

José C. Geromel
Grace S. Deaecto

ANÁLISE LINEAR DE SINAIS

Teoria, ensaios práticos e exercícios

Blucher

ANÁLISE LINEAR DE SINAIS

Teoria, ensaios práticos e exercícios

José C. Geromel
Faculdade de Engenharia Elétrica
e de Computação, UNICAMP

Grace S. Deaecto
Faculdade de Engenharia Mecânica,
UNICAMP

Análise linear de sinais: teoria, ensaios práticos e exercícios

© 2019 José C. Geromel, Grace S. Deaecto

Editora Edgard Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar

04531-934 – São Paulo – SP – Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

contato@blucher.com.br

www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed.
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,
Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer
meios sem autorização escrita da editora.

Todos os direitos reservados pela Editora
Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Geromel, José C.

Análise linear de sinais : teoria, ensaios práticos
e exercícios / José C. Geromel e Grace S. Deaecto. –
São Paulo : Blucher, 2019.

347 p. : il.

Bibliografia

ISBN 978-85-212-1415-1 (impresso)

ISBN 978-85-212-1416-8 (e-book)

1. Processamento de sinais 2. Sistemas lineares
3. Análise de sistemas 4. Engenharia elétrica
5. Teoria dos sinais I. Deaecto, Grace S.

18-2278

CDD 621.3823

Índice para catálogo sistemático:
1. Processamento de sinais – Engenharia elétrica

Conteúdo

Prefácio & Agradecimentos	xi
1 Considerações Preliminares	1
1.1 Introdução	1
1.1.1 A Função Zeta	2
1.1.2 Modelagem de Vazão	4
1.1.3 Oscilações Mecânicas	7
1.1.4 Oscilações Elétricas	13
1.2 Requisitos Básicos	17
1.3 Descrição dos Capítulos e Apêndices	19
1.4 Notação	27
1.5 Notas Bibliográficas	28
2 Sinais	29
2.1 Introdução	29
2.2 Propriedades Básicas	33
2.2.1 Sinais a Tempo Contínuo	33
2.2.2 Sinais a Tempo Discreto	40
2.3 Sistemas	48
2.3.1 Sistemas a Tempo Contínuo	50
2.3.2 Sistemas a Tempo Discreto	56
2.4 Notas Bibliográficas	63
2.5 Exercícios	63
3 Análise de Sinais Periódicos	69
3.1 Introdução	69
3.2 Representação de Sinais	69
3.3 Sinais a Tempo Contínuo	73
3.4 Sinais a Tempo Discreto	79

3.5	Notas Bibliográficas	87
3.6	Exercícios	88
4	Transformada de Fourier	93
4.1	Introdução	93
4.2	Sinais a Tempo Contínuo	94
4.2.1	Propriedades Básicas	104
4.2.2	Sistemas	112
4.3	Sinais a Tempo Discreto	114
4.3.1	Propriedades Básicas	124
4.3.2	Sistemas	130
4.4	Análise Numérica	132
4.5	Notas Bibliográficas	136
4.6	Exercícios	137
5	Amostragem	141
5.1	Introdução	141
5.2	Amostragem de Sinais	142
5.2.1	Amostragem e Reconstrução Aproximada de Sinais	153
5.2.2	Amostragem Dual	162
5.3	Discretização de Sistemas	165
5.3.1	Função de Transferência Pulsada	168
5.4	Notas Bibliográficas	173
5.5	Exercícios	174
6	Filtragem Determinística	179
6.1	Introdução	179
6.2	Filtragem a Tempo Contínuo	181
6.2.1	O Filtro de Wiener	181
6.2.2	Filtros Analógicos	191
6.3	Filtragem a Tempo Discreto	203
6.3.1	O Filtro de Wiener	203
6.3.2	Filtros Digitais	210
6.4	Notas Bibliográficas	217
6.5	Exercícios	218
7	Filtragem Estocástica	223
7.1	Introdução	223
7.2	Filtragem a Tempo Contínuo	224
7.2.1	O Filtro de Wiener	226

7.3	Filtragem a Tempo Discreto	240
7.3.1	O Filtro de Wiener	242
7.4	Determinístico versus Estocástico	253
7.5	Notas Bibliográficas	258
7.6	Exercícios	258
8	Modelagem e Ensaio Práticos	263
8.1	Introdução	263
8.2	Eletrocardiograma	263
8.3	Rádio AM	268
8.4	Vibrações Mecânicas	276
8.5	Notas Bibliográficas	282
8.6	Exercícios	282
A	Noções Básicas de Cálculo e Simulação	285
A.1	Vetores e Matrizes	285
A.2	Problema de Norma Mínima	289
A.3	Funções de Variáveis Complexas	293
A.4	Simulação	296
B	Probabilidade	299
B.1	Definições e Conceitos Básicos	299
B.2	Variável Aleatória	302
B.3	Duas Variáveis Aleatórias	309
	Bibliografia	317
	Índice	319

Capítulo 1

Considerações Preliminares

1.1 Introdução

Começa uma aventura!

Na verdade é uma aventura que continua, ela começou há pelo menos 2.300 anos com Euclides e sua obra monumental *Os Elementos*, livro que até os dias atuais inspira todos aqueles que desejam aprender os meandros fantásticos da Matemática e suas aplicações.

O Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), provado por Euclides, enuncia que todo número inteiro positivo (maior do que um) pode ser escrito como o produto de números primos. Deixando de lado permutações, esta forma de expressar os números inteiros positivos é única. Como consequência, Euclides também provou o que hoje chamamos de Teorema de Euclides, que diz: *O conjunto dos números primos contém um número infinito de elementos*. Tendo em vista que os números primos parecem se tornar cada vez mais raros à medida que se avança no eixo dos números inteiros positivos, este resultado causa certa surpresa e tem um impacto singular na teoria dos números e em várias áreas da ciência. Além disso, para poder provar tal afirmação, Euclides lançou mão, pela primeira vez, de um argumento lógico que seria muito utilizado em tempos futuros: *a prova por redução ao absurdo*.

Mas o TFA permite uma outra interpretação muito interessante. O conjunto dos números primos é a parte fundamental do conjunto dos números inteiros positivos - embora seja apenas parte, com ela se gera o todo. A parte fundamental de qualquer conjunto recebe o nome de *base*. Conhecemos e operamos com muitos outros conjuntos e suas bases. Por exemplo, sendo \mathbb{R}^3 o conjunto de todos os vetores v com três componentes reais, se escolhermos três deles, v_1 , v_2 e v_3 ,

linearmente independentes, isto é, de tal forma que a matriz quadrada $V = [v_1 \ v_2 \ v_3] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ seja não singular, então esses três vetores formam uma base (que não é única) para o \mathbb{R}^3 . Esta afirmação se comprova pela existência de três números reais α_1 , α_2 e α_3 que são capazes de gerar qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^3$, através da operação

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \quad (1.1)$$

denominada combinação linear. Existem outros conjuntos e suas bases que são de grande utilidade. Considere o intervalo de tempo $t \in [-T_0/2, T_0/2] \subset \mathbb{R}$ com $T_0 > 0$ e as funções

$$f_i(t) = e^{j\omega_i t}, \quad \omega_i = \frac{2\pi}{T_0} i \quad (1.2)$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$ com domínio em \mathbb{R} e imagem em \mathbb{C} . São infinitas funções que formam uma base para o conjunto das funções contínuas $g(t)$ com domínio $|t| \leq T_0/2$ e imagem em \mathbb{C} . Ou seja, toda e qualquer função $g(t)$ desse conjunto pode ser escrita na forma de uma combinação linear com infinitos termos

$$g(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i f_i(t) \quad (1.3)$$

desde que os coeficientes α_i para todo $i \in \mathbb{Z}$ sejam apropriadamente determinados. O ponto central é que a base assegura a existência de coeficientes de tal forma que (1.3) seja satisfeita. A escolha desta base e a determinação surpreendentemente simples dos coeficientes α_i para todo $i \in \mathbb{Z}$ resulta na célebre *série de Fourier*, que é uma das ferramentas matemáticas de maior uso no âmbito da análise e da síntese de sinais e sistemas. Aliás, como tentaremos ilustrar em seguida, trata-se de uma ferramenta de largo uso em vários campos da engenharia e das ciências exatas.

1.1.1 A Função Zeta

Como primeira aplicação a ser estudada, vamos voltar a analisar um aspecto da teoria dos números. Foi Euler que aplicou o TFA de uma forma que levou a uma igualdade surpreendente, que permitiu a formulação de um problema matemático até hoje não resolvido - a hipótese de Riemann. Obviamente não é nosso propósito analisar de maneira geral este difícil problema, mas desejamos calcular, a partir de um ponto de vista alternativo, em alguns casos particulares, a chamada *função zeta*. Nesses casos, ela assume a forma mais simples

$$\zeta(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n} \quad (1.4)$$

em que $n \geq 2$ é um número inteiro. Sabemos que para $n \geq 2$ esta série infinita converge, mas o problema que se coloca é como determinar o seu valor. Euler notou que o TFA poderia se aplicado para determinar a soma

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-1}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

em que \mathbb{P} denota o conjunto de todos os números primos. Observe que $0 < 1/p < 1$ para todo $p \in \mathbb{P}$, o que assegura a convergência de cada série geométrica com razão $1/p$. Com o mesmo raciocínio determinamos a função zeta que assume a forma alternativa

$$\zeta(n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-n}} \quad (1.6)$$

e dá uma medida da dificuldade que se tem para avaliar esta função. Como já foi dito, vamos usar a série de Fourier para este propósito. Na verdade, vamos utilizar um resultado que deriva da série de Fourier, conhecido como Teorema de Parseval, que estabelece a veracidade da igualdade

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |g(t)|^2 dt \quad (1.7)$$

Ela surpreende, pois, se o seu lado direito for finito, a série infinita que está no seu lado esquerdo converge para um valor que é, em geral, simples de ser calculado. Observe que estudar a convergência de uma série infinita é muito mais difícil do que calcular uma simples integral. Entretanto, o Teorema de Parseval coloca esses dois procedimentos em igual nível de dificuldade, sempre que os coeficientes α_i , $i \in \mathbb{Z}$, forem gerados pela série de Fourier, que permite expressar a função $g(t)$ através da igualdade (1.3). Neste momento, não é necessário saber calculá-los, basta saber que eles existem e que a igualdade (1.7) é satisfeita. A relação de (1.7) com a função zeta é estabelecida nos seguintes exemplos que passamos a discutir, nos quais, para simplificar os cálculos envolvidos, fixamos $T_0 = 1$, sem perda de generalidade. Em cada caso, a função $g(t)$ foi escolhida de tal forma que o lado esquerdo de (1.7) permita determinar $\zeta(n)$ definida em (1.4).

- Para $g(t) = t$ os resultados do Capítulo 3 determinam os coeficientes $\alpha_0 = 0$ e

$$|\alpha_i| = \frac{1}{2\pi|i|}, \quad i \neq 0 \quad (1.8)$$

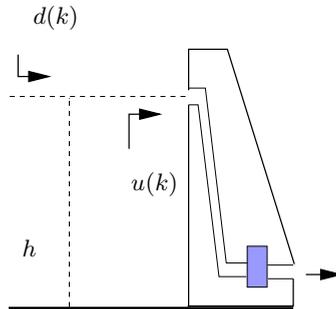


Figura 1.1: Esquema de uma usina hidrelétrica

que levados em (1.7) permitem calcular imediatamente $\zeta(2) = \pi^2/6$. Este valor já tinha sido calculado por Euler, um dos gênios da nossa história.

- Para $g(t) = t^2$, utilizando uma vez mais os resultados do Capítulo 3, determinamos $\alpha_0 = 1/12$ e

$$|\alpha_i| = \frac{1}{2\pi^2 i^2}, \quad i \neq 0 \quad (1.9)$$

Como a integral definida no lado direito de (1.7) é igual a $1/80$, esta mesma relação fornece $\zeta(4) = \pi^4/90$, que é o resultado correto, já disponível na literatura.

O que acabamos de obter com a série de Fourier coloca em clara evidência que o seu campo de aplicação é extremamente amplo, vai muito além da análise e da síntese de sinais e sistemas. Na verdade, a série e a transformada de Fourier, que, aliás, se aplicam nos domínios de tempo contínuo e discreto, são ferramentas matemáticas poderosas que estão à disposição para serem adotadas na abordagem dos mais variados tipos de problemas, como aqueles que passamos a considerar em seguida. Eles versam sobre aspectos relevantes de sinais presentes no âmbito da geração de energia elétrica através de usinas hidrelétricas e de vibrações mecânicas e elétricas.

1.1.2 Modelagem de Vazão

Vamos agora discutir uma segunda possível aplicação, muito diversa daquela que acabamos de analisar. Trata-se da geração de energia elétrica em uma usina hidrelétrica que está esquematizada na Figura 1.1. Vamos considerar a operação de longo prazo em que a unidade de tempo é o mês. Cada $k \in [0, N_0)$ representa

um mês. Em um instante de tempo k a usina tem um volume de água armazenado $v(k)$ [m³] e decide abrir as pás de tal forma que passe pelas turbinas a vazão média de $u(k)$ [m³/s]. Neste mesmo instante a usina recebe, de afluentes que desembocam no seu reservatório, a vazão média de $d(k)$ [m³/s]. Desta forma, imaginando que não ocorram perdas devido à evaporação, o balanço do volume de água no reservatório da usina é

$$v(k+1) = v(k) - \kappa u(k) + \kappa d(k) \quad (1.10)$$

em que $\kappa = 2,592 \times 10^6$, igual ao número de segundos em um mês, é o fator de conversão das vazões para a base de tempo mensal. Ao passar pela turbina, a potência média gerada é calculada como sendo $P_m(k) = \rho h(v(k))u(k)$, em que $\rho = 9,8 \times 10^3$ [kg/m²s²] é uma constante igual ao produto da aceleração da gravidade pela densidade da água. A função $h(v)$, denominada cota-volume, determina, a partir dos dados topográficos do reservatório, a altura do nível da água para um certo volume armazenado. Desta maneira, a energia total gerada durante todo o horizonte de tempo considerado é expressa por

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \kappa \rho \sum_{k=0}^{N_0-1} h(v(k))u(k) \text{ [Joules]} \\ &\approx 7,05 \sum_{k=0}^{N_0-1} h(v(k))u(k) \text{ [MWh]} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Operar um conjunto de usinas interligadas ou mesmo apenas uma usina isolada não é uma tarefa fácil. Ela requer determinar $u(k)$ em todo o intervalo de tempo $k \in [0, N_0)$ de tal forma que a energia total gerada E_{tot} seja a maior possível. Na prática é ainda preciso levar em conta restrições de manejo do reservatório, como por exemplo manter o volume $v(k)$ entre limites previamente estabelecidos. É importante notar que a determinação de qualquer política de operação de uma usina requer o conhecimento prévio da vazão $d(k)$, para todo $k \in [0, N_0)$, que é o insumo a ser utilizado. Determinar esta quantidade com precisão é a questão central que devemos nos colocar neste momento.

A vazão $d(k)$ depende de inúmeros fatores sendo o mais importante deles o clima. De fato, $d(k)$ depende do regime de chuvas a que está submetida a bacia hidrográfica onde se encontra o reservatório. Uma maneira de enfrentar a sua determinação é considerar $d(k)$ uma variável aleatória gaussiana e tentar estimar suas características estocásticas tais como média e desvio padrão. Vamos apresentar uma outra alternativa, qual seja, assumir que $d(k)$ é um sinal e determinar o seu espectro com auxílio da transformada de Fourier.

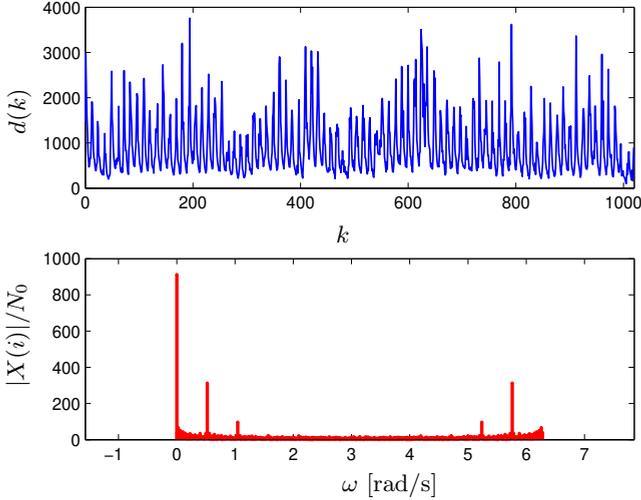


Figura 1.2: A vazão em Furnas e o seu espectro

Na parte superior da Figura 1.2 mostramos a vazão média $d(k)$ [m^3/s] para a usina de Furnas, mês a mês, de 1931 a 2015, o que corresponde a $N_0 = 1020$ meses. Estes são dados reais que estão disponíveis no site do *Operador Nacional do Sistema*, órgão responsável pela operação do sistema elétrico do nosso país. Na parte inferior da mesma figura vemos o módulo da transformada de Fourier discreta $X(\omega)$ calculado com a implementação numérica do algoritmo de *Transformada Rápida de Fourier*, disponível como uma rotina numérica que resolve (4.92).

Visualmente não vemos nada de especial com a vazão em Furnas durante 85 anos. Nenhuma regularidade do sinal pode ser notada. Entretanto, o espectro mostra claramente que, além da componente $X(0)/N_0 = 912$ [m^3/s], apenas duas outras podem ser consideradas significativas, se adotarmos o critério $|X(\omega)| > 0,1X(0)$ [m^3/s]. Essas harmônicas mais significativas se destacam claramente no espectro do sinal que está colocado na parte inferior da Figura 1.2. Elas ocorrem para $i = 85$ e $i = 170$, seus valores são

$$X(85)/N_0 = 279 - j140, \quad X(170)/N_0 = 86 - j45 \quad (1.12)$$

e as frequências a elas associadas $\omega_i = (2\pi/N_0)i$ [rad/mês] são determinadas

$$\omega_{85} = 0,5236, \quad \omega_{170} = 1,0472 \quad (1.13)$$

Com estes valores, julgados os mais significativos do espectro da transformada de Fourier discreta, podemos reconstruir a vazão $d(k)$, mas impondo um truncamento em (4.93) que leva em conta apenas as harmônicas desejadas, ou seja,

$$d_{trun}(k) = 912 + 624\cos(0,5236k - 0,4668) + 194\cos(1,0472k - 0,4886) \quad (1.14)$$

Dois aspectos devem ser ressaltados. O primeiro diz respeito à precisão com que este sinal truncado $d_{trun}(k)$ representa o sinal verdadeiro $d(k)$. Esta questão é respondida pelo cálculo do valor eficaz do erro entre os dois sinais tomado em relação ao valor eficaz do sinal. Com a definição de valor eficaz de sinais dada em (2.28), vem

$$\frac{\|d - d_{trun}\|_{ef}^2}{\|d\|_{ef}^2} = 0,1345 \quad (1.15)$$

o que coloca em evidência que o truncamento sugerido introduz uma perda de aproximadamente 13% em termos de potência do sinal original. O segundo aspecto diz respeito à periodicidade do sinal truncado. Cada uma das funções cosseno que aparece em (1.14) é periódica com período $2\pi/\omega_i = N_0/i = \{6, 12\}$ meses, fazendo com que o sinal truncado $d_{trun}(k)$ tenha um período igual a 12 meses. Isto faz todo o sentido, pois a vazão $d(k)$ certamente depende do ciclo climático definido periodicamente pelas estações do ano. O fato interessante é que o espectro da transformada discreta de Fourier foi capaz de capturar este fenômeno natural através de uma função periódica simples, que resulta da composição de uma constante e dois cossenos.

1.1.3 Oscilações Mecânicas

Oscilações mecânicas, ou vibrações, podem ser observadas em diversos sistemas dinâmicos as quais, em geral, ocorrem com dissipação de energia, fazendo com que cessem no decorrer do tempo. Oscilações mecânicas que ocorrem em uma única dimensão do espaço são, por exemplo, aquelas produzidas pelo sistema esquematizado na parte superior da Figura 1.3. Trata-se de uma massa $M = 10$ [kg] que se desloca sob a ação de uma força externa, com intensidade $g(t)$ [N], que está conectada a uma mola com *coeficiente de elasticidade* $K = 50$ [N/m] que satisfaz a lei de Hooke e cujo movimento está livre de atrito com o solo. Entretanto, ao se movimentar, ela está sujeita a uma força de atrito viscoso, proporcional à sua velocidade, com coeficiente $B = 10$ [Ns/m]. Assim sendo, considerando que a origem do referencial inercial y foi determinada com a mola na situação normal, o deslocamento horizontal da massa é dado pela equação diferencial de segunda ordem

$$M\ddot{y} = -B\dot{y} - Ky + g \quad (1.16)$$

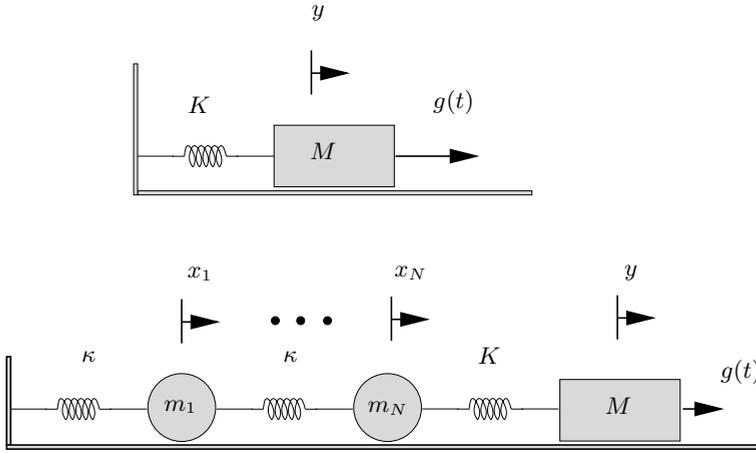


Figura 1.3: Osciladores mecânicos

que foi obtida pelo equilíbrio dinâmico das forças que agem na massa. Com as propriedades da transformada de Fourier estudadas no Capítulo 4 determina-se a função de transferência entre a força $\hat{g}(\omega)$ (entrada) e o deslocamento da massa $\hat{y}(\omega)$ (saída), que se escreve na forma

$$H(\omega) = \hat{h}(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{10s^2 + 10s + 50} \Big|_{s=j\omega} \quad (1.17)$$

Trata-se de uma função de transferência que é sempre causal (pois existe na vida real) e é assintoticamente estável (pois está dissipando energia através do atrito viscoso), sendo que os seus dois polos estão localizados no interior do semiplano esquerdo complexo. Esta última propriedade decorre do fato de todos os parâmetros M , B e K serem positivos. Desejamos saber como a massa se move sob a ação de uma força periódica, com período $T > 0$, cujo primeiro período é dado por

$$g(t) = \begin{cases} g_0 & , \quad 0 \leq t < r_0 T_0 \\ 0 & , \quad r_0 T_0 \leq t < T_0 \end{cases} \quad (1.18)$$

em que $T_0 = 10$ [s] e $g_0 = 50$ [N] e $r_0 = 0,1$ é denominado fator de ocupação. Como se trata de um sinal periódico, a sua série de Fourier é calculada segundo o procedimento dado no Capítulo 3, ou seja,

$$g(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i e^{j\omega_i t} \quad (1.19)$$

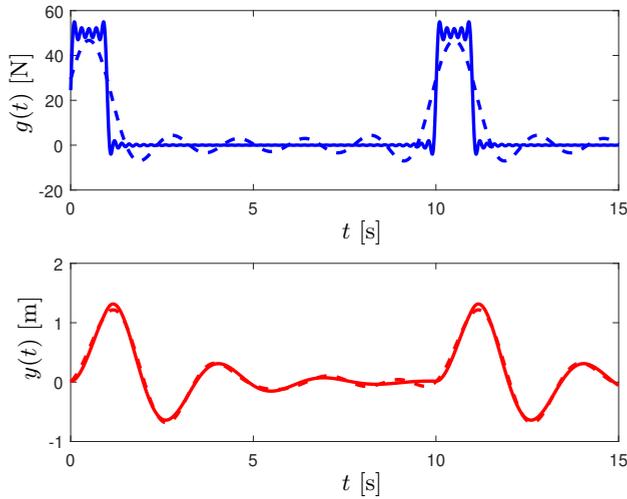


Figura 1.4: Oscilações amortecidas com força externa

em que $\omega_i = (2\pi/T_0)i$ e

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} g(t) e^{-j\omega_i t} dt \\ &= r_0 g_0 e^{-j\pi r_0 i} \text{sinc}(\pi r_0 i)\end{aligned}\quad (1.20)$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. A função $\text{sinc}(\omega) = \text{sen}(\omega)/\omega$, definida para todo $\omega \in \mathbb{R}$, inclusive em $\omega = 0$, será utilizada inúmeras vezes neste livro. É uma função par cujo máximo $\text{sinc}(0) = 1$ ocorre para $\omega = 0$ e é nula nos pontos em que $\omega \in \{\pi i\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Se o sinal periódico $g(t)$ for substituído por sua série de Fourier (1.19), a resposta do sistema dinâmico é também periódica e a sua série de Fourier é composta por funções exponenciais que dependem das mesmas frequências $\omega_i = (2\pi/T_0)i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Ademais, os coeficientes desta série são dados por $\beta_i = \hat{h}(j\omega_i)\alpha_i$, $i \in \mathbb{Z}$ sendo, portanto, calculados sem nenhuma dificuldade. A parte superior da Figura 1.4 mostra em linha contínua o sinal correspondente à força externa $g(t)$ calculada com os termos $i \in [-50, 50]$ e, em linha tracejada, o mesmo sinal calculado com apenas os termos $i \in [-5, 5]$. A diferença entre os dois sinais é visível. Na parte inferior da Figura 1.4 mostramos os deslocamentos da massa obtidos com as aproximações mencionadas. A diferença praticamente desaparece devido à atenuação imposta pela função de transferência $\hat{h}(s)|_{s=j\omega}$ em

altas frequências. A série de Fourier constitui uma ferramenta notável na análise de sinais e de sistemas lineares invariantes no tempo, um importante atributo a ser estudado mais adiante.

Na parte inferior da Figura 1.3 mostramos uma situação muito mais complexa, mas que pode ser analisada com o mesmo ferramental matemático. Agora o sistema massa-mola anterior está ligado a um conjunto composto por N massas-molas com massas m_1, m_2, \dots, m_N [kg] e com molas idênticas, cada uma delas com coeficiente de elasticidade κ [N/m] e com coeficiente de atrito viscoso b [Ns/m]. As equações que descrevem os deslocamentos das massas, segundo os referenciais inerciais indicados na mesma figura, resultam do equilíbrio dinâmico de forças, ou seja,

$$m_i \ddot{x}_i + b \dot{x}_i + \kappa(x_i - x_{i-1}) + \kappa(x_i - x_{i+1}) = 0 \quad (1.21)$$

para $i = 1, 2, \dots, N - 1$. Como a primeira mola está com uma das suas extremidades engastada na parede, devemos impor a condição de contorno $x_0 = 0$. Por outro lado, como a última massa do conjunto está conectada a uma mola com coeficiente de elasticidade diferente dos demais, a equação do seu deslocamento torna-se

$$m_N \ddot{x}_N + b \dot{x}_N + \kappa(x_N - x_{N-1}) + K(x_N - x_{N+1}) = 0 \quad (1.22)$$

em que, por conveniência, denotamos $y = x_{N+1}$. Finalmente, com esta mesma notação, a equação que descreve o deslocamento da massa M sob a ação da força externa g se expressa na forma

$$M \ddot{x}_{N+1} + B \dot{x}_{N+1} + K(x_{N+1} - x_N) = g \quad (1.23)$$

Ao compararmos as equações (1.16) e (1.23), notamos que agora o deslocamento da massa M depende não apenas da ação da força externa, mas também da força produzida pela mola devido à sua posição relativa medida em relação à última massa do conjunto. Definindo o vetor coluna de dimensão $N + 1$ composto pelos deslocamentos de cada uma das massas

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N+1} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

as matrizes diagonais com $N + 1$ elementos, respectivamente, de massa e de coeficiente de atrito viscoso

$$M_c = \text{diag}\{m_1, \dots, m_N, M\} \quad (1.25)$$

$$B_c = \text{diag}\{b, \dots, b, B\} \quad (1.26)$$

bem como a matriz $(N + 1) \times (N + 1)$ simétrica de coeficiente de elasticidade

$$K_c = \begin{bmatrix} 2\kappa & -\kappa & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\kappa & 2\kappa & -\kappa & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & -\kappa & 2\kappa & -\kappa & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\kappa & \kappa + K & -K \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -K & K \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

podemos escrever as equações do modelo dinâmico (1.21)-(1.23) na seguinte forma matricial mais compacta:

$$M_c \ddot{x} + B_c \dot{x} + K_c x = G_c g \quad (1.28)$$

em que $G'_c = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]$ é um vetor com $N + 1$ componentes, sendo que apenas a última, diferente de zero, é igual a um. Devemos enfatizar que o deslocamento da massa M se encontra na última componente do vetor x e pode ser extraída através da operação $y = x_{N+1} = G'_c x$. Na verdade, o deslocamento de qualquer massa do conjunto corresponde a uma das componentes deste mesmo vetor. A equação (1.16), que descreve o comportamento dinâmico de um sistema massa-mola com apenas uma massa sob a ação de uma força externa, e a equação (1.28), que descreve o comportamento dinâmico de um sistema massa-mola, mas com $N + 1$ massas sob a ação da mesma força externa, são formalmente idênticas. O que ocorre é que a equação (1.28) é expressa através de vetores e de matrizes que são entidades matemáticas manipuladas com grande eficiência pelas rotinas numéricas disponíveis atualmente. Neste contexto, a complexidade de análise não se modifica na medida em que a dimensão (medida pelo número de massas) aumenta. O que aumenta é o esforço computacional requerido para resolver cada caso de interesse.

A função de transferência entre a entrada $\hat{g}(\omega)$ e a saída $\hat{y}(\omega)$ é calculada aplicando-se a transformada de Fourier em (1.28), o que nos leva a

$$(-M_c \omega^2 + j B_c \omega + K_c) \hat{x}(\omega) = G_c \hat{g}(\omega) \quad (1.29)$$

$$\hat{y}(\omega) = G'_c \hat{x}(\omega) \quad (1.30)$$

Para qualquer $\omega \in \mathbb{R}$, trata-se de um sistema de equações lineares que pode ser resolvido extraindo-se o vetor $\hat{x}(\omega)$ da primeira relação e substituindo o resultado na segunda, isto é

$$H_c(\omega) = \hat{h}_c(s) \Big|_{s=j\omega} = G'_c \left(M_c s^2 + B_c s + K_c \right)^{-1} G_c \Big|_{s=j\omega} \quad (1.31)$$

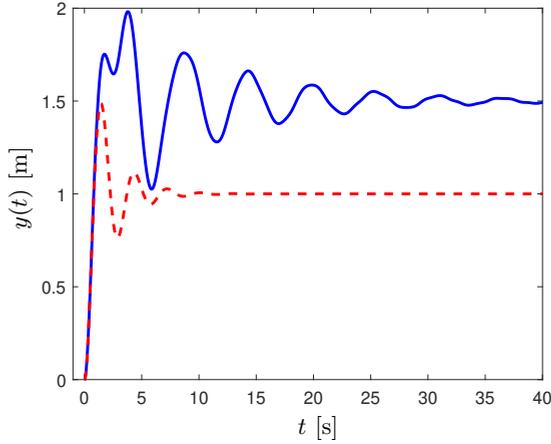


Figura 1.5: Respostas a uma força constante

Sempre é possível realizar esta operação, a não ser para certos valores isolados de $\omega \in \mathbb{R}$ tais que $s = j\omega$ sejam soluções da equação algébrica

$$\det(M_c s^2 + B_c s + K_c) = 0 \quad (1.32)$$

denominadas polos de $\hat{h}_c(s)$. Como se trata de um sistema dissipativo, devido à presença do atrito viscoso entre o ar e todas as massas, isto jamais ocorre, pois o fato de ser um sistema assintoticamente estável faz com que todos os seus polos se situem no interior do semiplano esquerdo complexo.

A Figura 1.5 mostra dois sinais nulos para todo $t < 0$ que foram obtidos como sendo as respostas dos dois sistemas a uma mesma força constante da forma $g(t) = g_0, \forall t \geq 0$. Em linha tracejada aparece a resposta do sistema com apenas uma massa cujo deslocamento é oscilatório, mas rapidamente atinge a posição de repouso $y_{rep} = g_0/K = 1$ [m]. O outro sistema simulado tem seis massas, a saber, $m_i \in \{10, 20, 40, 40, 20, 10\}_{i=1}^6$ [kg] com molas caracterizadas por $\kappa = 600$ [N/m] e coeficiente de atrito viscoso $b = 1$ [Ns/m]. A linha contínua mostra o deslocamento da massa M que também é oscilatório, mas é muito mais complicado e demora muito mais para atingir a posição de repouso, dada por $y_{rep} = G'_c K_c^{-1} G_c g_0 = 1,5$ [m]. É interessante notar que inicialmente, logo após o instante $t = 0$ em que a força começa a ser aplicada na massa M , os dois sistemas se comportam de maneira similar. Entretanto, à medida que o tempo avança o efeito das outras massas se faz sentir e os sinais correspondentes tornam-se muito diferentes.

Com estas manipulações algébricas e simulações numéricas que acabamos de apresentar, desejamos colocar em evidência a versatilidade e o grande potencial de análise dos conceitos que envolvem a transformada de Fourier de sinais e sistemas. Para se ter uma ideia mais precisa, basta mencionar que o sistema dinâmico com $N + 1 = 7$ massas e função de transferência com $2N + 2 = 14$ polos considerado foi tratado numericamente sem nenhuma dificuldade conceitual, a não ser a grande quantidade de cálculos que foram realizados rapidamente pelo computador utilizado. É importante ter em mente que o suporte computacional disponível atualmente permite manipular grande volume de dados gerados por sinais e sistemas, o que tem grande impacto na nossa capacidade de poder tratar problemas de real interesse prático com os quais convivemos cotidianamente.

1.1.4 Oscilações Elétricas

Oscilações elétricas ocorrem naturalmente como consequência da emissão, transmissão e captação de sinais dos mais variados tipos e características. Dentre eles podemos citar os sinais de rádio AM e FM, de televisão e de telefonia móvel. Os tipos de sinais são também diversos. De fato, no presente momento, deixamos o sistema analógico de televisão e migramos para o sistema digital, com maior capacidade e de melhor qualidade sobretudo no que diz respeito à eliminação de imprecisões e de ruídos, que estão sempre presentes em qualquer processo de transmissão e recepção de sinais.

Para ilustrar o que acabamos de afirmar, vamos discutir em seguida duas manipulações de sinais denominadas *modulação* e *demodulação*, bem como analisar como o projeto de *filtros analógicos* se insere neste contexto. Estas duas operações importantes são bastante simples e, por este motivo, estão presentes desde a origem do sistema de rádio AM. O material disponível no Capítulo 4, que será introduzido oportunamente, apresenta as bases teóricas que permitem abordar as duas técnicas de manipulação de sinais que desejamos ilustrar. Ademais, o Capítulo 6 aborda o projeto de filtros analógicos e digitais. Convém mencionar que uma seção inteira do Capítulo 8 trata com mais detalhes diversos aspectos práticos da transmissão e recepção de sinais de rádio AM. No presente momento, nosso objetivo é colocar em evidência a utilidade das técnicas que iremos aprender no decorrer dos próximos capítulos deste livro.

Conforme é discutido com algum detalhe adicional no Capítulo 4, a *modulação de amplitude* de um sinal $g(t)$ se dá pela sua multiplicação por uma função denominada *portadora* para obter $f(t) = g(t)\cos(\omega_c t)$. O efeito causado por esta simples operação é surpreendente. Utilizando os conceitos tratados naquele capítulo, se $G(\omega)$ for a transformada de Fourier do sinal $g(t)$, resulta que a transformada

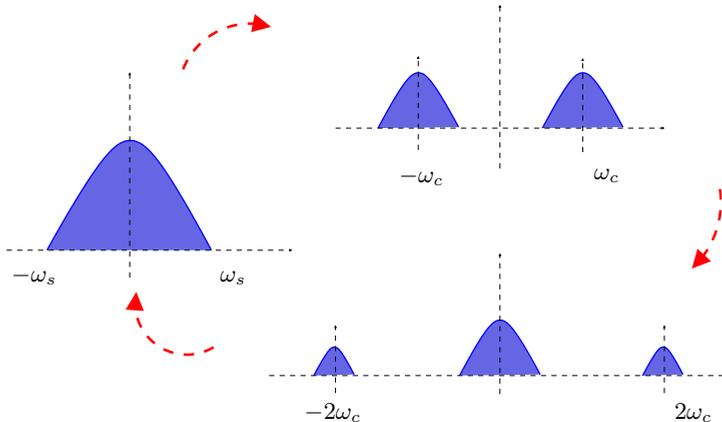


Figura 1.6: Espectro da modulação em amplitude - AM

de Fourier do sinal modulado $f(t)$ é dada por

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \left(G(\omega - \omega_c) + G(\omega + \omega_c) \right) \quad (1.33)$$

A Figura 1.6 mostra graficamente o que ocorre. O sinal $g(t)$ com banda limitada $|\omega| \leq \omega_s$, ao ser modulado, fornece o sinal $f(t)$ a ser transmitido, cujo espectro se mantém idêntico na forma ao do original (a menos de uma constante), mas que é centralizado nas frequências $\pm\omega_c$ da portadora. Desta forma, é interessante observar que diversas portadoras com frequências situadas em uma faixa de 1000 [kHz] viabilizam a transmissão simultânea de 50 sinais de áudio em que $\omega_s = 20$ [kHz].

Depois de o sinal modulado $f(t)$ ser transmitido, devemos recuperar o sinal original $g(t)$. Em uma situação ideal, sem ruídos ou interferência de outros sinais, esta recuperação se dá através de uma operação denominada *demodulação*, que também está ilustrada na Figura 1.6. Ela se baseia em mais uma propriedade surpreendente que emerge de uma nova multiplicação do sinal $f(t)$ pela portadora, ou seja,

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t)\cos(\omega_c t) \\ &= \frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2}g(t)\cos(2\omega_c t) \end{aligned} \quad (1.34)$$

sendo que a segunda relação vem da utilização da igualdade bem conhecida $\cos^2(\theta) = (1 + \cos(2\theta))/2$, válida para todo ângulo $\theta \in \mathbb{R}$ expresso em radianos. Neste ponto, podemos adotar o mesmo raciocínio empregado em (1.33),

para obter a transformada de Fourier do sinal $y(t)$ na forma

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}G(\omega) + \frac{1}{4}\left(G(\omega - 2\omega_c) + G(\omega + 2\omega_c)\right) \quad (1.35)$$

onde fica claro que (a menos da mesma constante) o sinal original pode ser recuperado por um filtro passa-baixas que atua na faixa de frequências do sinal, $|\omega| \leq \omega_s$. Desta maneira, a frequência de corte ω_s deste filtro é definida apenas pela faixa do sinal de áudio que se deseja transmitir, sendo completamente independente da frequência da portadora. Um único filtro desta classe é capaz de extrair o sinal de áudio $g(t)$ associado a uma portadora específica. Para tanto, basta selecionar, ou seja, basta *sintonizar* a portadora desejada e com ela fazer a demodulação do sinal transmitido $f(t)$.

Apenas para fins de ilustração, a partir dos procedimentos fornecidos e discutidos no Capítulo 6, projetamos dois filtros analógicos de classes diferentes. Antes, porém, é importante nos preocuparmos com os aspectos numéricos envolvidos nestes projetos, de modo a melhor condicionar numericamente os cálculos que devem ser realizados. Com este objetivo em mente, os valores de frequência passam a ser expressos em $[\text{rad}/\mu\text{s}]$ ou $[\text{MHz}]$, enquanto que, nesta mesma escala, o tempo é expresso em microssegundos $[\mu\text{s}]$.

- **Filtro passa-faixa:** Foi projetado um filtro do tipo Butterworth para atuar em $0,620 \pm 0,020$ $[\text{MHz}]$ com um ganho $K_{dB} \approx 6$ dB para duplicar a intensidade do sinal. Este ganho serve para anular o efeito da redução de amplitude, em 50%, que é introduzido pelo processo de modulação, veja (1.33). Com as frequências definidoras da faixa, $\omega_a = 2\pi \times 0,600$ $[\text{rad}/\mu\text{s}]$ e $\omega_b = 2\pi \times 0,640$ $[\text{rad}/\mu\text{s}]$ podemos imediatamente calcular os dois parâmetros que definem o filtro desejado, a saber, o seu fator de qualidade e a sua frequência central

$$Q_{ab} = 15,49, \quad \omega_{ab} = 2\pi \times 0,6197$$
 $[\text{rad}/\mu\text{s}] \quad (1.36)$

respectivamente. Verifica-se que a frequência central ω_{ab} é bem próxima da frequência da portadora $\omega_c = 0,620$ $[\text{MHz}]$. Como regra geral, podemos adotar $Q_{ab} = \omega_c/L = 15,5$ e $\omega_{ab} = \omega_c = 2\pi \times 0,620$ $[\text{rad}/\mu\text{s}]$, em que L é a largura de faixa, no presente caso, estipulada como sendo $L = 2\pi \times 0,040$ $[\text{rad}/\mu\text{s}]$. Com estes dados projetamos o filtro passa-faixa cuja transformada de Fourier da sua função de transferência é expressa na forma $F_{pf}(\omega) = \hat{f}_{pf}(s)|_{s=j\omega}$, em que

$$\hat{f}_{pf}(s) = \frac{0,1263s^2}{s^4 + 0,3554s^3 + 30,38s^2 + 5,388s + 229,8} \quad (1.37)$$

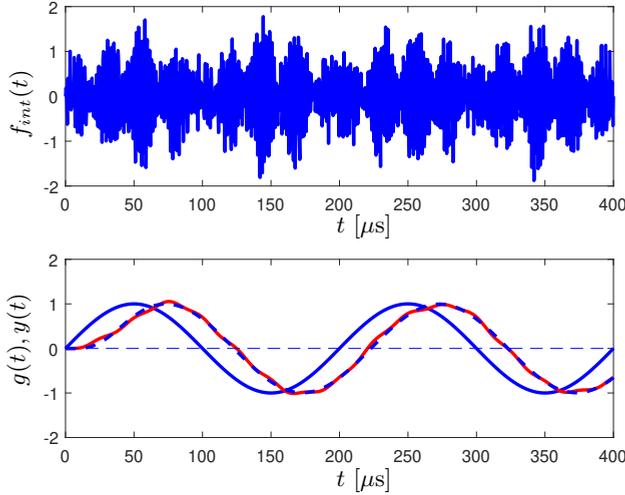


Figura 1.7: Filtragem de um sinal com ruído

a qual pode ser implementada através de um circuito linear passivo de quarta ordem, composto por dois indutores e dois capacitores com valores adequados.

- **Filtro passa-baixas:** Foi projetado um filtro do tipo Butterworth com frequência de corte $\omega_s = 2\pi \times 0,020$ [rad/ μ s]. A transformada de Fourier da sua função de transferência é expressa na forma $F_{pb}(\omega) = \hat{f}_{pb}(s)|_{s=j\omega}$, em que

$$\hat{f}_{pb}(s) = \frac{0,01579}{s^2 + 0,1777s + 0,01579} \quad (1.38)$$

sendo de segunda ordem, pode ser implementada por um simples circuito linear passivo do tipo RLC.

Construímos, numericamente, um sistema de sintonia e de recepção para sinais de áudio com modulação, demodulação e os dois filtros analógicos que acabamos de descrever. Diversas simulações numéricas foram realizadas com auxílio do material disposto no Apêndice A para validar com os procedimentos adotados. Consideramos a situação ideal de transmissão de um sinal senoidal com amplitude unitária $g(t) = \text{sen}((1/4)\omega_s t)$, que corresponde a um som audível de 5 kHz, visto em linha cheia na parte inferior da Figura 1.7.

Em uma primeira simulação, após ter sido modulado pela portadora, o sinal $f(t)$ transmitido é filtrado através do filtro passa-faixa $F_{pf}(\omega)$. A sua saída

é demodulada pela portadora e, em seguida, é filtrado pelo filtro passa-baixas $F_{pb}(\omega)$. Como resultado, obtém-se o sinal $y(t)$ que idealmente deveria ser igual ao sinal de áudio transmitido $g(t)$. Entretanto, o sinal obtido é aquele que está representado em linha tracejada na parte inferior da mesma figura. Verifica-se nitidamente que $y(t) \approx g(t - \tau)$, em que $\tau \approx 23 [\mu s]$ é um pequeno atraso. A ocorrência deste fenômeno ilustra um aspecto sempre presente em filtragem de sinais. A forma do sinal pode ser reproduzida com precisão, isto é, sem distorção, mas paga-se um preço, devido a imprecisões nunca totalmente eliminadas, de ser necessário suportar um atraso que no presente contexto e na magnitude observada não causa nenhum problema.

Em seguida, uma segunda simulação foi realizada. Tudo foi feito como na primeira, a não ser que o sinal modulado $f(t)$ foi alterado para

$$f_{int}(t) = f(t) + r(t)\cos\left((\omega_c + 2\omega_s)t\right) \quad (1.39)$$

em que o sinal original $f(t)$ sofre a interferência de um sinal espúrio com frequência 0,660 [MHz] que corresponde à frequência central de um sinal emitido na faixa imediatamente superior àquela de $f(t)$. O sinal $r(t)$ é considerado um sinal aleatório com distribuição de probabilidades uniforme no intervalo $[0, 1]$. A parte superior da Figura 1.7 mostra uma ocorrência do sinal (1.39). A saída correspondente do filtro passa-baixas é mostrada em linha contínua na parte inferior da mesma figura, na qual nota-se uma leve flutuação na amplitude do sinal recebido. Esta flutuação, devido ao sinal espúrio, é muito pequena e, assim, coloca em evidência que a interferência foi quase completamente eliminada, o que atesta a boa qualidade do sistema que acabamos de projetar.

Mostramos, através de exemplos, como algumas ferramentas matemáticas que serão estudadas neste livro podem ser utilizadas para abordar a análise de sinais e a síntese de sistemas em um contexto bastante amplo. De fato, nosso objetivo é colocar em evidência os resultados mais relevantes para análise de sinais e os procedimentos mais eficientes de projeto de sistemas. Eles serão abordados de tal forma a dar ao leitor todas as informações úteis a respeito dos temas de interesse. Exemplos ilustrativos permitem melhorar o entendimento dos resultados teóricos, ao serem resolvidos com detalhes para colocar em evidência e esclarecer os mais importantes aspectos envolvidos.

1.2 Requisitos Básicos

Este livro tem a proposta de dar uma visão pessoal dos autores a respeito dos diversos assuntos tratados e, ao mesmo tempo, ser o mais autocontido possível.

Neste sentido, os resultados necessários para o entendimento do texto são discutidos com bastantes detalhes e, quando necessário, são ilustrados através de exemplos resolvidos. Os dois apêndices tratam, com mais profundidade, alguns tópicos que necessitam maior atenção e cuidado. Ademais, deve ser ressaltado que os seguintes requisitos básicos facilitam a leitura e o aprendizado.

• Funções de Variáveis Complexas

Trata-se de ferramenta importante para o tratamento de sinais e sistemas, tanto em tempo contínuo como em tempo discreto. Dominar o cálculo operacional envolvendo números complexos é recomendado. Uma função de variável complexa associa elementos do plano complexo \mathbb{C} a elementos deste mesmo conjunto. É definida na forma $f(z) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, onde \mathcal{D} é um domínio situado em \mathbb{C} . Entretanto, estaremos particularmente interessados em funções mais simples, com domínio em \mathbb{R} ou \mathbb{Z} , que são as funções exponenciais, isto é, aquelas que se apresentam na forma

$$g(t) = e^{j\omega t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(k) = e^{j\omega k} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.40)$$

em que $\omega \in \mathbb{R}$ é um parâmetro dado. A fórmula de Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\text{sen}(\theta) \quad (1.41)$$

é essencial em várias situações. Ela permite verificar que $g(t)$ é uma função periódica com período $T_0 = 2\pi/\omega$. Permite também concluir que $g(k)$ é periódica apenas se $2\pi/\omega$ for um número racional. Manipulações algébricas envolvendo números complexos em geral e as funções exponenciais (1.40) permeiam a obtenção de praticamente todos os resultados que serão apresentados em seguida. Por este relevante motivo, esses temas devem ser objeto de dedicação para que os conceitos apresentados possam ser devidamente compreendidos.

• Noções Básicas de Vetores e Matrizes

Vetores e matrizes definidos em \mathbb{R} ou em \mathbb{C} são entidades matemáticas importantes sobretudo quando a *linearidade* é a propriedade que se deseja explorar, como é o caso deste livro. Um ponto P_0 no \mathbb{R}^n pode ser escrito com um vetor $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sendo que cada um dos seus elementos são as componentes de P_0 em relação a uma base escolhida. O sistema de equações lineares $Ax = b$ é definido pela matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e pelo vetor $b \in \mathbb{R}^m$, que contém dados para um caso específico que se quer considerar, e pelo vetor $x \in \mathbb{R}^n$, que é a incógnita a ser determinada. Sob condições bem conhecidas: $n = m$ e A ser uma matriz não singular, a sua única solução se escreve na forma

$$x = A^{-1}b \quad (1.42)$$

Além disso, com vetores e matrizes podemos fazer um grande número de operações algébricas. Por exemplo, o *produto escalar* de vetores induz o conceito de *norma* e permite generalizar, para qualquer dimensão, o conceito de *ortogonalidade*. Algumas classes de matrizes e suas propriedades específicas são importantes. Dentre elas devemos citar as matrizes complexas conjugadas e as matrizes simétricas. No decorrer deste texto, sempre que for preciso, as propriedades que forem usadas serão brevemente discutidas e ilustradas através de exemplos.

• Simulação e Cálculo Numérico

Nos dias de hoje é importante, para não dizer essencial, que o acesso a rotinas de simulação numérica seja possível. A validação final dos projetos e mesmo a verificação dos cálculos intermediários requerem a realização de simulações para que sejam testados não apenas os casos típicos, mas também em contingências frente a erros e imprecisões sempre presentes na vida real. Neste contexto, o cálculo numérico envolvendo números complexos, mínimo e máximo de funções reais e problemas de mínimos quadrados, dentre outros, passa a compor um conjunto importante de rotinas que são bastante utilizadas. Assim sendo, elas devem ser conhecidas com detalhes teóricos, incluindo as suas eventuais limitações do ponto de vista de aplicação e uso.

1.3 Descrição dos Capítulos e Apêndices

Em seguida, passamos a descrever sucintamente cada capítulo e cada apêndice para que o leitor possa ter algumas informações preliminares a respeito dos seus respectivos conteúdos. O objetivo central é dar ênfase aos pontos que julgamos importantes e que necessitam, desde logo, ser alvo de particular atenção. No decorrer de cada capítulo, procuramos ilustrar os resultados teóricos apresentados através de diversos exemplos resolvidos. Todos os capítulos terminam com notas bibliográficas que situam os resultados apresentados no contexto da literatura atual. Todos eles também contêm uma série de exercícios propostos que devem ser enfrentados e resolvidos como forma de consolidar o aprendizado adquirido.

• Cap. 2: Sinais

Neste capítulo introduzimos as definições e as propriedades básicas de sinais e sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto. Características básicas de sinais, tais como analógicos ou digitais e periódicos ou aperiódicos, são definidas, discutidas e ilustradas. Essas características são importantes pois definem qual

ferramenta matemática deve ser empregada para tratar cada uma dessas classes de sinais. Os sinais são expressos através de funções do tipo

$$g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(k) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.43)$$

segundo ele seja definido no domínio de tempo contínuo ou discreto, respectivamente. Com relação aos sistemas, nosso estudo será quase que exclusivamente dedicado à classe mais importante formada pelos sistemas lineares invariantes no tempo (LIT) causais. Como propriedade básica e fundamental, um sistema LIT é inteiramente definido pela sua resposta ao impulso unitário, tendo em vista que a resposta a uma entrada qualquer resulta da sua convolução com a resposta ao impulso. Um importante atributo dos sistemas desta classe denominado estabilidade é definido e completamente caracterizado.

Como é usual na literatura, adotamos a mesma notação, a saber, $\delta(t)$ para o impulso unitário a tempo contínuo (impulso de Dirac) e $\delta(k)$ para o impulso unitário a tempo discreto (impulso de Kronecker). Embora sejam entes matemáticos diversos, o contexto deixará claro de qual deles estamos tratando. O primeiro é definido indiretamente através das propriedades

$$\delta(t) = 0, \quad \forall t \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.44)$$

que exigem $\delta(0) = +\infty$. Em $t = 0$ o impulso a tempo contínuo diverge, mas de forma particular, com integral finita e normalizada igual à unidade. O segundo é definido por

$$\delta(k) = 0, \quad \forall k \neq 0, \quad \delta(0) = 1 \quad (1.45)$$

e sempre se mantém finito. Não há possibilidade de confusão, pois o impulso a tempo contínuo tem como domínio o conjunto dos números reais \mathbb{R} , enquanto que o impulso a tempo discreto tem como domínio o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} . Ambos são essenciais no estudo de sinais e sistemas nos domínios de tempo contínuo e discreto, respectivamente. Além disso, como veremos em seguida, o primeiro é empregado de forma mais abrangente, pois é através dele que a divergência de séries e integrais pode ser estudada.

• Cap. 3: Análise de Sinais Periódicos

Este capítulo é inteiramente dedicado ao estudo de sinais periódicos a tempo contínuo e a tempo discreto, através da série de Fourier. Seu resultado mais importante aparece no início e diz respeito à solução do problema de erro quadrático mínimo que constitui um sólido alicerce para a obtenção dos resultados deste e do próximo capítulo. Em conjunto com a escolha de uma base de sinais ortogonais, ele torna possível a determinação das várias versões da série de Fourier e

do Teorema de Parseval, que passamos agora a disponibilizar de forma direta e resumida para facilitar a consulta:

- **Sinais a tempo contínuo:** O sinal considerado é da forma $g(t)$, com domínio em $t \in \mathbb{R}$, imagem em \mathbb{C} , período $T_0 \in \mathbb{R}_+$ e frequências $\omega_i = (2\pi/T_0)i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

$$\alpha_i = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) e^{-j\omega_i t} dt, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (1.46)$$

$$g(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i e^{j\omega_i t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.47)$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |g(t)|^2 dt \quad (1.48)$$

A primeira relação fornece os coeficientes da série de Fourier, os quais, ao serem colocados na segunda equação, recuperam o sinal. A terceira igualdade resulta do Teorema de Parseval e serve para determinar o valor eficaz do sinal operando no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Observe que, como a notação indica, os extremos inicial e final de integração são irrelevantes; o que é relevante é a diferença entre eles, que deve ser exatamente igual ao período $T_0 > 0$.

- **Sinais a tempo discreto:** O sinal considerado é da forma $g(k)$, com domínio em $k \in \mathbb{Z}$, imagem em \mathbb{C} , período $N_0 \in \mathbb{N}$ e frequências $\omega_i = (2\pi/N_0)i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

$$\alpha_i = \frac{1}{N_0} \sum_{k \in \langle N_0 \rangle} g(k) e^{-j\omega_i k}, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (1.49)$$

$$g(k) = \sum_{i \in \langle N_0 \rangle} \alpha_i e^{j\omega_i k}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.50)$$

$$\sum_{i \in \langle N_0 \rangle} |\alpha_i|^2 = \frac{1}{N_0} \sum_{i \in \langle N_0 \rangle} |g(k)|^2 \quad (1.51)$$

A primeira relação permite calcular os coeficientes da série de Fourier, a segunda faz a operação inversa para recuperar o sinal e a terceira é a igualdade que resulta diretamente do Teorema de Parseval. É muito importante observar que, como a notação indica, os extremos inicial e final das somas são irrelevantes; o que é relevante é somar um número de termos exatamente igual ao período $N_0 > 0$.

Os sistemas LIT causais são analisados sob o enfoque da determinação da sua resposta a uma entrada periódica decomposta em série de Fourier. Como

resultado, determina-se de maneira quase imediata, em função da sua resposta ao impulso, os coeficientes da série de Fourier da saída. Assim sendo, a resposta em relação ao tempo é calculada sem dificuldades. Exemplos ilustram a aplicação dos resultados teóricos com ênfase na utilização de rotinas numéricas para tentar resolvê-los.

• **Cap. 4: Transformada de Fourier**

A transformada de Fourier generaliza, para sinais quaisquer, os resultados obtidos com a série de Fourier que são restritos a sinais periódicos. Este capítulo mostra como essa generalização é possível de ser feita tanto para sinais a tempo contínuo quanto para sinais a tempo discreto. Como consequência, as respectivas versões do Teorema de Parseval são obtidas sem dificuldades. Ademais, as respostas de sistemas LIT causais tendo como entrada sinais genéricos são determinadas.

- **Sinais a tempo contínuo:** O sinal considerado é da forma $g(t)$, com domínio em $t \in \mathbb{R}$ e imagem em \mathbb{C} .

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (1.52)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.53)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \quad (1.54)$$

A primeira relação fornece a transformada de Fourier do sinal, ao passo que a segunda recupera o sinal através da transformada de Fourier inversa. A terceira igualdade traduz o Teorema de Parseval para a classe de sinais em estudo. Estas relações exibem diversas propriedades que são apresentadas e discutidas ao longo do capítulo. Uma delas, denominada dualidade, resulta da simetria destas equações, que têm inclusive domínios idênticos $t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{R}$.

- **Sinais a tempo discreto:** O sinal considerado é da forma $g(k)$, com domínio em $k \in \mathbb{Z}$ e imagem em \mathbb{C} .

$$G(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-j\omega k}, \quad \omega \in \Omega \quad (1.55)$$

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} G(\omega)e^{j\omega k} d\omega, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.56)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} |G(\omega)|^2 d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)|^2 \quad (1.57)$$

em que Ω é um intervalo de frequências cujos extremos inicial e final são irrelevantes; o que é relevante é o seu comprimento, que deve ser exatamente igual a 2π . A primeira relação determina a transformada de Fourier discreta, a segunda faz a operação inversa para recuperar o sinal e a terceira é a igualdade que resulta diretamente do Teorema de Parseval.

Este capítulo termina com uma análise numérica a respeito de como resolver essas equações. Deste importante ponto de vista, as duas versões da série e as duas versões da transformada de Fourier que foram estudadas neste e no capítulo anterior podem ser agrupadas em apenas uma delas. Isto é possível desde que algumas aproximações, cujo impacto na precisão do resultado final pode ser avaliado *a priori*, sejam introduzidas. Isto viabiliza o uso de rotinas numéricas eficientes que podem manipular sinais reais, geralmente descritos através de uma grande quantidade de dados.

• Cap. 5: Amostragem

Amostragem, no sentido mais amplo, indica como representar no domínio de tempo discreto sinais que são definidos no domínio de tempo contínuo. Isto pode ser feito de maneira exata para uma classe de sinais, ou de maneira aproximada no caso geral. Um sinal limitado em frequência, cuja transformada de Fourier é nula para $|\omega| \geq W$, pode ser exatamente reconstruído a partir de suas amostras $s(kT)$, $k \in \mathbb{Z}$, desde que elas sejam colhidas com uma periodicidade tal que $T \leq \pi/W$. Este é um célebre resultado conhecido como Teorema da Amostragem, que será discutido segundo a abordagem proposta por Shannon. Nela, o ponto central é a igualdade

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT) \operatorname{sinc}(W(t - kT)) \quad (1.58)$$

válida não apenas nos instantes de amostragem, mas para todo $t \in \mathbb{R}$. As funções $\operatorname{sinc}(\cdot)$ deslocadas no tempo constituem uma base ortogonal completa para esta classe de sinais. A reconstrução aproximada de sinais que não pertencem a esta classe, a partir dos chamados segurador de ordem zero (causal) e segurador de ordem um (não causal), é analisada em detalhe. Amostragem dual, que corresponde a amostrar não o sinal, mas sim a sua transformada de Fourier, é estudada dentro de um contexto similar que se estabelece a partir da igualdade

$$S(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} S(W_i) \operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2}(\omega - W_i)\right) \quad (1.59)$$

que exibe perfeita simetria com a sua versão primal (1.58). Por fim, e de maneira natural, sinais amostrados são processados por sistemas LIT causais definidos no domínio de tempo discreto que são determinados a partir de uma operação denominada discretização. O capítulo termina com uma discussão sobre um tema relevante e atual, que é o processamento digital de sinais.

• Cap. 6: Filtragem Determinística

Filtragem é um tema central em sinais e sistemas. Este capítulo é inteiramente dedicado ao projeto de filtros que atuam em sinais determinísticos. Apresenta as ferramentas teóricas que serão, em seguida, generalizadas para manipular sinais aleatórios. Os projetos de filtros a tempo discreto adotam, sempre que possível, manipulações algébricas semelhantes àquelas empregadas para projetar filtros a tempo contínuo. O capítulo inicia com um diagrama de blocos, que é a estrutura básica de qualquer filtro a ser projetado. As funções correlação $\varphi_{sg}(\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e autocorrelação $\varphi_{ss}(\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ envolvendo sinais determinísticos quaisquer s e g , a tempo contínuo ou a tempo discreto, permitem escrever a transformada de Fourier da resposta ao impulso do célebre filtro de Wiener na forma

$$F_w(\omega) = \frac{\varphi_{sg}(\omega)}{\varphi_{gg}(\omega)} \quad (1.60)$$

em que s é o sinal a ser recuperado e g é o sinal de entrada. O filtro de Wiener é caracterizado de forma alternativa, mas equivalente, através da sua resposta ao impulso em cada um dos domínios de tempo mencionados, ou seja,

$$\phi_{sg}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_w(\tau) \phi_{gg}(t - \tau) d\tau \quad (1.61)$$

$$\phi_{sg}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_w(i) \phi_{gg}(k - i) \quad (1.62)$$

Estas duas condições podem ser resolvidas impondo-se que a solução seja causal. Exemplos ilustram o procedimento adotado. Em seguida, premissas e procedimentos de projeto de filtros analógicos e de filtros digitais clássicos das classes passa-baixas, passa-altas, passa-faixa e bloqueia-faixa são discutidos. A tempo contínuo, todos resultam da aplicação de transformações racionais sobre um filtro passa-baixas com ganho unitário e frequência de corte normalizada. A tempo discreto, envolvendo inclusive sinais amostrados com período $T > 0$ dado, o filtro é obtido através da aplicação suplementar da denominada transformação bilinear

$$z \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{1+s}{1-s} \Big|_{s=jtg(\omega T/2)} \quad (1.63)$$

válida para toda frequência que satisfaz a condição $\omega T \in [0, \pi)$, que é necessária para garantir a aplicação do Teorema da Amostragem. Os procedimentos de projeto são sumarizados através de dois algoritmos. Embora qualquer outro possa ser adotado, o filtro passa-baixa normalizado do tipo Butterworth foi sempre o escolhido. Diversos exemplos ilustrativos são resolvidos e mostram a efetiva qualidade dos filtros projetados. Os exercícios propostos, no final do capítulo, tentam chamar a atenção do leitor para aspectos mais específicos e relevantes dos temas tratados, que merecem ser considerados durante a leitura e o aprendizado.

• Cap. 7: Filtragem Estocástica

Este capítulo trata de filtragem em ambiente estocástico para sinais e sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto. A estrutura do filtro é idêntica àquela que foi introduzida no capítulo anterior. Antes de abordar este tema, vários conceitos foram apresentados e discutidos, a começar pelo de processo estocástico. Em seguida, processos estacionários no sentido estrito e no sentido amplo são caracterizados, pois é para os da segunda classe que praticamente todos os resultados teóricos apresentados são válidos. Neste contexto, o *ruído branco* é descrito. A transformada de Fourier das funções correlação e autocorrelação fornecem $R_{sg}(\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e a densidade espectral de potência $\hat{R}_{ss}(\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, respectivamente. O filtro de Wiener é então obtido de uma maneira inédita, de tal forma a não requerer do leitor nenhum conhecimento que se situe além do seu atual estágio de aprendizado. Em ambos os domínios de tempo, a função de transferência do filtro de Wiener é expressa na forma unificada

$$F_w(\omega) = \frac{\hat{R}_{sg}(\omega)}{\hat{R}_{gg}(\omega)} \quad (1.64)$$

enquanto que a sua resposta ao impulso é caracterizada, em cada domínio de tempo, de maneira diversa, ou seja,

$$R_{sg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_w(\theta) R_{gg}(\tau - \theta) d\theta \quad (1.65)$$

$$R_{sg}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_w(i) R_{gg}(n - i) \quad (1.66)$$

O cálculo da função de transferência não permite de forma simples incorporar a restrição de que o filtro seja causal. Isso é feito através do cálculo da sua resposta ao impulso. Os procedimentos numéricos envolvidos são apresentados e discutidos com bastantes detalhes. Por fim, os conceitos e resultados deste capítulo são interpretados no âmbito de sinais e sistemas determinísticos com o

intuito de colocar em evidência aspectos que ajudam a melhor compreendê-los. O capítulo contém vários exemplos resolvidos que ilustram diversas partes da teoria apresentada e o seu potencial para futuras aplicações em problemas de interesse prático.

• Cap. 8: Modelagem e Ensaio Práticos

Modelagem é, sem dúvida, o aspecto central de qualquer aplicação prática. Um modelo simples e preciso retrata bem a realidade e permite que um sinal seja analisado ou sintetizado. Este capítulo é dividido em três partes. Na primeira, dados brutos de um eletrocardiograma (ECG) são tratados através de um filtro digital projetado para eliminar eventuais ruídos, sem distorcer as informações que são relevantes do ponto de vista clínico. A segunda parte é dedicada a implementar numericamente um sistema de transmissão de rádio AM. De fato, todas as etapas que envolvem a modulação, demodulação, sintonia e filtragem do sinal de áudio foram implementadas a partir de rotinas numéricas. O sistema foi testado com a transmissão de um sinal de voz muito conhecido denominado *Handel's Hallelujah Chorus* por uma estação e pela transmissão simultânea de um ruído audível por uma outra estação de rádio AM. Ambas ocupam canais consecutivos de transmissão AM, de tal forma a tornar mais difícil a filtragem do ruído. O filtro digital do tipo *resposta ao impulso finita - RIF* mostrou-se muito efetivo para bloquear o ruído e amplificar o sinal de voz. Finalmente, na terceira parte, a ocorrência de vibrações em um sistema mecânico montado em laboratório foi detectada com o auxílio do tratamento de sinais através da transformada de Fourier discreta das suas amostras.

• Apêndice A: Noções Básicas de Cálculo e Simulação

Este apêndice contém um breve material de apoio ao leitor como fonte de informações mais detalhadas a respeito de alguns pontos específicos que foram abordados rapidamente em diversos capítulos. Ele versa sobre algumas noções básicas de cálculo, tais como vetores, matrizes, problema de norma mínima e funções de variáveis complexas no que diz respeito a transformações conforme. Em seguida, este apêndice trata de aspectos de cálculo numérico com ênfase na simulação de sistemas LIT causais.

• Apêndice B: Probabilidade

O material que consta deste apêndice pretende dar uma visão bastante abrangente de probabilidade, mas aborda apenas os aspectos mais relevantes, para que a leitura do Capítulo 7 ocorra sem grandes dificuldades. Inicialmente, o conceito

de probabilidade é introduzido através de manipulações algébricas com conjuntos e evolui até o cálculo de probabilidade condicional. Os conceitos de variável aleatória e funções densidade e distribuição de probabilidade são discutidos com especial ênfase nas variáveis aleatórias uniforme e gaussiana. Em seguida, as definições de média e variância são dadas, bem como é feita a apresentação e análise do operador esperança matemática. O apêndice é concluído com um estudo sucinto de duas variáveis aleatórias, colocando em evidência os conceitos de independência, covariância, correlação e ortogonalidade. Ademais, uma breve discussão comparativa sobre as classes de estimadores linear e não linear é apresentada. Ela tem particular importância no contexto de filtragem estocástica.

1.4 Notação

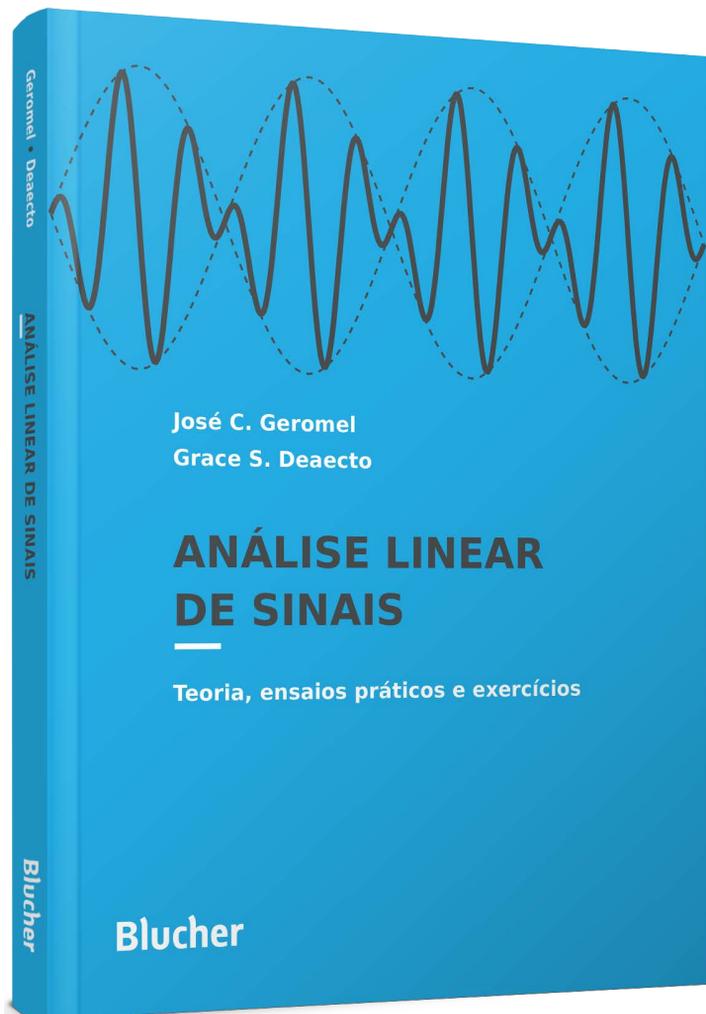
A notação usada no decorrer do texto é padrão.

Os símbolos \mathbb{R} , \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{C} denotam, respectivamente, os conjuntos dos números reais, naturais, inteiros e complexos. O conjunto \mathbb{R}_+ refere-se aos reais não negativos. Para funções (ou sinais) em tempo contínuo ou discreto são usadas letras minúsculas indicando sua variável independente $t \in \mathbb{R}$ ou $k \in \mathbb{Z}$, como, por exemplo, $f(t)$ e $f(k)$. Da mesma forma, o n -ésimo elemento de uma sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é denotado por $s(n)$. O valor de uma função avaliada em um instante $t_k = kT$ com $k \in \mathbb{Z}$ é denotado por $f(t_k) = f(kT)$ e também por $f_T(k)$, sempre deixando explícita a sua dependência de $T > 0$. A transformada de Fourier de uma função a tempo contínuo $f(t)$ ou de uma função a tempo discreto $f(k)$ são denotadas indistintamente como $F(\omega)$, $\hat{f}(\omega)$, $\mathcal{F}[f(t)]$ ou $\mathcal{F}[f(k)]$. Sempre que possível, empregamos letras minúsculas para a resposta ao impulso e a mesma letra maiúscula para denotar a função de transferência a ela associada. Da mesma forma, matrizes são denotadas com letras maiúsculas e vetores com letras minúsculas, assim, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ denota uma matriz real com n linhas e m colunas e $v \in \mathbb{R}^n$ denota um vetor real com n elementos, sempre considerado um vetor coluna. O vetor linha, transposto de v , é denotado por v' . Para números complexos $z \in \mathbb{C}$, empregamos z^* para denotar o seu conjugado e para vetores ou matrizes complexas $v \in \mathbb{C}^n$ o seu conjugado transposto é denotado como v^\sim . As operações de convolução em tempo contínuo e em tempo discreto são denotadas da mesma forma $f(t) * h(t)$ e $f(k) * h(k)$, respectivamente. O contexto indica de qual domínio estamos tratando. Finalmente, as derivadas primeira e segunda de uma função $y(t)$, exclusivamente em relação ao tempo, são denotadas por $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$ ou por $y^{(1)}(t)$, $y^{(2)}(t)$ e assim sucessivamente.

1.5 Notas Bibliográficas

No final de cada capítulo, incluímos uma breve discussão a respeito da bibliografia disponível sobre o tema tratado. Ela também tenta dar ao leitor maiores informações quanto aos aspectos considerados importantes, mas que foram tratados de forma subsidiária por fugirem do escopo central do livro. Um deles é, sem dúvida, a implementação numérica de vários resultados teóricos apresentados.

A bibliografia que se encontra no final deste livro contém as referências que julgamos bastante relevantes sob dois aspectos distintos. O primeiro diz respeito a resultados bem consolidados que são apresentados de maneiras ou com propósitos diversos e que devem ser conhecidos através de uma fonte de informação alternativa. Acreditamos que, dessa forma, o leitor possa ter uma visão mais abrangente do assunto. O segundo está ligado a resultados mais recentes, cuja fonte primária procuramos fornecer. Como toda bibliografia, a deste livro não é exaustiva nem completa, mas deve ser tomada como um conjunto inicial de referências que precisa ser aprimorado segundo a opinião e o interesse específico do leitor. Por fim, este capítulo inicial tenta colocar em perspectiva a importância dos resultados matemáticos que serão apresentados ao longo do texto. Neste sentido, acreditamos que a referência [8] tenha particular interesse ao traçar, com sucesso, o desenvolvimento da matemática sob uma precisa e clara visão histórica.



Clique aqui e:

[Veja na loja](#)

Análise Linear de Sinais

José C. Geromel
Grace S. Deaecto

ISBN: 9788521214151
Páginas: 334
Formato: 17 x 24 cm
Ano de Publicação: 2019
