-1})}u(k+j-1) + \frac{C(z^{-1})}{(1-z^{-1})A(z^{-1})}e(k+j),$$

que pode ser escrita como:

$$\tilde{A}(z^{-1})\hat{y}(k+j \mid k) = B(z^{-1})z^{-d}\Delta u(k+j-1) + C(z^{-1})e(k+j),$$

com $\tilde{A}(z^{-1}) = A(z^{-1})(1-z^{-1})$ e $\Delta u(k) = (1-z^{-1})u(k)$. Este modelo é chamado de CARIMA (do inglês *Controlled Autoregressive Integrated Moving Average*).

A função custo para o caso SISO (apresentada no Volume 1 e usada tanto no DMC quanto no GPC) é dada por:

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta\left(j\right)\left[\hat{y}\left(k+j \mid k\right) - r\left(k+j\right)\right]^2 + \sum_{j=0}^{N_u-1} \lambda\left(j\right)\left[\Delta u\left(k+j\right)\right]^2, \tag{2.2}$$

onde $r(k+j)$ é a referência em $k+j$, $\Delta u(k+j)$ é o incremento de controle em $k+j$, $\delta(j)$ e $\lambda(j)$ ponderam o comportamento futuro do erro e do esforço de controle, respectivamente, N_1 e N_2 definem uma janela de horizonte de predição, sendo que $N = N_2 - N_1 + 1$, e N_u é o horizonte de controle.

A função custo descrita em (2.2) busca, por um lado, que a saída do processo siga uma dada referência e, por outro lado, ajustar o esforço de controle necessário. Note que o compromisso entre esses dois pontos é ajustado utilizando $\delta(j)$ e $\lambda(j)$. Nessa função custo, N_1 e N_2 são usados para definir em que janela de tempo desejamos considerar os erros de seguimento de referência em J, e N_u define quantos incrementos de controle futuros são considerados para o cálculo da ação de controle a cada instante de amostragem. Altos valores de N_u permitem mais flexibilidade para definir os sinais de controle, mas aumentam a complexidade computacional.

A função custo pode ser colocada de forma vetorial, definindo os vetores de incrementos de controles futuros $\Delta\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_u}$, de referências futuras $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$, e de predições futuras $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^N$:

$$J = [\mathbf{r} - \hat{\mathbf{y}}]^T \mathbf{Q}_e [\mathbf{r} - \hat{\mathbf{y}}] + \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u \Delta\mathbf{u}, \tag{2.3}$$

com

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r(k+N_1) \\ r(k+N_1+1) \\ \vdots \\ r(k+N_2) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+N_1 \mid k) \\ \hat{y}(k+N_1+1 \mid k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N_2 \mid k) \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{bmatrix},$$

$\mathbf{Q}_e = \mathrm{diag}(\delta(1), \delta(2), \ldots, \delta(N))$ e $\mathbf{Q}_u = \mathrm{diag}(\lambda(0), \lambda(1), \ldots, \lambda(N_u-1))$, sendo $\mathrm{diag}(\cdot)$ uma função que retorna uma matriz diagonal composta pelos elementos passados como argumento. Se as ponderações são constantes no horizonte, $\delta(j) = \delta$ e $\lambda(j) = \lambda$, temos:

$$\mathbf{Q}_e = \delta\mathbf{I}_N, \qquad \mathbf{Q}_u = \lambda\mathbf{I}_{N_u},$$

sendo $\mathbf{I}_N$ e $\mathbf{I}_{N_u}$ matrizes identidade de dimensão N e N_u, respectivamente.

Para expressar J apenas em função das variáveis de decisão, que são os incrementos futuros da ação de controle,[2] tanto o DMC como o GPC usam o conceito de resposta livre e resposta forçada, que foi apresentado no Volume 1 e que é resumido na sequência.

Para o DMC, usando o modelo de predição, os valores das predições nos instantes j da janela de predição podem ser escritos em função dos incrementos de controle futuros e passados. Se separarmos essas duas partes, podemos escrever o vetor de predições da saída do processo $\hat{\mathbf{y}}$ como:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}, \tag{2.4}$$

sendo $\mathbf{G}$ a matriz dinâmica, ou de resposta ao degrau do sistema, e $\mathbf{f}$ a resposta livre, que expressa a dependência de $\hat{\mathbf{y}}$ com os controles passados. Como visto no Volume 1, a resposta livre é obtida mantendo o sinal de controle futuro constante, ou seja, todos os incrementos futuros são nulos e, assim, $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}_{N_u}$ e $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}$, sendo $\mathbf{0}_{N_u}$ um vetor nulo de dimensão N_u. Já se considerarmos o sistema com uma condição de equilíbrio inicial y_0 com os controles passados constantes, $\mathbf{f} = y_0\mathbf{1}_N$, com $\mathbf{1}_N$ um vetor de dimensão N cujos elementos são todos 1, obtemos $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + y_0\mathbf{1}_N$, que mostra a dependência

[2] Note que consideramos o incremento de controle atual, $\Delta u(k)$, como um valor futuro, pois ele não está disponível para o controlador tomar sua decisão no instante atual, k. Por outro lado, a medição atual da saída, $y(k)$, é considerada como valor passado, pois o controlador já tem informação sobre ela no instante atual, visto que a medição é feita antes do cálculo da sequência de controle ótima.

das predições apenas com as variações de controle que executaremos no futuro, pois o termo $y_0\mathbf{1}_N$ é constante. Como o sistema é linear, a mesma análise pode ser realizada em torno da origem.

Para o GPC, usando o modelo CARIMA recursivamente, podemos calcular os valores das predições nos instantes j da janela de predição em função dos controles futuros e e dos valores passados da saída e do controle. Assim, da mesma forma que no DMC, é possível separar as predições nas partes correspondentes à resposta forçada e à resposta livre, que têm a mesma interpretação que no DMC.

Então, usando (2.4) para substituir $\hat{\mathbf{y}}$ na expressão de J dada por (2.3), podemos transformar a função custo em uma expressão dependente apenas dos incrementos de controle futuros e de informações conhecidas (da referência e dos valores passados das variáveis). Então, o objetivo do controle preditivo SISO é resolver, a cada amostra, um processo de otimização da função custo do tipo:

$$\begin{aligned} \min_{\Delta\mathbf{u}} \quad & J \\ \text{s.a.} \quad & \overline{\mathbf{R}}\Delta\mathbf{u} \leq \overline{\mathbf{r}} \\ & \overline{\mathbf{C}}\Delta\mathbf{u} = \overline{\mathbf{c}}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde $\overline{\mathbf{R}}\Delta\mathbf{u} \leq \overline{\mathbf{r}}$ e $\overline{\mathbf{C}}\Delta\mathbf{u} = \overline{\mathbf{c}}$ representam as restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente, colocadas em função do vetor de incrementos de controle futuros, $\Delta\mathbf{u}$, que tem dimensão N_u. As matrizes $\overline{\mathbf{C}}$ e $\overline{\mathbf{R}}$ e os vetores $\overline{\mathbf{r}}$ e $\overline{\mathbf{c}}$ são calculados em função do modelo e dos limites e demais condições impostos para as diferentes variáveis. Essas restrições podem ser de todo tipo e sobre todas as variáveis do problema, mas, em geral, podem ser colocadas em função da variável de decisão do problema, que é o vetor de incrementos de controle futuros, usando (2.4) para substituir $\hat{\mathbf{y}}$ em todas as restrições que se apliquem à saída futura do processo.

O problema de controle (2.6) definido no MPC, que é um problema de otimização, tipicamente deve ser resolvido a cada instante de amostragem. Há casos em que o problema de otimização tem solução analítica, mas, em geral, ele precisa ser resolvido com métodos numéricos. A solução encontrada para o problema de otimização depende do estado atual da planta, do modelo de predição e dos parâmetros de ajuste do MPC (ponderações e horizontes).

2.2 UM EXEMPLO MOTIVADOR

Para motivar os leitores e mostrar o potencial da estratégia de controle MPC no caso MIMO, vamos considerar aqui um estudo de caso de um processo multivariável relativamente complexo que deve operar dentro de determinadas especificações. Trata-se do controle do fracionador de óleo pesado da Shell, um sistema muito conhecido na

literatura e utilizado para estudar diferentes estratégias de controle para colunas de destilação, inclusive de MPC (CAMACHO; BORDONS, 2004). Este exemplo ilustra o problema de controle de um processo MIMO com atrasos diferentes nas variáveis de saída y sujeito a restrições de operação.

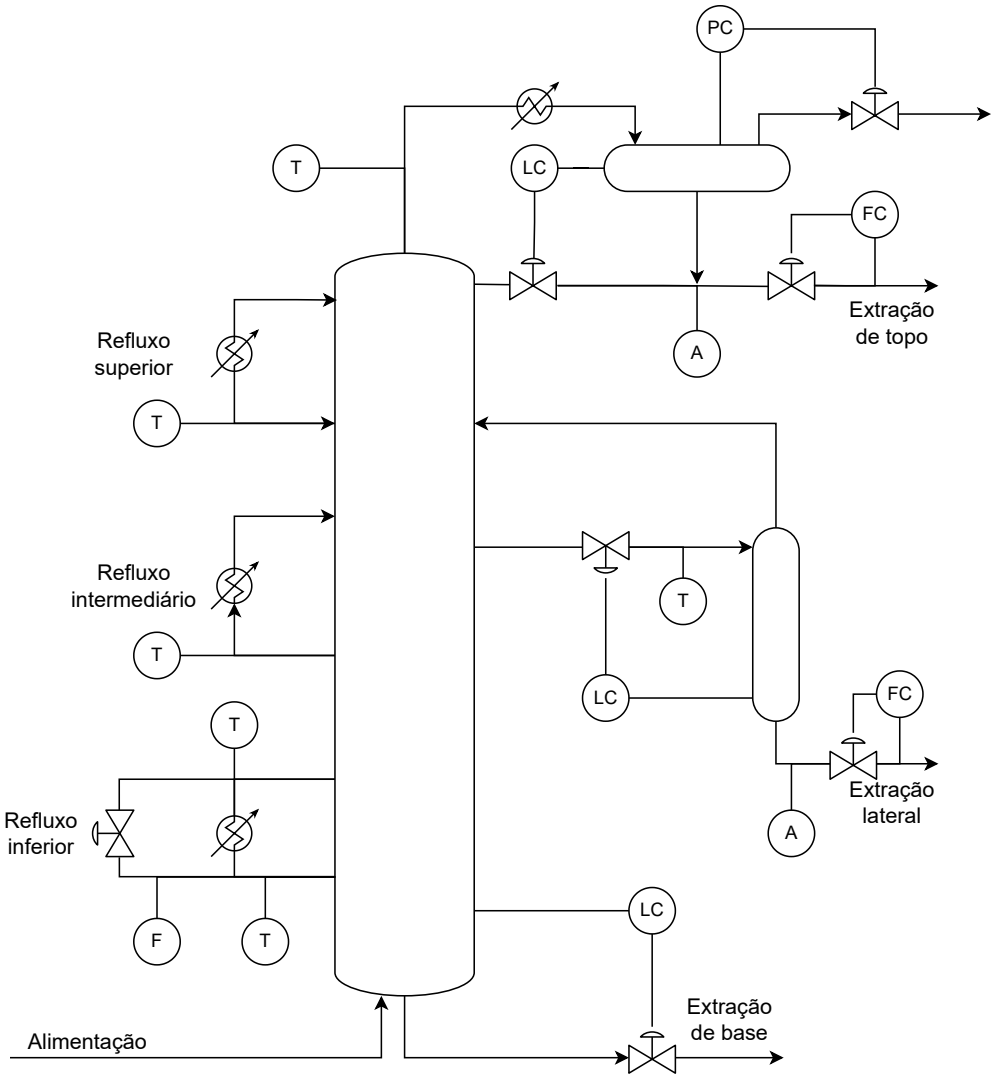

Figura 2.1 Esquema do fracionador de óleo pesado.

O processo mostrado na Figura 2.1 é uma versão simplificada do fracionador de óleo pesado da Shell e possui três variáveis que devem ser controladas: as composições dos

produtos superior (ou de topo, y_1) e lateral (y_2), que são medidas por analisadores, e a temperatura no fundo (ou base) da torre (y_3). As variáveis manipuladas são a vazão de extração superior (ou de topo, u_1), a vazão de extração lateral (u_2) e a vazão de refluxo inferior (u_3). Neste processo, a alimentação fornece todos os requisitos de calor para a coluna, não necessitando de adição de energia externa. A dinâmica do processo pode ser descrita pelo seguinte modelo, que representa as variações das variáveis manipuladas e controladas nas vizinhanças do ponto de operação:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4{,}05e^{-27s}}{1+50s} & \dfrac{1{,}77e^{-28s}}{1+60s} & \dfrac{5{,}88e^{-27s}}{1+50s} \\ \dfrac{5{,}39e^{-18s}}{1+50s} & \dfrac{5{,}72e^{-14s}}{1+60s} & \dfrac{6{,}9e^{-15s}}{1+40s} \\ \dfrac{4{,}38e^{-20s}}{1+33s} & \dfrac{4{,}42e^{-22s}}{1+44s} & \dfrac{7{,}2}{1+19s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix},$$

com tempos em minutos. O modelo de tempo discreto obtido com uma amostragem de 4 min é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{0{,}08(z^{-1}+2{,}88z^{-2})}{1-0{,}923z^{-1}}z^{-6} & \dfrac{0{,}114z^{-1}}{1-0{,}936z^{-1}}z^{-7} & \dfrac{0{,}116(z^{-1}+2{,}883z^{-2})}{1-0{,}923z^{-1}}z^{-6} \\ \dfrac{0{,}211(z^{-1}+0{,}96z^{-2})}{1-0{,}923z^{-1}}z^{-4} & \dfrac{0{,}187(z^{-1}+0{,}967z^{-2})}{1-0{,}936z^{-1}}z^{-3} & \dfrac{0{,}17(z^{-1}+2{,}854z^{-2})}{1-0{,}905z^{-1}}z^{-3} \\ \dfrac{0{,}5z^{-1}}{1-0{,}886z^{-1}}z^{-5} & \dfrac{0{,}196z^{-1}+0{,}955z^{-2}}{1-0{,}913z^{-1}}z^{-5} & \dfrac{1{,}367z^{-1}}{1-0{,}81z^{-1}} \end{bmatrix}.$$

As entradas e saídas foram omitidas na representação anterior para que ela coubesse na página, porém elas seguem a mesma ordem empregada para o caso de tempo contínuo.

Um GPC MIMO foi projetado para esse sistema usando horizontes de predição da ordem da maior constante de tempo do modelo e considerando o primeiro elemento do horizonte depois do atraso. Observe que esta escolha parece intuitivamente adequada, pois, como o sinal de controle que vamos calcular somente afeta a saída depois do atraso, não faz sentido considerar na função custo as predições das saídas antes do atraso. Assim, escolhemos $N_1 = 6$ e $N_2 = 15$ para a primeira saída, $N_1 = 3$ e $N_2 = 15$ para a segunda saída, e $N_1 = 1$ e $N_2 = 5$ para a terceira saída (observe que consideramos o menor atraso de cada saída). O horizonte de controle foi ajustado com $N_u = 5$ para todas as variáveis manipuladas. Assumiremos que o controlador tem conhecimento das referências futuras.

Vamos considerar que, inicialmente, não temos restrições nas variáveis e que todas as saídas têm a mesma importância. Assim, as ponderações de todas as variáveis manipuladas são fixadas em $\lambda = 2$ e as das controladas em $\delta = 1$. O resultado de aplicar

este MPC no processo, para mudanças tipo degrau nas referências das três variáveis controladas, é mostrado na Figura 2.2. As figuras mostradas são do simulador interativo usado para estudo do controle GPC MIMO, descrito no Apêndice A.

O sistema parte do ponto de operação, considerado zero na simulação, pois são mostradas as variações das variáveis do processo em torno do ponto de operação. Como podemos observar, o sistema apresenta uma resposta com pouco acoplamento e transitórios sem grandes oscilações para a mudança de referência dada em tempo zero para todas as variáveis controladas. As ações de controle também têm um comportamento suave e o sistema de controle permite que as referências (mostradas em linhas tracejadas) sejam alcançadas em regime permanente. Na metade da simulação, muda-se a referência para a variável y_1 e pode ser observado que, como o controle conhece a referência futura, o MPC executa a mudança de referência antecipadamente, para conseguir um valor da função custo menor. O acoplamento entre as variáveis mostra que y_2 e y_3 se alteram durante o transitório, mas voltam ao ponto de operação.

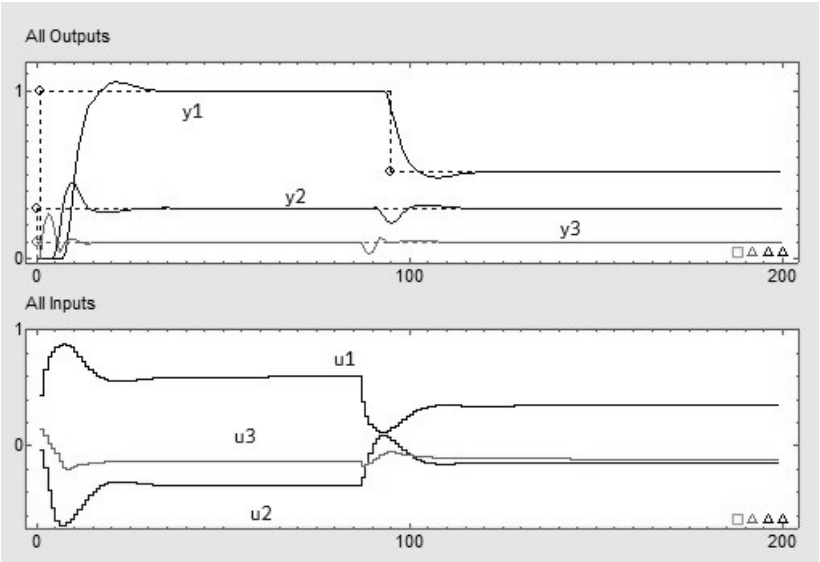

Figura 2.2 Respostas do fracionador de óleo pesado para o caso sem restrições.

Para mostrar o potencial do MPC, uma segunda simulação inclui restrições nas variáveis controladas. Vamos supor que não se deseja que a variável y_1 se afaste mais do que 0,7 do ponto de operação, mas que o operador mantém as mudanças de referência da simulação anterior (a referência para y_1 se mantém em 1). Na Figura 2.3, é mostrado o resultado dessa simulação. Observe que o MPC não permite que a variável y_1 viole a restrição imposta quando a mudança de referência é aplicada e tenta manter, durante o tempo correspondente, a variável na restrição imposta, garantindo, assim, o correto

funcionamento do processo. Como podemos concluir deste estudo de caso, o MPC é extremamente flexível e permite atender diversas especificações. Estudaremos com mais detalhes estes aspectos nos próximos capítulos.

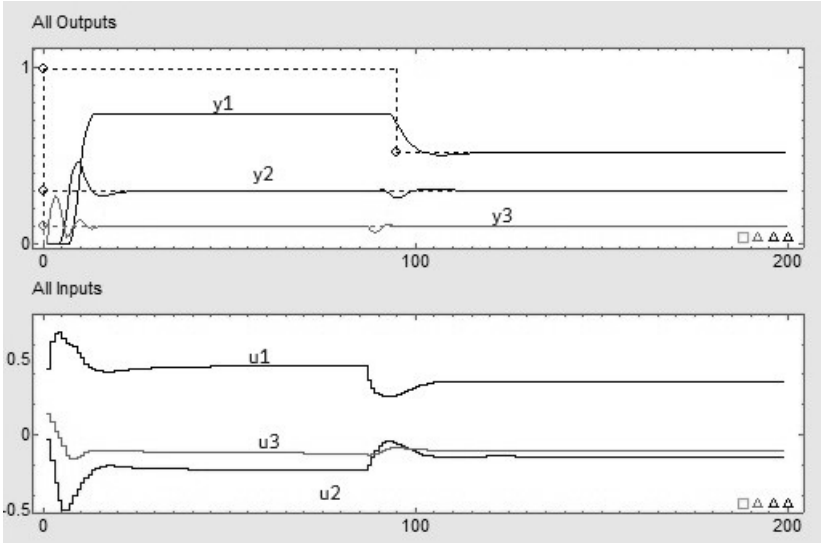

Figura 2.3 Respostas do fracionador de óleo pesado para o caso com restrições.

2.3 COMENTÁRIOS FINAIS

Neste capítulo, apresentamos as principais ideias e notação usada no MPC SISO, que foram desenvolvidas com detalhe no Volume 1, e que servirão de base para a apresentação do MPC MIMO e não linear dos próximos capítulos. Também apresentamos um exemplo para motivar o estudo do MPC MIMO, mostrando a potencialidade da técnica.

2.4 EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Utilizando a ferramenta de simulação para GPC MIMO apresentada no Apêndice, escolha o processo 3×3 da ferramenta. Ajuste um GPC sem restrições de forma intuitiva usando a análise do efeito dos parâmetros de sintonia apresentados neste capítulo. Mude os parâmetros e observe o efeito nas respostas. Inclua restrições no problema e analise os resultados, considerando restrições apenas em uma das variáveis manipuladas. Mude a restrição para considerar apenas cada uma das outras variáveis manipuladas e, finalmente, considere restrições em todas elas de forma simultânea. Observe a flexibilidade no ajuste do sistema de controle que o MPC proporciona.

CAPÍTULO 3

DMC e GPC multivariáveis

Na prática, é comum que se necessite controlar simultaneamente mais de uma variável de um dado processo, utilizando, para isso, mais de uma variável manipulada. Se cada variável manipulada apenas afeta uma controlada, então o projeto do controle pode ser realizado usando vários controladores monovariáveis independentes. Porém, as variáveis desses processos usualmente estão acopladas, ou seja, a variação de uma variável manipulada pode causar efeitos em mais de uma controlada, simultaneamente. Nesse caso, o uso de vários controladores independentes pode não ser adequado e, tipicamente, faz mais sentido considerar o processo como um sistema multivariável, que tem múltiplas variáveis manipuladas e múltiplas controladas sendo consideradas como um conjunto, e não como a união de vários sistemas monovariáveis.

Os controladores monovariáveis, como os PIDs, que têm muito sucesso no controle de sistemas monovariáveis (controle local), em geral, têm dificuldades para lidar com essa interação de forma adequada. Por isso, existem técnicas para melhorar o desempenho dos PIDs no caso multivariável, como o uso de desacopladores, mas a complexidade do projeto do sistema de controle aumenta consideravelmente quando o sistema é de dimensão elevada. Além disso, nem sempre é possível desacoplar completamente a resposta de um processo multivariável e, em muitos casos, desacopladores introduzem ganhos elevados em altas frequências, que acabam levando a outros problemas do ponto de vista prático, como a amplificação de ruídos. Nesses casos, técnicas avançadas, como a de controle preditivo, permitem, em geral, obter melhores resultados que os obtidos com controladores PID, dado que, além de serem capazes de tratar o problema multivariável diretamente, podem incluir diversos objetivos e restrições no problema. Cabe aqui lembrar que o MPC teve sua origem no controle de plantas multivariáveis no setor industrial petroquímico (CUTLER; RAMAKER, 1980; RICHALET et al., 1976).

Outro aspecto importante que deve ser destacado dos sistemas multivariáveis é que, dependendo das características do processo, nem sempre é possível que o sistema alcance um ponto de operação arbitrariamente definido pelo usuário. Nos sistemas de controle monovariáveis estudados no Volume 1, mostramos que, sob estabilidade em malha fechada e com um controle que possui ação integral, é possível levar a saída do sistema para uma referência desejada constante com erro zero contanto que a ação de controle necessária para isso esteja dentro da faixa de atuação do atuador. No caso de sistemas multivariáveis, para que essa propriedade seja verdadeira, precisamos adicionar

uma condição extra: ter graus de liberdade suficientes no controle para chegar nas referências desejadas. Por exemplo, se considerarmos um sistema linear estável de duas saídas e uma entrada, que tem modelo estático dado por:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \end{bmatrix} u,$$

não é possível encontrar um valor de u capaz de levar y_1 a uma referência r_1 e y_2 a uma referência r_2 simultaneamente, a menos que $r_1/r_2 = K_{e1}/K_{e2}$. De forma geral, para um sistema multivariável estável com modelo estático:

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}_e \mathbf{u},$$

uma dada referência vetorial $\mathbf{r}$ somente será alcançável se existe um controle $\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{r} = \mathbf{K}_e \mathbf{u}$. Assim, principalmente no caso de plantas com menor número de variáveis manipuladas que controladas, a referência passada ao controlador tem que ser factível quando se deseja erro de seguimento nulo. Uma outra alternativa é que o objetivo de controle seja buscar o ponto de equilíbrio mais próximo da referência escolhida. Veja que em alguns problemas pode ser requerido, por exemplo, que uma ou mais variáveis atinjam uma referência enquanto outras apenas sejam mantidas em faixas preestabelecidas de segurança.

Considerando a discussão apresentada, as técnicas de controle preditivo são capazes de lidar muito facilmente com sistemas multivariáveis, pois: (i) os conceitos utilizados na formulação do controle não dependem da dimensão do processo; (ii) podem utilizar o modelo completo do processo explicitamente, assim, as interações entre as variáveis ficam refletidas nas predições; (iii) podem ser usadas com as mais diversas funções objetivo, o que dá muita flexibilidade ao controlador para, inclusive, considerar problemas como o de chegar a um ponto de operação próximo de uma referência não factível; e (iv) em termos de sintonia, a influência dos parâmetros de ajuste do controlador na resposta do sistema é similar àquela observada no caso monovariável, apesar de que a quantidade de parâmetros para ajustar cresce linearmente com a quantidade de entradas e de saídas.

Neste capítulo, serão apresentadas as versões multivariáveis dos algoritmos DMC e GPC. Como as diferenças entre essas formulações para uma dada função custo são as mesmas que no caso monovariável, isto é, são dadas pela forma como se calcula a resposta livre do sistema, iniciamos a apresentação deste capítulo mostrando como obter a lei de controle no caso multivariável para depois analisar cada uma das particularidades dos algoritmos no que se refere ao cálculo das predições e da resposta livre. Posteriormente, no Capítulo 4, estudaremos a formulação do MPC para modelos dados por equações de estado, tratando os casos monovariável e multivariável no mesmo capítulo.

Antes de iniciar com aspectos mais formais, vamos introduzir um exemplo de um sistema multivariável simples, para ilustrar a relação entre as entradas e as saídas do processo e como as predições podem ser calculadas.

Exemplo 3.1

Considere um sistema de controle de vazão e de temperatura de água em uma tubulação de um processo industrial. A água com temperatura controlada é obtida pela mistura de duas vazões de água com temperaturas diferentes, uma quente e outra fria. Duas bombas são usadas, uma para a linha de água quente e outra para a linha de água fria, e a mistura é realizada por uma conexão tipo Y. Transdutores de temperatura e de vazão são adequadamente instalados na seção final da tubulação, onde a água será usada. Nesse sistema, pode-se atuar no sinal de controle das duas bombas. Logicamente, nesse processo, a temperatura e a vazão são duas variáveis acopladas fisicamente, dado que uma variação em qualquer um dos atuadores trará uma variação de temperatura e de vazão na água entregue ao próximo processo. Assim, esse processo pode ser considerado multivariável. Um modelo simplificado desse processo, funcionando nas vizinhanças de um ponto de operação, foi construído usando equações diferenciais, obtendo:

$$20\frac{dT(t)}{dt} + T(t) = 5u_q(t) - 3u_f(t),$$

$$5\frac{dV(t)}{dt} + V(t) = 1{,}5u_q(t) + u_f(t),$$

considerando u_q e u_f, respectivamente, os sinais de controle das bombas de água quente e fria, e $T(t)$ e $V(t)$, respectivamente, a temperatura e a vazão da água no ponto de medição. Os tempos no modelo estão em segundos.

Um modelo em tempo discreto desse processo, obtido usando um sustentador de ordem zero e um tempo de amostragem de $1\,\mathrm{s}$, é dado por:

$$T(k) = 0{,}95T(k-1) + 0{,}25u_q(k-1) - 0{,}15u_f(k-1),$$

$$V(k) = 0{,}82V(k-1) + 0{,}27u_q(k-1) + 0{,}18u_f(k-1).$$

A partir desse modelo, podemos inferir que os valores futuros de temperatura e de vazão serão afetados pelos valores passados dessas variáveis e pelos valores passados e futuros das variáveis manipuladas. Um modelo de resposta livre e forçada poderia ser obtido de forma simples como no estudo dos controladores preditivos monovariáveis apresentados no Volume 1 e discutidos no Capítulo 2 apenas usando o princípio de superposição. Por exemplo, as respostas forçadas de

T e V poderiam ser obtidas para a variável manipulada u_f considerando $u_q = 0$ e depois para u_q considerando $u_f = 0$. Para cada saída, os resultados podem, então, ser somados com a resposta livre do sistema, obtida com todos os controles futuros nulos. Finalmente, podemos organizar os resultados obtidos de forma vetorial para ter uma visão da forma multivariável de calcular as predições da saída desse processo.

Vamos supor que escolhemos um horizonte de predição de 3 amostras para T, de 2 amostras para V e um horizonte de controle de 2 amostras para u_q e u_f. Assim, usando os conceitos vistos no caso monovariável para as predições de temperatura, $\hat{T}$, podemos calcular:

$$\begin{bmatrix} \hat{T}(k+1 \mid k) \\ \hat{T}(k+2 \mid k) \\ \hat{T}(k+3 \mid k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}250 & 0 \\ 0{,}490 & 0{,}250 \\ 0{,}715 & 0{,}490 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_q(k) \\ \Delta u_q(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}150 & 0 \\ -0{,}294 & -0{,}150 \\ -0{,}429 & -0{,}294 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_f(k) \\ \Delta u_f(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_T(k+1) \\ f_T(k+2) \\ f_T(k+3) \end{bmatrix},$$

sendo f_T os valores da resposta livre de temperatura.

Já para as predições de vazão, $\hat{V}$:

$$\begin{bmatrix} \hat{V}(k+1 \mid k) \\ \hat{V}(k+2 \mid k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}270 & 0 \\ 0{,}409 & 0{,}270 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_q(k) \\ \Delta u_q(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}180 & 0 \\ 0{,}327 & 0{,}180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_f(k) \\ \Delta u_f(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_V(k+1) \\ f_V(k+2) \end{bmatrix},$$

sendo f_V os valores da resposta livre de vazão.

Podemos, agora, agrupar as predições em um vetor $\hat{\mathbf{y}}$, os incrementos de controle em um segundo vetor $\Delta\mathbf{u}$ e as respostas livres em um terceiro vetor $\mathbf{f}$, definidos como:

$$\hat{\mathbf{y}} = \left[\begin{array}{c} \hat{T}(k+1 \mid k) \\ \hat{T}(k+2 \mid k) \\ \hat{T}(k+3 \mid k) \\ \hline \hat{V}(k+1 \mid k) \\ \hat{V}(k+2 \mid k) \end{array}\right], \quad \Delta\mathbf{u} = \left[\begin{array}{c} \Delta u_q(k) \\ \Delta u_q(k+1) \\ \hline \Delta u_f(k) \\ \Delta u_f(k+1) \end{array}\right], \quad \mathbf{f} = \left[\begin{array}{c} f_T(k+1) \\ f_T(k+2) \\ f_T(k+3) \\ \hline f_V(k+1) \\ f_V(k+2) \end{array}\right].$$

Finalmente, é possível escrever:

$$\hat{\mathbf{y}} = \left[\begin{array}{cc:cc} 0{,}250 & 0 & -0{,}150 & 0 \\ 0{,}490 & 0{,}250 & -0{,}294 & -0{,}150 \\ 0{,}715 & 0{,}490 & -0{,}429 & -0{,}294 \\ \hdashline 0{,}270 & 0 & 0{,}180 & 0 \\ 0{,}409 & 0{,}270 & 0{,}327 & 0{,}180 \end{array}\right] \Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}.$$

Assim, observamos que a forma de escrever as predições do sistema segue a mesma lógica do caso monovariável.

Como ilustramos no exemplo anterior (Exemplo 3.1), conceitualmente, a forma de escrever as predições de um modelo linear usando:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} \tag{3.1}$$

não é afetada pelo fato de o sistema ser mono ou multivariável. Nessa equação, se considerarmos um sistema multivariável, $\hat{\mathbf{y}}$ representará o vetor de predições de todas as saídas do processo organizadas de forma sequencial, da primeira até a última saída, e $\Delta\mathbf{u}$ o vetor dos incrementos de controle futuros de todas as variáveis manipuladas, também organizadas de forma sequencial, da primeira até a última variável manipulada. Observe que quando os incrementos de controle futuros são nulos, então $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}$, como acontece no caso monovariável. Além disso, se considerarmos todo o passado nulo, as predições apenas dependem dos incrementos de controle futuros. Assim, é esperado que a obtenção do sinal de controle a partir da minimização da função custo seja feita de forma semelhante ao que ocorre no caso monovariável.

Na sequência deste capítulo, vamos considerar processos multivariáveis com m entradas de controle (ou variáveis manipuladas) e n saídas (ou variáveis controladas). Assim, poderemos tratar tanto processos quadrados, com $m = n$, ou retangulares, com $m \neq n$. No caso de considerar as perturbações medidas no modelo, isto é, para o uso da ação antecipativa do MPC, consideraremos um número de perturbações medidas m_q.

3.1 OBTENÇÃO DA LEI DE CONTROLE

A função custo clássica do caso multivariável é muito similar àquela utilizada no caso monovariável, mostrada no Capítulo 2 em (2.2). O que muda é o fato de que agora são levados em conta os erros futuros preditos de todas as n saídas e também o esforço de controle de todas as m entradas:

$$J = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=N_{1,l}}^{N_{2,l}} \delta_l(i) \left(r_l(k+i) - \hat{y}_l(k+i \mid k)\right)^2 + \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=0}^{N_{u,p}-1} \lambda_p(i) \Delta u_p(k+i)^2, \quad (3.2)$$

onde r_l, $N_{1,l}$, $N_{2,l}$ e $\delta_l(i)$ são a referência, o horizonte inicial de predição, o horizonte final de predição e as ponderações da saída l, respectivamente, e $N_{u,p}$ e $\lambda_p(i)$ são, respectivamente, o horizonte de controle e as ponderações do esforço de controle da entrada p. Assim como no caso monovariável, usualmente utilizam-se ponderações constantes ao longo do horizonte, ou seja, $\delta_l(i) = \delta_l$ e $\lambda_p(i) = \lambda_p, \forall i$. No caso monovariável, é comum fixar uma das ponderações com valor unitário (tipicamente $\delta = 1$) e ajustar apenas a outra. No caso multivariável, note que ainda é possível fixar uma das ponderações como sendo unitária, porém, isso não pode ser feito para todos os pesos do erro de seguimento de referência, pois é justamente por meio de diferentes ponderações que é possível priorizar o seguimento de referência de uma saída em detrimento das outras. Assim, no caso multivariável, além da priorização entre seguimento rápido de referência e suavidade no sinal de controle, que já ocorre no caso monovariável, é importante definir a importância relativa entre as saídas e entre cada uma das saídas e cada um dos esforços de controle. Note que o número de parâmetros de sintonia do controlador no caso multivariável cresce consideravelmente, visto que cada saída e cada entrada tem seu conjunto de horizontes e ponderações, cuja alteração modificará o controlador resultante e, por consequência, a resposta de malha fechada. Vamos ilustrar esse ponto com um exemplo de escolha de parâmetros de ajuste de um MPC no caso multivariável.

Exemplo 3.2

Considere o sistema de controle de uma coluna de destilação multi-produto, na qual se deseja controlar a temperatura de extração de quatro produtos diferentes. Nessa coluna, o erro de seguimento de temperatura em cada uma das extrações de produto é inversamente proporcional à qualidade do produto extraído. Assim, manter o erro abaixo de um dado valor implica manter a qualidade do produto acima de uma certa especificação. Ainda, considere que os produtos 1 e 3 têm valor comercial muito maior que os produtos 2 e 4. Por outro lado, as dinâmicas das temperaturas associadas aos produtos 1 e 2 são mais lentas que as das temperaturas associadas aos produtos 3 e 4 e ainda possuem um atraso de transporte de 5 amostras. Final-

mente, entre as variáveis manipuladas do processo Δu_p, $p = 1 \ldots 4$ (consideramos aqui um processo quadrado), Δu_1 é a que tem maior impacto econômico, por se tratar da regulagem da alimentação de combustível na base da coluna. Suponha, ainda, que todas as temperaturas estão normalizadas para a mesma faixa de variação de 0% a 100% e que todas as variáveis manipuladas estão também entre 0% e 100%.

Nesse problema simples, de dimensão 4×4, precisamos ajustar 20 parâmetros, sendo 12 referentes aos horizontes e 8 a ponderações. Como discutido anteriormente, até seria possível fixar uma das ponderações a um valor unitário, mas ainda restariam 7 ponderações para serem ajustadas, além dos parâmetros referentes aos horizontes. Seguindo as indicações práticas de escolha de parâmetros já discutidas no caso SISO, os horizontes das variáveis controladas 1 e 3 serão escolhidos como $N_{1,1} = N_{1,3} = 5 + 1 = 6$ por causa do atraso (não faz sentido colocar na função custo um termo que não depende dos sinais de controle a serem calculados) e com $N_{2,1}$ e $N_{2,3}$ compatíveis com a dinâmica lenta dessas variáveis (usamos uma janela que capture o regime transitório das variáveis). Como as variáveis 2 e 4 não têm atraso, utilizamos $N_{1,2} = N_{1,4} = 1$ e $N_{2,2}$ e $N_{2,4}$ menores que os das outras variáveis controladas, dado que são mais rápidas que aquelas. Os horizontes de controle podem ser escolhidos inicialmente como um terço da janela média de predição das controladas e depois um ajuste fino pode ser feito.

Com as considerações sobre a importância das variáveis para o processo, o ajuste do controlador multivariável deve considerar δ_1 e δ_3 com valores maiores que δ_2 e δ_4, para refletir a importância dos produtos 1 e 3 com relação aos produtos 2 e 4. Para considerar corretamente o peso na função custo, é interessante também considerar um ajuste que leve em conta o tamanho do horizonte de predição.

Com relação às variáveis manipuladas, as ponderações de controle usarão λ_1 muito maior que $\lambda_i, i = 2 \ldots 4$ para tentar minimizar o consumo de combustível, que é a variável que mais impacta o custo de operação. Novamente aqui, caso os horizontes de controle sejam diferentes para cada variável manipulada, podemos calcular os pesos para levar em consideração o efeito na função custo a ser minimizada.

E, por fim, vale ressaltar que o valor relativo entre as ponderações da saída e do esforço de controle também influencia o resultado final. Se, por exemplo, as ponderações das saídas forem muito maiores do que as dos incrementos de controle, a resposta tende a ser mais agressiva, um comportamento idêntico ao caso monovariável (veja, por exemplo, os casos simulados na ferramenta interativa do Capítulo 2 do Volume 1).

No exemplo anterior – Exemplo 3.2, consideramos um caso simples no qual todas as variáveis controladas e manipuladas estavam no mesmo intervalo de operação. Isso nem sempre acontece na prática. Por exemplo, uma temperatura pode ter uma faixa

de variação com valores entre $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ e $200\,^{\circ}\mathrm{C}$ e uma concentração entre $1\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ e $2\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$. Neste caso, o erro de temperatura terá valores da ordem de 100 vezes maior que o erro de concentração. Por exemplo, um erro de 1% de temperatura será, em valores absolutos, 100 vezes maior que um erro de 1% na concentração. Dessa forma, o peso na função custo do erro na concentração será muito menor que o do erro na temperatura, quando, na prática, podem, por exemplo, ter a mesma importância para o processo. Esta situação pode ser corrigida utilizando um modelo de processo com variáveis normalizadas, no qual, por exemplo, cada variável seja dividida pelo seu valor máximo, ficando normalizada a um valor máximo de 1. Se todas as variáveis controladas e manipuladas têm o mesmo horizonte, esta modificação resolve o problema. Entretanto, se os horizontes de predição são diferentes, então também precisamos ajustar as ponderações colocando um fator inversamente proporcional a cada horizonte em cada termo.

De forma geral, se uma variável controlada y_l tem valor máximo $y_{l,\,\max}$ e horizonte de predição $N_l = N_{2,l} - N_{1,l} + 1$, podemos escolher uma normalização do peso δ_l como:

$$\delta_l = \delta_{ln} \frac{1}{(y_{l,\,\max})^2 N_l},$$

com δ_{ln} sendo o peso normalizado a ser usado na sintonia e δ_l o peso a ser efetivamente aplicado na função custo.

Da mesma forma, se uma variável manipulada Δu_p tem valor máximo dado por $\Delta u_{p,\,\max}$ e horizonte de controle N_u, podemos escolher uma normalização do peso λ_p como:

$$\lambda_p = \lambda_{pn} \frac{1}{(\Delta u_{p,\,\max})^2 N_u},$$

com λ_{pn} sendo o peso normalizado a ser usado na sintonia e λ_p o peso a ser efetivamente aplicado. Vejamos um exemplo desse ajuste.

Exemplo 3.3

Considere um processo com duas variáveis controladas, y_1 e y_2, e duas variáveis manipuladas, u_1 e u_2. A variável y_1 tem horizonte de 20 amostras e valores no intervalo $[0;\ 100]$, y_2 tem horizonte de 10 amostras e valores no intervalo $[0;\ 10]$, Δu_1 tem horizonte de 5 amostras e valores no intervalo $[-1;\ +1]$ e Δu_2 tem horizonte de 3 amostras e valores no intervalo $[-5;\ +5]$. Se quisermos que uma variação em qualquer uma das variáveis tenha o mesmo peso na função custo,

precisamos trabalhar com pesos normalizados pelo máximo de cada variável ao quadrado e pelo horizonte, como:

$$\delta_1 = \delta_{1n}\frac{1}{100^2}\frac{1}{20} = \delta_{1n}\frac{1}{2\cdot 10^5},$$

$$\delta_2 = \delta_{2n}\frac{1}{10^2}\frac{1}{10} = \delta_{2n}\frac{1}{10^3},$$

$$\lambda_1 = \lambda_{1n}\frac{1}{1^2}\frac{1}{5} = \lambda_{1n}\frac{1}{5},$$

$$\lambda_2 = \lambda_{2n}\frac{1}{5^2}\frac{1}{3} = \lambda_{2n}\frac{1}{75}.$$

Assim, se os pesos normalizados, δ_{in} e λ_{in}, com $i = 1, 2$, forem todos iguais e aplicarmos os pesos resultantes, δ_i e λ_i, com $i = 1, 2$, na função custo, todas as variáveis terão contribuições iguais na função custo. Da mesma forma, quando um peso normalizado for, por exemplo, o dobro do outro, o termo correspondente ao primeiro peso estará contribuindo duas vezes mais que o segundo termo na função custo.

É importante atentar ao fato de que essa análise deve servir como ponto de partida para a análise, mas ela deve ser aprofundada em cada caso específico. Por exemplo, se o nível de um tanque pode ir de 0% a 100%, porém em uma dada aplicação ele será operado sempre abaixo de 20% da capacidade nominal, o valor de 20% deve ser considerado. O mesmo vale para as variáveis manipuladas. Além disso, se o horizonte de predição for muito longo, é natural que as predições atinjam regime permanente, então, se o valor de regime das predições for próximo da referência, o fato de aumentar o horizonte de predição não irá contribuir para aumentar a parcela do erro de predição na função custo.

Esses exemplos mostram como, apesar de intuitiva, a definição dos horizontes e dos pesos pode ser um problema complexo em sistemas com grandes dimensões. Além disso, no Exemplo 3.3 ilustramos que a normalização das variáveis e pesos pode simplificar o problema. Vamos, agora, desenvolver a forma da função custo multivariável em notação matricial, assim como foi feito para o caso monovariável no Volume 1, e mostrado no em (2.3) no anterior.

É possível escrever a função custo na forma matricial assumindo que o vetor de predições futuras é organizado da forma padrão apresentada em (3.1). Nesse caso, a função custo pode ser escrita como:

$$J = [\mathbf{r} - \hat{\mathbf{y}}]^T \mathbf{Q}_e [\mathbf{r} - \hat{\mathbf{y}}] + \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u \Delta\mathbf{u}, \tag{3.3}$$

com

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_l = \begin{bmatrix} r_l(k + N_{1,l}) \\ r_l(k + N_{1,l} + 1) \\ \vdots \\ r_l(k + N_{2,l}) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_1 \\ \hat{\mathbf{y}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}_n \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{y}}_l = \begin{bmatrix} \hat{y}_l(k + N_{1,l} \mid k) \\ \hat{y}_l(k + N_{1,l} + 1 \mid k) \\ \vdots \\ \hat{y}_l(k + N_{2,l} \mid k) \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_1 \\ \Delta\mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{u}_m \end{bmatrix}, \Delta\mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \Delta u_p(k) \\ \Delta u_p(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u_p(k + N_{u,p} - 1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_e = \begin{bmatrix} \delta_1 \mathbf{I}_{N_{2,1} - N_{1,1} + 1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta_2 \mathbf{I}_{N_{2,2} - N_{1,2} + 1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \delta_n \mathbf{I}_{N_{2,n} - N_{1,n} + 1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_u = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I}_{N_{u,1}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 \mathbf{I}_{N_{u,2}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda_m \mathbf{I}_{N_{u,m}} \end{bmatrix}.$$

Nessa formulação, os vetores de predição de cada uma das saídas são empilhados no vetor $\hat{\mathbf{y}}$, que tem dimensão $\sum_{l=1}^{n}(N_{2,l} - N_{1,l} + 1)$, e os incrementos de controle são empilhados no vetor $\Delta\mathbf{u}$, que tem dimensão $\sum_{p=1}^{m} N_{u,p}$.

A função custo J no caso multivariável, em sua forma matricial, é quase idêntica àquela obtida no caso monovariável, apresentada em (2.3). As alterações se dão apenas nas definições das matrizes e dos vetores. Note que, na formulação apresentada, foram empregadas ponderações constantes ao longo dos horizontes para cada variável, como forma de simplificar a notação das matrizes $\mathbf{Q}_e$ e $\mathbf{Q}_u$, porém, é possível empregar valores diferentes para cada posição do horizonte, definindo matrizes diagonais com essas ponderações no lugar da ponderação constante multiplicada pela matriz identidade. Na definição das matrizes de ponderação, a notação $\mathbf{0}$ é usada para designar matrizes com

todos os elementos nulos, de dimensão apropriada, como forma de não complicar a notação.

Como o formato final da função custo é semelhante ao já apresentado no caso monovariável, é possível reescrever a função custo no formato padrão de programação quadrática (QP, do inglês *Quadratic Programming*):

$$J = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{u}^T\mathbf{H}_{qp}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}_{qp}^T\Delta\mathbf{u}^T + c_{qp}, \tag{3.4}$$

com

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{qp} &= 2\left(\mathbf{G}^T\mathbf{Q}_e\mathbf{G} + \mathbf{Q}_u\right)\\ \mathbf{f}_{qp} &= -2\mathbf{G}^T\mathbf{Q}_e\left[\mathbf{r} - \mathbf{f}\right]\\ c_{qp} &= \left[\mathbf{r} - \mathbf{f}\right]^T\mathbf{Q}_e\left[\mathbf{r} - \mathbf{f}\right].\end{aligned}$$

Para chegar em (3.4), basta substituir a expressão de $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}$ na função custo e manipular o resultado[3]. Da mesma forma que ocorre com a função custo e as predições, para as restrições seguimos o mesmo procedimento do caso monovariável, considerando cada restrição associada a cada variável manipulada e transformando-a em uma expressão vetorial. Finalmente, a equação que representa todas as restrições de desigualdade do problema pode ser colocada como:

$$\overline{\mathbf{R}}\Delta\mathbf{u} \leq \overline{\mathbf{r}}.$$

Vamos ilustrar a montagem das matrizes $\overline{\mathbf{R}}$ e $\overline{\mathbf{r}}$ para o caso estudado no Exemplo 3.3 por meio de um novo exemplo.

Exemplo 3.4

Considere o mesmo caso do Exemplo 3.3, um processo multivariável 2×2, considerando que as ações de controle estão restritas ao intervalo $[0;\ 10]$ e os incrementos das ações de controle estão restritos ao intervalo $[-1;\ +1]$. Como os horizontes de controle são $N_{u,1} = 5$ e $N_{u,2} = 3$, teremos:

$$0 \leq u_1(k+j) \leq 10, \qquad -1 \leq \Delta u_1(k+j) \leq 1 \quad j = 1, \ldots, 5,$$

$$0 \leq u_2(k+j) \leq 10, \qquad -1 \leq \Delta u_2(k+j) \leq 1 \quad j = 1, \ldots, 3.$$

[3]Os detalhes desta manipulação são apresentados no Capítulo 3 do Volume 1.

O vetor de incremento de ações de controle a ser usado pelo otimizador é:

$$\Delta\mathbf{u} = [\Delta u_1(k)\ \Delta u_1(k+1)\ \ldots\ \Delta u_1(k+4)\ \Delta u_2(k)\ \Delta u_2(k+1)\ \Delta u_2(k+2)]^T,$$

que tem dimensão 8×1. Assim, vamos escrever as restrições em função desse vetor.

Para as restrições no incremento, podemos escrever:

$$-\mathbf{1}_8 \leq \Delta\mathbf{u} \leq \mathbf{1}_8,$$

ou

$$\mathbf{I}_8\Delta\mathbf{u} \leq \mathbf{1}_8,$$
$$-\mathbf{I}_8\Delta\mathbf{u} \leq \mathbf{1}_8.$$

Para as restrições no sinal de controle, lembre-se de que podemos reescrever o sinal de controle futuro em função dos incrementos de controle futuros:

$$u_p(k+j) = u_p(k-1) + \sum_{i=0}^{j} \Delta u_p(k+i),$$

e, matricialmente,

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{1}_{N_{u,p}} u_p(k-1) + \mathbf{T}_{N_{u,p}} \Delta\mathbf{u}_p,$$

sendo $\mathbf{T}_{N_{u,p}}$ uma matriz quadrada triangular inferior com elementos não nulos todos iguais a um de dimensão $N_{u,p}$. Assim, para este caso particular,

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{T}_5\Delta\mathbf{u}_1 + \mathbf{1}_5 u_1(k-1),$$
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{T}_3\Delta\mathbf{u}_2 + \mathbf{1}_3 u_2(k-1).$$

Então, as restrições no sinal de controle podem ser representadas por

$$\mathbf{0}_5 \leq \mathbf{T}_5\Delta\mathbf{u}_1 + \mathbf{1}_5 u_1(k-1) \leq 10 \cdot \mathbf{1}_5$$

$$\mathbf{0}_3 \leq \mathbf{T}_3\Delta\mathbf{u}_2 + \mathbf{1}_3 u_2(k-1) \leq 10 \cdot \mathbf{1}_5$$

ou

$$\mathbf{T}_5\Delta\mathbf{u}_1 \leq 10 \cdot \mathbf{1}_5 - \mathbf{1}_5 u_1(k-1) = \mathbf{1}_5(10 - u_1(k-1))$$
$$\mathbf{T}_3\Delta\mathbf{u}_2 \leq 10 \cdot \mathbf{1}_3 - \mathbf{1}_3 u_2(k-1) = \mathbf{1}_3(10 - u_2(k-1))$$
$$-\mathbf{T}_5\Delta\mathbf{u}_1 \leq \mathbf{1}_5 u_1(k-1)$$
$$-\mathbf{T}_3\Delta\mathbf{u}_2 \leq \mathbf{1}_3 u_2(k-1)$$

Agrupando todas as restrições, temos como colocar as inequações na forma $\overline{\mathbf{R}}\Delta\mathbf{u} \leq \overline{\mathbf{r}}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_5 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_3 \\ \hdashline -\mathbf{I}_5 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_3 \\ \hdashline \mathbf{T}_5 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_3 \\ \hdashline -\mathbf{T}_5 & 0 \\ 0 & -\mathbf{T}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_1 \\ \Delta\mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{1}_5 \\ \mathbf{1}_3 \\ \hdashline \mathbf{1}_5 \\ \mathbf{1}_3 \\ \hdashline \mathbf{1}_5(10 - u_1(k-1)) \\ \mathbf{1}_3(10 - u_2(k-1)) \\ \hdashline \mathbf{1}_5 u_1(k-1) \\ \mathbf{1}_3 u_2(k-1) \end{bmatrix},$$

obtendo a matriz $\overline{\mathbf{R}}$ e o vetor $\overline{\mathbf{r}}$ usados no otimizador.

A minimização da função custo (3.2) considerando as restrições, como explicado no caso monovariável no Volume 1, nos dá o vetor de incrementos futuros a serem aplicados no processo a cada instante de amostragem, que no caso sem restrições se reduz a

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{K}\left[\mathbf{r} - \mathbf{f}\right], \tag{3.5}$$

com

$$\mathbf{K} = \left(\mathbf{G}^T\mathbf{Q}_e\mathbf{G} + \mathbf{Q}_u\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{Q}_e.$$

Note que $\Delta\mathbf{u}$ define um vetor de incrementos futuros de controle, porém, apenas os $\Delta u_p(k)$ com $p = 1 \ldots m$ são aplicados ao processo no instante k, pois $\Delta\mathbf{u}$ deve ser recalculado a cada instante de amostragem, seguindo o princípio de horizonte deslizante. Assim, é necessário obter apenas o valor de $\Delta u_p(k)$ ótimo, dado pelo vetor de incrementos de controle para o instante atual, definido como:

$$\Delta\mathbf{u}_a = \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_2(k) \\ \vdots \\ \Delta u_m(k) \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

com elementos iguais aos primeiros elementos de cada um dos subvetores do vetor $\Delta\mathbf{u}$. No caso irrestrito, é possível obter uma matriz simplificada $\mathbf{K}_1$ obtida a partir das m linhas de $\mathbf{K}$ associadas ao cálculo de $\Delta u_p(k)$, $\forall\ p$. Por fim, as ações de controle a serem aplicadas no processo são:

$$u_p(k) = u_p(k-1) + \Delta u_p(k),\ \forall p = 1 \ldots m. \tag{3.7}$$

Agora que temos a forma da lei de controle estabelecida para o caso multivariável, podemos retomar a análise do funcionamento do sistema em malha fechada para o caso de referências constantes. Assim como no caso monovariável, por ter incluído um modelo de controle incremental e um modelo de perturbação degrau nas predições, sabemos que, assumindo a estabilidade de malha fechada, a resposta livre converge para a saída do processo e o sistema terá um incremento de controle $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ em regime permanente, o que significa que $\mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{f}) = \mathbf{0}$, sendo $\mathbf{0}$ um vetor de zeros de dimensão apropriada. Mas essa igualdade não garante que, em regime permanente, os valores de cada uma das respostas livres $\mathbf{f}_{l,ss}$ alcancem a correspondente referência $\mathbf{r}_l$, dado que a condição imposta em regime permanente é:

$$\mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{f}_{ss}) = \sum_{l=1}^{n} \mathbf{K}_l(\mathbf{r}_l - \mathbf{f}_{l.ss}) = \sum_{l=1}^{n} \mathbf{K}_l\mathbf{e}_{l.ss} = \mathbf{0}, \tag{3.8}$$

na qual o vetor de ganho foi escrito como $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \ \mathbf{K}_2 \ \ldots \ \mathbf{K}_n]$ e $\mathbf{f}_{ss}$ é o vetor de resposta livre no regime permanente. Observe que (3.8) pode ser satisfeita com valores de erro estático $\mathbf{e}_{l,ss}$ não nulos, basta encontrar uma combinação linear de erros que satisfaça a equação.

Uma forma mais direta de visualizar este problema é analisar a característica estática do sistema, assumindo um processo estável de ganho estático $\mathbf{K}_e$. Temos que $\mathbf{y} = \mathbf{K}_e\mathbf{u}$ e desejamos que $\mathbf{y} = \mathbf{r}$, então,

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}_e\mathbf{u}.$$

Podemos interpretar essa equação como um sistema linear de equações em que a incógnita é o vetor de controle $\mathbf{u}$. Se o sistema for quadrado, $n = m$, então temos um número de equações iguais ao número de incógnitas e, se o posto de $\mathbf{K}_e$ for completo (todas as linhas, ou colunas, são linearmente independentes), há uma única solução, que é $\mathbf{u} = \mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{r}$. Se há um número de entradas maior do que saídas, $m > n$, então há um número de equações menor do que o de incógnitas. Assim, se o posto de $\mathbf{K}_e$ for igual a n, há um número infinito de combinações de $\mathbf{u}$ que satisfaz a equação. Em malha fechada, o ponto a ser escolhido vai depender da sintonia do controlador, das restrições e do estado atual do sistema. Porém, se o número de saídas é maior que o número de variáveis manipuladas, $n > m$, o número de equações é maior do que o número de incógnitas. Assim, mesmo se o posto de $\mathbf{K}_e$ for igual a m, não há solução que satisfaça todas as equações simultaneamente. Dessa forma, o controlador convergirá a um ponto em que $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{f}_{ss}) = \mathbf{0}$, mesmo que os erros de rastreamento individuais não sejam nulos, e esse ponto dependerá da sintonia utilizada e do estado atual do sistema (por conta das restrições). O próximo exemplo ilustra esse caso.

Exemplo 3.5

Considere um processo com duas saídas e uma entrada, com horizonte de predição 2 para as duas saídas e horizonte de controle 1, $\delta_1 = \delta_2 = 1$ e $\lambda = 0$. Assim, o MPC tem liberdade total para escolher a ação de controle e os dois erros têm o mesmo peso na função custo. Considere, ainda, que o ganho estático de u para y_1 é 2 e o ganho estático de u para y_2 é 3. O controle sem restrições em regime permanente neste caso pode ser colocado como:

$$\Delta \mathbf{u}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1,ss} \\ \mathbf{e}_{2,ss} \end{bmatrix} = 0,$$

ou:

$$\begin{aligned} [K_{11}\ K_{12}\ K_{21}\ K_{22}] \left[e_{1,ss}\ e_{1,ss}\ e_{2,ss}\ e_{2,ss}\right]^T = \\ (K_{11} + K_{12})e_{1,ss} + (K_{21} + K_{22})e_{2,ss} = 0. \end{aligned}$$

Assim, qualquer par de erros que satisfaça a igualdade anterior pode ser uma solução do problema. Se a referência escolhida for $r_1 = 1$ e $r_2 = 1$, sabemos que não existe um valor de u que leve as duas saídas para a referência, pois $r_1/r_2 = 1$ é diferente de $K_{e1}/K_{e2} = 2/3$. O MPC vai encontrar, em regime permanente, o valor de u tal que obtenha o mínimo de J, porém a igualdade dos ganhos estáticos sempre será obedecida, dado que é uma característica do sistema.

Neste problema simples, podemos calcular a solução de forma analítica se aceitarmos que o sistema é estável em malha fechada para o ajuste proposto. Veja que, em regime permanente, todas as variáveis estarão em valores constantes, então o incremento de controle será nulo e a função custo proposta será:

$$J = 2(r_1 - y_{1,ss})^2 + 2(r_2 - y_{2,ss})^2,$$

sendo $y_{1,ss}$ e $y_{2,ss}$ os valores de estado estacionário das saídas, que verificam $y_{1,ss} = 2u_{ss}$ e $y_{2,ss} = 3u_{ss}$, com u_{ss} sendo o valor de equilíbrio do controle. Note que os valores 2 que aparecem antes de cada termo em J vêm dos somatórios dos erros tomados ao longo dos horizontes de predição de duas amostras. Como os pesos são unitários e em regime permanente ambos os elementos do somatório são iguais, cada termo quadrático aparece duas vezes em J.

Substituindo os valores das referências e saídas em J temos:

$$J = 2(1 - 2u_{ss})^2 + 2(1 - 3u_{ss})^2 = 2(2 - 10u_{ss} + 13u_{ss}^2).$$

O mínimo de J é obtido com $u_{ss} = 5/13$, valor esse que levará a saída 1 ao valor $y_{1,ss} = 10/13$ e a saída 2 ao valor $y_{2,ss} = 15/13$. Note que os erros em regime

permanente são similares em módulo (com valor $3/13$) e de diferente sinal. Isso ocorre porque os pesos e os horizontes de ambas as saídas são iguais na função custo.

Observe que, como o MPC encontrará sempre aquela combinação que minimize J e respeite o modelo estático do sistema, o resultado vai depender do ajuste de parâmetros do controlador. Se os pesos das saídas forem alterados para $\delta_1 = 1$ e $\delta_2 = 2$, obtemos:

$$J = 2(1 - 2u_{ss})^2 + 4(1 - 3u_{ss})^2 = 2(3 - 16u_{ss} + 22u_{ss}^2),$$

e o mínimo de J é obtido com $u_{ss} = 4/11$, que leva a saída 1 ao valor $y_{1,ss} = 8/11$ e a saída 2 ao valor $y_{2,ss} = 12/11$, melhorando o erro da segunda saída, de maior peso, em detrimento do erro da primeira saída, de menor peso.

Do ponto de vista da formulação do MPC, o modelo do processo sempre pode ser visto como uma restrição de igualdade que deve ser cumprida pelas entradas e saídas do sistema, fazendo com que o problema de otimização sempre chegue a uma solução que satisfaça as condições de operação do processo.

Finalmente, outro ponto deve ser destacado. Apesar de a solução do problema de otimização neste caso ter a mesma forma que no caso monovariável, o aumento da dimensão do problema a ser resolvido tem grande impacto no tempo de processamento, aumentando consideravelmente para um sistema multivariável com grande número de variáveis manipuladas e controladas. Como o tempo necessário para obter a solução do problema de otimização pode ser um limitante em uma dada aplicação prática, discutiremos, no Capítulo 7, alguns métodos para diminuir o tempo computacional e conseguir aplicar o MPC em processos rápidos. O próximo exemplo ilustra o cálculo do tamanho do problema a ser resolvido.

Exemplo 3.6

Considere o mesmo processo 2×2 do Exemplo 3.4, com os mesmos horizontes de controle $N_{u,1} = 5$ e $N_{u,2} = 3$. A solução do problema de otimização, neste caso, fornece um vetor de incrementos de controle dado por:

$$\Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_1(k+1) \\ \Delta u_1(k+2) \\ \Delta u_1(k+3) \\ \Delta u_1(k+4) \\ \hdashline \Delta u_2(k) \\ \Delta u_2(k+1) \\ \Delta u_2(k+2) \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

mas apenas os valores de $\Delta u_1(k)$ e $\Delta u_2(k)$ são usados no instante k para calcular $u_1(k) = u_1(k-1) + \Delta u_1(k)$ e $u_2(k) = u_2(k-1) + \Delta u_2(k)$ para serem enviados ao processo. Apesar disso, todos os incrementos de controle precisam ser calculados no caso geral.

Ainda para este exemplo, podemos calcular as dimensões do problema de otimização. A dimensão do vetor $\hat{\mathbf{y}}$ é $\sum_{l=1}^{2}(N_{2,l} - N_{1,l} + 1) = 20 + 10 = 30$ e a do vetor $\Delta\mathbf{u}$ é $\sum_{p=1}^{2} N_{u,p} = 5 + 3 = 8$. Assim, temos um problema com 8 variáveis de decisão e 30 predições a serem calculadas em cada amostra.

Apresentada a forma como se obtém a lei de controle do MPC a partir do conhecimento do modelo compacto das predições, da função custo e das restrições, analisaremos, na sequência, as particularidades de cada formulação de MPC multivariável no que diz respeito ao cálculo das predições, começando com o DMC.

3.2 DMC MULTIVARIÁVEL

Nesta seção, estudaremos aspectos relacionados com o cálculo das predições no DMC multivariável, sempre para um processo com m entradas de controle e n saídas a serem controladas.

3.2.1 Cálculo das predições no caso estável

Considere que o sistema multivariável é estável e que não há perturbações medidas (o caso multivariável com perturbações medidas será apresentado na Seção 3.2.2). Assim, o modelo de malha aberta de cada saída l é dado por

$$y_l(k) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} g_{l,p,i} \Delta u_p(k-i), \tag{3.10}$$

onde Δu_p é o incremento de controle associado à variável manipulada p e $g_{l,p,i}$ representa o i-ésimo coeficiente da resposta ao degrau que relaciona a variável manipulada p com a saída l. Observe que, como o modelo é linear, podemos obter o modelo completo apenas somando as respostas obtidas de forma individual para um degrau aplicado em cada uma das entradas. Essa simplicidade do modelo usado pelo DMC é uma das suas vantagens, pois, na prática industrial, basta realizar um ensaio de resposta ao degrau para cada uma das entradas de controle e armazenar as repostas obtidas em todas as saídas do processo e, depois, organizar e compor as somas.

A partir do modelo de malha aberta em (3.10), considerando condições iniciais nulas, as predições da saída l no tempo $k+j$ podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\hat{y}_l(k+j \mid k) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} g_{l,p,i} \Delta u_p(k+j-i) + \hat{\eta}_l(k+j \mid k), \tag{3.11}$$

com $\hat{\eta}_l(k+j \mid k)$ representando uma predição da perturbação não mensurável em $k+j$ observada na saída l. Assim como no caso monovariável, consideramos um modelo de perturbação constante, isto é,

$$\hat{\eta}_l(k+j \mid k) = \hat{\eta}_l(k \mid k) = y_l(k) - \hat{y}_{ol}(k \mid k),$$

sendo $y_l(k)$ a saída real do processo e o termo $\hat{y}_{ol}(k \mid k)$, calculado a partir de (3.10), é a estimação da saída l do sistema sem correção.

Separando as parcelas do somatório que dependem de valores futuros de Δu_p, é possível reescrever a predição como:

$$\begin{aligned} \hat{y}_l(k+j \mid k) = &\sum_{p=1}^{m} \sum_{i=1}^{j} g_{l,p,i} \Delta u_p(k+j-i) \\ &+ \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=j+1}^{\infty} g_{l,p,i} \Delta u_p(k+j-i) + \hat{\eta}_l(k \mid k). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Utilizando a definição de $\hat{\eta}_l(k \mid k)$ e (3.10) para obter $\hat{y}_{ol}(k \mid k)$, temos

$$\hat{y}_l(k+j \mid k) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=1}^{j} g_{l,p,i} \Delta u_p(k+j-i) + \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} \left(g_{l,p,j+i} - g_{l,p,i}\right) \Delta u_p(k-i) + y_l(k), \tag{3.13}$$

ou, de forma mais compacta,

$$\hat{y}_l(k+j \mid k) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=1}^{j} g_{l,p,i} \Delta u_p(k+j-i) + f_l(k+j \mid k), \tag{3.14}$$

onde $f_l(k+j \mid k)$ é a resposta livre da saída l do sistema, ou seja, a parte da resposta que não depende das ações de controle futuras e que, após o truncamento dos somatórios infinitos, é dada por:

$$f_l(k+j \mid k) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=1}^{N_{ss,l,p}} \left(g_{l,p,j+i} - g_{l,p,i}\right) \Delta u_p(k-i) + y_l(k). \tag{3.15}$$

Note que o truncamento é possível, pois, para sistemas assintoticamente estáveis, a resposta ao degrau de um dado par entrada-saída tende a se tornar constante após um número suficiente de amostras $N_{ss,l,p}$, portanto, $(g_{l,p,j+i} - g_{l,p,i}) \approx 0$, $\forall i > N_{ss,l,p}$. Uma observação importante é que, no caso geral, é possível definir um horizonte de modelo $N_{ss,l,p}$ para cada modelo de resposta ao degrau do sistema multivariável. Isso passa a ser interessante quando se tem modelos com tempos de assentamento muito diferentes. Assim, para os modelos com tempo de assentamento baixo, é possível escolher valores de $N_{ss,l,p}$ menores, o que pode impactar o tamanho de algumas matrizes, tornando mais eficiente a implementação do algoritmo. Comentaremos esse ponto com mais detalhes ainda nesta seção, ao apresentar a forma matricial das predições.

Considerando o cálculo das predições de 1 a $N_{2,l}$, as predições futuras da saída l, dadas por (3.14), podem ser escritas de forma matricial da seguinte maneira:

$$\hat{\mathbf{y}}_l = \sum_{p=1}^{m} \mathbf{G}_{l,p} \Delta \mathbf{u}_p + \mathbf{f}_l, \tag{3.16}$$

onde $\mathbf{G}_{l,p} \in \mathbb{R}^{N_{2,l} \times N_{u,p}}$ é a matriz de coeficientes da resposta ao degrau da entrada p para a saída l, $N_{2,l}$ é o horizonte de predição da saída l, $N_{u,p}$ é o horizonte de controle

da entrada p, e $\mathbf{f}_l \in \mathbb{R}^{N_{2,l}}$ a resposta livre da saída l do sistema. Esses vetores e matrizes são dados por:

$$\mathbf{f}_l = \begin{bmatrix} f_l(k+1 \mid k) \\ f_l(k+2 \mid k) \\ \vdots \\ f_l(k+N_{2,l} \mid k) \end{bmatrix} = \sum_{p=1}^{m} \mathbf{H}_{l,p} \underleftarrow{\Delta \mathbf{u}}_p + \mathbf{1}_{N_{2,l}} y_l(k), \quad \underleftarrow{\Delta \mathbf{u}}_p = \begin{bmatrix} \Delta u_p(k-1) \\ \Delta u_p(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u_p(k-N_{ss,l,p}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{l,p} = \begin{bmatrix} h_{l,p,1,1} & h_{l,p,1,2} & \cdots & h_{l,p,1,N_{ss,l,p}-1} & h_{l,p,1,N_{ss,l,p}} \\ h_{l,p,2,1} & h_{l,p,2,2} & \cdots & h_{2,N_{ss,l,p}-1} & h_{l,p,2,N_{ss,l,p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{l,p,N_{2,l},1} & h_{l,p,N_{2,l},2} & \cdots & h_{l,p,N_{2,l},N_{ss,l,p}-1} & h_{l,p,N_{2,l},N_{ss,l,p}} \end{bmatrix},$$

com

$$h_{l,p,j,i} = g_{l,p,j+i} - g_{l,p,i}, \; j+i \leq N_{ss,l,p},$$
$$h_{l,p,j,i} = g_{l,p,N_{ss,l,p}} - g_{l,p,i}, \; j+i > N_{ss,l,p},$$

e

$$\mathbf{G}_{l,p} = \begin{bmatrix} g_{l,p,1} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{l,p,2} & g_{l,p,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{l,p,N_{2,l}} & g_{l,p,N_{2,l}-1} & \cdots & g_{l,p,N_{2,l}-N_{u,p}+1} \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma que no caso monovariável, se o horizonte inicial de predição da saída l for maior do que um ($N_{1,l} > 1$), as $N_{1,l} - 1$ linhas iniciais de $\hat{\mathbf{y}}_l$, $\mathbf{G}_{l,p}$ e $\mathbf{f}_l$ devem ser removidas.

Também, como no caso monovariável, note que $h_{l,p,j,i} = 0$ para $i = N_{ss,l,p}$ e para todo j, dado que se calcula a diferença entre o $g_{l,p,N_{ss,l,p}+j}$ e o $g_{l,p,N_{ss,l,p}}$, que são iguais, dado que no modelo se consideram todos os coeficientes da resposta ao degrau iguais depois do elemento $N_{ss,l,p}$. Assim, a última coluna da matriz $\mathbf{H}_{l,p}$ será nula, como verificaremos nos exemplos desta seção.

Combinando as predições de todas as n saídas, dadas por (3.16), obtemos o formato padrão de predição:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}, \tag{3.17}$$

com $\mathbf{f} = \mathbf{H}\underleftarrow{\Delta \mathbf{u}} + \mathbb{I}\mathbf{y}(k)$ e

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1} & \cdots & \mathbf{G}_{1,m} \\ \mathbf{G}_{2,1} & \cdots & \mathbf{G}_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{G}_{n,1} & \cdots & \mathbf{G}_{n,m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1} & \cdots & \mathbf{H}_{1,m} \\ \mathbf{H}_{2,1} & \cdots & \mathbf{H}_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{H}_{n,1} & \cdots & \mathbf{H}_{n,m} \end{bmatrix}, \quad \underleftarrow{\Delta\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \underleftarrow{\Delta\mathbf{u}}_1 \\ \underleftarrow{\Delta\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \underleftarrow{\Delta\mathbf{u}}_m \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_{2,1}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{N_{2,2}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1}_{N_{2,n}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_n(k) \end{bmatrix}.$$

Observe que a matriz $\mathbf{H}$ resulta do empilhamento das matrizes $\mathbf{H}_{l,p}$. Assim, para cada p, todas as matrizes $\mathbf{H}_{l,p}$ devem ter o mesmo número de colunas, independentemente do $N_{ss,l,p}$ escolhido. Dessa forma, para um dado p, é necessário adicionar colunas nulas em cada submatriz para ajustar a dimensão de todas ao maior dos $N_{ss,l,p}$ para $l = 1 \ldots n$. Já para o número de linhas, não é necessário ajustar dimensões, pois para uma dada saída l, todas as $\mathbf{H}_{l,p}$, $p = 1 \ldots m$ têm o mesmo número de linhas, igual ao horizonte de predição da respectiva saída.

ESTE LIVRO, O VOLUME 2 DE UM CONJUNTO DE DOIS VOLUMES, APRESENTA AOS ESTUDANTES DE ENGENHARIA E ÁREAS AFINS TÓPICOS AVANÇADOS DE CONTROLE PREDITIVO, COM APLICAÇÕES EM SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS E NÃO LINEARES. ALÉM DISSO, ABORDA ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO PARA A IMPLEMENTAÇÃO DOS CONTROLADORES.

O controle preditivo é uma das metodologias de controle mais utilizadas na indústria de processos, sendo, depois do PID, a estratégia mais difundida e que proporciona maior satisfação aos usuários. Assim, esta obra adota uma abordagem teórico-prática, com enfoque no desenvolvimento de teorias avançadas de controle preditivo e aborda aspectos de implementação, com estudos de caso extraídos do ambiente industrial e baseados em situações reais.

O livro explora tanto controladores preditivos lineares como alguns algoritmos não lineares, todos voltados para sistemas multivariáveis. Também são apresentados algoritmos de otimização, que permitem obter a ação de controle ótima com os diferentes algoritmos estudados. A obra é acompanhada por códigos dos controladores abordados, disponibilizados na web.

ISBN 978-85-212-2500-3

9 788521 225003

www.blucher.com.br

Blucher

Clique aqui e:

VEJA NA LOJA

Controle preditivo baseado em modelo - Vol. 2

Tópicos avançados

Julio Elias Normey-Rico, Rodolfo César Costa Flesch,
Daniel Martins Lima, Vinícius Berndsen Peccin

ISBN: 9788521225003

Páginas: 432

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2024