

INVARIÂNCIA DE ESCALA EM SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

EDSON DENIS LEONEL

Blucher

Invariância de escala em sistemas dinâmicos não
lineares

Edson Denis Leonel

Invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares

© 2019 Edson Denis Leonel

Editora Edgard Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar

04531-934 – São Paulo – SP – Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

contato@blucher.com.br

www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Leonel, Edson Denis

Invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares / Edson Denis Leonel. -- São Paulo : Blucher, 2019. 476 p. : il.

Bibliografia

ISBN 978-85-212-1851-7 (impresso)

ISBN 978-85-212-1852-4 (e-book)

1. Mecânica 2. Física 3. Sistemas não-lineares 4. Dinâmica 5. Comportamento caótico nos sistemas I. Título.

19-1309

CDD 531

Índice para catálogo sistemático:

1. Sistemas não-lineares

Conteúdo

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Discussão inicial | 25 |
| 1.1 | Objetivos | 25 |
| 1.2 | Conceitos iniciais | 25 |
| 1.3 | Resumo | 49 |
| 2 | O conceito de atrator | 51 |
| 2.1 | Objetivos | 51 |
| 2.2 | Conceitos iniciais | 51 |
| 2.3 | O oscilador amortecido | 54 |
| 2.3.1 | Amortecimento supercrítico | 55 |
| 2.3.2 | Amortecimento crítico | 58 |
| 2.3.3 | Amortecimento subcrítico | 61 |
| 2.4 | Oscilador de Van der Pol | 62 |
| 2.5 | Atrator caótico | 66 |
| 2.5.1 | O sistema de Lorenz | 67 |
| 2.5.2 | Equação de Duffing | 72 |
| 2.6 | Atrator estranho não caótico | 75 |
| 2.7 | Conceito de atrator | 78 |
| 2.8 | Resumo | 79 |
| 2.9 | Exercícios propostos | 81 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3 | Estabilidade de pontos fixos | 85 |
| 3.1 | Objetivos | 85 |
| 3.2 | Equação diferencial linear de primeira ordem | 85 |
| 3.3 | Sistemas lineares | 89 |
| 3.4 | Sistemas não lineares | 95 |
| 3.4.1 | Exemplo 1 | 97 |
| 3.4.2 | Exemplo 2 | 99 |
| 3.4.3 | Exemplo 3 | 101 |
| 3.5 | Resumo | 102 |
| 3.6 | Exercícios propostos | 103 |
| 4 | Algumas bifurcações locais | 107 |
| 4.1 | Objetivos | 107 |
| 4.2 | Bifurcações locais | 107 |
| 4.3 | Bifurcação sela-nó | 108 |
| 4.3.1 | Exemplo de bifurcação sela-nó | 110 |
| 4.4 | Bifurcação transcritical | 112 |
| 4.4.1 | Exemplo de bifurcação transcritical | 112 |
| 4.5 | Bifurcação supercritical de forquilha | 114 |
| 4.5.1 | Exemplo de bifurcação supercritical de forquilha | 115 |
| 4.6 | Bifurcação subcritical de forquilha | 117 |
| 4.7 | Formas normais | 118 |
| 4.8 | Resumo | 120 |
| 4.9 | Exercícios propostos | 122 |
| 5 | Análise de escala em bifurcações locais | 125 |
| 5.1 | Objetivos | 125 |
| 5.2 | Convergência para pontos fixos | 125 |
| 5.3 | Convergência para o ponto fixo: uma descrição fenomenológica | 126 |
| 5.3.1 | Hipóteses de escala | 127 |
| 5.4 | Análise de escala na bifurcação sela-nó | 133 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.5 | Análise de escala na bifurcação transcritical | 136 |
| 5.6 | Análise de escala na bifurcação supercritical de forquilha . . . | 138 |
| 5.7 | Resumo | 141 |
| 5.8 | Exercícios propostos | 142 |
| 6 | Mapeamentos discretos unidimensionais | 145 |
| 6.1 | Objetivos | 145 |
| 6.2 | Introdução | 145 |
| 6.3 | O conceito de estabilidade | 147 |
| 6.3.1 | Ponto fixo assintoticamente estável | 149 |
| 6.3.2 | Estabilidade neutra | 150 |
| 6.3.3 | Ponto fixo instável | 151 |
| 6.4 | Aplicações de cálculo de ponto fixo no mapa logístico | 152 |
| 6.5 | Bifurcações | 154 |
| 6.5.1 | Bifurcação transcritical | 155 |
| 6.5.2 | Bifurcação de duplicação de período | 155 |
| 6.5.3 | Bifurcação tangente | 156 |
| 6.6 | Resumo | 158 |
| 6.7 | Exercícios propostos | 159 |
| 7 | Algumas propriedades dinâmicas e estatísticas para o mapa logístico | 161 |
| 7.1 | Objetivos | 161 |
| 7.2 | Convergência para o estado estacionário | 162 |
| 7.2.1 | Bifurcação transcritical | 162 |
| 7.2.2 | Bifurcação de duplicação de período | 169 |
| 7.2.3 | Rota para o caos via duplicação de período | 170 |
| 7.2.4 | Bifurcação tangente | 173 |
| 7.3 | Expoentes de Lyapunov | 174 |
| 7.4 | Resumo | 178 |
| 7.5 | Exercícios propostos | 179 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 8 | O mapa <i>logistic-like</i> | 181 |
| 8.1 | Objetivos | 181 |
| 8.2 | A equação do mapeamento | 182 |
| 8.3 | Bifurcação transcítica | 183 |
| 8.3.1 | Obtenção analítica dos expoentes α , β , z e δ | 187 |
| 8.3.2 | Expoentes críticos na bifurcação de duplicação de período | 189 |
| 8.4 | Extensão dos resultados para outros mapeamentos | 193 |
| 8.4.1 | Mapa de Hassell | 194 |
| 8.4.2 | Mapa de Maynard | 194 |
| 8.5 | Resumo | 195 |
| 8.6 | Exercícios propostos | 196 |
| 9 | Introdução aos mapeamentos discretos bidimensionais | 197 |
| 9.1 | Objetivos | 197 |
| 9.2 | Mapeamentos lineares | 197 |
| 9.3 | Mapeamentos não lineares | 199 |
| 9.4 | Aplicações de mapeamentos bidimensionais | 201 |
| 9.4.1 | Mapa de Hénon | 201 |
| 9.4.2 | Expoentes de Lyapunov | 203 |
| 9.4.3 | Mapa de Ikeda | 206 |
| 9.5 | Resumo | 208 |
| 9.6 | Exercícios propostos | 210 |
| 10 | O modelo do acelerador de Fermi: versão não dissipativa | 213 |
| 10.1 | Objetivos | 213 |
| 10.2 | O modelo Fermi-Ulam | 214 |
| 10.2.1 | Matriz jacobiana para colisões indiretas | 219 |
| 10.2.2 | Matriz jacobiana para colisões múltiplas | 220 |
| 10.2.3 | Pontos fixos | 221 |
| 10.2.4 | Espaço de fases | 222 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 10.2.5 | Preservação de medida no espaço de fases | 222 |
| 10.3 | Versão simplificada do modelo Fermi-Ulam | 226 |
| 10.4 | Propriedades de escala do mar de caos | 228 |
| 10.5 | Localização da primeira curva invariante <i>spanning</i> | 235 |
| 10.6 | O regime de crescimento | 237 |
| 10.7 | Resumo | 240 |
| 10.8 | Exercícios propostos | 242 |
| 11 | Dissipação no modelo do acelerador de Fermi | 247 |
| 11.1 | Objetivos | 247 |
| 11.2 | Dissipação via colisões inelásticas | 248 |
| 11.2.1 | Matriz jacobiana para colisões múltiplas | 249 |
| 11.2.2 | Matriz jacobiana para colisões indiretas | 250 |
| 11.2.3 | O espaço de fases | 251 |
| 11.2.4 | Pontos fixos | 253 |
| 11.2.5 | A construção das variedades | 254 |
| 11.2.6 | Determinação do cruzamento das variedades e do transiente | 256 |
| 11.2.7 | Determinando o expoente δ a partir dos autovalores do ponto de sela | 261 |
| 11.3 | Dissipação via arrasto viscoso | 263 |
| 11.3.1 | Força de arrasto $F = -\tilde{\eta}v$ | 263 |
| 11.3.2 | Força de arrasto $F = -\tilde{\eta}v^2$ | 266 |
| 11.3.3 | Força de arrasto $F = -\tilde{\eta}v^\gamma$ | 270 |
| 11.4 | Resumo | 274 |
| 11.5 | Exercícios propostos | 276 |
| 12 | Propriedades dinâmicas do modelo <i>bouncer</i> | 279 |
| 12.1 | Objetivos | 279 |
| 12.2 | O modelo | 279 |
| 12.3 | Versão completa do modelo <i>bouncer</i> | 281 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 12.3.1 | Colisões sucessivas | 282 |
| 12.3.2 | Colisões indiretas | 282 |
| 12.3.3 | Matriz jacobiana | 284 |
| 12.3.4 | O espaço de fases | 285 |
| 12.4 | Versão simplificada do modelo <i>bouncer</i> | 287 |
| 12.5 | Investigação numérica na versão simplificada | 291 |
| 12.6 | Aproximação de tempo contínuo | 298 |
| 12.7 | Resumo | 301 |
| 12.8 | Exercícios propostos | 303 |
| 13 | Localização de curvas invariantes | 305 |
| 13.1 | Objetivos | 305 |
| 13.2 | O mapa-padrão | 305 |
| 13.3 | Localização das curvas | 307 |
| 13.4 | Reescala no espaço de fases | 312 |
| 13.5 | Resumo | 313 |
| 13.6 | Exercícios propostos | 314 |
| 14 | Difusão caótica em mapeamentos não dissipativos | 317 |
| 14.1 | Objetivos | 317 |
| 14.2 | Uma família de mapeamentos discretos | 318 |
| 14.3 | Propriedades do mar de caos: uma descrição fenomenológica | 323 |
| 14.4 | Uma abordagem semifenomenológica | 328 |
| 14.5 | Obtenção da probabilidade via equação da difusão | 333 |
| 14.6 | Resumo | 338 |
| 14.7 | Exercícios propostos | 339 |
| 15 | Introdução à dinâmica de bilhares | 343 |
| 15.1 | Objetivos | 343 |
| 15.2 | O bilhar | 344 |
| 15.2.1 | Bilhar circular | 346 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 15.2.2 | Bilhar elíptico | 347 |
| 15.2.3 | Bilhar ovoide | 349 |
| 15.3 | Resumo | 352 |
| 15.4 | Exercícios propostos | 354 |
| 16 | Bilhares dependentes do tempo | 359 |
| 16.1 | Objetivos | 359 |
| 16.2 | O bilhar | 360 |
| 16.2.1 | Conjectura LRA | 363 |
| 16.3 | Bilhar elíptico dependente do tempo | 364 |
| 16.4 | Bilhar ovoide | 367 |
| 16.5 | Resumo | 370 |
| 16.6 | Exercícios propostos | 371 |
| 17 | Supressão de aceleração de Fermi no bilhar ovoide | 373 |
| 17.1 | Objetivos | 373 |
| 17.2 | O modelo e o mapa | 373 |
| 17.3 | Resultados para o caso $F \propto -V$ | 377 |
| 17.4 | Resultados para o caso $F \propto -V^2$ | 379 |
| 17.5 | Resultados para o caso $F \propto -V^\delta$ | 386 |
| 17.6 | Resumo | 389 |
| 17.7 | Exercícios propostos | 391 |
| 18 | Um modelo termodinâmico para bilhares dependentes do tempo | 393 |
| 18.1 | Objetivos | 393 |
| 18.2 | Motivação | 394 |
| 18.3 | Transferência de calor | 397 |
| 18.4 | Formalismo de bilhar | 401 |
| 18.4.1 | Estado estacionário | 404 |
| 18.4.2 | Regime dinâmico | 405 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 18.4.3 | Simulações numéricas | 406 |
| 18.4.4 | Média da velocidade em n | 409 |
| 18.4.5 | Expoentes críticos | 410 |
| 18.4.6 | Distribuição de velocidade | 411 |
| 18.5 | Conexão entre os dois formalismos | 412 |
| 18.6 | Resumo | 414 |
| 18.7 | Exercícios propostos | 416 |
| A | Relações de Euler | 417 |
| B | Métodos de integração numérica | 421 |
| B.1 | Método de Euler | 421 |
| B.2 | Método de Taylor | 422 |
| B.3 | Método Runge-Kutta de segunda ordem | 423 |
| B.4 | Método Runge-Kutta de quarta ordem | 423 |
| C | Expressões dos coeficientes j na abordagem dinâmica | 425 |
| D | Mudança de referencial | 429 |
| D.1 | Introdução | 429 |
| D.2 | Colisões elásticas | 430 |
| D.3 | Colisões inelásticas | 431 |
| E | Solução da equação da difusão | 433 |
| E.1 | Introdução | 433 |
| F | Equação do fluxo de calor | 437 |
| G | Conexão entre t e n no bilhar ovoide dependente do tempo | 439 |
| H | Solução da integral para a relação entre n e t no bilhar ovoide dependente do tempo | 441 |

| | |
|-------------------------|------------|
| Referências | 443 |
| Lista de figuras | 453 |
| Lista de tabelas | 471 |
| Índice remissivo | 473 |

Capítulo 1

Discussão inicial

1.1 Objetivos

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma breve discussão sobre alguns dos conceitos fundamentais que serão adotadas ao longo do livro e que são comumente utilizados no estudo de sistemas dinâmicos não lineares.

1.2 Conceitos iniciais

Os primeiros relatos que se tem das investigações sobre sistemas dinâmicos datam dos séculos XV e XVI e estão particularmente relacionados com o estudo da mecânica celeste. Entretanto, a modelagem matemática de um sistema evoluindo no tempo só teve progressos com Isaac Newton e suas leis do movimento. Em um sistema dinâmico existe uma relação matemática que, a partir do conhecimento de um estado configuracional em um determinado instante, geralmente caracterizado como a condição inicial do sistema, permite encontrar o estado em um instante de tempo posterior. Um estado fornece a caracterização da configuração de um sistema em um dado instante. Ao se estudar, por exemplo, o lançamento de um projétil, o estado inicial é caracterizado pelo conhecimento da posição e da velocidade

no instante do lançamento, ou seja, um par posição e velocidade iniciais.

A partir do conhecimento das leis que descrevem a dinâmica, muitas vezes fornecidas a partir das leis de Newton para sistemas mecânicos, os conjuntos de equações determinando posição e velocidade em instantes futuros podem ser classificados como lineares ou não lineares. Em um sistema linear, as equações que descrevem a dinâmica assumem apenas potências de primeira ordem, sendo, portanto, equações lineares. Como exemplo, podemos considerar $\dot{x} = -ax$ em que $a \in \mathbb{R}$ e x é uma variável dinâmica. O termo $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ corresponde à derivada primeira de $x(t)$ em relação ao tempo t . Por outro lado, as equações não lineares são caracterizadas por potências diferentes de 1 nas variáveis dinâmicas, bem como podem assumir formas descritas por funções seno, cosseno, exponencial, dentre diversas outras possibilidades. Para ilustrar uma equação não linear, podemos considerar $\dot{x} = b \sin(x)$ sendo $b \in \mathbb{R}$. Equações não lineares podem depender de mais de uma variável. Considere o sistema de equações $\dot{x} = a - y$ e $\dot{y} = b + xy$. Nesse exemplo a não linearidade deve-se ao produto dos termos xy .

As equações não lineares não estão restritas somente a sistemas mecânicos descritos pelas equações de Newton. Elas vão muito além e podem incluir sistemas elétricos/eletrônicos com elementos de circuitos exibindo características não lineares, como transistores, diodos, dentre diversos outros. Em sistemas fluidos, a densidade, a viscosidade e outros parâmetros relevantes podem contribuir com termos não lineares nas equações dinâmicas. Sistemas de *lasers* também podem exibir equações com termos não lineares associados a acoplamentos e outros processos, como controle, retroalimentação, dentre outros. A própria mecânica celeste apresenta, em sua vasta maioria de sistemas investigados, dinâmicas que têm em suas equações termos não lineares.

A partir de um determinado estado inicial, a evolução dinâmica de um sistema fornece um conjunto de estados seguintes. A sequência cronoló-

gica desses estados recebe o nome de órbita, fornecendo assim a dinâmica temporal de um estado inicial. A partir da troca da configuração inicial, a evolução dinâmica fornece outra sequência de estados distintos e, conseqüentemente, outra órbita. O conjunto de todas as órbitas recebe o nome de espaço de fases ou espaço de estados e fornece informações a respeito de todos os estados permitidos do sistema dinâmico.

Muitas propriedades relevantes da dinâmica são obtidas a partir do conhecimento do espaço de fases. Dependendo do sistema considerado, o espaço de fases pode exibir três tipos característicos de comportamento: (i) periódico; (ii) quase-periódico; e (iii) caótico. Tais comportamentos podem coexistir no espaço de fases, bem como é possível observar sistemas que exibem comportamentos periódicos, outros com dinâmica quase-periódica e ainda outros como sistemas completamente caóticos. No comportamento periódico, pode-se perceber que a dinâmica se repete a intervalos de tempo regulares muito bem definidos, conduzindo a uma dinâmica regular e previsível. No caso de um movimento quase-periódico, a repetição da dinâmica a tempos bem determinados, característica de movimento periódico, não é mais observada. Entretanto, o fato de não poder se medir um determinado período não implica que a dinâmica seja completamente errática. De fato, a evolução dinâmica se dá ao longo de um conjunto supostamente compacto de pontos no espaço de fases e que não exhibe afastamento, com o decorrer do tempo, de duas configurações iniciais bastante próximas. Por outro lado, o comportamento caótico é determinado a partir da evolução de duas condições iniciais próximas que se afastam uma da outra exponencialmente no tempo. Isso garante que o conhecimento de um determinado estado futuro a partir de uma das condições iniciais não permita dizer nada sobre o comportamento temporal da outra condição inicial. Essa separação exponencial de órbitas com condições iniciais vizinhas no espaço de fases conduz ao conceito de expoente de Lyapunov positivo. Esse expoente sendo positivo identifica a dinâmica como caótica. A dinâmica caótica é conseqüência da não line-

ridade nas equações que descrevem a evolução dos sistemas caóticos. A não linearidade é necessária para a existência de caos, entretanto, há sistemas não lineares que não apresentam dinâmica caótica.

O conhecimento das leis que descrevem a dinâmica dos sistemas permite estabelecer uma distinção entre determinismo e não determinismo. Quando se fala em determinismo, este está associado às leis que descrevem a dinâmica do sistema, conhecidas explicitamente, sendo portanto ausentes termos associados com estocasticidade.¹ Considere, por exemplo, a aplicação da segunda lei de Newton a um sistema massa-mola unidimensional na presença de arrasto viscoso conforme mostrado na Figura 1.1. A equação que rege

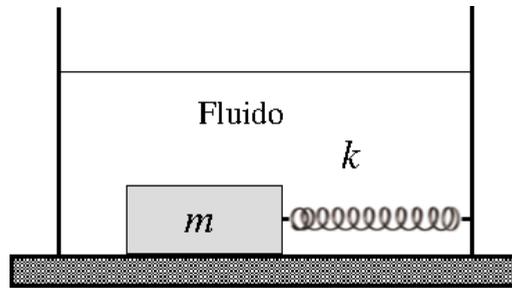


Figura 1.1 – Ilustração do oscilador amortecido.

a dinâmica do sistema é dada por $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx$, em que m é a massa do oscilador, γ é o coeficiente que determina o arrasto viscoso e k é a constante elástica da mola. A variável dinâmica é representada por x , sendo a velocidade dada por $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, e a aceleração, por $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$. A partir de um determinado estado inicial $x(t = 0)$ e $\dot{x}(t = 0)$, todos os estados seguintes podem ser determinados a partir da solução explícita da equação do movimento, caracterizando portanto um sistema determinístico. A equação diferencial que descreve a dinâmica do oscilador amortecido é linear. Outro sistema que também é determinístico, porém descrito por uma equação não linear, é o pêndulo simples. A Figura 1.2 ilustra o modelo. Trata-se de uma

¹Por estocasticidade queremos dizer forças aleatórias sem total conhecimento ou controle explícito no tempo.

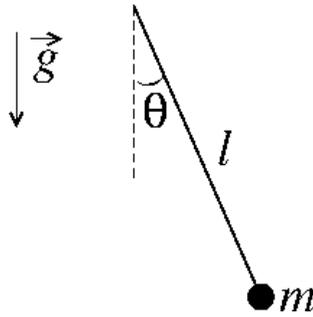


Figura 1.2 – Ilustração do pêndulo simples sem amortecimento.

partícula de massa m suspensa por um fio inextensível de comprimento l que oscila, em torno de uma origem, na vertical de um ângulo $\theta(t)$. A partícula sofre a ação do campo gravitacional \vec{g} , assumido como constante. A partir da segunda lei de Newton, podemos encontrar que a equação que governa a dinâmica é dada por $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$. A solução dessa equação é simples no limite de ângulos pequenos a que a aproximação $\sin(\theta) \cong \theta$ se aplica. Quando a aproximação de ângulos pequenos não for válida, a solução pode ser obtida a partir de integrais elípticas.

Por outro lado, um sistema não determinístico tem em suas equações dinâmicas uma função que não é completamente conhecida e fornece a probabilidade de um determinado evento ocorrer. Por exemplo, o problema da caminhada aleatória unidimensional, no qual o caminhante pode dar um passo para direita com probabilidade p ou um passo para a esquerda com probabilidade q , em que a soma $p + q = 1$. A existência dessa componente estocástica caracteriza o sistema como não determinístico. Problemas envolvendo não determinismo são muito comuns na área de física estatística, particularmente associados à caminhada aleatória, em que se usa como técnica de estudo o formalismo envolvendo a equação de Fokker-Planck e também a equação de Langevin. Não se deve confundir aqui não determinístico com caótico. Em um sistema caótico determinístico, as leis que descrevem o movimento são conhecidas e não envolvem termos estocásticos.

Entretanto, a natureza não linear das equações que descrevem o movimento e a característica do afastamento exponencial no tempo a partir de duas condições iniciais vizinhas não permite o conhecimento de estados futuros, embora o sistema seja determinístico.

Ao resolver² as equações diferenciais, sejam elas lineares ou não lineares, encontra-se um fluxo de soluções com dimensão N no espaço de fases. A evolução temporal de tal fluxo descreve a dinâmica do sistema e, dependendo da complexidade do conjunto de equações que o descreve, pode ser bastante dispendioso obtê-lo, do ponto de vista numérico/computacional. Uma forma alternativa para investigar os sistemas é interceptar o fluxo de soluções no espaço de fases utilizando uma superfície³ que corta o conjunto de soluções. Essa superfície é também conhecida como superfície de seção ou seção de Poincaré. Cada interseção do fluxo de soluções na superfície produz um ponto na seção de Poincaré com dimensão $N - 1$. A sequência de pontos é descrita por um mapeamento discreto $F(\vec{x}_n) = \vec{x}_{n+1}$ em que F descreve o operador que evolui o vetor de soluções \vec{x} de dimensão $N - 1$ da interseção n para a respectiva interseção $n + 1$. A Figura 1.3 mostra um fluxo de soluções sendo interceptado por um plano. A sequência de pontos localizados na seção de Poincaré é descrita por um mapeamento discreto.

A solução do modelo descrito na Figura 1.1, o oscilador amortecido, naturalmente exhibe uma redução na energia mecânica⁴ do sistema. Com o decorrer do tempo, a dinâmica evolui para o estado estacionário localizado em $x = 0$ e $\dot{x} = 0$. A existência da força de arrasto viscoso estabelece a

²Em sistemas não lineares, poucas são as soluções analíticas conhecidas. Um número significativo de métodos numéricos para integração de equações diferenciais pode ser utilizado para obter as soluções numéricas, em particular os métodos do tipo Runge-Kutta.

³Para fluxos com dimensões maiores que 3, utiliza-se uma hipersuperfície de dimensão $N - 1$.

⁴A energia mecânica é composta pela soma da energia cinética, esta associada ao estado de movimento do bloco de massa m , com a energia potencial, que por sua vez está associada ao estado configuracional do sistema.

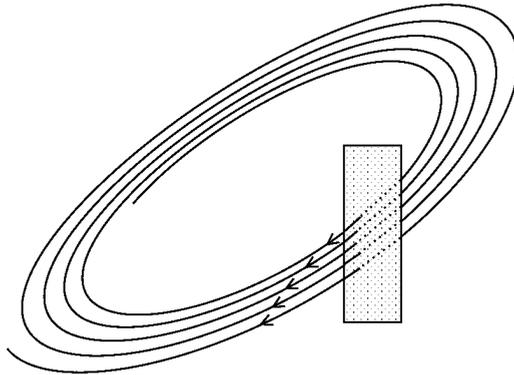


Figura 1.3 – Ilustração de uma seção de Poincaré.

presença de dissipação no sistema conduzindo à redução da energia, caracterizando, dessa forma, o sistema como dissipativo. Por outro lado, o modelo descrito na Figura 1.2, o pêndulo simples, não exibe dissipação. Uma vez afastada a massa m da condição de equilíbrio localizada na posição angular $\theta = 0$, com velocidade angular $\dot{\theta} = 0$ e ali abandonada, o sistema permanecerá permanentemente em situação de não equilíbrio independentemente de estar em libração, quando oscila em torno da condição de equilíbrio – essa situação é determinada no regime de baixas energias –, ou em rotação, quando o sistema gira em torno do ponto de rotação. Tal rotação pode ser tanto no sentido horário quanto anti-horário, e isso depende apenas da condição inicial para a velocidade: $\dot{\theta} > 0$ (sentido anti-horário) ou $\dot{\theta} < 0$ (sentido horário). Uma vez que o sistema não exibe dissipação de energia, é muitas vezes também chamado de sistema conservativo.

A terminologia conservativo ou não conservativo⁵ pode ser rigorosamente determinada a partir do teorema de Liouville, que caracteriza o fluxo de soluções no espaço de fases. Em sistemas conservativos, a densidade de pontos no espaço de fases é constante e esse fato garante a inexistência de sorvedouros, comumente presentes em sistemas dissipativos. Sorvedouros

⁵Muitas vezes o termo dissipativo é atribuído a sistemas que não preservam a energia total.

são definidos como um conjunto de pontos que atraem as soluções para tempos suficientemente longos. Uma vez atingido o sorvedouro, a solução nunca mais escapa de lá, a menos que haja uma interferência externa. O conjunto de pontos para os quais as soluções convergem assintoticamente no tempo é denominado atrator. Ao longo do texto veremos que existem diversos tipos de atratores, que podem ser classificados como pontos fixos assintoticamente estáveis, ciclos limites, estranhos não caóticos e caóticos.

Como ilustração de um ponto fixo assintoticamente estável, podemos mencionar a solução assintótica do oscilador amortecido. Iniciando a dinâmica do sistema descrito na Figura 1.1 a partir de uma energia inicial não nula, com o decorrer do tempo a solução assintótica converge para $(x, \dot{x}) = (0, 0)$. Trata-se de um atrator de dimensão 0, ou seja, um ponto fixo. Uma vez atingida a condição de equilíbrio, a solução passa a ser atemporal. Em um ciclo limite, a convergência de uma condição inicial não evolui para um ponto no espaço de fases, e sim para uma curva fechada, que só é atingida assintoticamente no tempo. Nesse caso trata-se de um atrator de dimensão 1. O intervalo de tempo para que o atrator seja alcançado é chamado de transiente. A compreensão e a descrição dos transientes presentes em sistemas dissipativos são de crucial importância para a caracterização das suas propriedades dinâmicas. Um transiente fornece o tempo de evolução dinâmica até que o sistema atinja um determinado atrator.

Nos dois casos discutidos, temos dois tipos de atratores que têm geometrias muito bem definidas, sendo elas um ponto ou uma curva fechada. Entretanto, a geometria dos atratores nem sempre é tão simples assim. Em sistemas mais complicados, como osciladores amortecidos e forçados, dependendo da força externa, a evolução assintótica atinge um conjunto de pontos que não é um simples ponto fixo, tampouco uma curva fechada, mas sim uma distribuição complicada no espaço de fases e que tem uma forma geométrica não usual, ou uma forma estranha. Essa geometria não usual, com forma estranha, define o conjunto de pontos como atrator estranho. Tal

atrator pode ainda ser caótico ou não. Partindo de duas condições iniciais bastante próximas e evoluindo-as no tempo, se as órbitas se afastarem exponencialmente uma da outra, diz-se que o atrator estranho é caótico. Um observável que caracteriza essa taxa de afastamento é chamado de expoente de Lyapunov. Um expoente de Lyapunov positivo é suficiente para garantir a existência de dinâmica caótica. Caso o afastamento não seja exponencial e a forma do atrator se mantenha não usual e com aparência estranha, o conjunto de pontos é dito um atrator estranho não caótico. Assim, uma das questões principais em sistemas dinâmicos descritos por equações não lineares é determinar se o atrator observado é realmente caótico ou não e caracterizá-lo quantitativamente.

Sistemas não lineares dissipativos, sejam eles descritos por equações diferenciais ou por mapeamentos discretos, podem admitir a existência de mais de um atrator simultaneamente, seja ele periódico ou caótico, muitas das vezes ambos. No espaço de fases, o conjunto de condições iniciais que convergem para um determinado atrator define o que é chamado de bacia de atração. Cada bacia de atração de um determinado atrator é formada por um conjunto de pontos, estabelecendo as condições iniciais, para os quais a evolução dinâmica converge para tempo suficientemente longo. Em sistemas determinísticos, o conhecimento da bacia de atração permite definir uma condição inicial que seguramente evolui para um determinado atrator.

Os atratores classificados como pontos fixos assintoticamente estáveis podem ser estudados a partir da variação dos parâmetros que controlam a dinâmica do sistema. Com a variação dos parâmetros de controle, um determinado ponto fixo, que admitia a condição de ser assintoticamente estável, pode mudar sua estabilidade, deixando assim de atrair condições iniciais próximas a ele, mudando para ponto fixo instável. O parâmetro de controle crítico onde ocorre essa mudança define o local de ocorrência de uma bifurcação. As bifurcações podem ser classificadas conforme seu tipo, sendo elas bifurcações locais ou bifurcações globais. Uma bifurcação local pode

ser completamente determinada a partir da análise de estabilidade de ponto fixo, sendo portanto uma análise local. As bifurcações locais se classificam em bifurcação transcritical, bifurcação de forquilha supercritical ou subcritical, bifurcação de duplicação de período, bifurcação tangente, dentre várias outras. É importante mencionar também que as bifurcações ocorrem não somente para pontos fixos, podendo ser observadas em órbitas de períodos maiores. Por outro lado, nas bifurcações globais o conhecimento da estabilidade de um ponto fixo não permite determinar quando elas ocorrerão. Em uma bifurcação global, o espaço de fases sofre uma mudança estrutural repentina a ponto de ocorrer a destruição de um atrator caótico, sendo este substituído por um transiente caótico ou mesmo outro atrator caótico com características diferentes. Bifurcações globais produzem no espaço de fases eventos de crise, que se classificam em crise de fronteira, crise unindo atratores e crise interior.

Tendo como motivação a descrição sobre as bifurcações, uma das questões centrais que se coloca no estudo de sistemas dinâmicos é como a dinâmica de um determinado sistema se modifica em decorrência da variação dos parâmetros de controle? Também, como os observáveis físicos que caracterizam as grandezas de interesse convergem para seu valor assintótico? Tal convergência é única e independente dos parâmetros de controle? Para ilustrar a discussão sobre a convergência para o estado assintótico, consideraremos um caso específico que ocorre no mapa logístico⁶ escrito como $x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n)$ em que $R \in [0, 4]$ corresponde ao parâmetro de controle e $x \in [0, 1]$ é a variável dinâmica. O índice $n = 0, 1, 2, \dots$ identifica o número de iterações do mapeamento, sendo sempre um número inteiro. Partindo-se de uma condição inicial x_0 , evolui-se a dinâmica a partir da equação do mapa obtendo-se x_1 , refaz-se o procedimento usando a equação do mapa para obter x_2 e assim por diante. A sequência discreta e cronológica de

⁶O mapa logístico foi proposto originalmente como uma forma discreta para a descrição da dinâmica de diversas populações incluindo insetos, peixes etc.

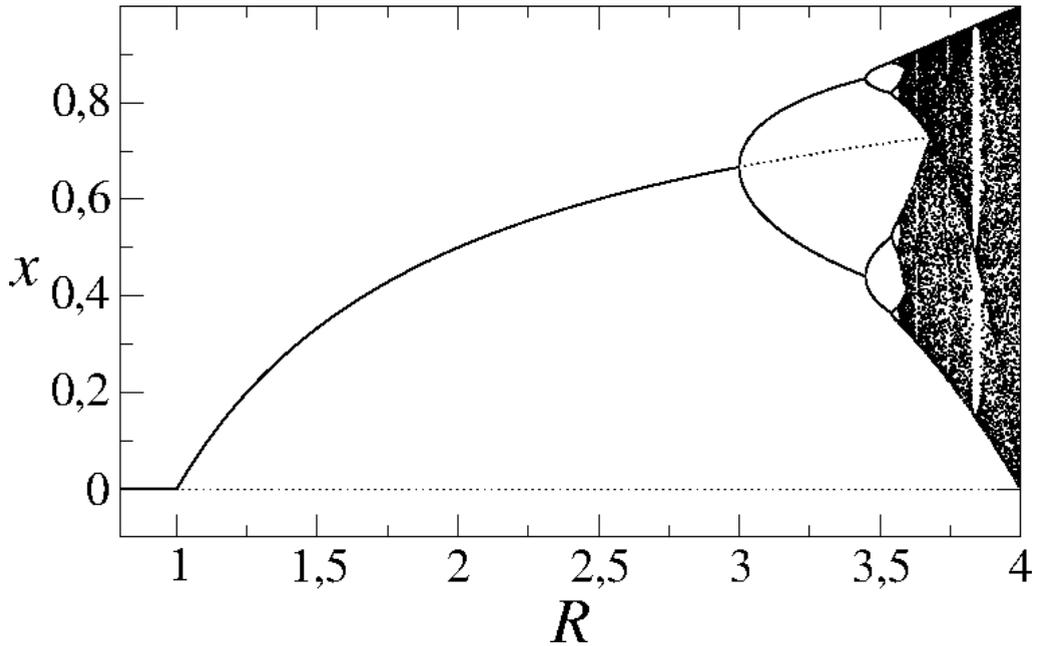


Figura 1.4 – Ilustração do diagrama de órbita para o mapa logístico.

pontos recebe o nome de órbita e corresponde à evolução temporal a partir da condição inicial x_0 . Considerando um valor fixo para R , o correspondente atrator do mapeamento só é obtido a partir de uma longa evolução temporal de $x_0 \in (0, 1)$, rigorosamente falando, quando $n \rightarrow \infty$. Variando-se $R \in [0, 4]$, o comportamento do diagrama de órbitas é mostrado na Figura 1.4. As linhas pontilhadas identificam os pontos fixos estáveis. Em $R = 1$ ocorre uma bifurcação. Como o diagrama de órbita é construído considerando tempo suficientemente longo, a questão que se coloca é: como é a forma do diagrama de órbitas quando o tempo de transiente foi considerado pequeno? Como se dá o comportamento da convergência para o atrator no parâmetro de controle correspondente à bifurcação?

A Figura 1.5(a) mostra o diagrama de órbita construído com o tempo de transiente pequeno, de fato, 10 iterações apenas. Podemos ver claramente que próximo às bifurcações⁷ existe um aglomerado de pontos que

⁷Uma das bifurcações é observada em $R = 1$ (bifurcação transcítica) e outra em

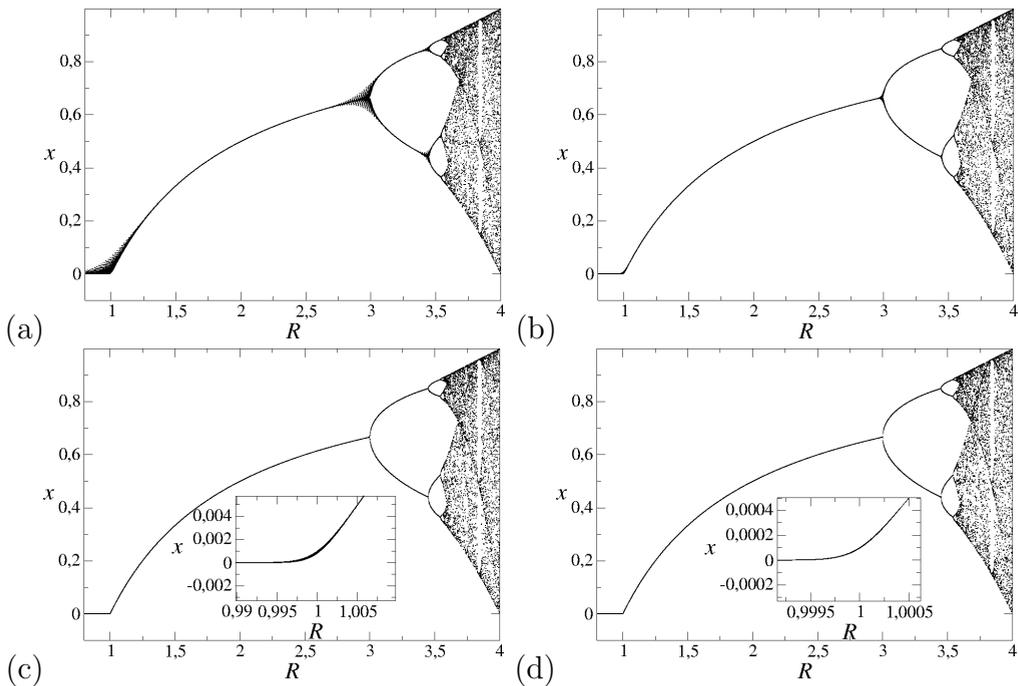


Figura 1.5 – Ilustração do diagrama de órbita para o mapa logístico construído para tempo de transiente finito. Os tempos de iterações considerados foram: (a) $n = 10$; (b) $n = 100$, (c) $n = 1000$ e (d) $n = 10000$.

estão afastados do atrator. Tais pontos são uma evolução da condição inicial $x_0 = 0,5$ que não tiveram ainda tempo suficiente para convergirem ao atrator. Aumentando o número de iterações para 100, conforme mostrado na Figura 1.5(b), podemos notar que o aglomerado de pontos diminuiu significativamente comparado com aquele observado na Figura 1.5(a), ficando quase imperceptível na figura, entretanto ainda persistindo. Aumentando ainda mais o número de iterações, dessa vez para 1000, o aglomerado de pontos afastados do atrator é pequeno, praticamente imperceptível na Figura 1.5(c), porém fica evidente quando a parte do diagrama próxima a $R = 1$ é amplificada, o que pode ser visto no gráfico interno da própria figura. Essa ampliação é ainda maior quando 10000 iterações são conside-

$R = 3$ (bifurcação de duplicação de período).

radas, conforme mostrado na Figura 1.5(d). Percebe-se que, ao aumentar o número de iterações, a distribuição de pontos está cada vez mais próxima do atrator. A escala de ampliação é inversamente proporcional ao número de iterações, conforme pode ser visto nas Figuras 1.5(c, d).

A dinâmica da convergência para o atrator pode ser descrita utilizando funções homogêneas generalizadas. Para ilustrar, considere que uma dada medida do sistema, por exemplo a distância do atrator, que representaremos aqui por f , seja descrita em termos de dois parâmetros, x e y . Logo, tem-se que $f(x, y)$ obedece a uma relação de escala se a seguinte relação for satisfeita:

$$f(x, y) = lf(l^a x, l^b y) \quad (1.1)$$

em que os expoentes a e b são os expoentes de escala e l é um fator de escala arbitrário. Como l é um fator de escala, podemos escolher, por exemplo, $l = y^{-1/b}$, o que leva a

$$f(x, y) = y^{-1/b} f(y^{-a/b} x, 1) \quad (1.2)$$

Nas vizinhanças da condição de equilíbrio, a função $f(x, y)$ é descrita por leis de potência em suas variáveis. Assim, o estudo das propriedades de escala de f permite que os expoentes a e b sejam obtidos, bem como a identificação de uma possível universalidade presente no sistema. A generalização para um número maior de variáveis é direta. Para o caso em que f é uma função das variáveis x , y e z , tem-se que

$$f(x, y, z) = lf(l^a x, l^b y, l^c z) \quad (1.3)$$

A questão que deve ser discutida é sobre a interpretação desse comportamento de escala e o que significa essa universalidade.

Em sistemas não lineares e com a ocorrência de caos, seja ele conservativo⁸ ou dissipativo, o estudo de como as partículas se difundem é um tema

⁸O caos conservativo é observado quando não há violação do teorema de Liouville e o volume do espaço de fases é preservado.

em questão. Para investigações desse tipo, é comum determinar as variáveis representativas do sistema a partir da solução da equação da difusão, que fornece a probabilidade de encontrar uma determinada partícula na coordenada⁹ x em um determinado instante de tempo t . Para determinar a probabilidade $\rho = \rho(x, t)$, a equação da continuidade é utilizada:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} \quad (1.4)$$

em que $j(x, t)$ é a corrente de partículas que cruza um determinado ponto do espaço de fases x em um intervalo de tempo Δt . Por outro lado, a corrente $j(x, t)$ é escrita¹⁰ como

$$j = -D \frac{\partial \rho}{\partial x} + \sigma F \rho \quad (1.5)$$

em que σ é a mobilidade das partículas, D é o coeficiente de difusão e F é a força que atua na partícula. Quando a Equação (1.5) é levada na Equação (1.4), obtém-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \sigma \rho \frac{\partial F}{\partial x} - \sigma F \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (1.6)$$

Resolver a Equação (1.6) significa determinar a probabilidade de se encontrar uma partícula na coordenada x no instante t . O formalismo envolvendo a solução da equação da difusão será utilizado no estudo de difusão caótica em uma família de mapeamentos discretos ao longo do livro.

Ao se considerarem sistemas que exibem difusão, um fenômeno que tem recebido bastante atenção é a aceleração de Fermi. Embora os mecanismos de criação de tais partículas fossem conhecidos à época, suas energias observadas na produção não eram compatíveis com aquelas altas energias medidas em detectores de raios cósmicos. Assim, o fenômeno de aceleração de Fermi foi proposto originalmente pelo físico italiano Enrico Fermi na tentativa de explicar a origem das altas energias de tais partículas. Fermi

⁹Aqui coordenada tem uma conotação um pouco mais geral que a posição. Ela pode representar velocidade, energia, *momentum*, dentre outras grandezas.

¹⁰A corrente de partículas é determinada a partir da lei de Fick.

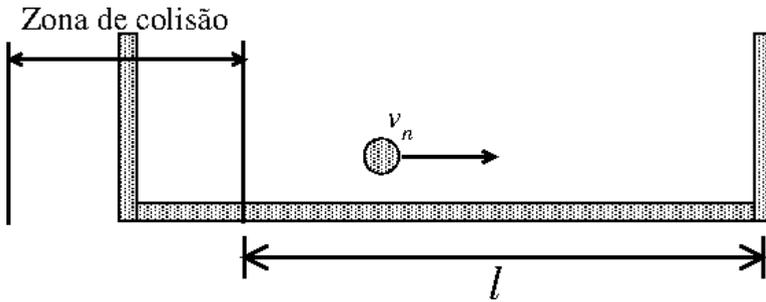


Figura 1.6 – Ilustração esquemática do modelo Fermi-Ulam.

acreditava que os raios cósmicos, partículas carregadas e com altas energias, interagem com os campos elétricos e magnéticos presentes no meio interestelar e, nessa interação, ganhavam energia. Uma vez que tais campos são dependentes do tempo, a partícula, ao viajar sob influência deles, poderia ser defletida e, ao longo de sua trajetória, ganhar energia. Essa ideia foi modelada matematicamente por Stanislaw Ulam, que propôs um sistema mecânico que tem a essência idealizada por Fermi. O sistema consiste de uma partícula clássica de massa m que está confinada a se mover entre duas paredes rígidas. Uma delas é fixa e a outra se move periodicamente no tempo, conforme mostra o esboço esquemático da Figura 1.6. Quando a partícula colide com a parede móvel, pode ocorrer uma troca de energia e *momentum* de forma que a energia da partícula não é constante. A parede fixa tem a funcionalidade de reinjetar a partícula em direção à parede móvel para uma próxima colisão. As comparações com a ideia original de Fermi são imediatas. A partícula de massa m corresponde ao raio cósmico. A parede móvel seria equivalente aos campos elétricos e magnéticos dependentes do tempo, ao passo que a parede fixa tem a função de reinjetar a partícula para uma nova colisão, estabelecendo assim a analogia com os infinitos campos elétricos e magnéticos que existem atualmente no cosmos.

O modelo matemático construído por Ulam materializando a ideia de Fermi é descrito por um mapeamento discreto nas variáveis velocidade da partícula, V , e fase da parede móvel, ϕ , que é atualizado a cada colisão com

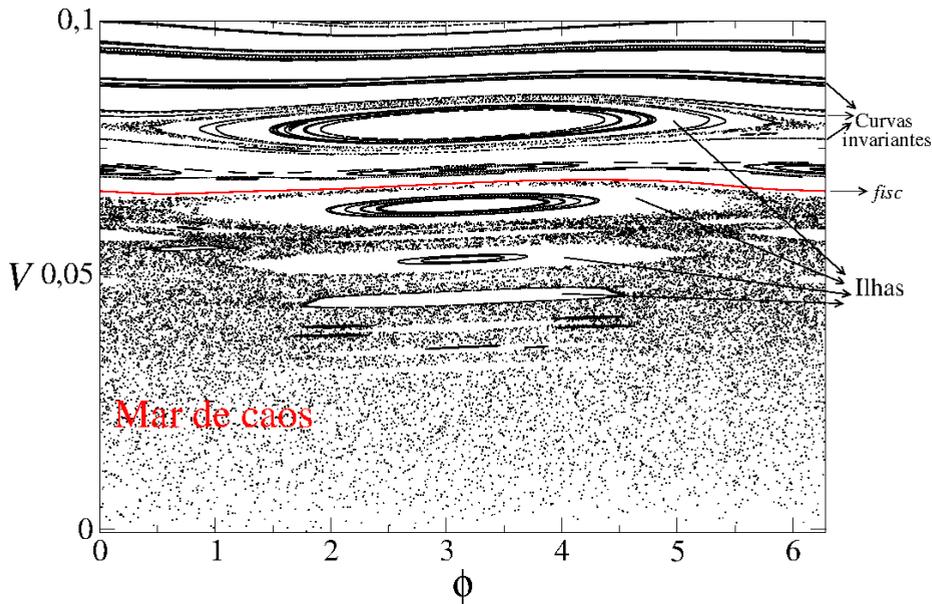


Figura 1.7 – Esboço do espaço de fases típico do modelo Fermi-Ulam. Aqui V identifica a velocidade da partícula e ϕ fornece a fase da parede móvel, sempre medidas no impacto n com a parede móvel.

a parede dependente do tempo. Quando as colisões são consideradas elásticas, ou seja, não existe perda fracional de energia a cada impacto, o espaço de fases do sistema exibe um conjunto de três regiões bem definidas, conforme mostrado na Figura 1.7. Uma delas é uma região de caos que existe no regime de baixas energias,¹¹ outras são ilhas de estabilidade, presentes em regiões intermediárias do espaço de fases, e a terceira são curvas invariantes *spanning* que impedem a difusão ilimitada das partículas na região de caos. Na Figura 1.7 a primeira delas é representada por *fisc*.¹² A existência delas, em particular a primeira, é fundamental para definir a amplitude da região de caos. Mais adiante veremos que ela tem um papel fundamental para determinar as propriedades de escala do mar de caos. Como ela impede a difusão ilimitada de partículas na região do caos, o modelo

¹¹ Como baixas energias nos referimos a energias da ordem da energia da parede móvel.

¹²Do inglês, corresponde a *first invariant spanning curve*.

não exibe o fenômeno de aceleração de Fermi. De fato, o fenômeno corresponde ao crescimento ilimitado de energia de uma partícula, ou de forma generalizada para um *ensemble* delas, em virtude de colisões elásticas com paredes que se movem no tempo. Uma simples modificação no mecanismo de retorno da partícula para a parede móvel pode conduzir à observação do fenômeno. Essa substituição pode ser feita, por exemplo, considerando que o mecanismo que produz o retorno da partícula para uma nova colisão com a parede móvel é realizado por um campo externo constante, como o campo gravitacional. Essa modificação no modelo Fermi-Ulam é conhecida como modelo *bouncer*. A dinâmica da partícula continua sendo feita por um mapeamento discreto, porém, dependendo do conjunto de parâmetros de controle considerados e das condições iniciais do sistema, o crescimento ilimitado de energia da partícula pode ser observado, conduzindo assim à observação da aceleração de Fermi.

Quando as colisões da partícula com a parede móvel, tanto no modelo Fermi-Ulam quanto no modelo *bouncer*, são consideradas elásticas, atratores não existem no espaço de fases. A dissipação muda substancialmente a estrutura do espaço de fases dos dois sistemas. No modelo Fermi-Ulam, dependendo da combinação de parâmetros de controle e condições iniciais, o mar de caos presente no espaço de fases pode se transformar em um atrator caótico. As curvas invariantes *spanning* são completamente destruídas e as ilhas de estabilidade, contendo pontos fixos elípticos em seu centro, se tornam regiões de atração para os pontos fixos assintoticamente estáveis, que substituem os pontos fixos elípticos. A área no espaço de fases não se preserva mais, garantindo a existência de atratores. Tais atratores podem ser repentinamente destruídos a partir de bifurcações globais via crise de fronteira, conforme veremos mais adiante. Após a destruição, uma condição inicial fornecida na região onde o atrator existia permanece naquela região por um tempo até que encontra a rota de escape e sai. O tempo gasto naquela região determina o transiente caótico. No modelo *bouncer*, além das

crises e da existência de atratores, a dissipação produz um efeito ainda mais interessante. Como a área no espaço de fases não mais se preserva, a difusão ilimitada de energia, que acarreta o fenômeno de aceleração de Fermi, não é mais observada. Dependendo dos parâmetros de controle, a dissipação cria um atrator no espaço de fases, este distante do infinito, que admite propriedades de escala interessantes. A dissipação pode ser introduzida nos modelos não apenas a partir de colisões inelásticas, quando existe perda fracional de energia a cada colisão, mas também a partir de arrasto viscoso, quando a partícula atravessa um meio viscoso. Nesse caso, ocorre uma perda de energia continuamente ao longo da trajetória da partícula, uma vez que a força de arrasto é sempre contrária ao movimento e atua continuamente. Um ponto importante que se observa também é que a dissipação, seja ela de diferentes tipos, conduz à supressão da aceleração de Fermi, levando a crer que aceleração de Fermi não é um fenômeno robusto.

Um tema que também será abordado no livro trata da dinâmica de bilhares. Um bilhar é descrito como uma partícula, ou um conjunto não interagente delas, se movendo livremente no interior de uma fronteira fechada com a qual as partículas colidem. A Figura 1.8 ilustra o esboço de um bilhar

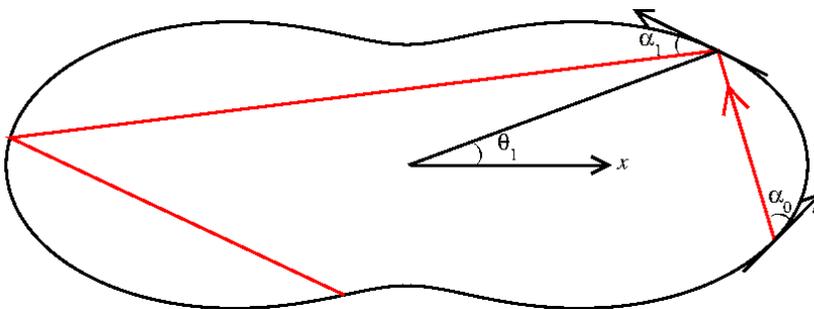


Figura 1.8 – Esboço de um bilhar e das variáveis usadas em sua descrição.

localizado no plano e das variáveis utilizadas em sua descrição. O sistema é bidimensional e contém dois graus de liberdade,¹³ uma vez que precisamos

¹³Um grau de liberdade é determinado por um par de variáveis dinâmicas, como po-

conhecer os pares posição e velocidade ao longo dos eixos do plano. Como no interior do bilhar a partícula se move com velocidade constante e ao longo de uma trajetória retilínea, a descrição da dinâmica se dá todas as vezes que a partícula colide com a fronteira. Dessa forma, um conjunto possível de variáveis dinâmicas seria o ângulo polar, θ , que identifica a orientação ao longo da fronteira onde a colisão ocorreu, e o ângulo α que a trajetória da partícula faz com a reta tangente ao ponto da colisão. Dessa forma, pode-se construir um mapeamento discreto $F(\alpha_n, \theta_n) = (\alpha_{n+1}, \theta_{n+1})$. As características da dinâmica da partícula e a forma organizacional do espaço de fases são fortemente dependentes da geometria da fronteira do bilhar. Em bilhares bidimensionais com fronteira estática e considerando as colisões elásticas, a energia da partícula é constante. Da teoria da mecânica clássica, é conhecido que, para um sistema ser integrável, o número de constantes do movimento deve ser igual ao número de graus de liberdade. Quando a forma da fronteira é circular, duas quantidades se preservam, sendo elas a energia mecânica e o momento angular. Assim, o bilhar circular é integrável e caos não é observado no sistema. A Figura 1.9(a) ilustra o espaço de fases típico do bilhar circular onde pode-se perceber apenas linhas contínuas, correspondendo a órbitas quase-periódicas e uma sequência discreta de pontos fornecendo um conjunto de órbitas periódicas no espaço de fases. As Figuras 1.9(b, c) fornecem órbitas típicas no bilhar circular.

Uma perturbação imediata do círculo é a elipse. O bilhar elíptico também é um sistema bidimensional e exibe duas quantidades que se preservam. Uma delas é a energia do sistema e a outra é uma grandeza relacionada ao momento angular das partículas.¹⁴ Dessa forma, o bilhar elíptico também

sição e velocidade. No caso do oscilador unidimensional, a dinâmica é completamente conhecida a partir da especificação do par posição x e velocidade \dot{x} em um determinado instante.

¹⁴Essa quantidade foi primeiramente discutida a partir de uma publicação de Sir Michael Berry: BERRY, M. V. Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard. *European Journal of Physics*, London, v. 2, n.

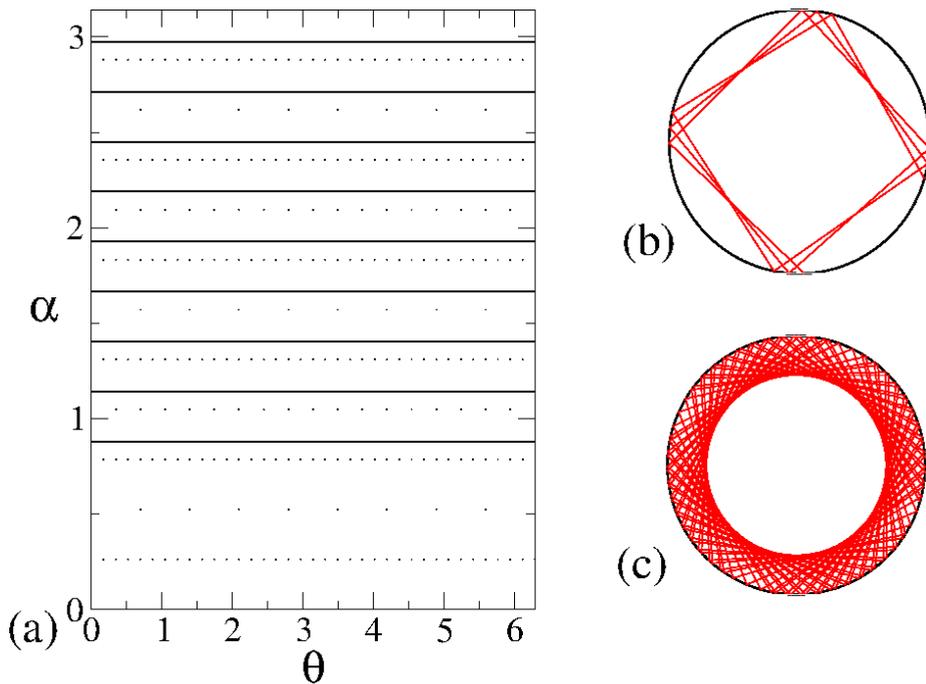


Figura 1.9 – (a) Esboço do espaço de fases; e (b) e (c) ilustração de órbitas típicas em um bilhar circular.

é integrável. A Figura 1.10(a) mostra o espaço de fases característico do bilhar elíptico. Podemos notar dois tipos distintos de dinâmica. Uma delas, bem ao centro da figura, identifica órbitas de libração. Correspondem a órbitas que ficam confinadas na parte interna dos dois focos da elipse e nunca abandonam tal região, conforme mostra a Figura 1.10(b). A parte complementar do espaço de fases é formada por órbitas de rotação, identificadas como órbitas que giram em sentido horário ou anti-horário. A Figura 1.10(c) mostra o comportamento típico de órbitas em rotação. A curva que separa os dois tipos de dinâmica é chamada de curva separatriz.

Uma perturbação do círculo que destrói a integrabilidade, observada em ambos os bilhares circular e elíptico, é o bilhar ovoide, cujo raio da fronteira

2, p. 91-102, 1981. Ela foi citada como: *product of angular momenta about the two foci.*

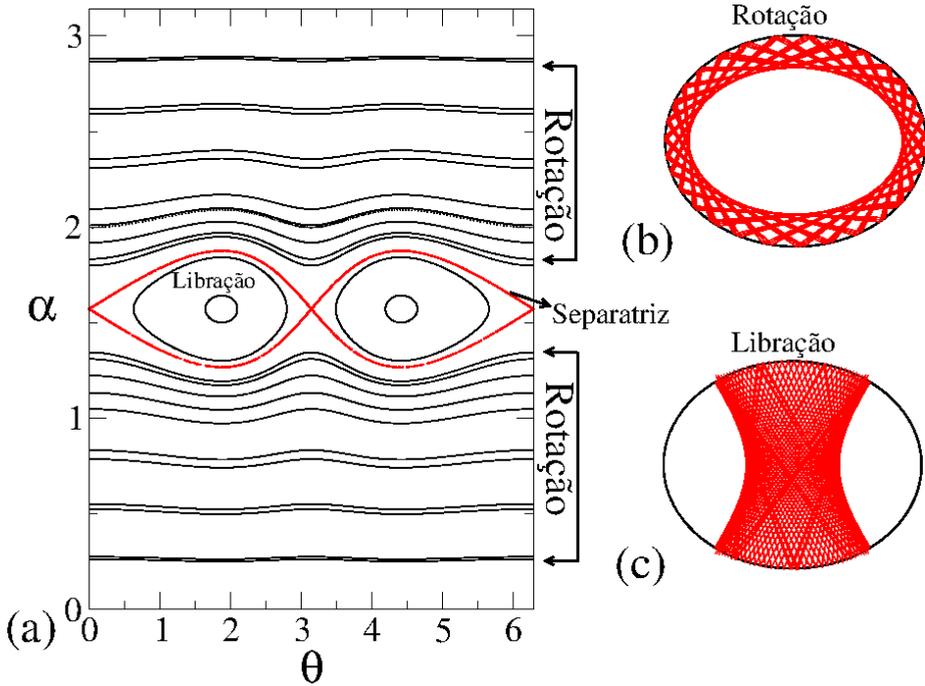


Figura 1.10 – (a) Esboço do espaço de fases; e ilustração de órbitas típicas no bilhar elíptico para: (b) órbitas de rotação e (c) órbitas de libração.

é escrito a partir da equação

$$R(\theta, p, \epsilon) = 1 + \epsilon \cos(p\theta) \tag{1.7}$$

em que θ corresponde ao ângulo polar, p é um número inteiro e $\epsilon \in [0, 1]$ é um parâmetro que controla a transição de integrabilidade, quando $\epsilon = 0$, para não integrabilidade, quando $\epsilon \neq 0$. A forma do bilhar para $p = 2$ é mostrada na Figura 1.8. O espaço de fases para o bilhar ovoide considerando $p = 2$, conforme mostrado na Figura 1.11(a, b), exibe uma estrutura mista que pode conter mares de caos, ilhas de estabilidade e curvas invariantes *spanning*, conforme mostrado na Figura 1.11(a) para o parâmetro de controle $\epsilon = 0,05$. As curvas invariantes correspondem a órbitas que rotacionam em torno da borda. O aumento do parâmetro de controle conduz à destruição das curvas invariantes, conforme pode-se observar na Figura 1.11(b).

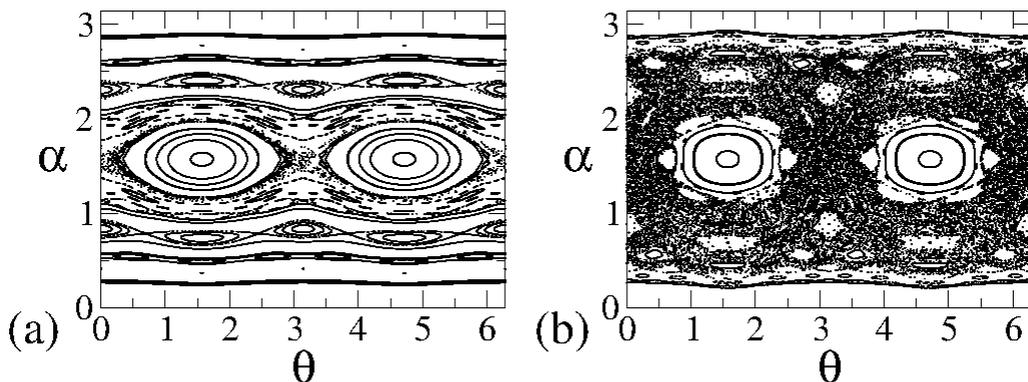


Figura 1.11 – Esboço do espaço de fases para o bilhar ovoide. Os parâmetros de controle usados foram $p = 2$ e: (a) $\epsilon = 0,05$ e (b) $\epsilon = 0,1$.

Outras formas de fronteira podem ser consideradas, dentre elas o bilhar *stadium* de Bunimovich, o bilhar de Sinai, o bilhar cogumelo e diversas outras. Quando as fronteiras do bilhar são estáticas, e as colisões, elásticas, a energia da partícula se preserva. A existência de caos dependerá única e exclusivamente da forma da fronteira. A questão que se coloca é: o que ocorre com a velocidade da partícula quando uma perturbação temporal na fronteira é introduzida? Pode-se observar difusão ilimitada de energia, conduzindo ao fenômeno de aceleração de Fermi? Um grupo de cientistas russos¹⁵ liderados por Alexander Loskutov publicou¹⁶ uma conjectura sobre o crescimento de energia em bilhares com fronteiras dependentes do tempo. A conjectura diz que a dinâmica caótica de um bilhar com fronteira fixa é uma condição suficiente para a ocorrência de aceleração de Fermi no sistema quando uma perturbação temporal é introduzida na fronteira. Essa conjectura foi testada e verificada em um número grande de bilhares, sendo sempre verificada e confirmada em bilhares caóticos. Entretanto, no ano de

¹⁵O grupo foi composto por Alexander Loskutov, Alexey B. Ryabov e L. G. Akinshin.

¹⁶LOSKUTOV, A.; RYABOV, A. B.; AKINSHIN, L.G. Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Bristol, v. 33, p. 7973-7986, 2000.

2007 um grupo da Alemanha¹⁷ mostrou que o bilhar elíptico, sabidamente integrável para a versão estática da fronteira, conduz a crescimento ilimitado de energia quando a fronteira é perturbada no tempo. Contudo, esse fato não fere a conjectura, uma vez que ela diz que caos é condição suficiente. A partir desse exemplo podemos acrescentar à conjectura que caos não é necessário. O espaço de fases na versão de fronteira estática para o bilhar elíptico é regular com ausência de caos, uma vez que o sistema é integrável. Por outro lado, a introdução da perturbação temporal na fronteira transforma a curva separatriz em uma estrutura denominada *stochastic layer*.¹⁸ Segundo os autores alemães, essa camada estocástica de pontos produz a condição para que a difusão ilimitada de energia seja observada no sistema, conduzindo assim ao fenômeno de aceleração de Fermi.

A introdução de dissipação nos bilhares transforma a dinâmica drasticamente. O espaço de fases admite a existência de atratores, que por sua vez suprimem a difusão ilimitada de energia. A dissipação, seja ela introduzida a partir de colisões inelásticas ou via arrasto viscoso, permite obter diversos observáveis físicos de interesse e que admitem propriedades de escala levando a comportamentos universais. Ao longo do livro, algumas dessas propriedades serão discutidas em diversos sistemas.

Por fim, uma discussão sobre termodinâmica de bilhares será realizada. A motivação para tal discussão vem do seguinte problema: considere um sistema em um laboratório que consiste de recipiente rígido em contato térmico com o ambiente a uma temperatura T_b . Retiram-se todas as partículas do recipiente, deixando apenas vácuo. Adiciona-se um conjunto de partículas a uma baixa densidade e a uma temperatura $T \ll T_b$. Da teoria da

¹⁷LENZ, F.; DIAKONOS, F. K.; SCHMELCHER, P. Tunable Fermi Acceleration in the Driven Elliptical Billiard. *Physical Review Letters*, v. 100, n. 1, p. 014103(1)-014103(4), 2008.

¹⁸O termo *stochastic layer* corresponde a um conjunto de pontos distribuídos ao longo de uma região denominada camada estocástica. Tal região exhibe um expoente de Lyapunov positivo confirmando a ocorrência de caos.

termodinâmica, o equilíbrio térmico será obtido quando a temperatura do gás de partículas atingir a temperatura da fronteira. Espera-se também que, se o gás for injetado a uma temperatura $T \gg T_b$, a temperatura do gás será gradativamente reduzida até que o equilíbrio termodinâmico seja alcançado. Na descrição desse problema utilizando o formalismo dos bilhares, uma vez que o recipiente onde foi feito vácuo é composto por uma rede cristalina de partículas a uma temperatura $T_b > 0$, as partículas constituintes da rede oscilam em torno de uma posição de equilíbrio, equivalente a um bilhar com fronteira dependente do tempo. Dependendo da forma geométrica da fronteira, é esperado que a dinâmica das partículas no interior do bilhar seja caótica. Essa é a condição de que a conjectura Loskutov-Ryabov-Akinshin (LRA) precisa para garantir o crescimento ilimitado de energia do *ensemble*, conduzindo portanto ao fenômeno de aceleração de Fermi. Isso implica que a velocidade média do *ensemble* de partículas cresce acarretando o crescimento da velocidade quadrática média. O teorema de equipartição de energia utiliza a velocidade quadrática média, que define a energia cinética das partículas, para estabelecer a conexão com a temperatura. Dessa forma, a velocidade quadrática média é diretamente proporcional à temperatura. Se a velocidade quadrática média cresce com o decorrer do tempo, cresce também a temperatura. Entretanto, esse resultado está em desacordo com o conhecimento empírico da termodinâmica de que no estado estacionário ocorre equilíbrio entre temperatura do *ensemble* de partículas e temperatura da fronteira. Essa contradição entre os resultados esperados da teoria de bilhares dependentes do tempo e da termodinâmica pode ser resolvida quando as colisões entre as partículas e a fronteira são assumidas como inelásticas. Isso implica que a cada colisão existe uma perda fracional de energia, garantindo a existência de atratores no espaço de fases e, conseqüentemente, suprimindo o crescimento ilimitado de energia. Essa supressão permite que o equilíbrio termodinâmico seja alcançado.

1.3 Resumo

Neste capítulo, foi apresentada uma pequena contextualização de temas e terminologias que são abordados no estudo de sistemas dinâmicos e que serão considerados ao longo do livro.

Este livro aborda a invariância de escala em alguns sistemas dinâmicos não lineares. São realizadas discussões tanto em equações diferenciais ordinárias (EDO) como em mapeamentos discretos.

A perda de previsibilidade da evolução temporal a partir de duas condições iniciais próximas e o afastamento exponencial dessas órbitas no espaço de fases remetem ao conceito de caos. Alguns observáveis estudados em sistemas não lineares exibem características que podem ser descritas a partir de leis de escala, levando a invariâncias de escala.

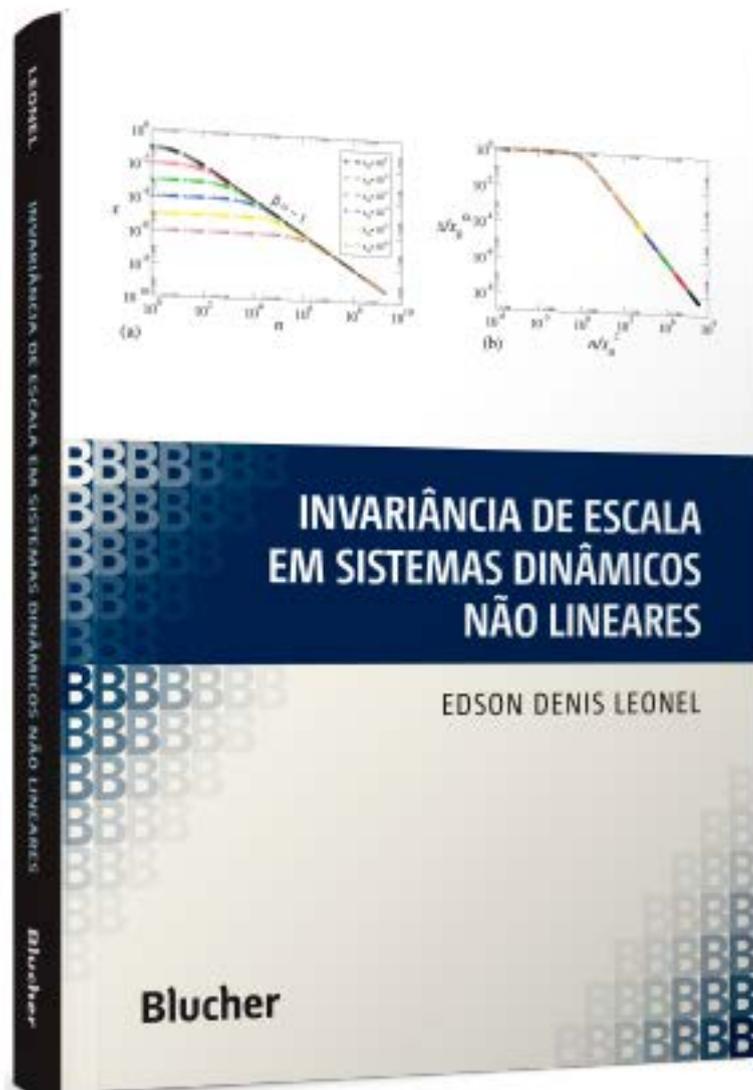
Cada capítulo é finalizado com um breve resumo e uma lista de exercícios propostos. Conta também com extensa lista de referências e anexos que complementam o entendimento das relações de Euler, de métodos de integração numérica, da equação de fluxo de calor, de soluções de equações, entre outros assuntos. O conteúdo do livro pode ser utilizado para introduzir o tema da invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares em diversos cursos de graduação em exatas, bem como na pós-graduação em Física.

www.blucher.com.br

ISBN 978-85-212-1851-7



Blucher



Clique aqui e:

[VEJA NA LOJA](#)

Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares

Edson Denis Leonel

ISBN: 9788521218517

Páginas: 476

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2019

Peso: 0.770 kg