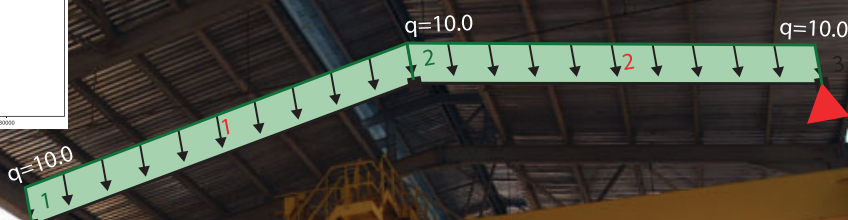
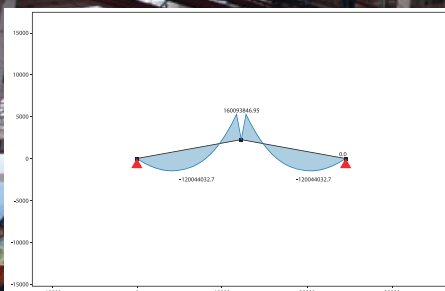
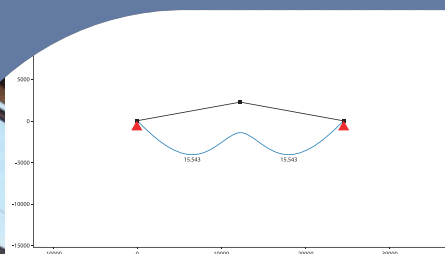


HORÁCIO GUIMARÃES DELGADO JÚNIOR
RONY PETERSON FERREIRA
CARLOS ROBERTO XAVIER
JOSÉ ADILSON DE CASTRO

ANÁLISE ESTRUTURAL APLICADA

Enfoque computacional com códigos em Python
Formulação dos elementos finitos de treliça, viga e pórtico



```
# carrega o anastruct no Google Colab
! pip install anastruct

# Importa SystemElements do anastruct
from anastruct import SystemElements
# Atribui SystemElements
ss = SystemElements(EA=2000000*13030, EI=2000000*770030000)
# Adiciona os elementos entre juntas à ré e avante
# e Atribui aos elementos o produto E.A
ss.add_element(location=[0, 0], [12283, 2271])
ss.add_element(location=[12283, 2271], [24566, 0])
# Restrição nodal
ss.add_support_hinged(node_id=1)
ss.add_support_hinged(node_id=3)
# Cargas Distribuídas
ss.q_load(element_id=1, q=-10, rotation=90)
ss.q_load(element_id=2, q=-10, rotation=90)
# Resolve a Estrutura
ss.solve()
# Apresentação dos resultados
# Modelo estrutural
ss.show_structure()
# Reações de apoio
# show_reactions_force()
```

Blucher

Horácio Guimarães Delgado Júnior

Rony Peterson Ferreira

Carlos Roberto Xavier

José Adilson de Castro

ANÁLISE ESTRUTURAL APLICADA

Enfoque computacional com códigos em Python
Formulação dos elementos finitos de treliça, viga e pórtico

*Análise estrutural aplicada: enfoque computacional com códigos em Python:
formulação dos elementos finitos de treliça, viga e pórtico*

© 2024 Horácio Guimarães Delgado Júnior, Rony Peterson Ferreira, Carlos Roberto Xavier e
José Adilson de Castro
Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher

Editor Eduardo Blücher

Coordenador editorial Rafael Fulanetti

Coordenação de produção Andressa Lira

Produção editorial Helena Miranda

Preparação de texto Regiane Miyashiro

Revisão de texto Lidiane Pedroso Gonçalves

Diagramação Horizon Soluções Editoriais

Capa Leandro Cunha

Imagem da Capa Horácio Guimarães Delgado Júnior

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed.
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,
Academia Brasileira de Letras, julho de 2021.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer
meios sem autorização escrita da editora.

Todos os direitos reservados pela Editora
Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Análise estrutural aplicada: enfoque computacional com
códigos em Python: formulação de elementos finitos de treliça,
viga e pórtico. / Horácio Guimarães Delgado Júnior...[et al].
– São Paulo: Blucher, 2024.
270 p.: il.

Bibliografia
ISBN 978-85-212-2145-6

1. Análise estrutural (Engenharia) - Programas de computador
 2. Engenharia de estruturas - Programas de computador
 3. Python (Linguagem de programação de computador)
- I. Delgado Júnior, Horácio Guimarães
24-4260 CDD 624.1

Índice para catálogo sistemático:

1. Análise estrutural (Engenharia) - Programas de computador

CONTEÚDO

PREFÁCIO	7
1 TRELIÇAS	9
1.1 Introdução	9
1.2 A lei da elasticidade	9
1.3 Analogia de mola aplicada a estruturas reticuladas	11
1.4 Equações de equilíbrio para o elemento	15
1.5 Matriz de rigidez para o elemento de barra com dois graus de liberdade	17
1.6 Transformação de sistema de coordenada para o elemento de barra em duas dimensões	27
1.7 Obtenção da matriz de rigidez do elemento de barra no sistema de coordenadas globais	31
1.8 Solução do sistema estrutural	32
1.9 Definição de graus de liberdade de uma junta	32
1.10 Restrições nos deslocamentos de juntas provocados pela interação com o meio externo	34
1.11 Indexação dos graus de liberdade pelos números das juntas para elementos de dois nós	36
1.12 Método de análise estrutural	38
2 VIGAS	67
2.1 Matriz de rigidez para o elemento de viga com quatro graus de liberdade	67
2.2 Carregamento nodal equivalente	93
3 PÓRTICOS	127
3.1 Matriz de rigidez para o elemento de pórtico com seis graus de liberdade	127
4 DEFLEXÃO EM ELEMENTOS LINEARES	157
4.1 Teoria das pequenas deformações	157
5 FLAMBAGEM	175
5.1 Modelo da coluna ideal	176
5.2 Diversos tipos de apoio	183

6	ANALISANDO ESTRUTURAS COM O PYTHON ANASTRUCT	191
6.1	Uso da implementação anaStruct no Python com o objeto SystemElements	192
6.2	Adicionando elementos ao modelo	193
6.3	Aplicação das restrições nodais – suportes	196
6.4	Cargas na estrutura	198
	APLICAÇÕES PRÁTICAS	243
	EXERCÍCIOS	251
	BIBLIOGRAFIA	257
	ANEXO I	259
	ANEXO II	261
	SOBRE OS AUTORES	269

1. TRELIÇAS

1.1. INTRODUÇÃO

A análise estrutural é um estudo de engenharia cujo objetivo é compreender o comportamento das estruturas admitindo hipóteses quanto às possíveis ações externas e às eventuais interações com o meio para simular condições de carregamentos e graus de liberdade compatíveis com a fenomenologia.

Em geral, as estruturas são projetadas para resistir com considerável grau de segurança a todas as solicitações, trabalhando com pequenas deformações e abaixo do limite de resistência dos materiais que a compõe. Admitem-se como válidas as seguintes hipóteses:

- da linearidade física para o comportamento mecânico dos materiais, ou seja, os componentes da estrutura trabalham dentro do regime elástico linear, sendo válida a Lei de Hooke;
- da linearidade geométrica para a estrutura, sendo considerados como muito pequenos os deslocamentos de juntas de ligação e as deformações dos elementos estruturais.

1.2. A LEI DA ELASTICIDADE

Conhecida também como Lei de Hooke, em homenagem ao cientista inglês Robert Hooke (1635-1705), assim foi definida: *No regime elástico, a deformação sofrida por uma mola é diretamente proporcional à intensidade da força que a provoca.*

Seja F a força aplicada na extremidade livre de uma mola e U a deformação observada após a aplicação dessa força (Figura 1.1).

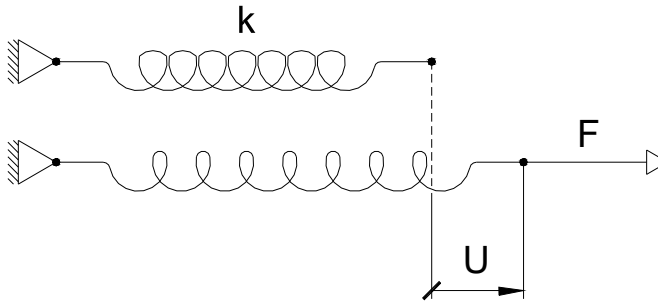


Figura 1.1 Representação de uma mola deformada pela ação de uma força

Estando a mola no regime elástico, haverá linearidade entre U e F , ou seja, o valor numérico de U será proporcional ao de F . Assim, matematicamente a fenomenologia pode ser escrita pela equação (1.1):

$$k \cdot U = F \tag{1.1}$$

em que k é a constante de proporcionalidade, também conhecida como constante de mola, conforme demonstrado pelo gráfico da Figura 1.2.

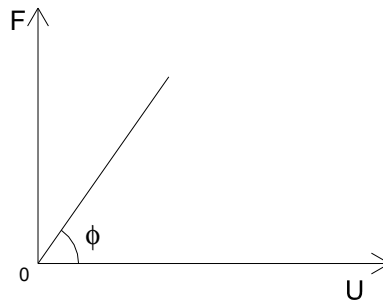


Figura 1.2 Gráfico representativo da deformação de uma mola em função da força aplicada

Uma vez que se trata da equação de uma reta que passa pela origem das posições, k representa o coeficiente angular nos termos da equação (1.2).

$$\tan \phi = k \tag{1.2}$$

Esta relação de linearidade física é também aplicável a estruturas, o que será discutido adiante.

1.3. ANALOGIA DE MOLLA APLICADA A ESTRUTURAS RETICULADAS

As estruturas reticuladas são aquelas passíveis de serem idealizadas como compostas por hastes interligadas entre si por juntas ou ao meio externo por vínculos. A junta de ligação entre elementos de uma estrutura também é denominada na literatura por nó. Hastes são componentes estruturais que contêm uma das dimensões significativamente maior que outras duas, portanto, graficamente representados pelo comprimento (dimensão maior) e pela linha de eixo do centro de gravidade. A Figura 1.3 apresenta, à esquerda, alguns exemplos de componentes estruturais comumente considerados como a haste, representada à direita.

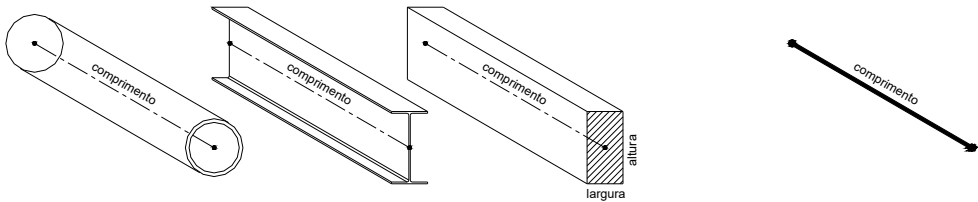


Figura 1.3 Componentes estruturais idealizados como haste

Estes elementos interligados por juntas formam os diferentes tipos de estruturas reticuladas. As juntas de ligações podem ser rígidas, quando transmitem rotação entre os elementos, conforme apresentado na Figura 1.4(a), ou articuladas, quando não transmitem a rotação na conectividade, como na Figura 1.4(b). As juntas articuladas são denominadas rótulas.

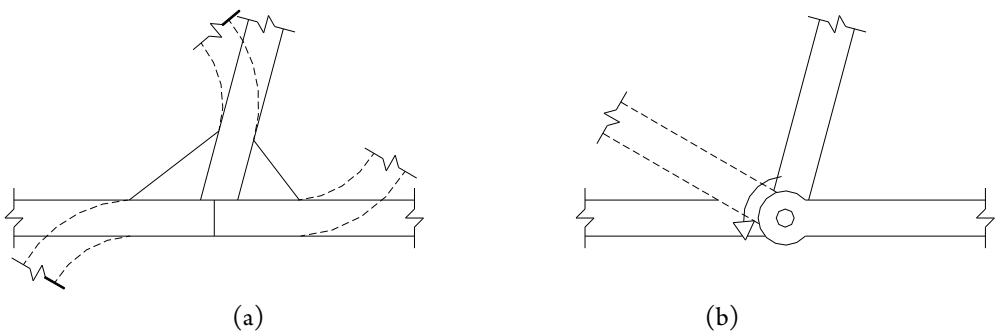


Figura 1.4 Juntas de ligação entre hastes

Estruturas reticuladas podem ser classificadas conforme características geométricas e são o tipo de junta mais comumente utilizado na construção.

As treliças são estruturas reticuladas formadas por elementos de barras geometricamente dispostas na forma de triângulos e interligadas por rótulas. Portanto, são formadas por elementos sensíveis apenas a esforços axiais, conforme pode ser visto na Figura 1.5(a), que apresenta o exemplo de uma treliça plana, e na Figura 1.5(b), uma treliça espacial. Estruturas de grande eficácia, as treliças são empregadas na construção de pontes, viadutos, torres de transmissão, guindastes, plataformas de exploração de petróleo e coberturas de galpão. Este conceito viabiliza a concepção de estruturas de grande rigidez com baixo consumo de materiais.

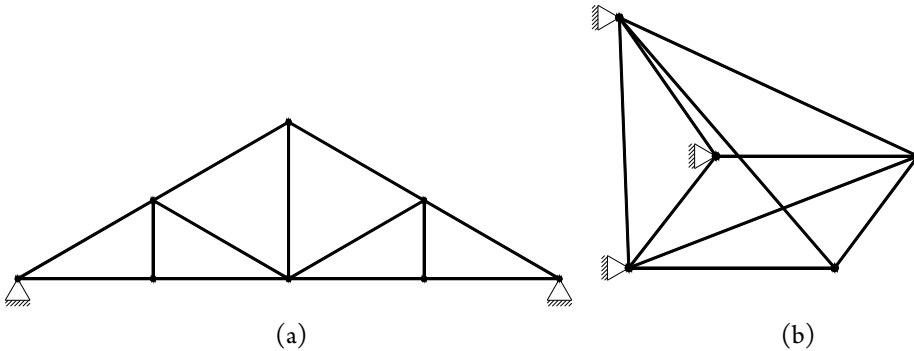


Figura 1.5 Treliça plana e espacial

As vigas são componentes estruturais lineares, dispostos em regra na horizontal, com ações principais tangenciais – carregamentos verticais, quando interligados, podem ser por juntas rígidas ou em algumas situações articuladas, como é o caso das vigas Gerber. Os elementos de vigas são comumente investigados aos efeitos destas ações tangenciais aos quais são submetidos. Em virtude disso, os elementos de viga consideram apenas os efeitos de rotações nas juntas e deslocamentos verticais, sendo desprezados os efeitos das cargas axiais. São aplicados em construção de pontes, passarelas, viadutos e para compor pavimentos de edificações. A Figura 1.6 apresenta o modelo estrutural de uma viga.

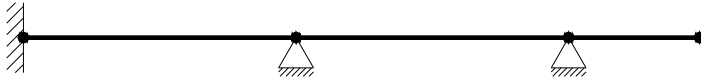


Figura 1.6 Viga

As grelhas são formações planas de elementos lineares concorrentes submetidos a ações transversais, conforme mostra a Figura 1.7. Além dos tradicionais efeitos percebidos pelos elementos de vigas, ou seja, rotação e translação tangencial, os componentes de uma grelha também podem receber rotações axiais em virtude da rigidez conferida pelas juntas de interação. Assim, os elementos de grelha são sensíveis à translação tangencial, à rotação tangencial em direção paralela ao plano da grelha e às eventuais rotações axiais oriundas da torção.

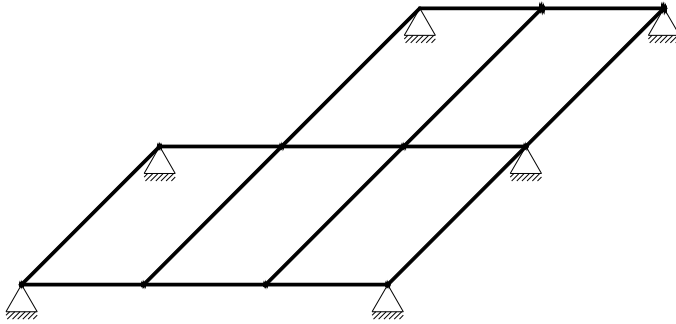


Figura 1.7 Grelha

Na construção de edifícios, é comum o emprego de estruturas reticuladas tipo pórticos planos, como apresentado na Figura 1.8(a), e pórtico espacial, Figura 1.8(b). Tais estruturas são formadas por elementos de pórticos, sensíveis a esforços axiais, tangenciais e momentos, geometricamente dispostas em retângulos, normalmente interligadas por juntas rígidas.

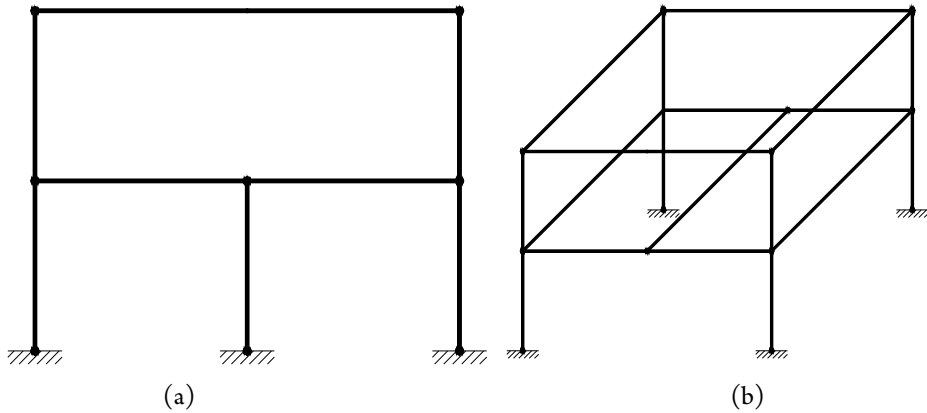


Figura 1.8 Pórtico plano e espacial

No geral, as estruturas convencionais são dimensionadas para trabalhar com pequenas deformações, objetivando a manutenção da forma originária e do conforto ao usuário. Assim, para estruturas com tais características, viabiliza-se com considerável grau de correspondência física a análise comportamental, considerando a analogia de mola. Desse modo, todos os elementos constituintes da estrutura são analogamente considerados como molas interligadas por juntas. A Figura 1.9 apresenta a idealização de uma estrutura espacial reticulada usando essa analogia de mola. As juntas e os elementos estão numerados aleatoriamente de 1 a n , sendo as juntas representadas pelos círculos e os elementos, pelos quadrados.

Por meio das juntas, ocorrem as interações da estrutura com o meio externo, pelas quais se aplicam as ações (cargas) e as restrições de movimentação das juntas (apoios). Assim, conhecendo-se a geometria, as propriedades físicas dos elementos componentes da estrutura, as ações e as restrições de movimento das juntas, definem-se o domínio e as condições de contorno, viabilizando a solução da estrutura como um problema de valor de contorno.

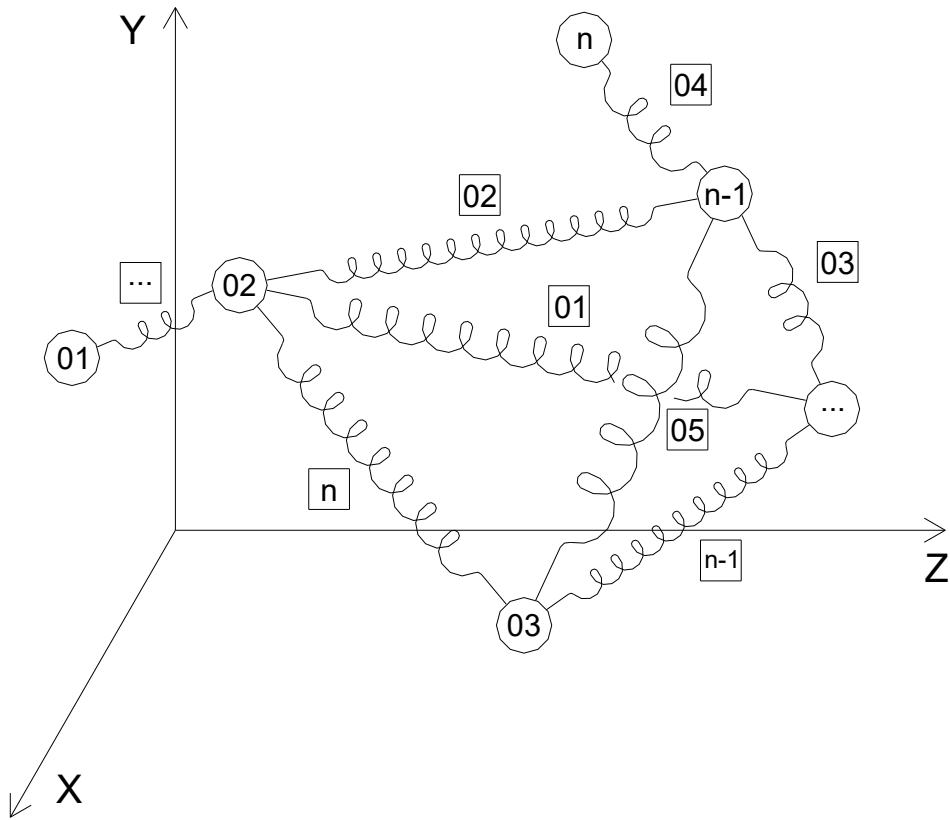


Figura 1.9 Idealização de uma estrutura aplicando a analogia de mola

1.4. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA O ELEMENTO

Considere o elemento de mola idealizado, posicionado na direção horizontal e interligado a duas juntas, sendo j a junta avante, e i a junta à ré, conforme apresentado na Figura 1.10.

Se aplicarmos simultaneamente sobre as juntas duas forças horizontais, sendo $F_i < F_j$, por conseguinte ocorrerão deslocamentos $U_i < U_j$ e a mola sofrerá distensão, conforme apresenta a Figura 1.11.

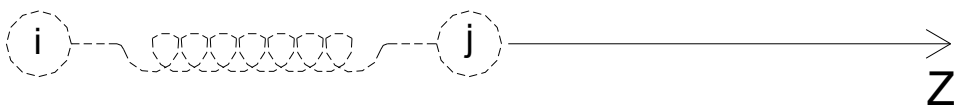


Figura 1.10 Elemento de mola em repouso

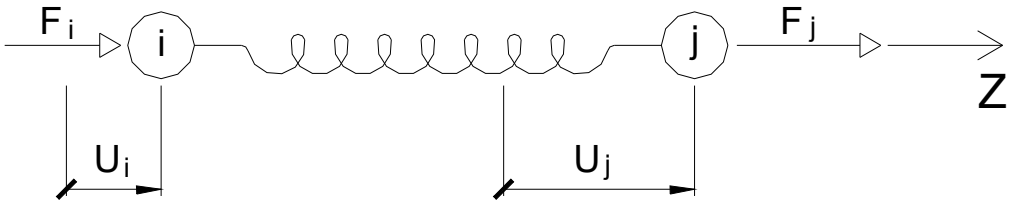


Figura 1.11 Elemento de mola submetido à ação de forças horizontais aplicadas nas juntas

Essa distensão faz o elemento de mola reagir no sentido oposto para neutralizar as ações externas e assegurar o equilíbrio. Sendo F_m a força exercida pela mola, conforme apresenta a Figura 1.12, e retornando na equação (1.1), como $U = U_j - U_i$ e $F = F_m$, tem-se que:

$$k \cdot (U_j - U_i) = F_m \tag{1.3}$$

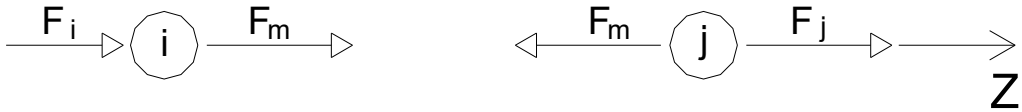


Figura 1.12 Forças exercidas nas juntas

O equilíbrio do elemento é obtido mediante equilíbrio simultâneo dos graus de liberdade vinculados às juntas i e j . Assim, considerando o somatório das forças verticais horizontais (direção de Z) iguais a zero, tem-se:

$$\begin{cases} \text{junta } i: F_i + F_m = 0 \\ \text{junta } j: F_j - F_m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -F_m = F_i \\ +F_m = F_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} -k \cdot (U_j - U_i) = F_i \\ +k \cdot (U_j - U_i) = F_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} +k \cdot U_i - k \cdot U_j = F_i \\ -k \cdot U_i + k \cdot U_j = F_j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} +k & -k \\ -k & +k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} \tag{1.4}$$

A equação matricial (1.4) pode ser utilizada também de forma análoga para obter o equilíbrio de quaisquer elementos, ainda que possuam mais graus de liberdade do que o elemento de mola ora estudado. Isso porque os graus de liberdade i e j vinculados aos nós avante e à ré podem variar de 1 a n . É comumente apresentada de forma matricial simplificada ou indicial, conforme a equação (1.5), uma vez que possui amplo emprego na solução de problemas estruturais mediante implementação computacional.

$$[K].\{U\} = \{F\} \quad \text{ou} \quad k_{ij}U_j = F_i \quad (1.5)$$

Assim, define-se a equação de equilíbrio nas formas anteriores apresentadas, em que $\{U\} = U_j$ e $\{F\} = F_i$ correspondem aos vetores de deslocamentos e de forças nas juntas, os quais correlacionam os graus de liberdade por meio de $[K] = k_{ij}$, que é definida como matriz de rigidez. Desse modo, define-se a equação de equilíbrio aplicável a qualquer elemento do qual se conheça a rigidez $[K]$, que para o elemento de mola idealizado é apresentada pela equação (1.6).

$$k_{ij} = [k] = \begin{bmatrix} +k & -k \\ -k & +k \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

1.5. MATRIZ DE RIGIDEZ PARA O ELEMENTO DE BARRA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

1.5.1. Método da rigidez direta

Considere o elemento de barra indeformado e deformado após a aplicação de forças nas juntas, em condições análogas às do elemento de mola apresentado, conforme as Figuras 1.13 e 1.14.

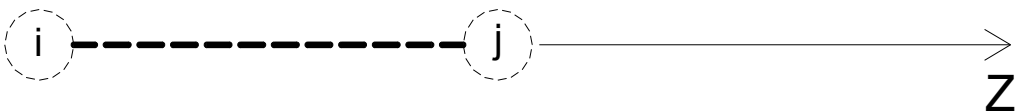


Figura 1.13 Elemento de barra indeformado

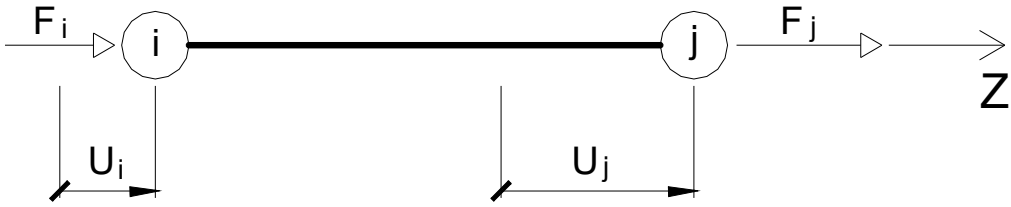


Figura 1.14 Elemento de barra submetido à ação de forças horizontais aplicadas nas juntas

Por outro lado, para este elemento de barra, a rigidez k pode ser perfeitamente determinada pela teoria da elasticidade. Assim, considere a Figura 1.15, que apresenta uma barra em lugar de uma mola sob a ação de uma força axial F . Considere como válida a hipótese de linearidade física estabelecida pela lei de Hooke conforme apresentado pelo gráfico da Figura 1.16, em que a tensão axial σ é proporcional à deformação unitária ϵ .

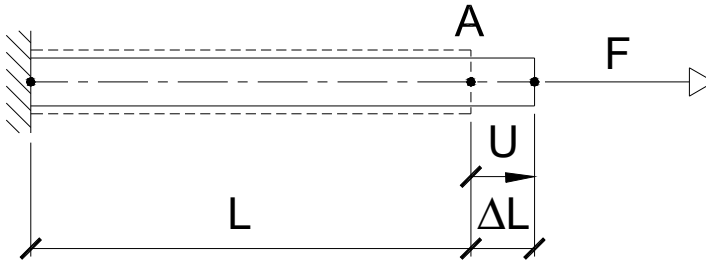


Figura 1.15 Elemento de barra submetido à ação de uma força horizontal

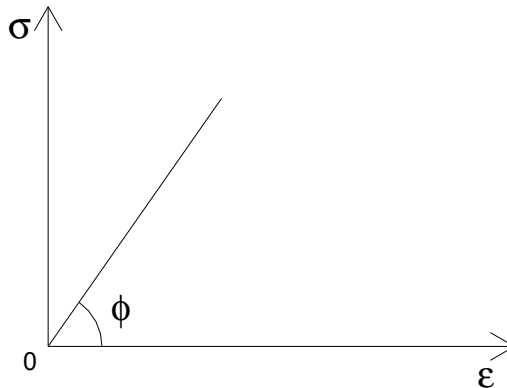


Figura 1.16 Relação tensão-deformação

A equação (1.7) corresponde ao gráfico apresentado na Figura 1.16, sendo o parâmetro E corresponde ao módulo de elasticidade do material também conhecido por módulo de Young – razão de proporcionalidade entre a variação da tensão e a variação da deformação unitária.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1.7)$$

Considere que o elemento de barra apresentado pela Figura 1.15 possui comprimento L , área da seção transversal A e sofrerá pela ação de uma força F uma deformação ΔL de mesmo valor que deslocamento U da junta da extremidade da barra. Sendo a tensão axial σ a relação entre a força F e a área A , conforme dispõe a equação (1.8), e a deformação unitária ε , a relação entre a deformação ΔL e o comprimento L , apresentado na equação (1.9), é possível determinar, retornando na equação (1.7), a constante de mola k do elemento de barra estudado, desenvolvendo a equação (1.10).

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.8)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (1.9)$$

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1.10)$$

É possível, então, determinar a constante de mola k , da equação (1.1) em termos das demais constantes: módulo de elasticidade, área da seção transversal, comprimento do elemento.

$$\frac{E \cdot A}{L} \cdot U = F \quad (1.11)$$

Portanto, define-se k para o elemento de barra conforme a equação (1.12).

$$k = \frac{E \cdot A}{L} \quad (1.12)$$

Retornando o valor de k para a equação (1.4), chega-se a equação matricial (1.13) de equilíbrio para o elemento de barra.

$$\begin{bmatrix} +\frac{E.A}{L} & -\frac{E.A}{L} \\ -\frac{E.A}{L} & +\frac{E.A}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

Nesse caso, $k_{ij} = [k] = [K_e]$ é definida como matriz de rigidez, que, para o elemento de barra, pode ser apresentada pela equação (1.14):

$$[K_e] = \begin{bmatrix} +\frac{E.A}{L} & -\frac{E.A}{L} \\ -\frac{E.A}{L} & +\frac{E.A}{L} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

1.5.2. Formulação do elemento de barra aplicado nas treliças pelo método dos elementos finitos

Os deslocamentos nodais são determinados pelo método dos elementos finitos, considerando um elemento de barra bidimensional, composto por dois nós i e j , sensível apenas a esforços e deformações axiais, seja de tração ou compressão. É conhecido o comprimento L do elemento e o endereçamento nodal, sendo j o índice do nó avante e i o índice do nó à ré. Conforme apresentado na Figura 1.17, ambos os nós terão seus deslocamentos horizontais u correlatos com a deformação do elemento, o qual responde fisicamente apenas na referida direção longitudinal ao comprimento L e normal à seção transversal da barra.

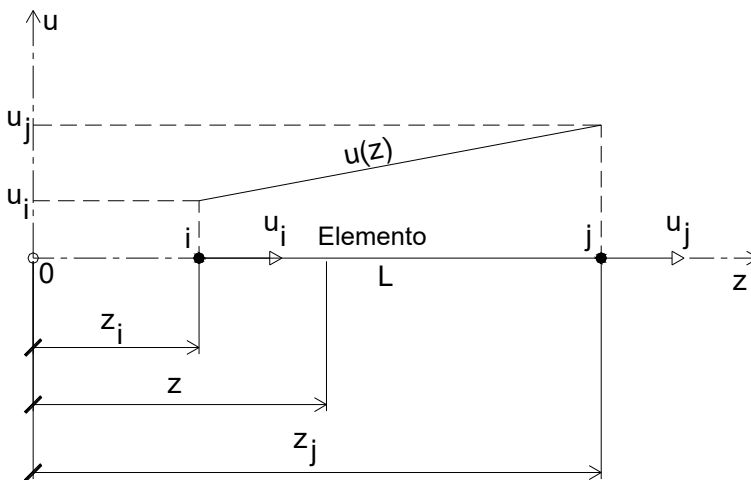


Figura 1.17 Elemento finito de barra de comprimento L e dois graus de liberdade

1.5.2.1. Determinação do campo de deslocamentos

O campo de deslocamentos de cada elemento é aproximado pelas funções de interpolação polinomiais de primeiro grau, sendo α_1 e α_2 constantes da função que representam, respectivamente, os coeficientes linear e angular da função de interpolação.

$$u(z) = \alpha_1 + \alpha_2 z \quad (1.15)$$

Aplicando o método dos elementos finitos, pode-se então determinar os deslocamentos nodais no interior do elemento, representados pelo vetor $\{u_e\}$, por aproximação pela multiplicação da matriz de interpolação do elemento $[N_e]$ pelo vetor $\{\delta_e\}$ que guarda como parâmetros nodais – deslocamentos dos nós do sistema vinculados ao elemento. Assim, escrevendo no formato indicial, tem-se a seguinte equação matricial:

$$\{u_e\} = [N_e] \{\delta_e\} \quad (1.16)$$

Portanto, é possível escrever a função dos deslocamentos da matriz de interpolação e do vetor de parâmetros nodais.

$$u(z) = N_i u_i + N_j u_j = [N_i \quad N_j] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

As funções N_i e N_j de forma do elemento são retas que possuem valor unitário no nó de mesmo índice e zero no nó oposto, sendo escritas em função de z e L , conforme apresentado pelos gráficos da Figura 1.18.

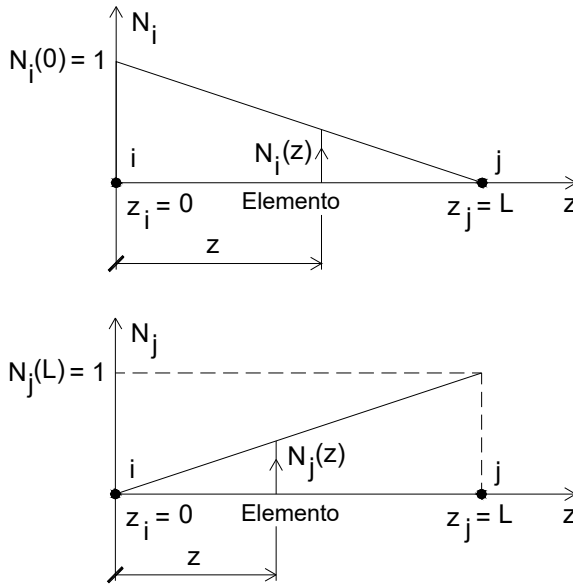


Figura 1.18 Função N_i e N_j de forma para o elemento nos nós i e j , respectivamente

As equações de interpolação do primeiro grau podem ser extraídas dos gráficos anteriormente apresentados de forma direta por meio da simples semelhança de triângulo.

$$N_i = \frac{z_j - z}{L}, N_j = \frac{-z_i + z}{L} \tag{1.18}$$

Adotando como origem para as coordenadas locais o nó i , assim $z_i = 0$ e $z_j = L$, é possível reescrever as funções.

$$N_i = 1 - \frac{z}{L}, N_j = \frac{z}{L} \tag{1.19}$$

Reescrevendo a matriz de interpolação nos termos de z e L .

$$[N_e] = \left[1 - \frac{z}{L} \quad \frac{z}{L} \right] \tag{1.20}$$

1.5.2.2. Equações constitutivas

Considera-se que o material possui comportamento elástico e linear, sendo válida a lei de Hooke, escrita de forma indicial, em que o tensor de tensões se relaciona linearmente com o tensor de deformações por meio do tensor C_{ijkl} de quarta ordem, que representa fisicamente a matriz de elasticidade.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.21)$$

Sendo os materiais supostamente homogêneos e isotópicos, e o tensor de tensões de Cauchy um tensor simétrico ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), as componentes da tensão se reduzem a seis, viabilizando a simplificação da equação tensorial para a equação matricial.

$$\{\sigma\}_i = [C]_{ij} \cdot \{\varepsilon\}_j \quad (1.22)$$

Trata-se de um problema de valor de contorno, em que os deslocamentos dos nós dos elementos finitos que integram o sistema correspondem às deformações internas sofridas pelo elemento. Dessa maneira, retornando em (1.16), nos termos da equação constitutiva dada pela lei de Hooke, uma vez que é conhecida a relação $\{\varepsilon\} = [\partial] \{u\}$, pode-se perfeitamente obter a correlação entre as deformações internas e os deslocamentos nodais.

$$\{\varepsilon_e\} = [\partial][N_e] \{\delta_e\} \quad (1.23)$$

Seja, portanto, definida a matriz de deformação do elemento $[B_e]$ dada por:

$$[B_e] = [\partial][N_e] \quad (1.24)$$

Retornando à equação (1.23), tem-se:

$$\{\varepsilon_e\} = [B_e] \cdot \{\delta_e\} \quad (1.25)$$

A matriz de deformação $[B_e]$ pode ser perfeitamente definida, posto que $\{\varepsilon\} = [\partial] \{u\}$, sendo o operador $[\partial]$ dado por:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Nesse caso, por se tratar de deslocamentos e deformações na direção do eixo do elemento, atribuído a este a letra z, o operador se resume simplesmente à derivada total.

$$[\partial] = \frac{d}{dz} \quad (1.27)$$

Define-se a matriz de deformação do elemento $[B_e]$ por meio da diferenciação da equação (1.20).

$$[B_e] = \frac{d}{dz} [N_e] \quad (1.28)$$

$$[B_e] = \frac{d}{dz} \left[1 - \frac{z}{L} \quad \frac{z}{L} \right] \quad (1.29)$$

$$[B_e] = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \quad (1.30)$$

1.5.2.3. Teorema dos trabalhos virtuais – condições de equilíbrio

As condições para equilíbrio do sistema composto pelos elementos são então verificadas pela aplicação do teorema dos trabalhos virtuais, que considera como nula a soma dos trabalhos W_e realizados pelas forças externas $\{F_e\}$ durante os deslocamentos virtuais $\{\delta_e^*\}$ e $\{u_e^*\}$ com os trabalhos internos W_i realizados pelas tensões $\{\sigma\}$ durante as deformações virtuais $\{\varepsilon_e^*\}$.

Esta obra é recomendada aos profissionais de engenharia e arquitetura, estudantes de graduação e pós-graduação das áreas de modelamento, simulação, análise e otimização de projetos estruturais.

Encontra-se racionalmente dividida em seis capítulos. Possui linguagem moderna e acessível ao entendimento e à compreensão da solução computacional de estruturas aplicando o *método dos elementos finitos*. Aborda todos os conceitos teóricos necessários, contemplando critérios para discretização, endereçamento de elementos, juntas e graus de liberdade. A interação com o meio é considerada por ações e restrições nos graus de liberdade das juntas. Quando indiretamente aplicadas no elemento, ações são tratadas como carregamentos nodais equivalentes. Formulados os elementos de treliça, viga e pórtico, apresenta soluções analíticas e computacionais de casos práticos com respectivos códigos em *python*. Possibilita que o leitor resolva estruturas lançando mão dos recursos *mobily* e usando o *Google colab*.

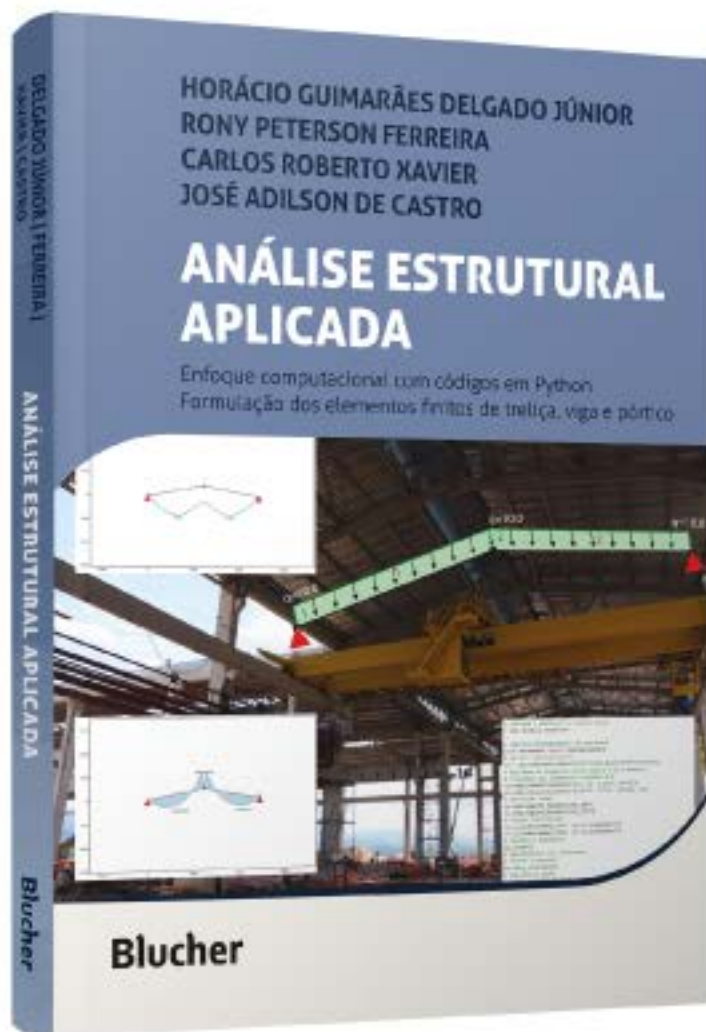
```
# carrega o anaStruct no Google Colab
! pip install anastruct

# Importa SystemElements do anastruct
from anastruct import SystemElements
# Atribui SystemElements
ss = SystemElements(EA=200000*10000, EI=200000*770000)
# Adiciona os elementos entre juntas à ré e avante
# e Atribui aos elementos o produto E.A
ss.add_element(location=[[0, 0], [12283, 2271]])
ss.add_element(location=[[12283, 2271], [24566, 0]])
# Restrição nodal
ss.add_support_hinged(node_id=1)
ss.add_support_hinged(node_id=3)
# Cargas Distribuídas
ss.q_load(element_id=1, q=-10, rotation=90)
ss.q_load(element_id=2, q=-10, rotation=90)
# Resolve a Estrutura
ss.solve()
# Apresentação dos resultados
# Modelo estrutural
ss.show_structure()
# Reação de apoio
ss.show_reaction()
# Diagrama de esforços normais
ss.show_axial_force()
# Diagrama de esforços cortantes
ss.show_shear_force()
# Diagrama de momentos
ss.show_moment_force()
```



www.blucher.com.br

Blucher



Clique aqui e:

[VEJA NA LOJA](#)

Análise estrutural aplicada

Enfoque computacional com códigos em Python

Formulação dos elementos finitos de treliça, viga e pórtico

Horácio Guimarães Delgado Júnior, Rony Peterson Ferreira,
Carlos Roberto Xavier, José Adilson de Castro

ISBN: 9788521221456

Páginas: 270

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2024
