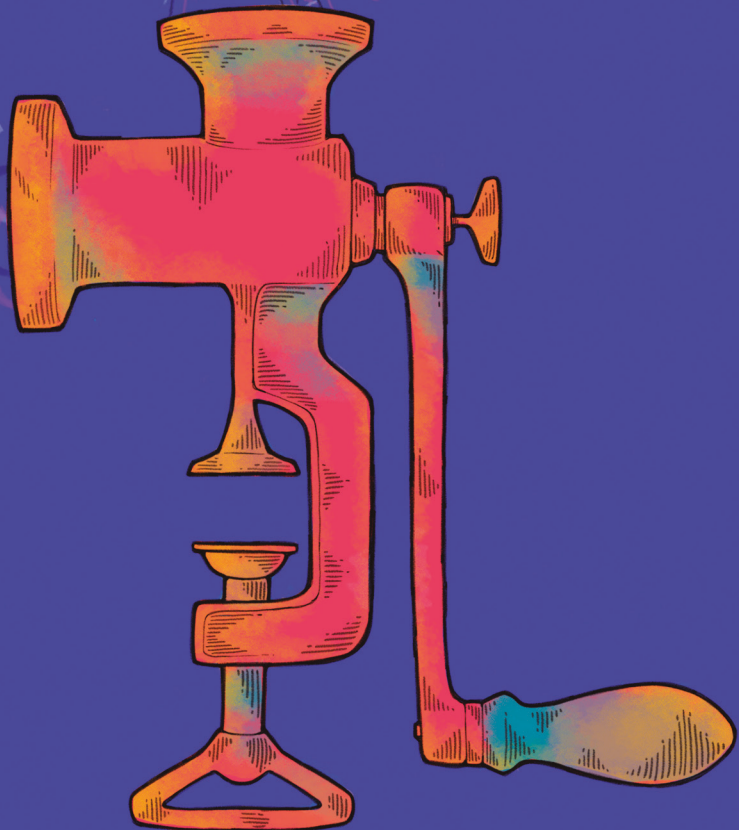


Roberto A. Tenenbaum

# PROCESSAMENTO DE SINAIS EM ACÚSTICA E VIBRAÇÕES



Blucher

Roberto A. Tenenbaum

**PROCESSAMENTO DE SINAIS EM  
ACÚSTICA E VIBRAÇÕES**

*Processamento de sinais em acústica e vibrações*

© 2024 Roberto A. Tenenbaum

Editora Edgard Blücher Ltda.

*Publisher* Edgard Blücher

*Editor* Eduardo Blücher

*Pré-produção* Aline Flenic

*Coordenador editorial* Rafael Fulanetti

*Coordenação de produção* Andressa Lira

*Produção editorial* Mariana Naime

*Diagramação de páginas pré-textuais* Horizon Soluções Editoriais

*Editoração eletrônica (em LaTeX)* Roberto A. Tenenbaum

*Revisão de texto* Maurício Katayama

*Capa* Laércio Flenic

*Imagem da capa* Isabela M. Tenenbaum

*Arte final das ilustrações* Sofia Oliveira

*Coautoria das Seções 7.6; 11.3; 11.5; 11.8; 12.3; 12.4; 12.6 e 12.7* Professor Paulo Henrique Mareze

# Blucher

---

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar  
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil  
Tel.: 55 11 3078-5366  
**contato@blucher.com.br**  
**www.blucher.com.br**

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed.  
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,  
Academia Brasileira de Letras, julho de 2021.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer  
meios sem autorização escrita da editora.

---

Todos os direitos reservados pela Editora  
Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

---

Tenenbaum, Roberto A.  
Processamento de sinais em acústica e vibrações /  
Roberto A. Tenenbaum. – São Paulo: Blucher, 2024.  
496 p. : il.

Bibliografia  
ISBN 978-85-212-2045-9

1. Acústica 2. Vibração I. Título

24-1332

CDD 620.23

---

Índice para catálogo sistemático:  
1. Acústica

# Sumário

<b>Apresentação</b>	<b>29</b>
<b>Prefácio</b>	<b>31</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>37</b>
<b>2 Sinais e Sistemas</b>	<b>43</b>
2.1 Sinais . . . . .	48
2.2 Sistemas . . . . .	51
<b>I Parte A — Sinais Contínuos</b>	<b>63</b>
<b>3 Distribuições</b>	<b>65</b>
3.1 Funcionais . . . . .	67
3.2 Distribuições . . . . .	73
3.3 Produto interno . . . . .	76
3.4 Distribuição de Dirac . . . . .	79
3.5 Propriedades das distribuições . . . . .	83
3.5.1 Translação . . . . .	83
3.5.2 Escala . . . . .	83
3.5.3 Multiplicação por função integrável . . . . .	84
3.5.4 Diferenciação . . . . .	85
3.6 Propriedades da distribuição de Dirac . . . . .	86
3.6.1 Translação . . . . .	86
3.6.2 Escala . . . . .	87
3.6.3 Multiplicação por função integrável . . . . .	88
3.6.4 Diferenciação . . . . .	88
3.6.5 Pente de deltas . . . . .	91
3.6.6 Degrau unitário . . . . .	93
3.7 Equivalência . . . . .	95

<b>4</b>	<b>Base Complexa e Funções Harmônicas</b>	<b>97</b>
4.1	Vetores complexos . . . . .	98
4.2	Funções complexas . . . . .	105
4.3	Funções harmônicas . . . . .	107
4.4	Representação espectral . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Convolução e Correlação</b>	<b>117</b>
5.1	Convolução de dois sinais . . . . .	117
5.2	Propriedades da convolução . . . . .	120
5.2.1	Comutatividade . . . . .	120
5.2.2	Linearidade . . . . .	123
5.2.3	Associatividade . . . . .	124
5.3	Convolução de duas distribuições . . . . .	126
5.4	Resposta impulsiva . . . . .	130
5.5	Correlação entre sinais . . . . .	137
5.5.1	Propriedades da correlação . . . . .	143
5.5.2	Correlação normalizada . . . . .	146
<b>6</b>	<b>Série de Fourier</b>	<b>151</b>
6.1	Funções periódicas . . . . .	152
6.2	Série de Fourier . . . . .	156
6.3	Maloma e Taketi . . . . .	172
6.4	Propriedades da série de Fourier . . . . .	174
6.4.1	Linearidade . . . . .	174
6.4.2	Escala . . . . .	175
6.4.3	Translação . . . . .	176
6.4.4	Rotação . . . . .	178
6.4.5	Paridade . . . . .	179
6.4.6	Diferenciação . . . . .	180
6.5	Energia e potência de sinais . . . . .	182
6.6	Teorema de Parseval . . . . .	190
<b>7</b>	<b>Transformada de Fourier</b>	<b>195</b>
7.1	A integral de Fourier . . . . .	197
7.2	Transformada da distribuição de Dirac . . . . .	206
7.3	Propriedades da transformada de Fourier . . . . .	212
7.3.1	Linearidade . . . . .	213
7.3.2	Simetria . . . . .	213
7.3.3	Escala . . . . .	215
7.3.4	Translação . . . . .	217
7.3.5	Rotação . . . . .	219
7.3.6	Diferenciação . . . . .	220
7.3.7	Paridade . . . . .	222
7.4	Teorema de Parseval . . . . .	224

7.5	Transformadas de convoluções e correlações . . . . .	227
7.6	Coerência entre sinais . . . . .	240
7.7	Ruídos e seus espectros . . . . .	247
7.8	Filtragem analógica . . . . .	252
7.9	Exemplos de pares transformados . . . . .	255
<b>II Parte B — Sinais Discretos</b>		<b>267</b>
<b>8</b>	<b>Amostragem de Sinais</b>	<b>269</b>
8.1	Amostragem e quantização . . . . .	270
8.2	Amostragem ideal . . . . .	273
8.3	Dobramento ( <i>Aliasing</i> ) . . . . .	277
8.4	Teorema da amostragem . . . . .	281
8.5	Amostragem não ideal . . . . .	284
8.6	Quantização . . . . .	287
<b>9</b>	<b>Transformada Discreta de Fourier</b>	<b>293</b>
9.1	A transformada discreta de Fourier . . . . .	294
9.2	Dobramento e vazamento . . . . .	310
9.3	Propriedades da transformada discreta de Fourier . . . . .	319
9.3.1	Linearidade . . . . .	320
9.3.2	Simetria . . . . .	321
9.3.3	Translação . . . . .	321
9.3.4	Rotação . . . . .	323
9.3.5	Paridade . . . . .	324
9.4	Energia e potência de sinais discretos . . . . .	325
9.4.1	Potência e energia . . . . .	325
9.4.2	Teorema de Parseval . . . . .	328
9.5	Transformada rápida de Fourier . . . . .	329
<b>10</b>	<b>Convolução e Correlação Discretas</b>	<b>333</b>
10.1	Convolução discreta . . . . .	333
10.2	Propriedades da convolução discreta . . . . .	339
10.3	Correlação discreta . . . . .	347
10.4	Domínio da frequência . . . . .	354
<b>III Parte C — Aplicações</b>		<b>357</b>
<b>11</b>	<b>Aplicações em Acústica</b>	<b>359</b>
11.1	Medições com analisador FFT de dois canais . . . . .	361
11.2	Medição de respostas impulsivas e funções de transferência . . . . .	364
11.3	Medição de ruído utilizando sonômetro . . . . .	370
11.4	Medição de dose de ruído . . . . .	374

11.5	Medição de intensidade sonora . . . . .	377
11.6	Medição de tempo de reverberação em salas . . . . .	386
11.6.1	Método da interrupção de ruído . . . . .	387
11.6.2	Método da integração reversa . . . . .	389
11.7	Medição de potência sonora . . . . .	393
11.8	Medição de coeficiente de absorção de materiais . . . . .	398
11.8.1	Método do tubo de impedância . . . . .	399
11.8.2	Método de campo difuso . . . . .	407
11.9	Medição de coeficiente de espalhamento de difusores . . . . .	412
11.10	Medição de inteligibilidade da fala . . . . .	415
11.11	Medições em acústica musical . . . . .	420
11.12	Simulação computacional e auralização em salas . . . . .	424
<b>12</b>	<b>Aplicações em Vibrações</b>	<b>435</b>
12.1	Medição da frequência de um oscilador harmônico . . . . .	437
12.2	Medição do amortecimento de um sistema vibrante . . . . .	439
12.3	Medição de parâmetros de um isolador de vibrações . . . . .	442
12.4	Medição de parâmetros de uma mola helicoidal . . . . .	447
12.5	Medição de frequência de um diapasão . . . . .	449
12.6	Medição de parâmetros elásticos em viga . . . . .	451
12.7	Medição de vibração em placas . . . . .	457
12.8	Medição de vibração em cordas . . . . .	460
12.9	Sistemas dinâmicos oscilatórios . . . . .	463
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>468</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>485</b>

# Capítulo 1

## Introdução

*Em tudo, há apenas um modo de começar quando se deseja discutir adequadamente um assunto: é preciso entender o objeto da discussão.*

**Platão**

*Processamento de Sinais* constitui uma disciplina de ampla aplicação nas mais diversas áreas científicas. Tem substancial importância nas Engenharias (Elétrica, Mecânica, Civil, Materiais, Minas, Biomédica, Acústica, entre outras), nas Ciências Exatas e da Terra (Física, Química, Astronomia, Geociências, entre outras), nas Ciências da Saúde (Medicina, Odontologia, Fonoaudiologia, entre outras), nas Ciências Biológicas (Genética, Botânica, Zoologia, Biofísica, entre outras), nas Ciências Agrárias (Agronomia, Zootecnia, Recursos Pesqueiros, entre outras), nas Ciências Sociais Aplicadas (Administração, Economia, Arquitetura e Urbanismo, Demografia, entre outras) e mesmo em Ciências Humanas (Geografia, por exemplo). Seria certamente mais fácil enumerar as áreas do conhecimento humano onde o domínio das técnicas de processamento de sinais *não* constitui um elemento fundamental e de grande aplicação.

Processamento de sinais é uma área do conhecimento que poderíamos comparar à chuva. Em si mesma, não parece constituir nada de muito relevante, porém sem ela outras atividades humanas não poderiam se desenvolver, nem tampouco existir a vida no planeta Terra. Processamento de sinais aplica-se, como mencionado, a vastas áreas do conhecimento, sendo imprescindível em diversas destas, dentre as quais se destaca *Acústica e Vibrações (A&V)*.



Mas, o que estamos querendo dizer com esta expressão um tanto enigmática: “*Processamento de Sinais*”? Ora, um sinal — tema discutido com mais detalhes no Capítulo 2 — nada mais é do que uma função de uma ou mais variáveis, que representa um determinado fenômeno (físico, químico, geológico, biológico etc.) do qual nos interessa *extrair informações*. A título de exemplo, o sinal de um eletrocardiograma, captado por um sensor de batimentos cardíacos, pode informar ao profissional de saúde as condições do coração do paciente; um sinal geológico, capturado por um geofone, pode informar ao geólogo ou engenheiro sobre a presença ou não de petróleo ou gás no subsolo; um sinal de um radiotelescópio, capturado por uma antena parabólica, pode assinalar a presença de um astro ainda não identificado etc. Para que se possa *extrair* essas informações dos sinais captados pelos *sensores*, sempre será necessário passar os sinais por um ou mais *dispositivos*, cuja função consiste em filtrar as informações desejadas dos sinais originais. Esses dispositivos proverão as informações buscadas e o procedimento para tal é denominado *processamento de sinais*.

Historicamente, segundo Oppenheim,<sup>1</sup> os princípios de *Processamento de Sinais* provêm das técnicas clássicas de análise numérica do séc. XVII. Na década de 1940, as contribuições de Shannon<sup>2</sup> deram um grande impulso à área. *Processamento de sinais* cresceu como campo de aplicação para diversas ciências nas décadas de 1960 e 1970 e o advento dos *chips* para computadores digitais favoreceu o surgimento, nos anos 1980, do *processamento digital de sinais*.<sup>3</sup>

Sinais podem ser contínuos ou discretos, podem ser analógicos ou digitais, podem possuir valores reais ou complexos, podem ser função de uma variável temporal, espacial, frequencial ou de outra natureza, podem ser unidimensionais ou multidimensionais, podem ter domínio finito ou terem domínio infinito etc. No Capítulo 2 uma discussão mais ampla sobre os tipos de sinais será apresentada.

### Permanente versus transiente

Se estamos em um ambiente silencioso, como em uma biblioteca, um estampido ou um grito deverá certamente nos chamar a atenção. Se, ao contrário, estamos num ambiente ruidoso, como em uma festa, e, subitamente, faz-se silêncio por qualquer razão, nossos sentidos também darão um alerta. Em outras palavras, o que nos chama a atenção — e isso significa que alguma *informação* está sendo transmitida — é o *transiente*.

Se desejamos uma boa noite de sono, os pressupostos são de *regime permanente*: pouca luz e pouco som, mas, principalmente, não variantes com o tempo. É a condição de *estacionaridade* das condições ambientes que vai nos garantir uma noite de sono reparador.

<sup>1</sup>Alan Victor Oppenheim, (1937–) engenheiro eletricitista e cientista da computação estadunidense.

<sup>2</sup>Claude Elwood Shannon (1916–2001) matemático e cientista da computação estadunidense.

<sup>3</sup>Ver F. Nebeker (Editor). *Fifty Years of Signal Processing: The IEEE Signal Processing Society and its Technologies 1948–1988*. Piscataway, 1998 [178].

Toda a informação provém do *regime transiente*. O próprio universo, em permanente expansão, consiste em um sistema em regime transiente, com suas esferas circulantes em uma delicada dinâmica. O reinado dos transientes é consideravelmente maior e mais complexo do que o domínio da estacionaridade. Por essa razão, dentre outras, sinais são tão interessantes de serem estudados e analisados, porque, a rigor, referem-se todos a situações transientes.<sup>4</sup> Podemos dizer, portanto, que o estudo de processamento de sinais é o estudo dos transientes e suas características.

### Acústica e vibrações

Concentrando a nossa atenção na apaixonante, instigante e multidisciplinar área de conhecimento conhecida como *Acústica e Vibrações (A&V)*, cuja inserção nas áreas científicas supracitadas é — por sua característica de extrema interdisciplinaridade — bastante difícil e controversa, a disciplina de *Processamento de Sinais* é de uso massivo para a solução dos mais variados problemas característicos da área. A título de exemplo, uma das informações mais importantes que se podem extrair de um dado sinal sonoro é seu *conteúdo espectral*, ou seja, seu conteúdo no domínio da frequência. Isso é realizado por meio da *série de Fourier* ou da *transformada de Fourier*, como será visto nos Capítulos 6 e 7 deste texto, e a análise no domínio da frequência de um sinal sonoro constitui um dos procedimentos mais importantes em processamento de sinais que serão estudados ao longo do livro.

Em realidade, o conceito de *transformada* perpassa por nossa existência. Por exemplo, sabe-se que, tanto em amplitude quanto em frequência, a percepção humana é muito mais próxima de uma escala logarítmica do que de uma escala linear. Na frequência, identificamos os sons por suas razões e não por suas diferenças, com uma oitava correspondendo a dobrar (ou dividir por dois) a frequência. Já na amplitude, nossa percepção de intensidades sonoras acompanha aproximadamente a escala em dB, que é uma escala logarítmica. Ora, quando aplicamos o logaritmo a uma grandeza, estamos realizando uma transformada (logarítmica). A transformada logarítmica converte produtos/quocientes em somas/subtrações e potenciações/radiciações em produtos/quocientes.

Do mesmo modo, a transformada de Laplace, a transformada de Fourier, a transformada wavelet, a transformada de Hadamard, dentre muitas outras, constituem pontes entre pares de domínios que nos ajudam a estudar inúmeros fenômenos complexos. Em A&V, sem qualquer sombra de dúvida, por tratar-se de sistemas eminentemente lineares, a transformada de Fourier impera e será exaustivamente estudada ao longo deste texto.

O conceito de *sistemas lineares* será abordado no Capítulo 2. Sistemas em que o princípio da superposição se aplica, ou seja, sistemas em que se podem, por assim dizer, adicionar causas e efeitos, recebem um tratamento particular em proces-

---

<sup>4</sup>A exceção que confirma a regra constituindo, evidentemente, o sinal *corrente contínua*, ou seja, o sinal constante.

samento de sinais, sendo denominados sistemas lineares.<sup>5</sup> Em particular, a área de acústica e vibrações se beneficia das propriedades singulares dos sistemas lineares, justamente pelo fato de lidar com grandezas (p. ex., pressão, velocidade, deslocamento etc.) cujos valores em amplitude são todos muito pequenos, o que nos permite linearizar as equações e utilizar toda a teoria de sistemas lineares.

### Estrutura do livro

O livro está organizado em três partes. Após esta *Introdução* e uma apresentação geral sobre *Sinais e Sistemas*, que constituem os Capítulos 1 e 2, respectivamente, a Parte A apresenta os conceitos básicos para o processamento de *Sinais Contínuos*, compreendendo: o Capítulo 3, que trata de *Distribuições* e suas propriedades; o Capítulo 4, que lida com *Base Complexa e Funções Harmônicas*, núcleo da decomposição espectral; o Capítulo 5, que aborda *Convolução e Correlação* de sinais e seus significados e aplicações; o Capítulo 6, que apresenta a *Série de Fourier*, que rege a decomposição de sinais periódicos; e o Capítulo 7, que discute a *Transformada de Fourier* em sua formulação geral e suas propriedades.

Com esse capítulo, encerra-se a parte teórica referente a sinais analógicos, ou contínuos, e a fundamentação de todo o restante do estudo. Em particular, no Capítulo 5, abordam-se *sistemas lineares invariantes no tempo* — situação bem cara, como veremos, à área de Acústica e Vibrações — e o fundamental conceito de *resposta impulsiva* desses sistemas.

Na Parte B são abordados, então, os *Sinais Discretos*. O Capítulo 8, *Amostragem de Sinais*, explica como se obtém um sinal discreto a partir de um sinal contínuo. Este é um capítulo fundamental, por tratar da passagem do domínio contínuo — usual em sinais sonoros — ao domínio discreto — que é o reinado dos computadores digitais. Ali se abordam os principais problemas da discretização de sinais, como o dobramento e a quantização.

O Capítulo 9, *Transformada Discreta de Fourier*, como diz o título, apresenta a transformação de Fourier para sinais discretos, bem como sua inversa. Também nesse capítulo estuda-se a transformada rápida de Fourier, algoritmo que, de certa forma, revolucionou o processamento digital de sinais. O Capítulo 10 examina a *Convolução e Correlação Discretas*, cujos resultados se mostrarão extremamente úteis nos dois capítulos de aplicações.<sup>6</sup>

Na Parte C do livro são apresentadas aplicações de processamento de sinais especificamente em A&V, em particular no que diz respeito aos experimentos mais usuais. O Capítulo 11, *Aplicações em Acústica*, inclui 12 seções, tratando, cada uma, de um aspecto de aplicação de técnicas de processamento de sinais em acústica, particularmente no que toca às medições acústicas; o Capítulo 12, *Aplicações em*

<sup>5</sup>Esses conceitos serão formalmente apresentados e amplamente exemplificados na Seção 2.2.

<sup>6</sup>Para leituras complementares em Processamento de Sinais, sugerimos as excepcionais obras a seguir, todas constantes das Referências Bibliográficas: [28], [47], [48], [62], [98], [100], [135], [136], [152], [165], [186], [187], [188], [191], [196], [205], [225], [227] e [253].

*Vibrações*, é constituído de nove seções tratando de aplicações de processamento de sinais em ensaios de vibrações.

Ao longo do texto foram espalhados um total de quase 200 exemplos que buscam ilustrar, tanto na teoria, nas Partes A e B do texto, como nas aplicações, na Parte C do livro, situações mais ou menos corriqueiras em A&V e, desse modo, aprofundar a compreensão da matéria.

## Capítulo 2

# Sinais e Sistemas

*Viver verdadeiramente é viver  
recebendo as informações adequadas.*

**Norbert Wiener**

A nossa vida está repleta de estímulos a excitar os sentidos. Estímulos visuais, auditivos, táteis, olfativos e gustativos são *captados* pelos nossos órgãos sensoriais (olhos, ouvidos etc.), estimulando o córtex cerebral que processa essas informações, indispensáveis à nossa sobrevivência. Cada estímulo desses corresponde a um *senal*. Sinais, naturalmente, extrapolam de muito a capacidade humana de percebê-los. Em nosso cotidiano, estímulos dos mais diversos tipos, tais como sinais de rádio, de televisão, de vibração, ou sinais de ultrassom, de batimento cardíaco, eletroencefalográficos, ou, ainda, sinais de sismógrafos, radiotelescópios, sonares, dentre muitíssimos outros que permeiam nosso habitat civilizatório, só podem ser observados por meio de instrumentação adequada.

Sinais podem descrever uma variedade imensa de fenômenos físicos. São usualmente representados matematicamente por meio de *funções temporais*, muito embora possamos ter sinais dependentes de outras variáveis (posição, frequência, número de onda etc.). Sinais podem ser representados por funções reais, complexas, vetoriais ou, ainda, serem função de mais de uma variável. Por exemplo, um sinal acústico de voz ou do ruído de uma máquina podem ser representados por uma função (real ou complexa, dependendo do contexto) da variável tempo,  $t$ ; já um sinal de imagem 2D (uma fotografia, digamos) requer, naturalmente, duas variáveis espaciais,  $x$  e  $y$ , digamos, e, no caso de um vídeo, dependerá de duas

variáveis espaciais e uma variável temporal.

Cumpra observar que, na maioria dos casos práticos, a função temporal que caracteriza o sinal que estamos analisando é demasiado complexa para ser expressa por uma função analítica. Por exemplo, a Fig. 2.1 apresenta um trecho de sinal de voz humana, captado por um microfone. É claramente inviável representar o sinal por meio de uma função analítica, o que não impede em absoluto seu processamento. Todavia, o prezado leitor observará que, principalmente na Parte A deste livro, utilizaremos basicamente sinais analíticos para melhor caracterizar e exemplificar os conceitos básicos em processamento de sinais.

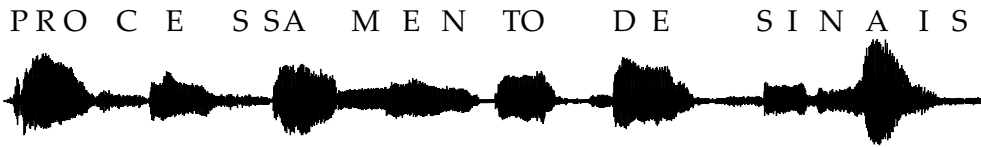


Figura 2.1: Exemplo de sinal temporal de voz pronunciando “Processamento de Sinais”.

As aplicações de processamento de sinais são tão vastas que seria impraticável enumerá-las todas aqui, correspondendo a uma tentativa de “*contar estrelas*”. Além disso, novas aplicações surgem a cada dia, seja porque novos desenvolvimentos propiciam recursos para a solução de velhos problemas, seja porque velhas técnicas encontram ainda aplicações inovadoras. Algumas dessas aplicações, organizadas em categorias, são descritas a seguir, sem a menor pretensão de esgotar o assunto.<sup>1</sup>

- 1 *Processamento de voz*. Uma das mais importantes vertentes de aplicação de processamento de sinais é justamente o processamento de sinais de voz. Técnicas para transmitir, sintetizar, filtrar, reconhecer, modificar e autenticar a voz humana são apresentadas sumariamente a seguir (as aplicações, não as técnicas).
  - 1.1 *Armazenamento e transmissão da fala*. Consiste no processamento do sinal de voz de modo a reduzir o volume de dados a serem transmitidos. Encontram-se aplicações importantes em telefonia digital (fixa ou móvel).
  - 1.2 *Síntese da voz*. Consiste no processamento de sinais objetivando gerar um som com características semelhantes às da voz humana. Aplicações são comuns em sistemas automáticos de orientação e informação públicas, telefonia, computadores e robôs.

<sup>1</sup>Ver, por exemplo, J.S. Chitode. *Signals and Systems*. Technical Publications Pune, Pune, 2009, [48] ou D.R. Fanin, R.E. Ziemer, W.H. Tranter. *Signals and Systems: Continuous and Discrete*. 4<sup>th</sup> edition, Prentice Hall, London, 1988, [76] ou D.L. Fugal, R.G. Lyons. *The Essential Guide to Digital Signal Processing*. Prentice Hall, London, 2014, [85].

- 1.3 *Otimização da voz.* Trata-se de procedimentos de processamento de sinais visando ampliar a inteligibilidade de um sinal de fala. Aplica-se a sistemas de comunicação em ambiente ruidoso, tal como no *cockpit* do piloto de um helicóptero ou no saguão de um aeroporto.
  - 1.4 *Verificação de autenticidade vocal.* Consiste em técnicas de processamento de sinais com o objetivo de fazer o reconhecimento inequívoco de uma pessoa a partir da sua *assinatura vocal*. Aplica-se a praticamente todos os sistemas onde a segurança é essencial, tal como contas bancárias, bancos de dados, portas de acesso, cofres etc. Essa é uma área de grande interface com a criptografia.
  - 1.5 *Reconhecimento de voz.* Consiste em reproduzir um texto escrito a partir da voz falada. Essa conversão acústico-visual é de extrema utilidade, por exemplo, para comandar um computador, um veículo automotor, ou qualquer outro sistema por meio da voz, gerando assim uma interface muito mais amigável.
- 2 *Processamento de Imagem.* Imagens da Terra, Lua e outros astros são comuns aos nossos olhos, mas quantos não se lembram dessas mesmas imagens desfocadas, confusas, ou mesmo imperceptíveis? Algumas das vertentes de processamento de sinais aplicado ao tratamento de imagens são abordadas a seguir.
- 2.1 *Radiotelescópios.* As imagens captadas pelos potentes radiotelescópios presentes nos grandes observatórios astronômicos são submetidas a um processamento maciço de sinais para apresentarem o aspecto mais ou menos compreensível que se vê na mídia. Essas técnicas são fundamentais, sobretudo para garantir a precisão das informações contidas na imagem. Alguns algoritmos efetuam uma restauração da imagem, ou seja, buscam remover distorções introduzidas pelo processo de aquisição da mesma, principalmente pela eliminação do ruído aditivo.
  - 2.2 *Ultrassonografia.* As imagens produzidas pela ultrassonografia de aplicação médica, já bastante popularizada, são resultantes do processamento dos sinais de imagem recebidos pelo atuador/sensor. Com a evolução continuada dessas técnicas, as imagens obtidas vêm se aperfeiçoando e tornando-se cada vez mais nítidas e precisas. A ultrassonografia é utilizada também em meios não biológicos, como método não destrutivo de ensaio de materiais. Nesse caso, a ultrassonografia é utilizada para identificar a presença de corrosão, verificar a qualidade de soldas, conferir a espessura de parede em dutos, prospectar falhas em elementos estruturais etc. Aqui, o processamento dos sinais de imagem permite uma maior definição e um aumento substancial da precisão e acurácia do método de ensaio.
  - 2.3 *Tomógrafos.* A tomografia computadorizada é uma técnica de processamento de imagens que reconstrói uma estrutura tridimensional a partir

de projeções. Largamente utilizada em medicina, permite uma localização precisa de objetos estranhos ao organismo (uma agulha, por exemplo), pequenos tumores, leves alterações anatômicas etc.

3 *Sismos*. O estudo dos movimentos de vibração da crosta terrestre é de extrema utilidade para o ser humano. Dentre as diversas aplicações, duas se destacam.

3.1 *Abalos sísmicos*. Trata-se do acompanhamento dos sinais sísmicos naturais, com o objetivo principal de conhecer o comportamento geológico de determinada região e, na medida do possível, ser capaz de prever eventuais movimentos sísmicos capazes de gerar prejuízo à atividade ou mesmo pôr em risco a vida humana.

3.2 *Prospecção de petróleo*. Nesse caso, atua-se sobre o sítio geológico excitando (utilizando um explosivo, por exemplo) de modo a, a partir do sinal de excitação e do sinal de resposta (eco) oriundo das distintas camadas geológicas, obter informação sobre a possibilidade de haver petróleo na região. Os sinais dos distintos geofones (sensores de vibração do solo), espalhados adequadamente, são processados, produzindo uma razoável imagem da estrutura geológica da área em estudo (profundidade das camadas, propriedades mecânicas médias etc.).

4 *Radares*. Um radar é um dispositivo de processamento de sinais dito ativo, na medida em que um sinal é *emitido* pelo dispositivo e *imitado* ou captado pelo mesmo dispositivo, com o objetivo de detectar e acompanhar um determinado objeto. A aplicação mais corriqueira — e importante — são os radares das torres de controle dos aeroportos, principais responsáveis pela manutenção de distâncias seguras entre as aeronaves trafegando em suas cercanias.

5 *Sonares*. São dispositivos similares aos radares, portanto ativos, que operam, contudo, com ondas mecânicas ao invés de ondas eletromagnéticas, com o objetivo de detectar e acompanhar corpos submersos. Os sonares permitem aos navios traçar o perfil do fundo do mar, identificar cardumes de peixes, auxiliar na pesquisa de objetos submersos, acompanhar robôs submarinos e outras finalidades (inclusive bélicas). Para cada uma dessas aplicações há técnicas específicas de processamento de sinais de modo a enfatizar o elemento desejado.

6 *Outros exemplos*. Uma série de outros exemplos ocorrem em diversas áreas, além das já citadas, tais como em comunicações, aeronáutica e astronáutica, circuitos elétricos, acústica, vibrações, medicina, geração de energia, meteorologia, entre outros. Eis algumas delas.

6.1 *Automóveis*. A eletrônica embarcada em veículos automotores envolve sistemas de monitoração e controle das condições de frenagem, de tra-



ção e de suspensão do veículo. A partir dos sinais monitorados, uma série de acionadores atuam em cada um desses subsistemas de modo a proporcionar maior segurança, economia e melhor desempenho do veículo. São sinais que devem ser processados em tempo curtíssimo para que o controle seja eficaz.

- 6.2 *Aviões.* Mais ainda que os automóveis, as aeronaves têm uma gama imensa de sinais monitorados continuamente, tais como altitude, velocidade relativa ao ar, pressão atmosférica, temperatura externa, inclinação etc. Nenhum piloto teria capacidade de controlar todos os dados fornecidos por uma aeronave moderna de médio a grande porte. Uma análise contínua e automática dessas informações bem como o cruzamento de diversos dados são necessários para identificação imediata de uma possível pane.
- 6.3 *Monitoração e diagnóstico de máquinas.* Uma máquina rotativa de grande porte — uma turbina hidráulica, por exemplo — necessita de um sistema contínuo de monitoração de seu funcionamento. Diversos parâmetros, como amplitude de vibração nos mancais, flutuação de velocidade angular, temperatura do lubrificante, velocidade da água a montante e a jusante, vazão etc., devem ser acompanhados para estudar a evolução do conjunto. O processamento desses sinais pode identificar eventuais falhas ou defeitos de operação ou mesmo de construção do equipamento. Muitos outros elementos de maquinário de importância vital para uma planta industrial podem ter seus sinais de ruído, vibração, temperatura, qualidade do óleo lubrificante etc. monitorados e processados objetivando fornecer informações para um sistema de manutenção preditiva.
- 6.4 *Monitoração clínica.* Pacientes de risco demandam um controle contínuo e permanente de seus sinais clínicos. Sinais cerebrais, cardíacos, das funções respiratórias, das funções renais e uma dezena de outras funções vitais podem ser monitorados simultaneamente pelos profissionais de saúde. Cada um desses sinais, por suas características próprias, demandam um pré-tratamento específico de modo a facilitar ao máximo e com a devida rapidez a interpretação por parte do médico ou enfermeiro.
- 6.5 *Áudio.* Sistemas de áudio têm uma grande variedade de funções para o processamento dos sinais. Desde o comando de ganho, que altera exclusivamente (ou deveria fazê-lo) a amplitude do sinal, passando pelos controles de graves e agudos, que alteram seu conteúdo espectral, até compressores, reverberadores e circuitos de retardo, introduzem alterações mais ou menos complexas no sinal original. A título de exemplo, recentemente estão muito em voga os sistemas de decodificação de sinais de áudio para utilização de diversos efeitos, tais como som *surround*, sistemas 5.1 para cinema caseiro etc.

O objetivo geral deste texto é, como já mencionado, introduzir os conceitos gerais que envolvem todo procedimento de *processamento de sinais* e, em particular, desenvolver e exemplificar as aplicações em *acústica e vibrações*.

A Seção 2.1 apresenta as definições fundamentais relativas a sinais e uma classificação geral destes — uma dentre as inúmeras taxonomias possíveis. A Seção 2.2 discute brevemente noções gerais sobre sistemas, dando especial atenção ao conceito de sistemas lineares invariantes no tempo.

## 2.1 Sinais

Sinais costumam vir em dois sabores: podem ser *contínuos* ou *discretos*. Sinais contínuos são modelados matematicamente por meio de *funções contínuas* de uma ou mais variáveis, tais como  $s(t)$  ou  $s(\mathbf{x})$ . Os sinais temporais são, usualmente, contínuos; os sinais espaciais também. Um exemplo de sinal temporal contínuo é a pressão acústica em um ponto de uma sala, medida por um microfone fixo; um exemplo de um sinal espacial contínuo é a luminosidade que passa, em um determinado instante ou intervalo, pela lente de uma câmara fotográfica e impressiona o sensor (ou a película). No primeiro caso, a variável independente é o tempo  $t$ ; no segundo exemplo, a variável independente é a posição bidimensional,  $\mathbf{x} = (x, y)$ .<sup>2</sup> Um exemplo de sinal espaçotemporal seria o mesmo microfone girando em um “boom”,<sup>3</sup> produzindo um sinal de pressão acústica da forma  $p(x, y, z, t)$ , onde  $x, y, z$  são as coordenadas cartesianas do ponto onde se encontra o microfone e  $t$  a coordenada temporal. (No caso do “boom”,  $x, y$  e  $z$  dependem, naturalmente, de  $t$ .)

Sinais discretos são modelados por *séries temporais*, da forma  $s[k]$ , onde  $k$  é um inteiro, também denominado *contador*. Sinais discretos são mais incomuns no mundo físico; contudo, no processamento de sinais, majoritariamente realizado no domínio digital, ou seja, via processadores digitais, os sinais contínuos são convertidos em sinais discretos, num procedimento denominado *discretização*. Usualmente, essa conversão é realizada colhendo-se amostras a intervalos regulares de tempo, um procedimento denominado *amostragem*:<sup>4</sup>

$$s(t) \longrightarrow s[k], \quad \text{onde} \quad s[k] = s(k\Delta t), \quad (2.1)$$

sendo  $\Delta t$  o *intervalo de amostragem*.

Um exemplo de sinal discreto por natureza, não resultante da discretização de um sinal contínuo, é a flutuação dos índices da bolsa de valores ou, ainda,

<sup>2</sup>A variável independente  $t$  designará sempre um escalar e, exceto quando especificado diferentemente, corresponderá à variável *tempo*. A variável  $\mathbf{x}$ , assim, em negrito, designará sempre uma variável vetorial e, exceto quando especificado diferentemente, corresponderá à variável *posição*, que pode ter de um a três componentes.

<sup>3</sup>Um sistema de medição acústica com “boom”, também conhecido como “girafa”, consiste em um microfone fixo a uma haste que gira em torno de um ponto fixo durante a medição.

<sup>4</sup>O procedimento de *amostragem* refere-se a *extrair amostras* de um sinal contínuo, transformando uma função da variável tempo, digamos, em uma série temporal. A amostragem será abordada no Capítulo 8.

o número de nascimentos registrados em um cartório a cada dia. Via de regra, variáveis estatísticas correspondem a sinais eminentemente discretos.

A variável de um sinal discreto pode não ser temporal, como, por exemplo,  $s[j, k]$ , com  $j, k$  inteiros, que poderiam representar pontos discretos de uma imagem 2D. Nesse caso, teríamos

$$s(\mathbf{x}) \longrightarrow s[j, k], \quad \text{onde} \quad s[j, k] = s(j\Delta x, k\Delta y), \quad (2.2)$$

sendo  $\Delta x$  e  $\Delta y$  os intervalos de amostragem nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

**Exemplo 2.1** A Fig. 2.2 ilustra trechos de dois sinais temporais. O primeiro corresponde a uma função  $s(t)$ , contínua. O segundo corresponde à série temporal  $s[k]$ . Evidencia-se que o sinal discreto nada mais é, nesse caso, do que uma discretização (bem-sucedida), ou seja, uma amostragem do sinal contínuo, a intervalos  $\Delta t$ . Mais adiante, especificamente nos Capítulos 8 e 9, veremos as condições a serem satisfeitas para que a amostragem de um sinal possa ser considerada como *bem-sucedida*.

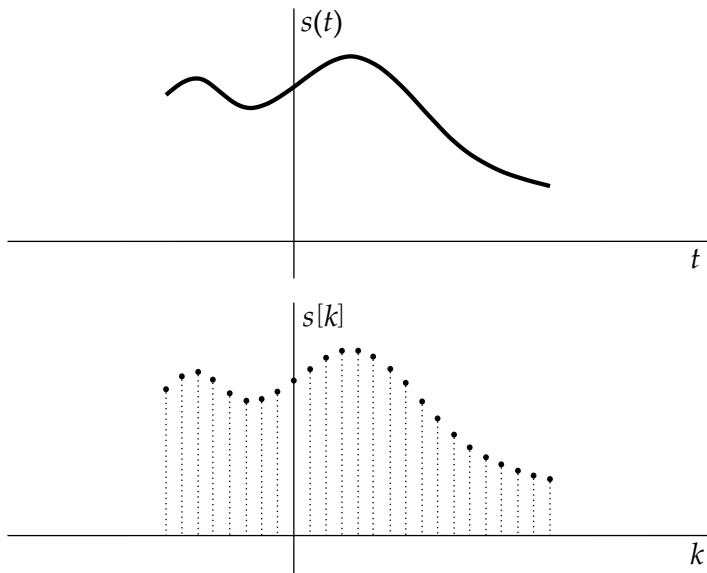
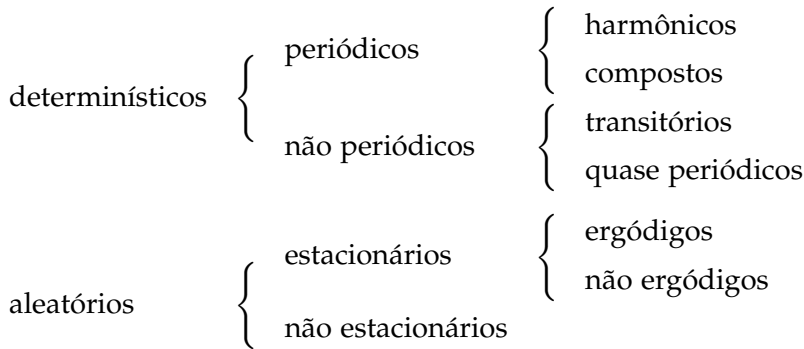


Figura 2.2: Sinal contínuo  $s(t)$  e seu correspondente discreto  $s[k]$ .

Observe que os sinais  $s(t)$  e  $s[k]$  são visualmente similares mas, ao mesmo tempo, têm estruturas bem distintas. Por um lado,  $s(t)$ , mesmo que seja definido em um intervalo finito  $(t_1, t_2)$ , constitui uma função com infinitos valores nesse intervalo. Assim, se  $t \in (t_1, t_2)$ ,  $s(t)$  está definido para todos os (infinitos) valores de  $t$ . Por outro lado,  $s[k]$ , que, naturalmente, também é definido no mesmo intervalo  $(t_1, t_2)$ , tem um número finito de valores. Com efeito, como  $k$  é um número inteiro, ou seja, um contador,  $s[k] = s(k\Delta t)$  só estará definido para um número finito (enumerável) de pontos no domínio temporal.

Sinais podem ser classificados de uma forma geral segundo o esquema a seguir:



Sinais são ditos *determinísticos* quando podem ser descritos por uma função matemática. São, portanto, *previsíveis*. Por exemplo, o sinal de vibração de uma máquina rotativa operando em regime permanente pode ser encarado como um sinal determinístico (ao menos enquanto não ocorre uma falha).

Sinais *aleatórios* são aqueles onde impera o acaso. São, portanto, não previsíveis, sendo usualmente conhecidos como *ruído*. Ruídos elétricos, eletrônicos e mecânicos são exemplos de sinais aleatórios. O som do mar ou de uma cachoeira são sinais aleatórios, porquanto imprevisíveis. Sinais aleatórios podem ser estudados a partir de suas propriedades estatísticas, tais como média, variância, desvio padrão, coerência, função de autocorrelação etc.<sup>5</sup>

Sinais determinísticos são ditos *periódicos* quando repetem a si mesmos num dado intervalo de tempo  $T$ , denominado *período*, ou seja,  $s(t + nT) = s(t)$ ,  $n$  inteiro (se o sinal for contínuo) ou a cada índice  $N$ ,  $s(k + nN) = s(k)$ ,  $n$  inteiro (se o sinal for discreto). São exemplos de sinais periódicos: a sequência das horas do dia (ao longo de vários dias), a vibração de uma bomba hidráulica operando em regime permanente, uma imagem 2-D de pontos regularmente distribuídos nas duas direções etc.

Sinais determinísticos periódicos são ditos *harmônicos* quando, além de periódicos, são da forma  $s(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$  ou, o que é equivalente,  $s(t) = A \cos(\omega t - \phi)$ , onde  $A$  é a *amplitude* do sinal,  $\omega$  é a *frequência angular* do sinal e  $\phi$  a sua *fase*. Sinais harmônicos, também denominados *tons puros* ou ainda *monocromáticos* (a razão do nome virá a seu tempo), são raros *in natura*. Quando ouvimos um tom de linha telefônica, por exemplo, embora pareça estarmos diante de um tom puro, monocromático, estão presentes, como veremos mais adiante, outros componentes, também harmônicos. A soma de sinais harmônicos de mesma frequência é, naturalmente, um sinal harmônico de mesma frequência. A composição de sinais harmônicos de frequências múltiplas constitui um sinal periódico. A superposição de sinais harmônicos de frequências arbitrárias não múltiplas (por exemplo, a razão entre elas sendo um número irracional) resulta em um sinal *não periódico*.<sup>6</sup>

<sup>5</sup>Ver Capítulo 5.

<sup>6</sup>Todas as questões suscitadas aqui serão discutidas com detalhes nos Capítulos 4, 6 e 7.

Sinais não periódicos, ou seja, aqueles que não se repetem a intervalos constantes, podem ser classificados em *transitórios*, também chamados de *transientes*, ou em *quase periódicos*. Sinais transitórios são resultantes de evento único, tal como o ruído de uma explosão, de uma louça caindo, de um mergulho numa piscina etc. Sinais quase periódicos normalmente resultam de uma combinação de sinais periódicos cuja periodicidade é muito maior que qualquer um dos períodos dos sinais componentes.

Sinais aleatórios são chamados de *estacionários* quando mantêm suas características estatísticas entre diversas amostras do sinal. O ruído de uma cachoeira é um sinal estacionário;<sup>7</sup> o ruído do mar não é. Sinais estacionários são ainda classificados em *ergódicos*, quando suas características estatísticas permanecem as mesmas por períodos mais prolongados de tempo, ou em *não ergódicos*, em caso contrário.

## 2.2 Sistemas

Um *sistema* será definido, no contexto deste livro, como qualquer objeto do mundo físico capaz de ser excitado por um sinal e responder com um outro sinal. Dados, portanto, os sinais de excitação,  $x(t)$ , um sistema  $\mathcal{S}$  e um sinal de resposta  $y(t)$ , uma representação simbólica usual do sistema é a apresentada na Fig. 2.3.



Figura 2.3: Representação esquemática de um sistema  $\mathcal{S}$ .

Observe que o sinal de excitação,  $x(t)$ , também denominado *entrada do sistema*, pode ser real, complexo, ou vetorial (vários componentes). O mesmo sucede com o sinal gerado pelo sistema,  $y(t)$ , chamado de *resposta do sistema* ou *saída do sistema*.

Um sistema cuja resposta é proporcional à excitação é denominado *sistema linear*. Um sistema linear, que notaremos como  $\mathcal{SL}$ , é, portanto, aquele que, excitado por uma combinação linear de entradas, oferece como resposta a mesma combinação linear de saídas.

Mais precisamente, se  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes arbitrárias, segue que

$$\begin{aligned} \text{se } x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{SL}} y_1(t) \text{ e } x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{SL}} y_2(t), \text{ então,} \\ \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{SL}} \alpha y_1(t) + \beta y_2(t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

<sup>7</sup>Se considerarmos o intervalo de tempo de um dia. Se levarmos em conta as variações sazonais das condições pluviométricas — o que exige maior de tempo de observação — o sinal deixaria de ser considerado estacionário.

Para sistemas lineares, portanto, aplica-se o *princípio da superposição*. Um exemplo de sistema linear é uma caixa acústica trabalhando abaixo do seu limite de saturação. Quando a tensão elétrica na entrada aproxima-se da voltagem limite, a caixa deixa de se comportar como um sistema linear. Outro exemplo seria o do sinal de um microfone captado em um determinado ponto de uma sala, para um sinal sonoro emitido, digamos, por um alto-falante, em outro ponto fixo da sala. Nesse caso, o sistema seria a sala, a excitação do sistema o sinal sonoro emitido pelo alto-falante e a resposta do sistema o sinal captado pelo microfone.

No mundo real, há poucos sistemas que podem ser identificados como *estritamente* lineares. Todavia, dentro de determinadas condições, muitos sistemas físicos reais satisfazem as condições para sistemas lineares, ou seja, atendem ao princípio da superposição, desde que a excitação não ultrapasse um determinado valor. Vejamos, por exemplo, uma mola de constante elástica  $k$ . Se a excitação do sistema é  $x(t) = F(t)$ , força aplicada a uma extremidade da mola, e a resposta do sistema é  $y(t) = d(t)$ , a deformação da mola, a lei de Hooke para molas elásticas lineares estabelece que  $d = F/k$ , uma relação evidentemente linear. Contudo, se  $F$  ultrapassa um valor  $F_{\text{MAX}}$  a mola não mais obedecerá a lei de Hooke e o sistema deixará de ser linear, passando a comportar-se como um sistema não linear.

Cumpre notar que, em acústica e vibrações, a esmagadora maioria dos sistemas pode ser assumido como um  $\mathcal{SL}$ . Em acústica, isso se deve ao fato de que as grandezas mecânicas associadas ao fenômeno acústico serem todas muito pequenas, ou seja, tanto a pressão sonora,  $p(\mathbf{x}, t)$ , a massa específica acústica,  $\rho(\mathbf{x}, t)$  e a velocidade de partícula,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , são muito pequenas quando comparadas com os valores médios no meio ( $P_0$ , a pressão atmosférica,  $\rho_0$ , a massa específica do ar em repouso etc.), de modo que produtos ( $p\mathbf{v}$ , por exemplo) ou potências ( $p^2$ , por exemplo) são negligenciáveis. Nesse caso, então, utilizam-se as equações da *acústica linear*.<sup>8</sup> Há situações em que é necessário considerar as equações da acústica não linear. Isso sucede quando os níveis sonoros são superiores a 130~140 dB,<sup>9</sup> o que ocorre nas proximidades do epicentro de uma explosão, da eclosão de um raio ou de um foguete decolando, por exemplo.

Na área de vibrações, embora de forma um pouco mais restrita, o mais usual é as variáveis  $u(\mathbf{x}, t)$ , deslocamento, e  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , velocidade, serem também pequenas o suficiente para que seus termos de mais alta ordem sejam desprezáveis, o que permite linearizar as equações de movimento. Caso isso não ocorra, será necessário utilizar as equações para vibrações não lineares.<sup>10</sup>

<sup>8</sup>Ver, por exemplo, R.A. Tenenbaum. *Acústica Aplicada*. 2ª edição, 2017 [233], disponível em: <https://ratenenbaum.wixsite.com/acustica>.

<sup>9</sup>Para o conceito de *decibel* (dB), ver, por exemplo, J. Blauert, N. Xiang. *Acoustics for Engineers – Troy Lectures*. Springer, Berlim, 2008, [23] ou A.P. Dowling, J.E.F. Williams. *Sound and Sources of Sound*. John Wiley & Sons, New York, 1983, [68] ou, ainda, C.J. Hemond, Jr. *Engineering Acoustics & Noise Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983, [103].

<sup>10</sup>Ver, por exemplo, D. Wagg, S. Neild. *Nonlinear Vibration with Control for Flexible and Adaptive Structures*. 2<sup>nd</sup> edition, Springer, London, 2010, [248].

**Exemplo 2.2** Tomemos um sistema mecânico simples constituído por um corpo rígido  $C$  com movimento plano, veja Fig. 2.4.

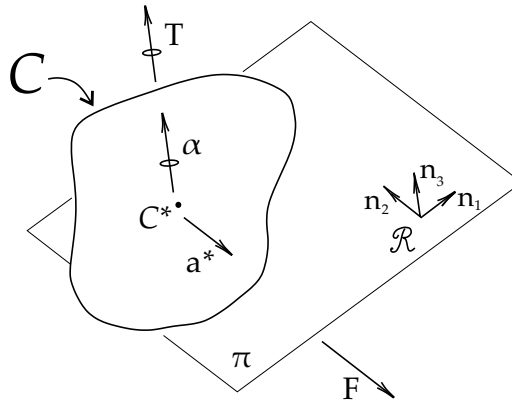


Figura 2.4: Corpo rígido sujeito a uma força resultante  $\mathbf{F}$  e um torque resultante  $\mathbf{T}$ .

Aplicando-se sobre esse corpo uma força  $\mathbf{F}(t) = F_1(t)\mathbf{n}_1 + F_2(t)\mathbf{n}_2$ , agindo sobre o centro de massa  $C^*$  do corpo e paralela ao plano, e um torque  $\mathbf{T}(t) = T(t)\mathbf{n}_3$ , ortogonal ao plano  $\pi$  do movimento, o corpo reagirá, segundo os princípios dinâmicos:<sup>11</sup>

$$m\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(t); \quad I\alpha(t) = T(t),$$

sendo  $\mathbf{a}$  o vetor aceleração do centro de massa do corpo e  $\alpha$  a aceleração angular do corpo. Portanto, dada uma força  $\mathbf{F}(t)$ , uma função vetorial, o “sistema corpo” gera um sinal de aceleração  $\mathbf{a}(t)$ , também um sinal vetorial. Analogamente, dado o torque  $T(t)$ , uma função escalar (porque trata-se de movimento plano), o sistema gera o sinal de aceleração angular  $\alpha(t)$ , também um sinal escalar. Observe que  $m$  e  $I$ , respectivamente massa e momento de inércia do corpo com respeito ao centro de massa, são *parâmetros* do sistema, constantes no caso. Como ambas as relações funcionais entre os sinais de entrada e os sinais de saída são relações lineares, este constitui um sistema linear.

Sistemas que, além de serem lineares, são invariantes no tempo, ou seja, sistemas em que para uma dada entrada tem-se *sempre* a mesma saída, são designados como *sistemas lineares invariantes no tempo*, que designaremos como *SLI*. Por exemplo, excitando-se acusticamente uma sala e medindo-se o sinal em um microfone colocado em determinada posição, tem-se um sistema linear invariante no tempo, ou seja, haverá uma proporcionalidade entre excitação e resposta, constante no tempo. Se, contudo, houver pessoas movendo-se na sala, esse sistema deixará de ser invariante no tempo, apesar de manter-se um sistema linear.

**Exemplo 2.3** No Ex. 2.2 observaram-se três tipos de grandezas: a força  $\mathbf{F}$  e o torque  $\mathbf{T}$ , ambos entradas do sistema; a aceleração  $\mathbf{a}$  e a aceleração angular  $\alpha$ , ambas saídas do sistema; e os parâmetros  $m$  (massa) e  $I$  (momento de inércia), característicos do

<sup>11</sup>Ver, por exemplo, R.A. Tenenbaum, *Dinâmica Aplicada*. Manole, Barueri, 2016 [230].

sistema. As relações lineares entre entradas e saídas garante ser o sistema linear; o fato de os parâmetros serem constantes, ou seja, invariantes no tempo, assegura tratar-se de um  $SLI$ .

**Exemplo 2.4** Tomemos agora um sistema regido pela relação simples

$$y(t) = ax^2(t) + bx(t) + c,$$

com  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes reais. Assuma que  $x(t)$  é a entrada do sistema e  $y(t)$  é a saída do sistema. Tomando uma combinação linear de entradas da forma

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t),$$

com  $\alpha$  e  $\beta$  constantes arbitrárias, a resposta do sistema seria (verifique)

$$y_{\text{comb}}(t) = a[\alpha^2 x_1^2(t) + \beta^2 x_2^2(t) + 2\alpha\beta x_1(t)x_2(t)] + b[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] + c.$$

Contudo, ao somarmos as respostas às excitações  $\alpha x_1(t)$  e  $\beta x_2(t)$ , teríamos

$$y_{\text{soma}}(t) = a[\alpha^2 x_1^2(t) + \beta^2 x_2^2(t)] + b[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] + 2c.$$

Evidentemente, as saídas  $y_{\text{comb}}$  e  $y_{\text{soma}}$  não são idênticas, devido ao termo cruzado  $2\alpha\beta x_1(t)x_2(t)$ , presente no primeiro, e o termo independente,  $c$  no primeiro caso e  $2c$  no segundo. Portanto, a Eq. (2.3) não é satisfeita e, naturalmente, este *não* é um sistema linear. Observe que a não linearidade provém do termo quadrático  $ax^2(t)$  e do termo constante  $c$ .

Toda vez que um sistema puder ser representado por meio de um *operador diferencial linear*, então o sistema será também linear. Se, além disso, o operador for a *coeficientes constantes* — não dependentes, portanto, da variável temporal — então teremos um  $SLI$ .

**Exemplo 2.5** Suponha a esfera de demolição com massa  $m$ , suspensa por um cabo de comprimento  $r$ , veja Fig. 2.5. A equação diferencial que rege o movimento do pêndulo simples é<sup>12</sup>

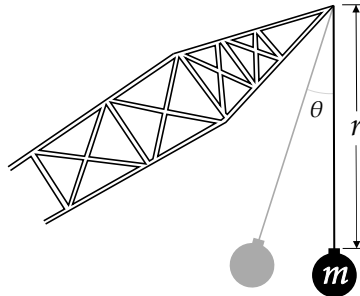


Figura 2.5: Pêndulo simples com massa  $m$  e comprimento  $r$ .

<sup>12</sup>Veja, por exemplo, R.A. Tenenbaum. *Dinâmica Aplicada*, Manole, 4ª Edição, Barueri, 2016 [230].



$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{r} \sin \theta(t) = 0,$$

em que  $\theta(t)$  é o ângulo que o cabo do pêndulo faz com a vertical,  $g$  é a aceleração da gravidade local e o ponto sobre a variável  $\theta$  designa sua derivada com respeito a  $t$ .<sup>13</sup> Esta é, naturalmente, uma equação diferencial não linear devido à presença da função  $\sin \theta$ , cuja expansão em série tem potências da variável  $\theta$  e, portanto, trata-se de um sistema não linear. Todavia, para ângulos  $\theta$  pequenos, quando podemos fazer a aproximação  $\sin \theta \approx \theta$ , obtém-se uma equação diferencial linear, da forma

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{r} \theta(t) = 0.$$

Observe que se tem um operador diferencial linear,

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{r},$$

aplicado à saída do sistema,  $\theta(t)$ , cujos coeficientes ( $g$  e  $r$ ) são constantes, caracterizando, portanto, um *SLI*, para pequenas oscilações. A solução geral da equação linearizada é

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t),$$

sendo  $\omega_0 = \sqrt{g/r}$  e as constantes  $A$  e  $B$  dependem das condições iniciais. Se a condição inicial dada ao pêndulo for  $\theta(0) = \theta_0$  e  $\dot{\theta}(0) = 0$  (deslocamento angular  $\theta_0$ , pequeno, e velocidade inicial nula), a solução se reduzirá a

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t).$$

Por outro lado, se a condição inicial dada ao pêndulo for  $\theta(0) = 0$  e  $\dot{\theta}(0) = v_0/r$ , em que  $v_0$  é a velocidade inicial impressa à massa, a solução será

$$\theta(t) = \frac{v}{r\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

Neste exemplo simples, a equação diferencial é homogênea, significando que a entrada do *SLI* é nula.

**Exemplo 2.6** Considere um sistema oscilatório como o indicado na Fig. 2.6, caracterizado pelos parâmetros  $m$  (massa),  $k$  (rigidez), e  $d$  (amortecimento), todos constantes.<sup>14</sup>

<sup>13</sup>O ponto sobre a variável dependente indica sua derivada temporal; dois pontos sobre a variável significam, naturalmente, segunda derivada temporal.

<sup>14</sup>Ver, por exemplo, A. Brandt. *Noise and Vibration Analysis: Signal Analysis and Experimental Procedures*. John Wiley, West Sussex, 2011 [35] ou M. Géradin, D.J. Rixen. *Mechanical Vibrations: Theory and Applications to Structural Dynamics*. 3<sup>rd</sup> edition, Chichester, 2015 [90] ou R.N. Iyengar. *Elements of Mechanical Vibrations*. I.K. International Publishing House, New Delhi, 2010 [128] ou, ainda, S.G. Kelly. *Mechanical Vibrations: Theory and Applications*. Cengage Learning, Stamford, 2012 [138].

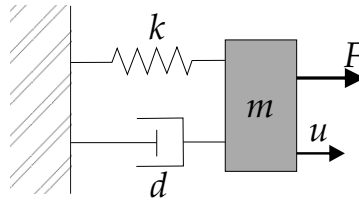


Figura 2.6: Vibração de sistema amortecido com um grau de liberdade, regido por uma equação diferencial linear a coeficientes constantes.

Seja  $F(t)$  a força de excitação, aplicada à massa, e  $u(t)$  o deslocamento dela com respeito à posição de equilíbrio estático. Portanto, para esse sistema,  $F(t)$  é a entrada, ou excitação, e  $u(t)$  é a saída, ou resposta. As forças aplicadas à massa são:  $F$ , força externa;  $F_k = -ku$ , força exercida pela mola, proporcional ao deslocamento  $u$ ; e  $F_d = -d\dot{u}$ , força exercida pelo amortecedor, proporcional à velocidade,  $\dot{u}$ . Aplicando-se então o segundo princípio de Newton na direção do movimento,  $ma = F$ , em que  $a = \ddot{u}$  é a aceleração, obtém-se a equação diferencial que rege o deslocamento da massa,  $u(t)$ ,

$$m\ddot{u}(t) + d\dot{u}(t) + ku(t) = F(t).$$

Observe que foi obtida uma equação diferencial linear a coeficientes constantes. O sistema é, portanto, um *SLI*. Esse sistema pode ser representado, alternativa-mente, na forma

$$L[u(t)] = F(t), \quad \text{onde} \quad L = m \frac{d^2}{dt^2} + d \frac{d}{dt} + k$$

é um *operador diferencial linear a coeficientes constantes*. Observe que na representação  $L[u] = F$ , a excitação (entrada) é  $F$  e  $u$  é a resposta (saída) do sistema. Todo *SLI* é regido por um operador diferencial linear a coeficientes constantes.

**Exemplo 2.7** Considere, agora, uma onda sonora que se propaga no interior de um duto longo, como indicado na Fig. 2.7. Em essência, essa pode ser considerada uma onda plana, ou seja, a propagação se dá unicamente na direção  $x$ . A equação que rege o campo de pressões sonoras  $p(x, t)$ , na ausência de fontes, é<sup>15</sup>

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

em que  $x$  é a posição ao longo do duto,  $t$  é o tempo e  $c$  é a velocidade de propagação da onda sonora no meio considerado.

<sup>15</sup>Veja, por exemplo, J.F. Doyle. *Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*. 2<sup>nd</sup> edition, Springer, New York, 1997 [69] ou L. Cremer, M. Heckl, B.A.T. Petersson. *Structure-borne Sound: Structure Vibrations and Sound Radiation at Audio Frequencies*. 3<sup>rd</sup> edition, Springer, Berlin, 2005 [58] ou E. Skudrzyk. *The Foundations of Acoustics: Basic Mathematics and Basic Acoustics*, Springer, New York, 1971 [220] ou, ainda, R.A. Tenenbaum. *Acústica Aplicada*, 2<sup>a</sup> edição, 2020 [233], disponível em: <https://ratenenbaum.wixsite.com/acustica>.

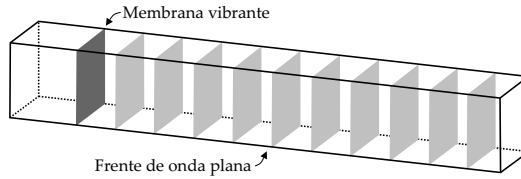


Figura 2.7: Onda plana propagando-se em um duto.

Como  $c$  é constante, ou seja, não depende das variáveis independentes  $x$  ou  $t$ , tem-se uma equação diferencial parcial linear a coeficientes constantes e o sistema pode ser considerado um  $\mathcal{SCLT}$ . Com efeito, a solução geral para a equação — conhecida como solução de D'Alembert — é<sup>16</sup>

$$p(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

em que  $f$  e  $g$  são funções arbitrárias, dependentes da fonte sonora e das condições de contorno, que se propagam no sentido positivo ( $f$ ) e negativo ( $g$ ) de  $x$ , admitindo superposição, como ilustrado na Fig. 2.8. Em outros termos, os componentes *progressivo*,  $f(x - ct)$ , e *regressivo*,  $g(x + ct)$ , do campo de pressões sonoras propagam-se independentemente no interior do duto em sentidos opostos e, ao se cruzarem, suas amplitudes se adicionam, como ilustrado, devido à linearidade do sistema.

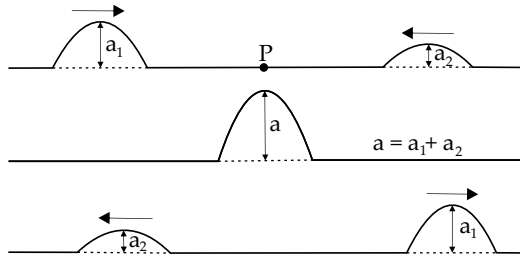


Figura 2.8: Ondas planas propagando-se em um duto, em três momentos distintos. Observe a superposição ao se cruzarem.

**Exemplo 2.8** Consideremos agora um sistema dinâmico que envolve controle de movimento. A Fig. 2.9 ilustra um pêndulo invertido acoplado a um trole motorizado, cuja função é controlar a inclinação do pêndulo.<sup>17</sup>  $M$  é a massa do trole,  $m$  a massa do pêndulo,  $I$  seu momento de inércia com respeito ao ponto  $P$  e  $2l$  o seu comprimento;  $u(t)$  é a força controladora aplicada ao trole,  $\theta(t)$  é a inclinação do pêndulo e  $x(t)$  é o deslocamento do trole. As equações diferenciais que regem esse sistema são:<sup>18</sup>

$$(M + m)\ddot{x}(t) + ml\ddot{\theta}(t) = u(t);$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta}(t) + ml\dot{x}(t) = mgl\theta(t).$$

<sup>16</sup>Ver, por exemplo, R.A. Tenenbaum. *Acústica Aplicada*. 2ª edição, R.A. Tenenbaum, Santa Maria, 2020 [233].

<sup>17</sup>Esse sistema pode ser entendido como uma simplificação, no plano da figura, do controle da inclinação de um projétil.

<sup>18</sup>Veja, por exemplo, K. Ogata. *Engenharia de Controle Moderno*. 4ª edição, Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2003 [184].

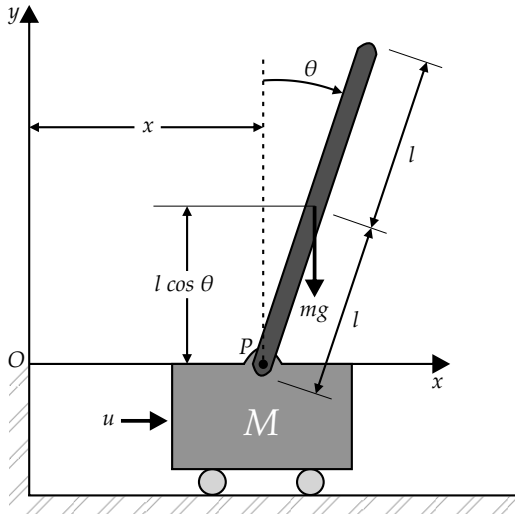


Figura 2.9: Pêndulo invertido.

Esse é um sistema rígido por duas equações diferenciais lineares (não há produtos ou potências das funções  $x(t)$  e  $\theta(t)$  ou suas derivadas), portanto, descreve um sistema linear. Além disso, como os parâmetros  $M$ ,  $m$ ,  $I$  e  $l$  são constantes, tem-se um  $SLI$ . Nesse caso,  $u$ , a força controladora, pode ser considerada como entrada do sistema e sua saída é o ângulo a ser controlado,  $\theta(t)$ , sendo  $x(t)$  uma variável meramente auxiliar. De fato, eliminando a variável  $x(t)$  do par de equações diferenciais, obtém-se

$$-\frac{(M+m)I + Mml^2}{ml} \ddot{\theta}(t) + (M+m)g\theta(t) = u(t)$$

e o  $SLI$  é rígido pelo operador diferencial linear de segunda ordem a coeficientes constantes

$$L = -\frac{(M+m)I + Mml^2}{ml} \frac{d^2}{dt^2} + (M+m)g.$$

**Exemplo 2.9** Uma barra uniforme horizontal de massa  $2m$  apoia-se em duas polias idênticas, cujos eixos distam  $2r$  entre si, que giram com a mesma velocidade angular constante  $\omega$ , porém em sentidos opostos, como indica a Fig. 2.10a. Inserindo-se a barra com seu centro de massa deslocado para a direita de  $x_0$ , como indicado, a força de atrito exercida pela polia da direita (para a esquerda) será maior do que a força de atrito exercida pela polia da esquerda (para a direita), acelerando, portanto, a barra naquele sentido até que o centro de massa passe pela origem dos eixos, invertendo-se, então, o sentido da aceleração. Estabelece-se, assim, um movimento periódico da barra que passaremos a investigar. Conhecido o coeficiente de atrito dinâmico,  $\mu$ , entre as polias e a barra, o mecanismo pode ser entendido como um sistema com oscilação periódica cuja frequência natural,  $f_n$  passamos a estudar.

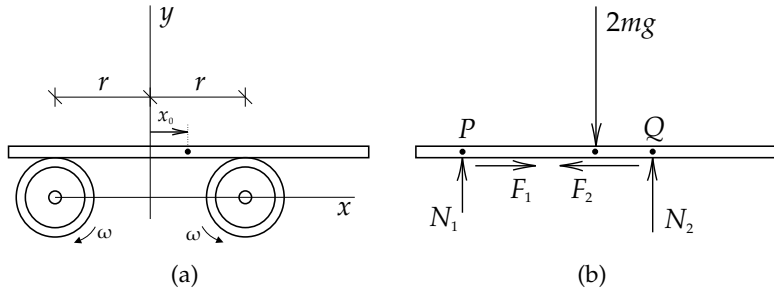


Figura 2.10: (a) Mecanismo composto por uma barra homogênea apoiada na horizontal sobre duas polias idênticas girando com velocidades angulares opostas de mesmo módulo, resultando em um sistema com movimento periódico. (b) Diagrama de forças aplicadas sobre a barra em uma posição genérica.

Os parâmetros conhecidos do sistema são:  $m$ ,  $r$ ,  $\mu$  e  $\omega$  e deseja-se determinar a frequência natural  $f_n$  do sistema em função dos parâmetros. O balanço de forças na direção vertical ( $y$ ) estabelece que, veja Fig. 2.10b,

$$N_1 + N_2 - 2mg = 0, \quad (a)$$

em que  $N_1$  é a força vertical exercida pela polia da esquerda, no ponto de contato P, e  $N_2$  é a força vertical exercida pela polia da direita, no ponto de contato Q. Fazendo, em seguida, o balanço de momentos na direção  $z$ , ortogonal ao plano da figura, com respeito ao ponto P, tem-se

$$N_2 \times 2r - 2mg \times (r + x) = 0, \quad (b)$$

em que  $g$  é a aceleração gravitacional e  $x$  é a coordenada instantânea do centro de massa. Das Eqs. (a) e (b) obtém-se:

$$N_1 = \frac{r-x}{r} mg; \quad N_2 = \frac{r+x}{r} mg.$$

Aplicando, na sequência, o segundo princípio de Newton na direção  $x$ , teremos

$$F_1 - F_2 = 2ma,$$

sendo  $F_1$  e  $F_2$  as forças de atrito nos pontos P e Q, respectivamente, e  $a$  a aceleração da barra. Portanto,

$$\frac{r-x}{r} \mu mg - \frac{r+x}{r} \mu mg = 2ma,$$

que resulta em

$$a = -\frac{x}{r} \mu g. \quad (c)$$

Observe que a aceleração é negativa (para a esquerda) quando  $x$  é positivo, ou seja, quando o centro de massa está à direita da origem, como esperado. Mas, naturalmente,  $a = \ddot{x}$ , portanto, a equação diferencial que rege o movimento da barra será

$$\ddot{x}(t) + \frac{\mu g}{r} x(t) = 0. \quad (d)$$

Ora, esta equação diferencial é a mesma que rege o pêndulo simples linearizado, visto no Ex. 2.5 ou seja, é uma equação do tipo  $\ddot{x} + \kappa^2 x = 0$ , sendo  $\kappa^2 = \mu g/r$  uma constante positiva, caracterizando um sistema linear. Sua solução geral é

$$x(t) = A \cos(\kappa t) + B \sin(\kappa t),$$

com as condições iniciais:

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = 0,$$

resultando em  $A = x_0$  e  $B = 0$ , logo,

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\mu g/r} t\right),$$

uma solução periódica (e harmônica), cuja frequência natural é

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu g}{r}}.$$

Observe o gentil leitor que o resultado independe da massa  $m$ , da velocidade angular  $\omega$ , e do deslocamento inicial  $x_0$ , dependendo, porém, dos parâmetros  $r$  e  $\mu$ .

**Exemplo 2.10** O sistema ilustrado na Fig. 2.11 consiste em duas pequenas esferas:  $P_1$ , de massa  $m_1$ , e  $P_2$ , de massa  $m_2$ , interligadas por molas, que podem deslizar sem atrito no interior do tubo  $T$ , o qual, por sua vez, move-se com velocidade angular constante  $\omega = \dot{\theta}$  em torno do eixo que passa por  $O$  e é paralelo a  $\mathbf{n}_3$ .<sup>19</sup>

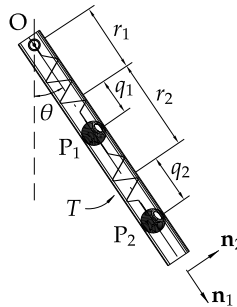


Figura 2.11: Sistema mecânico composto por duas esferas, interligadas por duas molas elásticas movendo-se sem atrito no interior de um tubo  $T$ , que gira com velocidade angular constante  $\omega$  em torno do ponto  $O$ .

As molas são elásticas e lineares, de constantes  $k_1$  e  $k_2$  e comprimentos naturais  $r_1$  e  $r_2$ . Uma vez que o movimento de  $T$  é prescrito, o sistema, holonômico, possui dois graus de liberdade. Tomaremos como coordenadas os deslocamentos das esferas

<sup>19</sup>Embora este sistema mecânico possua apenas dois graus de liberdade, é mais conveniente resolvê-lo utilizando *mecânica analítica*, também conhecida como *mecânica lagrangiana*, ver, por exemplo, T.R. Kane, D.A. Levinson. Dynamics: Theory and Applications. McGraw-Hill, New York, 1985 [134].

em relação às posições naturais das molas,  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$ , como indicado na figura. As velocidades das esferas são:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{P_1} &= \dot{q}_1 \mathbf{n}_1 + (r_1 + q_1) \omega \mathbf{n}_2; \\ \mathbf{v}^{P_2} &= \dot{q}_2 \mathbf{n}_1 + (r_1 + r_2 + q_2) \omega \mathbf{n}_2.\end{aligned}$$

Observe que  $\mathbf{v}^{P_i} = \mathbf{f}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ ,  $i = 1, 2$ . As taxas parciais de variação de posição valem, então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial q_1} &= \frac{\partial \mathbf{v}^{P_1}}{\partial \dot{q}_1} = \mathbf{n}_1; \\ \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial q_2} &= \frac{\partial \mathbf{v}^{P_1}}{\partial \dot{q}_2} = 0; \\ \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial q_1} &= \frac{\partial \mathbf{v}^{P_2}}{\partial \dot{q}_1} = 0; \\ \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial q_2} &= \frac{\partial \mathbf{v}^{P_2}}{\partial \dot{q}_2} = \mathbf{n}_1.\end{aligned}$$

As forças aplicadas a  $P_1$  são as exercidas pelo peso, pelas duas molas e pelo tubo. A força resultante sobre  $P_1$  vale, então (verifique),

$$\mathbf{F}_1 = (-k_1 q_1 + k_2(q_2 - q_1) + m_1 g \cos \theta) \mathbf{n}_1 + (A - m_1 g \sin \theta) \mathbf{n}_2 + B \mathbf{n}_3,$$

sendo  $A$  e  $B$  componentes da força de contato exercidas pelo tubo, desconhecidos. Do mesmo modo, as forças aplicadas a  $P_2$  provêm dos mesmos elementos e sua resultante é

$$\mathbf{F}_2 = (m_2 g \cos \theta - k_2(q_2 - q_1)) \mathbf{n}_1 + (C - m_2 g \sin \theta) \mathbf{n}_2 + D \mathbf{n}_3,$$

sendo  $C$  e  $D$ , desconhecidos, componentes de força exercidos pelo tubo. As forças ativas generalizadas  $F_1$  e  $F_2$  podem ser então obtidas, segundo a forma (verifique):

$$\begin{aligned}F_1 &= \mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial q_1} + \mathbf{F}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial q_1} \\ &= -k_1 q_1 + k_2(q_2 - q_1) + m_1 g \cos \theta; \\ F_2 &= \mathbf{F}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial q_2} + \mathbf{F}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial q_2} \\ &= -k_2(q_2 - q_1) + m_2 g \cos \theta,\end{aligned}$$

em que  $\theta(t) = \omega t + \theta(0)$  é conhecido a qualquer tempo. As acelerações das duas partículas constituintes do sistema valem:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^{P_1} &= (\ddot{q}_1 - (r_1 + q_1) \omega^2) \mathbf{n}_1 + (2\dot{q}_1 \omega + (r_1 + q_1) \dot{\omega}) \mathbf{n}_2; \\ \mathbf{a}^{P_2} &= (\ddot{q}_2 - (r_1 + r_2 + q_2) \omega^2) \mathbf{n}_1 + (2\dot{q}_2 \omega + (r_1 + r_2 + q_2) \dot{\omega}) \mathbf{n}_2.\end{aligned}$$

Portanto, as forças de inércia generalizadas valem:

$$\begin{aligned} F_1^* &= -m_1 \mathbf{a}^{P_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial q_1} - m_2 \mathbf{a}^{P_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial q_1} \\ &= -m_1 (\ddot{q}_1 - (r_1 + q_1) \omega^2); \\ F_2^* &= -m_1 \mathbf{a}^{P_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial q_2} - m_2 \mathbf{a}^{P_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial q_2} \\ &= -m_2 (\ddot{q}_2 - (r_1 + r_2 + q_2) \omega^2). \end{aligned}$$

Aplicando, em seguida, a forma lagrangiana do princípio de D'Alembert, que estabelece que

$$F_s + F_s^* = 0, \quad s = 1, 2, \dots, r,$$

ou seja, adicionando as forças ativas generalizadas e as forças de inércia generalizadas e igualando a zero, recaímos nas duas equações de movimento para as variáveis  $q_1$  e  $q_2$ :

$$-k_1 q_1 + k_2 (q_2 - q_1) + m_1 g \cos \theta - m_1 (\ddot{q}_1 - (r_1 + q_1) \omega^2) = 0; \quad (\text{a})$$

$$-k_2 (q_2 - q_1) + m_2 g \cos \theta - m_2 (\ddot{q}_2 - (r_1 + r_2 + q_2) \omega^2) = 0. \quad (\text{b})$$

Observe o gentil leitor que as incógnitas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , componentes de força, foram naturalmente suprimidas das equações de movimento, sendo essa uma das razões de se utilizar a solução via mecânica analítica. Esse sistema de equações (a) e (b) é um sistema linear nas variáveis  $q_1$  e  $q_2$  porém *acoplado*. Sua solução só pode ser obtida numericamente, ou seja, atribuídos valores para as constantes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  (e  $g$ ), a evolução de  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$ , saídas do sistema, podem ser determinadas numericamente em função de  $\theta(t)$ , entrada do sistema.

Nos próximos cinco capítulos — Capítulos 3 a 7 — serão estabelecidas as bases teóricas para lidar com processamento de sinais contínuos e, particularmente, aplicados a sistemas lineares invariantes no tempo, constituindo a Parte A deste livro. Veremos, na sequência: o Capítulo 3, Distribuições; o Capítulo 4, Base Complexa e Funções Harmônicas; o Capítulo 5, Convolução e Correlação; o Capítulo 6, Série de Fourier; e o Capítulo 7, Transformada de Fourier.

Nos três capítulos seguintes — Capítulos 8 a 10 — são introduzidas as ferramentas necessárias para lidar com sinais discretos, constituindo a Parte B do livro. Veremos, na sequência: o Capítulo 8, Amostragem de Sinais; o Capítulo 9, Transformada Discreta de Fourier; e o Capítulo 10, Convolução e Correlação Discretas.

Finalmente, os dois capítulos subsequentes — Capítulos 11 e 12 — são dedicados às aplicações em *Acústica e Vibrações*, constituindo a Parte C do livro.



O livro provê os fundamentos teóricos em processamento de sinais aplicados a Acústica e Vibrações (A&V), sendo o primeiro texto produzido em língua portuguesa sobre o tema. Está subdividido três partes. A Parte A aborda os sinais contínuos; a Parte B trata dos sinais discretos; a Parte C, então, apresenta exemplos das mais importantes aplicações de processamento de sinais em A&V. Em Acústica, abordam-se: a medição de respostas impulsivas de sistemas; a determinação do tempo de reverberação em salas; a avaliação da inteligibilidade da fala, dentre muitos outros. Em Vibrações, tem-se: a medição do amortecimento de um sistema; a medição de parâmetros de um isolador de vibrações; a medição de vibração em placas, dentre outros.

O autor introduz com elegância a matemática subjacente à teoria de sinais e sistemas. A abordagem é extremamente didática ao ilustrar toda a teoria com inúmeros exemplos, em sua grande maioria bem simples. Alguns conceitos são introduzidos de forma original e, ao mesmo tempo, intuitiva, com a intenção mais de formar do que informar. Como disse o Prof. Michael Vorländer, da Universidade de Aachen, que leu e resenhou o livro, *"É particularmente notável a excelente abordagem didática de ilustrar as derivações matemáticas abstratas com vários exemplos, o que facilita muito o aprendizado com o objetivo de obter uma compreensão profunda até mesmo de processos complexos."*

O texto é uma excepcional fonte de informação para todos os que estudam ou trabalham com A&V, em que o processamento de sinais tem um papel fundamental. Atende tanto a estudantes quanto a profissionais da área que buscam uma sólida referência.





Clique aqui e:

[VEJA NA LOJA](#)

## Processamento de sinais em acústica e vibrações

---

Roberto A. Tenenbaum

ISBN: 9788521220459

Páginas: 493

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2024

---