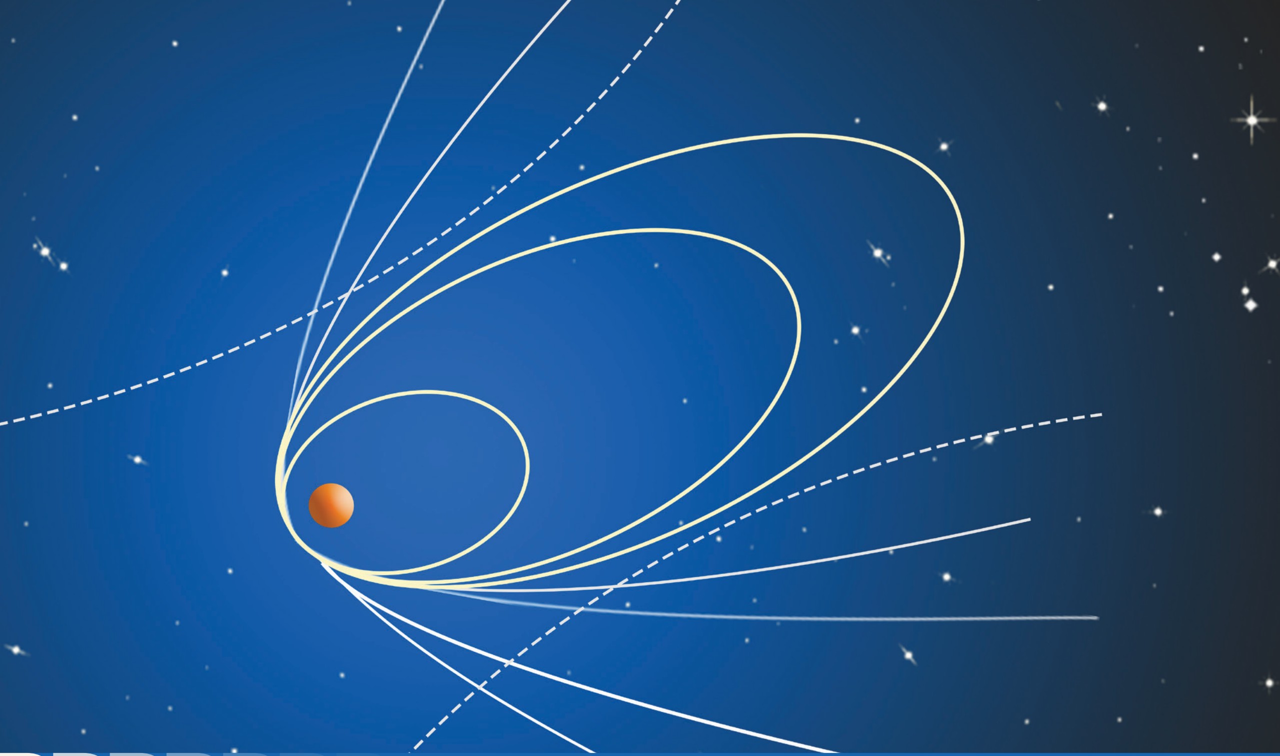


GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO

Abordagem simplificada a tópicos universitários

ANDREI BOURCHTEIN
LUDMILA BOURCHTEIN
GIOVANNI DA SILVA NUNES

Blucher

Andrei Bourchtein
Ludmila Bourchtein
Giovanni da Silva Nunes

GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO

Abordagem simplificada a tópicos universitários

Geometria analítica no plano: abordagem simplificada a tópicos universitários

Editora Edgard Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4° andar
04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Bourchtein, Andrei
Geometria analítica no plano : abordagem simplificada a tópicos universitários / Andrei Bourchtein, Ludmila Bourchtein, Giovanni da Silva Nunes. – São Paulo : Blucher, 2019.
352 p.

Bibliografia
ISBN 978-85-212-1402-1 (impresso)
ISBN 978-85-212-1409-0 (e-book)

1. Geometria analítica I. Título. II. Bourchtein, Ludmila. III. Nunes, Giovanni, da Silva.

19-0022 CDD 516

Índice para catálogo sistemático:
1. Geometria analítica

Conteúdo

Capítulo 1

Geometria analítica na reta

Seção 1.1 Conjuntos

Conjunto é um dos conceitos iniciais, fundamentais em matemática. Intuitivamente, um *conjunto* é uma coleção de objetos unidos por algum critério. Na qualidade de tal critério, pode ser utilizado o mero fato dos objetos pertencerem ao conjunto em questão. Os objetos usados na construção de certo conjunto são chamados de elementos deste conjunto. Obviamente, esta não é uma definição formal, mas simplesmente é uma descrição intuitiva que faz referência aos outros conceitos, que podem parecer intuitivamente claros, mas cuja definição pode ser ainda mais complicada do que a definição do próprio conjunto. No entanto, essa descrição será suficiente para os tópicos da geometria analítica que pretendemos abordar nesse texto. Nessa definição intuitiva, as palavras "coleção", "família" e "classe" podem ser usadas como sinônimos de conjunto. Vamos denotar os conjuntos por letras maiúsculas e os seus elementos por letras minúsculas: $A = \{a\}$. O fato de algum elemento pertencer a um conjunto se denota na forma $a \in A$, e a sua negação na forma $a \notin A$. Vamos usar várias relações e operações elementares entre conjuntos que são estudadas ainda na escola. Mas, para completude do texto e, também, para fixar a terminologia e notação, reproduzimos essas definições e propriedades abaixo.

1 Conceitos básicos de conjuntos

1. *Conjunto vazio.* O conjunto A é chamado vazio (denota-se $A = \varnothing$) caso ele não contenha nenhum elemento.

2. *Conjunto finito e infinito.* Conjunto A é chamado finito se ele tem número finito de elementos. No caso em que A não é vazio e não é finito, ele é chamado infinito.

3. *Subconjunto.* Vamos dizer que A é subconjunto de B se qualquer elemento de A é também elemento de B. Neste caso, usamos a notação $A \subset B$.

4. *Igualdade entre conjuntos.* Dois conjuntos A e B são chamados iguais, usando a notação $A = B$, se simultaneamente $A \subset B$ e $B \subset A$. Em outras palavras, dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Caso os dois conjuntos não sejam iguais, escrevemos $A \neq B$.

5. *União de conjuntos.* A união de dois conjuntos A e B é o conjunto C que contém todos os elementos de A e de B (lembramos que os elementos que pertencem tanto a A como a B são tomadas uma vez só em C). A notação padrão é $C = A \cup B$. Essa definição é facilmente extendida a união de qualquer número de conjuntos: $C = \bigcup\limits_i A_i$ se para qualquer $x \in C$ existe tal conjunto A_i, entre os considerados na união, que $x \in A_i$.

6. *Intersecção de conjuntos.* A intersecção de dois conjuntos A e B é o conjunto C que contém todos os elementos que pertencem tanto a A como a B. A notação usada é $C = A \cap B$. Extendendo a definição a qualquer número de conjuntos, temos $C = \bigcap\limits_i A_i$ se qualquer elemento $x \in C$ pertence a todos os conjuntos da intersecção: $x \in A_i,\ \forall i$.

7. *Diferença de conjuntos.* A diferença de dois conjuntos A e B (nessa ordem específica) é o conjunto C, denotado $C = A \backslash B$, que contém todos aqueles elementos de A que não pertencem a B.

8. *Produto cartesiano.* O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto C cujos elementos são todos os pares ordenados $c = (a, b)$ tais que $a \in A, b \in B$. A notação usual é $C = A \times B$.

2 Propriedades básicas de conjuntos

1. *Lei comutativa*: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$. Notamos que $A \backslash B \neq B \backslash A$ e $A \times B \neq B \times A$.

2. *Lei associativa*: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. *Lei distributiva*: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4. *Relações com conjunto vazio*: $\varnothing \subset A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \times \varnothing = \varnothing$. Notamos que essas propriedades são válidas para qualquer

conjunto A.

5. *Leis de Morgan*: $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$, $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

As demonstrações dessas propriedades são bastante simples, feitas com emprego das definições acima e lógica elementar. Embora isso fuja do escopo deste texto, vamos dar alguns exemplos de tais demonstrações para os leitores interessados.

Demonstração da comutatividade para união: $A\cup B = B\cup A$. Qualquer elemento $x \in A\cup B$, pela definição, tem propriedade de que $x \in A$ ou $x \in B$, o que é o mesmo que dizer que $x \in B$ ou $x \in A$, isto é, $x \in B\cup A$. Do mesmo jeito, qualquer $y \in B\cup A$ também é elemento de $A\cup B$. Assim, os elementos de $A\cup B$ e $B\cup A$ coincidem, isto é, os dois conjuntos são iguais.

Demonstração da associatividade para intersecção: $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$. Qualquer elemento $x \in (A\cap B)\cap C$, pela definição, tem propriedade de que $x \in A\cap B$ e, ao mesmo tempo, $x \in C$. Especificando ainda a primeira inclusão, concluímos que x pertence simultaneamente aos três conjuntos – A, B e C. Por outro lado, qualquer $y \in A\cap(B\cap C)$, pela definição, tem propriedade de que $y \in A$ e, ao mesmo tempo, $y \in B\cap C$. Ou, abrindo a última relação, concluímos que y pertence simultaneamente aos três conjuntos – A, B e C. Assim, os elementos de $(A\cap B)\cap C$ e $A\cap(B\cap C)$ têm as mesmas propriedades e, portanto, esses dois conjuntos são compostos pelos mesmos elementos, isto é, são iguais.

Demonstração da primeira lei de Morgan: $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$. Um elemento x pertence a $A\setminus(B\cup C)$ se x pertence a A e, ao mesmo tempo, não pertence a B ou C. Em outras palavras, x pertence àquela parte de A que não tem nenhum elemento de B nem de C. Por outro lado, um elemento y fica em $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ se y pertence tanto àquela parte de A que não tem nenhum elemento de B como àquela parte de A que não tem nenhum elemento de C. Mas isso significa que y pertence à parte de A que não contém elementos de B nem de C. Assim, as propriedades dos elementos de $A\setminus(B\cup C)$ e $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ coincidem e, portanto, estes dois conjuntos são iguais.

Exercícios resolvidos

1. Demonstrar que $A\setminus B = B\setminus A$ se, e somente se, $A = B$.

Solução.

Supomos que os dois conjuntos são diferentes. Nesse caso, pelo menos um deles tem pelo menos um elemento não contido no outro. Sem perda de generalidade, podemos supor que esse é o elemento a do conjunto A (caso contrário, simplesmente renomeamos os conjuntos). Então, a diferença $A\backslash B$ contém o elemento a, mas $B\backslash A$ não contém esse elemento, porque a não pertence a B. Por outro lado, se $A = B$, então $A\backslash B = B\backslash A = \varnothing$.

2. Seja A conjunto de números primos entre 15 e 30 e B conjunto de números ímpares entre 20 e 30. Encontrar $A \cup B$, $A \cap B$, $A\backslash B$ and $B\backslash A$.

Solução.

Primeiro, especificamos que $A = \{17, 19, 23, 29\}$ e $B = \{21, 23, 25, 27, 29\}$. Efetuando operações, obtemos $A\cap B = \{23, 29\}$, $A\cup B = \{17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$, $A\backslash B = \{17, 19\}$, $B\backslash A = \{21, 25, 27\}$.

Exercícios

1. Demonstrar as seguintes propriedades:
1) $A \cap B = B \cap A$;
2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. Demonstrar que $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\backslash C)$ se, e somente se, $A \cap C = \varnothing$.

3. Encontrar os conjuntos iguais entre os dados: $A = \{x : x^2 - 4x + 3 = 0\}$, $B = \{x : x^2 + x - 2 = 0\}$, $C = \{x : \frac{x^2-4x+3}{x-3} = 0\}$, $D = \{1, 3\}$, $E = \{1, -2\}$, $F = \{-2, 3, 1\}$, $G = A \cup B$, $H = A \cap B$.

4. Encontrar $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $A\backslash(B \cup C)$ e $(A\backslash B) \cup C$ se $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 5, 7\}$ e $C = \{1, 4, 7\}$.

5. Dar um exemplo quando $A \cap B = A \cap C$, mas $B \neq C$.

Seção 1.2 Números racionais e suas propriedades

Um dos principais objetivos da geometria analítica é elaborar técnicas para medir distâncias entre diferentes objetos geométricos e aplicar essas medidas no estudo de formas geométricas diferentes. Num caso mais simples, é preciso saber medir a distância entre dois pontos dados na reta, no plano e no espaço. Para realizar essa tarefa, precisamos de um conjunto dos números bastante rico para poder expressar todas as distâncias que podem surgir. Outro problema fundamental na geometria analítica é representar figuras geométricas na forma analítica via equações, desigualdades e funções, o que faça o estudo de suas propriedades mais simples e acessível.

Para isso, é necessário associar os pontos com os conjuntos numéricos, os quais, de novo, devem ter elementos suficientes para descrever todos os pontos dos espaços uni-, bi- e tri-dimensional.

Por exemplo, usando somente os números naturais não vamos poder medir distância entre quaisquer dois pontos na reta, porque, definindo a unidade de medida como distância entre dois pontos escolhidos, não teremos possibilidade de avaliar a distância entre um destes pontos e aquele que fica no meio dos dois. Analogamente, o conjunto dos números inteiros não é suficiente para associar a cada ponto de uma reta um único número de modo que diferentes pontos sejam relacionados com diferentes números. Grosso modo, isso acontece porque não há "furos" no conjunto dos pontos de uma reta – se marcar quaisquer dois pontos numa reta, então há outros pontos dessa mesma reta que ficam entre os dois marcados e todos estes pontos também pertencem à essa reta. Mas, no conjunto dos números inteiros, isso não se observa – não há nenhum número inteiro entre dois inteiros consecutivos. O conjunto dos racionais é mais amplo – ele contém o conjunto dos inteiros e satisfaz a propriedade de que entre quaisquer dois racionais há outros racionais, o que não é válido para os inteiros. No entanto, ele ainda não satisfaz a propriedade "sem furos", embora num sentido mais fino. (As explicações mais precisas exigem o uso da teoria dos limites ou de ínfimos/supremos, o que está fora do escopo deste texto.) Todos estes conjuntos numéricos – dos naturais, inteiros e racionais – são bastante simples na sua descrição intuitiva, a qual é suficiente para os objetivos deste texto. Portanto, vamos dar uma breve lembrança destes conjuntos numéricos e suas propriedades, que se estudam na escola.

1. Conjunto dos *números naturais* $\mathbb{N}$ consiste dos números utilizados para contagem $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

2. Conjunto dos *números inteiros* $\mathbb{Z}$ é composto dos números naturais, naturais negativos e zero: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

3. Conjunto dos *números racionais* $\mathbb{Q}$ consiste de frações na forma $\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$.

No conjunto dos números racionais, estão definidas, de modo usual, as operações de comparação e quatro operações aritméticas – adição, subtração, multiplicação e divisão. As propriedades da comparação, adição e multiplição são listadas abaixo e as da subtração e divisão são consequências da definição dessas últimas como operações inversas à adição e multiplicação, respectivamente. Todas essas são comuns, estudadas na escola, e são apresentadas para efeitos de completude do texto.

1. *Ordenação do conjunto de racionais.* Para quaisquer dois números

racionais a e b sempre é válida uma e somente uma das seguintes relações: $a = b$, $a < b$ ou $a > b$. Assim, o conjunto dos números racionais é ordenado.

2. *Propriedades de ordenação* (transitividade de sinais "maior", "menor", "igual"). Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$; se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$; se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$.

3. *Axioma de Arquimedes.* Para qualquer número racional a existe um número natural n tal que $n > a$. Ou uma formulação equivalente: para qualquer número racional $a > 0$ existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < a$.

4. *Soma dos racionais.* Para quaisquer números racionais $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$ a sua soma é o número racional c definido pela fórmula $c = a + b = \frac{mq+pn}{nq}$.

5. *Produto dos racionais.* Para quaisquer números racionais $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$ o seu produto é o número racional c definido pela fórmula $c = ab = \frac{mp}{nq}$.

6. *Propriedades de adição e multiplicação.* Para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ são válidas as seguintes propriedades:
1) comutatividade da adição e da multiplicação: $a + b = b + a, ab = ba$.
2) associatividade da adição e da multiplicação: $(a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc)$.
3) distributividade: $(a + b)c = ac + bc$.
4) monotonia da adição: se $a > b$, então $a + c > b + c$; se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.
5) monotonia da multiplicação: se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$; se $a > b$ e $c < 0$, então $ac < bc$.
6) existência do elemento identidade (neutro) em relação à adição e multiplicação: $a + 0 = 0 + a = a\,,\ \forall a \in \mathbb{Q}$; $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a\,,\ \forall a \in \mathbb{Q}$.
7) existência dos elementos inversos em relação à adição e à multiplicação: para qualquer número racional a existe um número racional $-a$ inverso em relação à adição, isto é, $a + (-a) = 0$; para qualquer número racional $a \neq 0$ existe um número racional $a^{-1} = \frac{1}{a}$ inverso em relação à multiplicação, isto é, $a \cdot a^{-1} = 1$.

Observação. Um conjunto que satisfaz as propriedades listadas acima é chamado de *corpo ordenado.*

Exercícios resolvidos

1. Mostrar que a expressão $\frac{\frac{13}{2} - \frac{7\cdot 2+1}{4}}{(\frac{1}{2})^3+2}$ é um número racional.

Solução.

Primeiro, notamos que a expressão é composta das operações aritméticas – soma, diferença, multiplicação, divisão e elevação numa potência

– aplicadas aos números racionais – $\frac{13}{2}$, 7, 2, 1, 4, $\frac{1}{2}$. Como todas essas operações deixam o resultado dentro do conjunto dos racionais, e todas são realizáveis na expressão dada (não tem divisão por 0 ou potência 0^0), então a expressão representa um número racional. Outra maneira de demonstrar isso é levar a expressão a forma da definição, efetuando as operações: $\frac{\frac{13}{2}-\frac{7\cdot 2+1}{4}}{(\frac{1}{2})^3+2} = \frac{\frac{13}{2}-\frac{15}{4}}{\frac{1}{8}+2} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{17}{8}} = \frac{22}{17}$. Assim, chegamos a uma fração com numerador e denominador dos números naturais, o que corresponde a definição de um número racional.

2. Comparar os números racionais $\frac{5}{2^{10}}$ e $\frac{1}{10^2}$.

Solução.

Uma das formas de resolver é reescrever as duas frações com o denominador comum e depois disso comparar os numeradores. Temos então $\frac{5}{2^{10}} = \frac{5\cdot 10^2}{2^{10}\cdot 10^2}$ e $\frac{2^{10}}{2^{10}\cdot 10^2}$. Como $5\cdot 10^2 = 500 < 1024 = 2^{10}$, então a primeira fração é menor que a segunda. Nesse exercício, o modo de resolução mais rápido é notar que $2^{10} = 1024 > 10^3$ e, portanto, $\frac{5}{2^{10}} < \frac{5}{10^3} < \frac{10}{10^3} = \frac{1}{10^2}$.

3. Pode ser demonstrado que $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Nessa fórmula, do lado esquerdo, temos a soma dos naturais que é um número natural, enquanto do lado direito, temos uma fração. Explicar se este resultado é contraditório ou não.

Solução.

Mostremos que o numerador do lado direito é divisível por 6. Consideremos três casos diferentes dos valores de n. Primeiro, observamos que $n(n+1)$ é divisível por 2 para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Se um destes números é divisível ainda por 3, então o numerador é divisível por 6. Se nenhum deles é divisível por 3, então n tem a representação $n = 3k+1$, $k \in \mathbb{N}$, e, consequentemente, o terceiro fator é divisível por 3 – $2n+1 = 2(3k+1)+1 = 6k+3$, o que garante a divisibilidade do numerador por 6. Assim, não há nenhuma contradição na fórmula.

Observação. A dedução da fórmula não é complicada. Um modo de demonstrá-la é via indução matemática. Apresentaremos outra técnica a seguir. Notemos, primeiro que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Portanto, a soma $S_2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2$ está ligada com as somas $S_3 = (2^3-1^3)+(3^3-2^3)+\cdots+((n+1)^3-n^3)$, $S_1 = 1+\cdots+n$ e $S_0 = 1+\cdots+1$ via expressão $S_3 = 3S_2+3S_1+S_0$. Calcular a soma $S_3 = 2^3-1^3+3^3-2^3+\cdots+(n+1)^3-n^3$ é simples, notando que todos os termos se cancelam, com exceção dos dois – o menor 1^3 e o maior $(n+1)^3$, e por isso, $S_3 = (n+1)^3 - 1$. As somas $S_1 = 1 + \cdots + n$ e $S_0 = 1 + \cdots + 1$ são elementares e iguais a $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ e $S_0 = n$. Então, isolando S_2 da relação entre quatro somas $S_3 = 3S_2 + 3S_1 + S_0$ e utilizando os resultados já calculados para outras três somas, obtemos $S_2 = \frac{1}{3}((n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n)$. Simplifando a última expressão, chegamos a fórmula $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercícios

1. Escrever os seguintes números racionais na forma de inteiros:
1) $-\frac{14}{2}$;
2) $\frac{-21}{-7}$;
3) $\frac{12-60}{6\cdot 3-22}$.
Quais destes números são positivos e quais são negativos?

2. Escrever o número racional cujo numerador é o menor número natural de 5 dígitos e o denominador é o maior número natural de 3 dígitos. Qual é a parte inteira deste número?

3. Simplificar a representação dos dois números racionais e compará-los:
1) $\frac{14+6}{2\cdot 6-30}$ e $\frac{17-32}{25-5\cdot 19}$;
2) $\frac{1}{3^2}$ e $\frac{1}{2^3}$.

4. Descrever o procedimento geral na comparação dos dois números racionais. (Começar em positivos com o mesmo denominador, depois passar para positivos gerais e zero, e, finalmente, extender a regra a todos os racionais.)

5. Encontrar n natural tal que $\frac{1}{n}$ é menor que o número racional dado:
1) $\frac{1}{99}$;
2) $\frac{13}{2778}$.

6. Descrever, na forma geral, como encontrar um número natural n tal que $\frac{1}{n}$ é menor que o número racional positivo $\frac{p}{q}$. (Começar notando que o número natural p é maior ou igual a 1.)

7. A soma da progressão aritmética $1 + 2 + \cdots + n$, $n \in \mathbb{N}$, que contém os números naturais e deveria então resultar num número natural, é dada via fração $\frac{n(n+1)}{2}$. Explicar se há contradição nesse resultado.

8. Verificar se a afirmação abaixo é falsa ou verdadeira:
1) qualquer número inteiro é racional;
2) qualquer número racional positivo é natural;
3) qualquer número racional tem infinitas representações via frações $\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$;
4) o conjunto dos números racionais consiste de frações $\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$,

$q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$;
5) qualquer número racional $\frac{p}{q}$ com p positivo é maior que 0;
6) se o numerador p do número racional $\frac{p}{q}$ é maior que o numerador m do número racional $\frac{m}{n}$, então a primeira fração é maior que a segunda;
7) a diferença entre dois números racionais negativos é um número negativo;
8) se o produto de dois números racionais é dado, então, sabendo um dos fatores, sempre podemos encontrar o segundo.

Seção 1.3 Números reais e suas propriedades

1 Números decimais e reais

O conjunto dos racionais é bem mais completo do que o dos inteiros e, além disso, ele é fechado em relação a quatro operações matemáticas principais, isso quer dizer que a aplicação de qualquer uma dessas quatro operações a quaisquer números racionais resulta de novo em um número racional (exceto na divisão por 0 que não está definida). No entanto, isso ainda não é suficiente para efetuar as medidas de quaisquer distâncias entre dois pontos. Realmente, consideremos um triângulo retângulo de dois catetos de comprimento 1. Então, pelo teorema de Pitágoras, $d^2(A,C) = d^2(A,B)+d^2(B,C)$, onde $d(P_1,P_2)$ denota a distância entre os pontos P_1 e P_2 (veja Fig.3.1). Portanto, o comprimento da hipotenusa AC é igual a $\sqrt{2}$, mas o último número não pertence a $\mathbb{Q}$, ou seja, se nos restringirmos só aos números racionais, então, não há possibilidade de calcular a distância entre A e C neste triângulo.

Acontece que $\mathbb{Q}$ não é fechado em relação ao cálculo das raízes mesmo quando essa operação está definida: para alguns números racionais positivos, a raiz quadrada pode resultar em um número não racional e $\sqrt{2}$ é um exemplo disso. Demonstremos a seguir que o número $\sqrt{2}$ não é racional, isto é, não existe um número racional cujo quadrado é igual a 2. Suponhamos o contrário: seja $\sqrt{2}$ um número racional, isto é, $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, m, $n \in \mathbb{N}$ (como $\sqrt{2} > 0$ então ambos os números m e n são naturais). Sem perda de generalidade, podemos supor que a última fração é simplificada, isto é, m e n são primos entre si (não têm divisores comuns); caso não seja assim, então cancelamos todos os divisores comuns de m e n antes de iniciar o próximo passo do raciocínio. Da suposição que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ segue que (elevando os dois lados ao quadrado) $2 = \frac{m^2}{n^2}$, de onde $m^2 = 2n^2$. O número m^2 é divisível por 2, isto é, m^2 é um número par, e então m é um número par

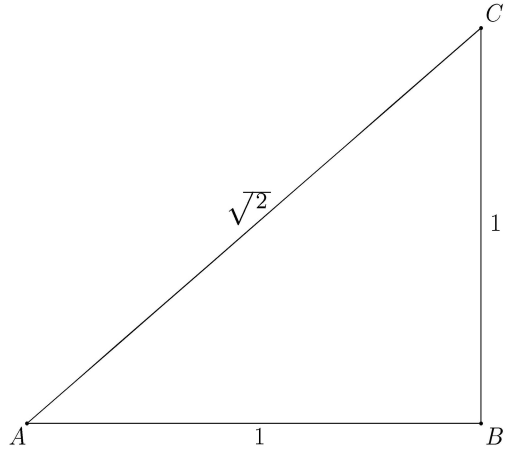


Figura 3.1 Triângulo retângulo com o comprimento da hipotenusa igual a $\sqrt{2}$.

também, isto é, podemos representar o numerador na forma $m = 2k, k \in \mathbb{N}$. Então, a relação entre m e n pode ser reescrita na forma: $4k^2 = 2n^2$ ou, simplificando, $2k^2 = n^2$. Daqui segue que n^2 é um número par e, portanto, n é par também. Dessa forma, encontramos que o número 2 é um divisor comum de m e n, o que contradiz a condição de que m e n são primos entre si. Assim, a suposição de que $\sqrt{2}$ é um número racional não é válida, isto é, o número $\sqrt{2}$ não é racional.

Para incorporar todas as raízes dos números não negativos (e vários outros que, também, não são números racionais) e construir um conjunto numérico "sem furos", vamos introduzir o conceito de *números decimais* que, assim como os racionais, são de uso comum, incluindo seu estudo na escola, embora numa forma menos rigorosa e formal que precisaremos neste texto. Vamos começar da definição.

Números decimais. Um *número decimal* a é a cadeia de *dígitos* (*algarismos*) *decimais* representada na forma $a = (\pm)\, a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, onde $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e os dígitos $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq a_i \leq 9$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$. A parte a_0 é chamada de *parte inteira* de a e toda a parte depois da vírgula é chamada de *parte fracionária* de a.

A referência ao *sistema decimal* se deve ao fato de usar 10 como a base de representação de posição. Para a parte inteira, isso significa que $a_0 = b_n \ldots b_2 b_1 b_0$, $b_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq b_i \leq 9$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, onde b_0 é a parte das unidades, b_1 é a parte de dezenas, b_2 é a parte de centenas etc., ou expressando em fórmula: $a_0 = b_0 + b_1 \cdot 10^1 + b_2 \cdot 10^2 + \ldots + b_n \cdot 10^n$. Para a parte fracionária, isso significa que a_1 indica a parte de décimos, a_2 – a parte de centésimos, etc., levando a seguinte representação $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \dots + a_n \cdot 10^{-n} \dots$. A última é mais importante para nossos objetivos, porque para a parte inteira vai ser suficiente usar a informação de que ela é um número natural ou zero.

Um número decimal é chamado *finito* se $a_i = 0$ para todos $i \geq m$, onde m é algum número natural. Caso contrário, o número decimal é chamado *infinito*. Um número decimal é chamado *periódico* se $a_{k+i} = a_{k+i+p}$ para alguns $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \in \mathbb{N}$, e todos $i \in \mathbb{N}$, ou seja, existe uma cadeia finita de dígitos (de comprimento p), que se repete infinitamente começando do $(k+1)$-ésimo dígito. Um número decimal finito pode ser considerado o caso especial de um decimal periódico (com todos os dígitos nulos a partir de uma posição). Finalmente, um número decimal não finito e não periódico é chamado *infinito aperiódico* ou simplesmente *aperiódico*.

Números reais. O conjunto $\mathbb{R}$ dos *números reais* é o conjunto de todos os números decimais.

Observação. O uso de números decimais é uma maneira vantajosa de representar os números reais por ser intuitivamente clara e diretamente ligada com os números e operações entre eles que costumamos efetuar desde a escola. Há outras abordagens no estudo dos números reais, sendo uma delas a introdução axiomática, quando as propriedades desse conjunto são postuladas na forma de axiomas. O sistema de números decimais pode ser considerado como uma das realizações específicas, mais usada na prática, do conjunto axiomático dos números reais. Essas questões, mais teóricas, do estudo dos números reais estão fora do escopo deste texto, mas é importante notar que todas essas abordagens são equivalentes, isto é, qualquer que seja a definição do conjunto dos números reais ela pode ser transformada em conjunto de números decimais com propriedades respectivas que vamos considerar nessa seção.

Vamos verificar agora qual é a relação entre o conjunto de números racionais e o de reais. Mais especificamente, vamos mostrar que $\mathbb{Q}$ é igual ao conjunto de todos os números decimais finitos ou infinitos periódicos, que no momento vamos denotar por $\tilde{\mathbb{Q}}$.

Primeiro, vamos tomar qualquer elemento de $\mathbb{Q}$ e mostrar que ele pode ser representado via número decimal finito ou infinito periódico. Sem perda de generalidade, podemos considerar a fração $\frac{p}{q}$ positiva, porque a generalização aos números negativos é elementar. Vamos efetuar uma simples divisão de números inteiros, seguindo as regras comuns conhecidas da escola. Se $p \geq q$, então primeiro destacamos na divisão a parte inteira do número dado. O resto é uma fração própria $\frac{m}{q}$ onde $m < q$. Na divisão do número $m \cdot 10$ e números posteriores por denominador q, podem ocorrer os seguintes restos: $0; 1; 2; ...; q - 1$. Se for obtido o resto 0 em algum dos passos da divisão, então a divisão está terminada e temos uma fração decimal finita. Se o resto nunca for igual a 0, então a divisão continua infinitamente. No entanto, como existem só $q - 1$ restos distintos (diferentes de 0) na divisão por q, então, no máximo, dentro de q passos dessa divisão encontramos um resto que já foi obtido anteriormente e, portanto, os algarismos do número decimal começam a se repetir a partir desse momento. Assim, se o resto nunca se anula, obtemos uma fração decimal infinita com período menor ou igual a $q - 1$ algarismos.

Agora mostremos a implicação recíproca: qualquer elemento de $\tilde{\mathbb{Q}}$ pode ser representado na forma $\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. De novo, é suficiente considerar os números positivos. Seja a um elemento positivo de $\tilde{\mathbb{Q}}$. Há duas opções: a é um número finito ou periódico. Vamos começar da opção mais simples, quando a é finito. Então, $a = a_0, a_1a_2...a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} = a_0 + \frac{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n}{10^n} = a_0 + \frac{a_1a_2...a_n}{10^n}$. A última fração do lado direito tem a forma $\frac{p}{q}$, onde $p = a_1a_2 \ldots a_n \in \mathbb{N}$ e $q = 10^n \in \mathbb{N}$, ou seja, este é um número racional. A soma de um número natural com outro racional é de novo um número racional, o que mostra que um número decimal finito é, ao mesmo tempo, um número racional. Consideremos agora um decimal periódico: $a = a_0, a_1a_2...a_nb_1b_2...b_kb_1b_2...b_k... = a_0, a_1a_2...a_n\,(b_1b_2...b_k)$ onde os parênteses são usados para representar, na forma abreviada, o período desse número que contém k dígitos. Separamos este número em duas partes – a sem período e o próprio período: $a = a_0, a_1 \ldots a_n + 0, 0 \ldots 0\,(b_1b_2...b_k)$. A primeira parte já foi considerada antes e foi demonstrado que ela é um número racional. Resta então demonstrar o mesmo resultado para a parte periódica. Para isso, denotamos $s = 0, 0 \ldots 0\,(b_1b_2...b_k)$ e $t = s \cdot 10^n = 0, (b_1b_2...b_k)$. Observamos que $t \cdot 10^k = b_1b_2...b_k, (b_1b_2...b_k)$, isto é, $t \cdot 10^k - t = b_1b_2...b_k$ é um número natural. Então $t = \frac{b_1b_2...b_k}{10^k - 1}$ é um número racional como a razão de dois números naturais. Portanto, $s = \frac{t}{10^n}$ também é um número racional e, consequentemente, a é um número racional. Dessa maneira, provamos que qualquer elemento de $\tilde{\mathbb{Q}}$ pertence também a $\mathbb{Q}$. Junto com a primeira parte da demonstração, isso comprova que os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\tilde{\mathbb{Q}}$ contêm os mesmos elementos, isto é, são iguais.

Deste resultado, segue que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais pode ser definido, de modo equivalente, como o conjunto de todos os números reais finitos e periódicos. A parte restante do conjunto dos reais representa todos os números decimais aperiódicos chamados de números *irracionais*. Assim, o conjunto dos irracionais $\mathbb{I}$ é composto de todos os números decimais aperiódicos.

Observação. Embora $\mathbb{I}$ não seja uma notação comum para o conjunto dos números irracionais, vamos usar este símbolo para abreviar notações (outra opção, mais comum, é $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$).

Notamos que, da mesma relação entre $\mathbb{Q}$ e $\tilde{\mathbb{Q}}$, seguem as seguintes relações entre os conjuntos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

2 Propriedades dos números reais

Com base na representação decimal (ou alguma representação equivalente) pode ser mostrado que os números reais satisfazem as mesmas *propriedades aritméticas* e de *ordenação* que já foram listadas antes para os racionais (propriedades 1-6 da seção 1.2). Isso significa, em particular, que o conjunto $\mathbb{R}$ é um *corpo ordenado*. Adicionalmente, os números reais satisfazem as seguintes propriedades:

1. *Densidade* de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. Para quaisquer dois números reais a e b tais que $a < b$ existe um número racional r que satisfaz a relação $a < r < b$.

O Corolário dessa propriedade trata da densidade de $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$: para quaisquer dois números reais a e b tais que $a < b$ existe um número irracional t que satisfaz a relação $a < t < b$.

2. *Completude* do conjunto $\mathbb{R}$. Em termos muito vagos, o conjunto dos reais é aquele que "não tem furos" (diferentemente do conjunto dos racionais). A ilustração intuitiva deste fato é o resultado sobre equivalência entre $\mathbb{R}$ e a reta coordenada que demonstraremos a seguir. A formulação exata pode ser dada em termos de limites ou de supremos/ínfimos: a primeira forma diz que qualquer sequência de Cauchy é convergente e a segunda que qualquer conjunto limitado superiormente (e não vazio) possui supremo.

A mera formulação da última propriedade numa forma rigorosa exige um conhecimento maior da área de análise. É evidente que a demonstração destes resultados fica muito além do contexto desta obra e os leitores interessados são direcionados aos livros de análise real.

3 Módulo

Como veremos em seguida, a operação do *módulo* (aplicada a números e expressões reais) surge naturalmente e frequentemente nas construções geométricas. Portanto, vale a pena relembrar a definição dessa operação e suas propriedades elementares (embora elas sejam conhecidas da escola).

Definição do *módulo*. O módulo de $a \in \mathbb{R}$ é denotado por $|a|$ e é definido analiticamente na forma $|a| = \begin{cases} a\,, & a \geq 0 \\ -a\,, & a < 0 \end{cases}$.

Propriedades básicas do módulo. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ são válidas as seguintes propriedades:
1. $|a| \geq 0$, $|a| = 0 \leftrightarrow a = 0$;
2. $|a + b| \leq |a| + |b|$;
3. $|a - b| \geq ||a| - |b||$;
4. $|ab| = |a||b|$;
5. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

As demonstrações são elementares e ficarão como exercícios para os leitores.

Exercícios resolvidos

1. Transformar a fração $\frac{13}{7}$ em número decimal.

Solução.

O algoritmo comum da divisão de 13 por 7 leva ao seguinte resultado:

$$\begin{array}{rr|l}
- & 13 & 7 \\ \cline{3-3}
 & 7 & 1{,}857142\ldots \\ \cline{1-2}
- & \mathbf{6}0 & \\
 & 56 & \\ \cline{1-2}
- & \mathbf{4}0 & \\
 & 35 & \\ \cline{1-2}
- & \mathbf{5}0 & \\
 & 49 & \\ \cline{1-2}
- & \mathbf{1}0 & \\
 & 7 & \\ \cline{1-2}
- & \mathbf{3}0 & \\
 & 28 & \\ \cline{1-2}
- & \mathbf{2}0 & \\
 & 14 & \\ \cline{1-2}
 & \mathbf{6} & \\
 & \ldots &
\end{array}$$

Notemos que, na divisão por 7, podem ocorrer, no máximo, 6 restos diferentes. Essa sequência máxima se encontra na fração dada, cujos resíduos da divisão em cada passo estão marcados em negrito: $r_1 = 6$,

$r_2 = 4$, $r_3 = 5$, $r_4 = 1$, $r_5 = 3$, $r_6 = 2$. O próximo resíduo necessariamente deve coincidir com um dos já encontrados. Nesse exemplo, ele coincide com o primeiro resíduo $r_1 = r_7 = 6$ e, por isso, a partir do sétimo passo da divisão, as contas vão se repetir, oferecendo os mesmos resultados que já foram encontrados nos primeiros seis passos. Assim, o resultado final é $\frac{13}{7} = 1,(857142)$.

2. Transformar o número decimal $-5,42(376)$ em uma fração.

Solução.

É mais simples transformar o respectivo número positivo $5,42(376)$ e depois acrescentar o sinal negativo. Primeiro, separamos a parte periódica, representando o número na forma $5,42(376) = 5,42 + 0,00(376)$. Para primeira parte, temos $5,42 = \frac{542}{100}$ e a segunda reescrevemos como $0,00(376) = 0,(376) \cdot 10^{-2}$. O número $t = 0,(376)$ vamos transformar seguindo o procedimento geral: $t \cdot 10^3 - t = 376,(376) - 0,(376) = 376$ e, portanto, $t = \frac{376}{10^3-1} = \frac{376}{999}$. Juntando as partes, encontramos $5,42(376) = \frac{542}{100} + \frac{376}{999} \cdot 10^{-2} = \frac{542 \cdot 999+376}{999 \cdot 100}$, o que é uma fração com o numerador inteiro e o denominador natural, isto é, a representação procurada. Finalmente, para o número original, temos $-5,42(376) = -\frac{542 \cdot 999+376}{999 \cdot 100}$.

3. Responder as seguintes questões:

1) o produto de um número racional com um irracional é sempre um número irracional?

2) existem ou não dois números irracionais cuja soma e produto são racionais?

3) se as potências a^2 e a^3 são irracionais, a potência a^4 deve ser irracional também?

Solução.

1) Caso o número racional seja zero, então o produto vai ser o número racional – 0. Em todos os outros casos, o resultado vai ser um número irracional. Realmente, se o produto $c = a \cdot b$ com $a \neq 0$ racional e b irracional fosse racional, então dividindo c por a deveriamos encontrar um número racional, mas b é irracional, o que leva a contradição.

2) Existem, basta tomar $a = \sqrt{2}$ e $b = -\sqrt{2}$.

3) Não necessariamente, basta considerar $a = \sqrt[4]{2}$.

4. Verificar se os seguintes números são racionais ou irracionais:

1) $\sqrt[5]{50}$;

2) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$;

3) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Solução.

1) Vamos supor que $\sqrt[5]{50}$ é um número racional, isto é, $\sqrt[5]{50}=\frac{m}{n}$, $m,\ n\in\mathbb{N}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que a última fração é simplificada, isto é, m e n são primos entre si (não têm divisores comuns); caso não seja assim, então cancelamos todos os divisores comuns de m e n antes de iniciar o próximo passo do raciocínio. Da suposição que $\sqrt[5]{50}=\frac{m}{n}$, segue que $50=\frac{m^5}{n^5}$, de onde $m^5=50n^5$. Então, o número m^5 é par e, consequentemente, m é um número par também, isto é, $m=2k, k\in\mathbb{N}$. Por outro lado, da mesma relação $m^5=50n^5$ segue, também, que o número m^5 é divisível por 5 e, consequentemente, m é divisível por 5 também, isto é, $m=5l, l\in\mathbb{N}$. Portanto, m é divisível por 2 e 5 ao mesmo tempo, isto é, $m=10p, p\in\mathbb{N}$. Substituindo essa representação na relação entre m e n, obtemos $10^5p^5=50n^5$ ou $n^5=2\cdot 10^3p^5$, o que significa que n^5 é divisível por 2 e 5 e então o mesmo é válido para n. Por isso, m e n tem divisores comuns (2 e 5) o que contradiz a nossa suposição. Assim, o número $\sqrt[5]{50}$ é irracional.

2) Vamos supor que $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ seja um número racional. Então, o seu quadrado – $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=2+6+2\sqrt{12}=8+4\sqrt{3}$ – também deve ser racional. Disso segue que $\sqrt{3}$ é racional, o que não é verdade (esse último resultado pode ser demonstrado do mesmo modo como foi feita a demonstração para $\sqrt{2}$). Portanto, o número dado é irracional.

3) Observamos, primeiro, que as expressões dentro das raízes externas podem ser transformadas em quadrados completos: $3-2\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^2$ e $3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$. Então, $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=-(1-\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})=-2$, o que é um número racional.

5. Resolver a equação modular $\left|\frac{x-1}{x+2}\right|=3$ e a desigualdade modular $\left|\frac{x-1}{x+2}\right|<3$.

Solução.

1) A equação modular equivale às duas equações sem módulo: $\frac{x-1}{x+2}=3$ e $\frac{x-1}{x+2}=-3$ (lembremos que $|a|=3$ significa que $a=3$ e $a=-3$). Resolvendo a primeira, obtemos $x-1=3x+6$ e então $x_1=-\frac{7}{2}$. Da segunda temos $x-1=-3x-6$ e então $x_2=-\frac{5}{4}$. Essas são as duas soluções da equação modular.

2) Reescrevemos a desigualdade modular na forma sem módulo $-3<\frac{x-1}{x+2}<3$ (lembremos que $|a|<3$ significa que $-3<a<3$). Para resolver a desigualdade à direita, temos que considerar duas situações. Primeiro, se $x+2>0$, então a desigualdade direita se reduz a $x-1<$

$3x+6$, cuja solução é $x > -\frac{7}{2}$. Como a última solução deve ser escolhida do conjunto $x > -2$ (onde $x+2 > 0$), então a primeira solução é $x > -2$. Segundo, se $x+2 < 0$, então a desigualdade direita se reduz a $x - 1 > 3x+6$ com a solução $x < -\frac{7}{2}$. Como essa solução satisfaz a condição $x < -2$ (i.e. $x+2 < 0$), então ela é a segunda solução. Portanto, a solução da desigualdade direita é $x > -2$ e $x < -\frac{7}{2}$, expressando essa em termos de conjuntos, temos $S_d = \{x : x > -2\} \cup \{x : x < -\frac{7}{2}\}$. Passamos à desigualdade esquerda, que resolvemos seguindo o mesmo algoritmo. Se $x+2 > 0$, então a desigualdade esquerda se reescreve como $x-1 > -3x-6$, levando à solução $x > -\frac{5}{4}$. Essa última satisfaz a condição $x > -2$ e, por isso, toda ela é a primeira parte da solução. Se $x+2 < 0$, então a desigualdade esquerda se reduz a $x-1 < -3x-6$, cuja solução é $x < -\frac{5}{4}$. Dela, temos que tomar a parte que satisfaz a condição $x < -2$ e, portanto, a segunda parte da solução é $x < -2$. Portanto, a solução da desigualdade esquerda é $x > -\frac{5}{4}$ e $x < -2$, ou, em termos de conjuntos, $S_e = \{x : x > -\frac{5}{4}\} \cup \{x : x < -2\}$. Finalmente, voltamos à desigualdade original. Como as desigualdades direita e esquerda devem ser satisfeitas ao mesmo tempo, temos que considerar a intersecção das soluções das duas. Assim, a solução da desigualdade original é $x < -\frac{7}{2}$ e $x > -\frac{5}{4}$, ou, em termos de conjuntos, $S = S_d \cap S_e = \{x : x < -\frac{7}{2}\} \cup \{x : x > -\frac{5}{4}\}$.

Notamos que, nesse algoritmo, resolvemos primeiro a desigualdade direita, depois a esquerda (para cada uma delas considerando ambas as opções do denominador) e depois achamos a solução final como intersecção das duas soluções obtidas. Naturalmente, alguns passos da resolução podem mudar de ordem. Por exemplo, primeiro, poderíamos fixar o sinal positivo do denominador e resolver a desigualdade dupla correspondente. Depois, fixamos o sinal negativo do denominador e resolvemos a segunda desigualdade dupla. Para finalizar, encontramos a união das soluções obtidas para os sinais diferentes. Obviamente, os dois algoritmos levam à mesma solução. Recomendamos ao leitor efetuar esse segundo procedimento e conferir dessa maneira a solução obtida acima.

Observação. O método de solução pode ser representado na forma mais transparente se juntarmos abordagem analítica e geométrica no método chamado de método de intervalos. Exploramos essa possibilidade nos exercícios da seção 1.5, depois de introduzir a relação entre números reais e pontos da reta, necessária para aplicação desse método.

Exercícios

1. Transformar as frações dadas em números decimais:
1) $\frac{3}{10}$;
2) $\frac{10}{3}$;
3) $-\frac{15}{8}$;
4) $-\frac{19}{12}$;
5) $-\frac{20}{7}$.

2. Transformar os números decimais em frações:
1) $0,3$;
2) $0,(3)$;
3) $-2,7(25)$;
4) $-5,617(23)$;
5) $6,01(522)$.

3. Indicar quais números são racionais e quais são irracionais:
1) $0,111111...$;
2) $0,101010...$;
3) $0,11011101...$;
4) $0,1010010001...$;
5) $0,0101101110....$

4. Verificar se os números dados são racionais ou irracionais:
1) $\sqrt{3}$;
2) $\sqrt[3]{3}$;
3) $\sqrt[3]{49}$;
4) $\sqrt[4]{7}$;
5) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;
6) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$;
7) $\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}+\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$;
8) $\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$.

5. Sejam p e q números racionais, e a e b irracionais. Analisar se os seguintes números sao racionais ou irracionais:
1) $p+q$;
2) $a+b$;
3) $p+a$;
4) $p\cdot q$;
5) $a\cdot b$;
6) $p\cdot a$;
7) p^2;
8) a^2;

9) $\sqrt{p}$;
10) $\sqrt{a}$.

6. Comparar os números reais:
1) $\sqrt{2}$ e $1,4$;
2) $-\frac{2}{3}$ e $-0,(6)$;
3) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ e 1;
4) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$;
5) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ e $\sqrt{a+b}$;
6) $\sqrt{2ab}$ e $\sqrt{a^2+b^2}$;
7) $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt{2}$;
8) π^2 e 2^π.

7. Encontrar todos os números reais x tais que
1) $10-x^2<6$;
2) $(x-1)^2\leq 12$;
3) $(x-1)(x-5)<0$;
4) $x^2-6x+5\geq 0$;
5) $(x-\sqrt{3})(x-2)(x+3)>0$;
6) $10^x<\frac{1}{100}$;
7) $\frac{2}{x}-\frac{1}{1+x}\leq 0$;
8) $x+2^x<3$.

8. Resolver as seguintes equações modulares:
1) $|x|=2$;
2) $|2x-1|=3$;
3) $|2+x|=2$;
4) $\left|\frac{2-x}{x-1}\right|=0$;
5) $\left|\frac{2x-1}{x-2}\right|=1$.

9. Resolver as seguintes desigualdades modulares:
1) $|x|<2$;
2) $|x|\geq 2$;
3) $|2x-1|\leq 3$;
4) $|2x-1|>3$;
5) $\left|\frac{2-x}{x-1}\right|<2$;
6) $\left|\frac{2x-1}{x-2}\right|>1$.

10. Verificar se afirmação abaixo é falsa ou verdadeira:
1) qualquer número racional é real;
2) qualquer número irracional é real;
3) existem números que são racionais e irracionais ao mesmo tempo;
4) o conjunto dos irracionais é o conjunto de todas as raízes junto com

o número π e o número e;
5) o conjunto dos irracionais é o conjunto de todos os números que não são racionais;
6) o produto de dois números irracionais é um número irracional;
7) entre dois números irracionais sempre existe um racional;
8) se o produto dos dois números irracionais é dado, então, sabendo um dos fatores, sempre podemos encontrar o segundo.

Seção 1.4 Reta coordenada e sua equivalência com o conjunto dos reais

Definição da reta coordenada. Uma *reta coordenada* é a reta com as seguintes características introduzidas: o *ponto origem*, o *sentido positivo e negativo*, e, finalmente, a *unidade de medida.* É preciso fazer alguns comentários sobre essas características. Notamos que a origem O é um ponto escolhido de modo arbitrário, mas, depois de ser escolhido, ele é fixo. O sentido positivo é a parte da reta que fica de um dos lados do ponto origem, e então o negativo fica do lado oposto. A escolha da parte positiva é arbitrária, mas, caso a reta tenha orientação horizontal, então é tradicional chamar a parte à direita da origem de sentido positivo e, então, a parte negativa fica à esquerda da origem. Se a reta tem orientação vertical, então, normalmente, o sentido positivo é a parte acima da origem e o negativo fica abaixo. O sentido positivo é marcado pela letra x (ou qualquer outra letra apropriada) (veja Fig.4.1). Finalmente, a unidade de medida é da escolha arbitrária que representa a distância igual a 1 entre ponto origem e o ponto específico I (usualmente) localizado na parte positiva da reta coordenada (veja Fig.4.1). A reta coordenada também é chamada de *eixo coordenado* ou eixo Ox (caso x seja usado para marcar o sentido positivo).

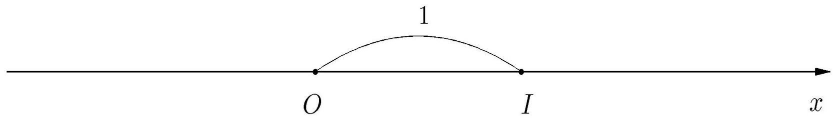


Figura 4.1 Reta coordenada: origem, sentido positivo e unidade de medida.

Vamos estabelecer uma relação de *equivalência* entre o conjunto de todos os pontos de uma reta coordenada e todos os números reais, isto é, vamos associar a cada ponto um único número real, e vice-versa, a cada número real vai corresponder um único ponto da reta (tal relação também é chamada de biunívoca ou bijetora). Notamos que há diferentes formas de gerar uma relação de equivalência entre os dois conjuntos. A especificidade da relação que vamos introduzir é que ela está intimamente ligada com a medida da distância do ponto origem até o ponto corrente da reta coordenada.

Primeiramente, observamos que basta nós conseguirmos estabelecer a equivalência procurada entre a parte positiva da reta coordenada e o conjunto dos números reais positivos. De fato, relacionamos (de modo único) o ponto origem com o número 0 e, usando a equivalência construída entre as partes positivas dos dois conjuntos, a cada ponto P_- da parte negativa, que é simétrico (em relação à origem) ao ponto P da parte positiva, associamos o número negativo $-x_P$, onde x_P é aquele número positivo que corresponde a P. Assim, a relação entre as partes positivas é realmente o problema principal, cuja resolução será suficiente para solucionar todo o problema de imediato.

Vamos fixar que o ponto origem O corresponde ao número 0. Marcamos um ponto arbitrário P e elaboramos o algoritmo que possibilita associar a P um único número real positivo. Inicialmente, marcamos os pontos (à direita de O) que correspondem aos múltiplos da unidade de medida: $I_1 \equiv I$ corresponde à unidade da medida, I_2 a duas unidades (tem distância igual a 2 até a origem), ..., I_n a n unidades (tem distância igual a n até a origem), etc. (veja Fig.4.2). A cada um destes pontos, associamos o número positivo igual àquela distância que o ponto tem até a origem: $I_1 \leftrightarrow 1$, $I_2 \leftrightarrow 2$, ..., $I_n \leftrightarrow n$, ... (veja Fig.4.2). Dessa maneira, nós estabelecemos a equivalência entre todos os pontos múltiplos da unidade de medida e todos os números naturais. Se P coincide com um destes pontos, por exemplo, com I_n, então o número correspondente x já é encontrado – $x = n$ – e o algoritmo terminou. Caso isso não ocorra, como P não coincide com nenhum dos I_n, então ele deve ficar entre os dois pontos consecutivos destes. Vamos supor (sem perda da generalidade) que ele fica entre I_n e I_{n+1}. Neste caso, determinamos a parte inteira do número procurado x na forma $x_0 = n$ e finalizamos o passo 0 do nosso algoritmo, prosseguindo então para o próximo passo. Começamos este passo dividindo o segmento $[I_n, I_{n+1}]$ com uso de um décimo da medida original. Obviamente, neste caso, $[I_n, I_{n+1}]$ (cujo comprimento é igual a 1) será dividido em dez partes de mesmo comprimento e os pontos da divisão marcaremos por (na ordem de esquerda para direita) $A_{1,0} \equiv I_n$, $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{1,4}$, $A_{1,5}$, $A_{1,6}$, $A_{1,7}$, $A_{1,8}$, $A_{1,9}$,$A_{1,10} \equiv I_{n+1}$ (veja Fig.4.3). Se P coincidir com um destes pontos da primeira subdivisão, por exemplo, com $A_{1,7}$, então o número procurado já foi encontrado – $x = n,7$ – e terminamos o algoritmo. Caso contrário, supondo que P fica entre $A_{1,7}$ e $A_{1,8}$, determinamos o primeiro algarismo decimal após a vírgula, $x_1 = 7$, na representação decimal do número real $x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_i \ldots$ e finalizamos o passo número 1. Já é possível deduzir como determinamos o segundo algarismo decimal de x no passo número 2. Faremos uma subdivisão do intervalo $[A_{1,7}, A_{1,8}]$ da localização corrente de P em dez partes iguais, usando, então, um centésimo da medida original da unidade, e marcamos os pontos dessa subdivisão por $A_{2,0} \equiv A_{1,7}$, $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, $A_{2,3}$, $A_{2,4}$, $A_{2,5}$, $A_{2,6}$, $A_{2,7}$, $A_{2,8}$, $A_{2,9}$, $A_{2,10} \equiv A_{1,8}$ (veja Fig.4.4). Se P coincidir com um dos pontos dessa segunda subdivisão, por exemplo, com $A_{2,3}$, então o número procurado já foi encontrado – $x = n, 73$ – e terminamos o algoritmo. Caso contrário, supondo que P fica entre $A_{2,3}$ e $A_{2,4}$, determinamos o segundo algarismo decimal de x após a vírgula $x_2 = 3$ e finalizamos o passo número 2. E assim por diante.

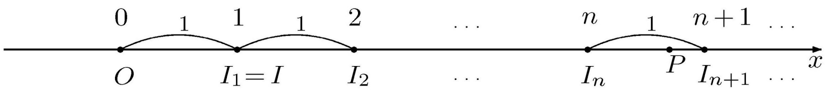


Figura 4.2 Determinação da parte inteira de x.

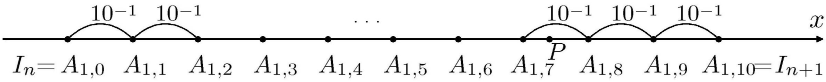


Figura 4.3 Determinação do primeiro algarismo decimal de x.

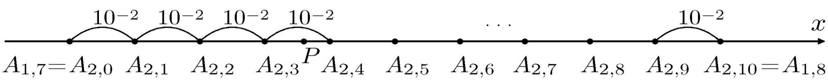


Figura 4.4 Determinação do segundo algarismo decimal de x.

No i-ésimo passo, determinamos o i-ésimo algarismo decimal x_i usando a i-ésima subdivisão do intervalo corrente de localização de P em dez partes de comprimento igual a 10^{-i} da medida unitária original. Se P coincidir com um dos pontos da i-ésima subdivisão, por exemplo, com $A_{i,1}$, então $x_i = 1$ e o número procurado é $x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_i$, finalizando o algoritmo neste passo. Caso contrário, supondo que P fica entre $A_{i,1}$ e $A_{i,2}$, determinamos $x_i = 1$, finalizamos o passo número i e passamos para o próximo. Dessa maneira, em cada passo do algoritmo, determinamos o algarismo corrente e, dependendo da localização de P, ou paramos o algoritmo (o que significa que os demais algarismos são nulos) ou passamos para o próximo passo, no qual será encontrado o próximo algarismo de x. Em qualquer uma das duas situações – um algoritmo finito ou infinito –, todos os algarismos de x serão definidos de modo único e, assim, vamos construir um único número x correspondente ao ponto escolhido P.

É importante notar que o número encontrado representa a distância de O a P, que denotamos via $d(O,P)$. Realmente, no passo 0, encontramos a distância de O até o primeiro ponto I_n à esquerda de P. Se $P = I_n$, então o número $x_P = n$ é igual à distância $d(O,P) = n$. Caso contrário, temos uma aproximação $x_0 = n$, inferior, para essa distância, sabendo que $d(O,P)$ é maior que n e menor que $n+1$ (uma vez que P fica entre I_n e I_{n+1}). Isso quer dizer que temos avaliação com erro $\epsilon_0 = d(O,P) - x_0$ menor que 1. No passo número 1, encontramos a distância exata x_0, x_1 caso P coincidir com um dos pontos da primeira subdivisão, ou sua aproximação inferior com precisão melhor que 10^{-1}. E assim por diante. No i-ésimo passo, ou encontramos a distância exata $d(O,P) = x_0, x_1x_2\dots x_i$ caso P coincida com um dos pontos da i-ésima subdivisão, ou achamos sua aproximação inferior $x_0, x_1x_2\dots x_i$ com erro $\epsilon_i = d(O,P) - x_0, x_1x_2\dots x_i$ menor que 10^{-i} (uma vez que, no último caso, P fica entre os dois pontos consecutivos da subdivisão com distância entre estes igual a 10^{-i}). Notamos que, em cada passo, o erro ϵ_i definido acima é a diferença entre a distância exata $d(O,P)$ e a sua aproximação inferior $x_0, x_1x_2\dots x_i$, isto é, $\epsilon_i \geq 0$ em todos os passos do algoritmo. Assim, se o algoritmo for finito, então determinamos a distância exata em i passos. Se for infinito, então, depois do i-ésimo passo, encontramos a aproximação para distância com erro menor que 10^{-i} e, em cada passo posterior, melhoramos a precisão de avaliação em 10 vezes comparando com o passo anterior. Desta maneira, efetuando um número bastante grande de passos, faremos com que o erro ϵ_i de aproximação da distância seja menor que qualquer número positivo. Como o erro considerado de aproximação é uma grandeza não negativa e o único número não negativo menor que qualquer positivo é 0, então, no final do algoritmo, encontramos a distância exata de O até P.

Usando o algoritmo similar no sentido inverso, isto é, partindo de um número real positivo e gerando o único ponto correspondente, podemos ver que a cada número real positivo corresponde um único ponto da reta coordenada (deixamos os detalhes deste algoritmo inverso como exercício para os leitores). Assim, a cada ponto da parte positiva da reta coordenada corresponde um único número real positivo e vice-versa. Isso significa que entre os dois conjuntos – o da parte positiva da reta coordenada e o dos números reais positivos – foi estabelecida uma relação de equivalência.

Como já foi comentado anteriormente, o resto é simples: o ponto O corresponde ao número 0 e, para qualquer ponto P_- da parte negativa da reta coordenada, basta encontrar o ponto simétrico P (que fica na mesma distância de O, mas na parte positiva), tomar o número positivo x_P correspondente a P e acrescentar a ele sinal menos – o número negativo $-x_P$ vai ser aquele que corresponde a P_-. Assim, usando o algoritmo proposto, é estabelecida uma relação de equivalência entre todos os pontos da reta coordenada e todos os números reais. O número x_P que corresponde a P é chamado de *coordenada do ponto* P. Devido à relação de equivalência, vamos usar com frequência a notação $P = x_P$, o que não significa a igualdade entre um ponto e um número e sim a equivalência entre os dois. Importante notar que a aplicação do algoritmo específico na elaboração da equivalência permitiu gerar as coordenadas intimamente ligadas com as distâncias até o ponto origem: se $P = O$, então a coordenada correspondente $x_P = 0$ representa a distância entre dois pontos coincidentes; se P fica na parte positiva, então x_P é igual à distância de O até P; finalmente, para qualquer P da parte negativa, x_P representa a distância de O até P acrescida do sinal negativo. Usando, como antes, a notação $d(O, P)$ para distâncias, reescrevemos isso na forma: $d(O, P) = 0$ caso $x_P = 0$ (o que equivale à condição $P = O$); $d(O, P) = x_P$ caso $x_P > 0$ (a última desigualdade equivale à condição de que P fica à direita de O); $d(O, P) = -x_P$ caso $x_P < 0$ (a última desigualdade equivale à condição de que P fica à esquerda de O). Lembrando a definição de *módulo* de uma grandeza, concluímos, imediatamente, que $d(O, P) = |x_P|$.

Observação 1. Devido à relação de equivalência entre conjunto dos reais e dos pontos de uma reta coordenada, muitas vezes, os números reais são chamados de pontos reais, e os pontos, de números. A reta coordenada (eixo coordenado) é chamada da *reta real* (*eixo real*). Prosseguindo com essa analogia, dizer que o ponto A fica à direita de B é dar a mesma informação que pode ser expressa em termos das suas coordenadas como $x_A > x_B$; afirmar que o ponto A fica entre B e C (com C localizado mais à direita entre os três pontos) é o mesmo que relacionar suas coordenadas via desigualdade $x_B < x_A < x_C$. E assim por diante. Isso quer dizer que, daqui para frente, podemos misturar no texto os conceitos de pontos e suas coordenadas, sem perder a precisão de raciocínio.

Observação 2. Às vezes, é conveniente considerar o *eixo real extendido*, incluindo infinitos positivo ($+\infty$) e negativo ($-\infty$). Neste caso, todos os pontos reais (geométricos) são chamados de *pontos finitos* e os infinitos são chamados de *pontos infinitos.*

Exercícios resolvidos

1. Marcar o ponto com coordenada $x = \sqrt{5}$.

Solução.

Da representação $5 = 1^2 + 2^2$, notamos que $\sqrt{5}$ pode ser considerado como o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo com os catetos de comprimento 1 e 2. Então, construímos o triângulo retângulo ABC com catetos AB e BC medindo, respectivamente, 1 e 2 unidades escolhidas, por exemplo, centímetros. Logo escolhemos a reta coordenada que passa por A e C, tem a origem em A, o sentido positivo na direção de A para C e a unidade de medida usada na construção de ABC (veja Fig.4.5). Então, o ponto C vai ter a coordenada $\sqrt{5}$ nesse sistema. Ou, equivalentemente, para usar uma reta coordenada já determinada antes, deslocamos o triângulo ABC (construído com a mesma unidade de medida usada na reta coordenada) de tal modo que o lado AC ficasse em cima da reta coordenada com o vértice A coincidindo com a origem e o vértice C localizado na parte positiva da reta coordenada. De novo, o ponto C vai ter coordenada $\sqrt{5}$ nessa reta.

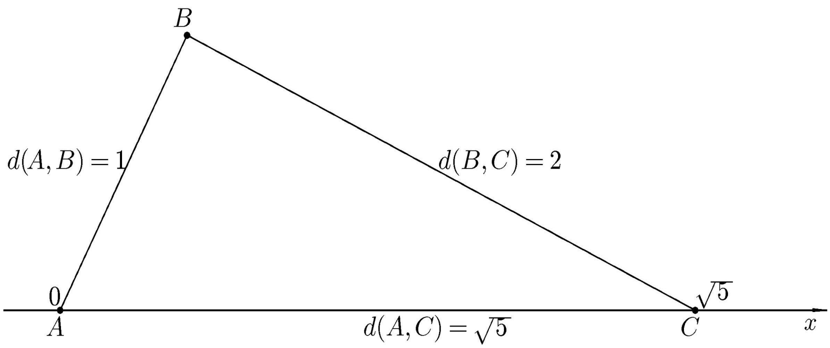


Figura 4.5 Ponto $\sqrt{5}$ na reta coordenada.

2. Marcar (aproximadamente) os pontos A e B com coordenadas $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$, respectivamente, explicando porque um fica à esquerda/direita de outro.

Solução.
Usamos as seguintes avaliações simples dos números irracionais: $\sqrt{5} < 2,5$, $\sqrt{3} > 1,5$, $\sqrt{2} > 1$. Então $\sqrt{5} - \sqrt{3} < 2,5 - 1,5 = 1 < \sqrt{2}$. Assim, o ponto A fica à esquerda de B (veja Fig.4.6).

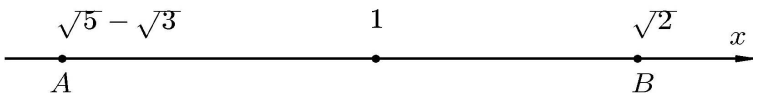


Figura 4.6 Pontos $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$ na reta coordenada.

Outra maneira de comparar a localização de A e B, é usando as propriedades das expressões envolvidas. Podemos mostrar que, em geral, o ponto A de coordenada $x_A = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ fica à esquerda de B de coordenada $x_B = \sqrt{a-b}$ se $a > b \geq 0$. Realmente, como as duas coordenadas são positivas, podemos elevar ao quadrado sem modificar a sua relação: $x_A^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$ e $x_B^2 = a - b$. Então, temos que comparar $b - 2\sqrt{ab}$ e $-b$. Como $a > b$, segue que $b - 2\sqrt{ab} < b - 2\sqrt{b^2} = b - 2b = -b$, isto é, x_A é menor que x_B e, portanto, A fica à esquerda de B.

Exercícios

1. Marcar os pontos cujas coordenadas são
1) $x = 2$;
2) $x = -3$;
3) $x = \frac{5}{3}$;
4) $x = -\frac{3}{5}$;
5) $x = \sqrt{2}$;
6) $x = -\sqrt{5}$.

2. Marcar (aproximadamente) os dois pontos com coordenadas dadas, explicando porque um fica à esquerda/direita de outro:
1) $\sqrt{2}$ e $1,4$;
2) $-\frac{2}{3}$ e $-0,(6)$;
3) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ e -1;
4) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$;
5) $-\pi$ e $-3,14$;
6) $(-\pi)^2$ e $(-3,14)^2$.

3. Marcar os pontos cujas coordenadas são:
1) três números naturais menores que π;

2) três números inteiros que ficam entre $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$;
3) três números racionais que ficam entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$;
4) três números irracionais múltiplos de $-\sqrt{5}$;
5) três números reais que satisfazem a relação $x^3 = 2x$.

Seção 1.5 Alguns problemas geométricos na reta coordenada

1 Distância entre dois pontos

Usando o módulo, podemos expressar a *distância entre quaisquer dois pontos* numa reta coordenada numa forma compacta. Primeiro, lembramos mais uma vez que a distância de qualquer ponto P até a origem O é o módulo da coordenada de P: $d(O,P) = |x_P|$. Consideremos agora dois pontos arbitrários A e B. Vamos supor, inicialmente, que B fica à direita de A, ou seja, $x_B > x_A$. Se ambos os pontos ficam na parte positiva da reta coordenada, então $d(A,B) = d(O,B) - d(O,A) = x_B - x_A$ (Fig.5.1). Se a origem fica entre A e B, então $d(A,B) = d(O,B) + d(O,A) = x_B + (-x_A) = x_B - x_A$ (Fig.5.2). Finalmente, se A e B ficam à esquerda do ponto O, então $d(A,B) = d(O,A) - d(O,B) = -x_A - (-x_B) = x_B - x_A$ (Fig.5.3). Portanto, em qualquer situação, temos $d(A,B) = x_B - x_A$. Se a relacão entre os pontos é diferente – A fica à direita de B – então basta trocar a nomeação dos pontos e suas coordenadas na fórmula já deduzida e obtemos $d(A,B) = x_A - x_B$. Assim, se $x_B > x_A$ (B fica à direita de A) então $d(A,B) = x_B - x_A$, se $x_A > x_B$ (A fica à direita de B) então $d(A,B) = x_A - x_B$, e se $x_B = x_A$ (A coincide com B) então $d(A,B) = 0$. Expressando com o módulo, temos

$$d(A,B) = |x_A - x_B| \tag{5.1}$$

qualquer que seja a posição de A e B.

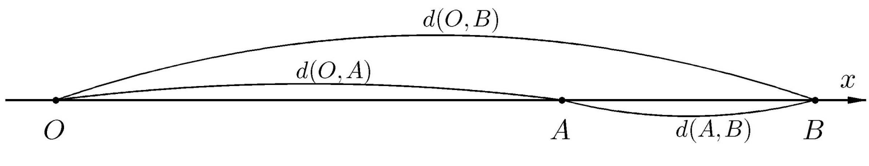


Figura 5.1 Distância entre A e B: B fica à direita de A, que fica à direita de O.

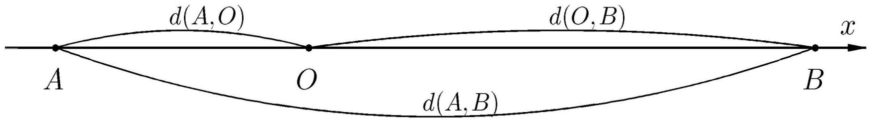


Figura 5.2 Distância entre A e B: B fica à direita de O, que fica à direita de A.

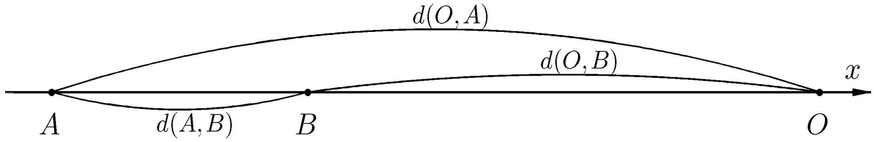


Figura 5.3 Distância entre A e B: O fica à direita de B, que fica à direita de A.

2 Intervalos, seu comprimento e divisão

A seguir, vamos usar as seguintes notações naturais para coordenadas de pontos: a coordenada do ponto A denotamos por a, de B – por b, de C – por c, etc.

Intervalo. Um *intervalo (segmento)* é o conjunto de todos os pontos da reta coordenada que ficam entre dois pontos dados A e B. Em termos de coordenadas, a formulação equivalente pode ser dada na forma: um intervalo é o conjunto de todos os números reais que ficam entre os dois dados a e b. Os pontos A e B (ou a e b), chamados de extremidades do intervalo, podem fazer ou não parte do intervalo. Dependendo disso, são diferenciados os seguintes tipos de intervalos: $a < x < b$ (*intervalo aberto*), ou $a \le x \le b$ (*intervalo fechado*), ou $a \le x < b$, ou $a < x \le b$ (os dois últimos intervalos são chamados *semi-abertos ou semi-fechados*). A notação comum é (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ e $(a, b]$, respectivamente. Em termos de pontos da reta coordenada, as notações correspondentes são (A, B), $[A, B]$, $[A, B)$ e $(A, B]$. A menos que seja dito o contrário, vamos considerar os intervalos "normais", isto é, aqueles onde a primeira extremidade A fica à esquerda da ou coincide com a segunda B (ou, equivalentemente, $a \le b$).

Observação 1. Devido à relação de equivalência entre conjuntos numéricos e geométricos, o convênio comum, já apontado na seção anterior, é usar as notações de intervalos numéricos para os geométricos e vice-versa, quando for conveniente.

Observação 2. No caso de uma desigualdade estrita, o ponto a pode ser $-\infty$ e o ponto b pode ser $+\infty$. No primeiro caso, a desigualdade formal

$-\infty < x < b$ (ou $-\infty < x \le b$) significa simplesmente $x < b$ (ou $x \le b$), e uma interpretação similar é usada no segundo caso.

Observação 3. Em muitos problemas da geometria analítica, o tipo de intervalo (aberto, fechado ou semi-aberto) não importa. Em particular, isso vale quando encontramos o comprimento de um intervalo ou ponto específico da sua divisão. Nestes casos, não vamos especificar o tipo de intervalo ou, sem perda de generalidade, vamos considerar um intervalo fechado.

Intervalo limitado. Um intervalo aberto (a, b) é *limitado* quando a e b são pontos finitos (ou seja, alguns pontos do eixo real). Se a ou b são infinitos, então o intervalo é *ilimitado*. Um intervalo fechado $[a, b]$ é considerado sempre limitado.

Observação. Às vezes, um intervalo limitado é chamado *intervalo finito* e um ilimitado de *infinito*. Obviamente, o número de pontos em qualquer intervalo não singular ($a < b$) é infinito. Usualmente, o significado específico do termo "finito/infinito" aplicado a intervalos fica claro no contexto em consideração.

Comprimento de intervalo. Pela definição, o *comprimento de um intervalo* é a distância entre suas extremidades. (Obviamente, o tipo do intervalo aqui não importa.)

Divisão de um intervalo. Outro problema importante na reta coordenada é a divisão de um segmento (intervalo) numa proporção dada. Vamos começar do encontro do ponto médio.

Ponto médio. O *ponto médio de um intervalo* é definido como aquele ponto que equidista das suas extremidades.

Para encontrar a coordenada do ponto médio C do intervalo $[A, B]$, expressamos a sua definição geométrica em termos analíticos: $d(A, C) = d(C, B)$ ou $c - a = b - c$ (veja Fig.5.4) ou, explicitando c:

$$c = \frac{a+b}{2}\,. \tag{5.2}$$

A generalização deste problema do ponto médio é a *divisão de um intervalo numa proporção dada*: encontrar o ponto C que divide o intervalo $[A, B]$ na proporção $\lambda > 0$, ou seja, $\frac{d(A,C)}{d(C,B)} = \lambda$ (Fig.5.5). De novo, a definição tem a forma geométrica, que deve ser transformada a forma analítica para encontrar a coordenada do ponto C: $\frac{d(A,C)}{d(C,B)} = \frac{c-a}{b-c} = \lambda$ ou $c - a = \lambda(b - c)$. Explicitando c, obtemos

$$c = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}\,. \tag{5.3}$$

No caso particular $\lambda = 1$, voltamos à definição do ponto médio e à fórmula respectiva da sua coordenada.

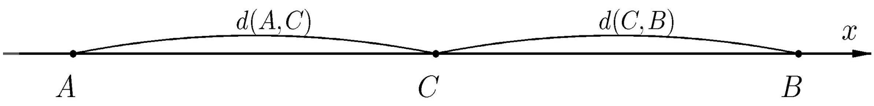


Figura 5.4 Encontro do ponto médio C do intervalo $[A, B]$.

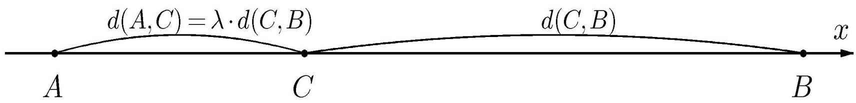


Figura 5.5 Encontro do ponto C que divide o intervalo $[A, B]$ na proporção $\lambda > 0$.

3 Ponto simétrico

Mais um problema na reta é o encontro do *ponto simétrico*. Pela definição, o ponto B é simétrico ao ponto dado A em relação a um terceiro ponto C (chamado de *centro de simetria*), se B e A equidistam de C (sendo B e A dois pontos diferentes).

A partir da definição, notamos que a condição $d(B, C) = d(A, C)$ significa que C é o ponto médio do intervalo $[A, B]$ (veja Fig.5.4). Então, $c = \frac{a+b}{2}$ e, isolando b, obtemos

$$b = 2c - a\,. \tag{5.4}$$

Num caso particular, mais simples, quando o centro de simetria é a origem O, obtemos $b = -a$, a relação que já foi observada antes.

Observação. O conceito de simetria de um par de pontos em relação a um ponto C naturalmente se estende a um conjunto de pontos: um conjunto é simétrico em relação a C se qualquer ponto desse conjunto tem o ponto simétrico que também pertence a esse conjunto. Os domínios de funções pares e ímpares são conjuntos simétricos em relação à origem. (Lembremos que uma função $y = f(x)$ é chamada par se para qualquer x do seu domínio X é válido que $f(-x) = f(x)$; para uma função ímpar temos, respectivamente, $f(-x) = -f(x)$.)

Exercícios resolvidos

1. Caracterizar geometricamente os pontos cujas coordenadas satisfazem as seguintes relações:

1) $|1 + 3x| \leq 2$;

2) $x^3 + x^2 - 12x > 0$;

3) $\left|\frac{3-x}{x+1}\right| = 2$;

4) $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 3$.

Solução.

Notamos que existem poucas situações em que as relações dadas admitem uma solução geométrica direta, isto é, podem ser interpretadas geometricamente sem a prévia solução analítica. A maioria absoluta das equações e desigualdades é tratada primeiro analiticamente e só depois de uma solução ser encontrada na forma analítica, se aplica sua interpretação geométrica. Nesse ponto, o uso das coordenadas se revela como uma ferramenta importante e até indispensável com maior clareza.

1) Reescrevemos a desigualdade dada na forma $-2 \leq 1 + 3x \leq 2$ (lembrando que $|a| \leq 2$ equivale a $-2 \leq a \leq 2$). Daí, segue que $-3 \leq 3x \leq 1$ ou $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$. Assim, a solução geométrica é o intervalo fechado $[-1, \frac{1}{3}]$. Observamos que, nesse caso particular simples, a desigualdade pode ser resolvida diretamente do modo geométrico, aplicando a caracterização do módulo. Realmente, a desigualdade original pode ser reescrita na forma $|x - (-\frac{1}{3})| \leq \frac{2}{3}$, o que significa que os pontos procurados devem ficar afastados do ponto $-\frac{1}{3}$ numa distância menor ou igual a $\frac{2}{3}$ (para esquerda e para direita). Então, marcamos o ponto central $-\frac{1}{3}$ do intervalo procurado e medimos dele a distância $\frac{2}{3}$ para os dois lados, obtendo a esquerda o ponto -1 e a direita $\frac{1}{3}$ (veja Fig.5.6). Todos os pontos desse intervalo $[-1, \frac{1}{3}]$ (incluindo as suas extremidades) representam soluções da desigualdade original.

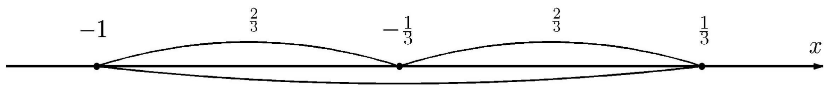


Figura 5.6 Solução geométrica da desigualdade $|x - (-\frac{1}{3})| \leq \frac{2}{3}$.

2) A desigualdade $x^3 + x^2 - 12x > 0$ não se resolve geometricamente direto. Temos que, primeiro, procurar sua solução analítica. Para isso,

fatoramos o polinômio do lado esquerdo: $x(x-3)(x+4) > 0$ (isso é simples de fazer colocando x em evidência e encontrando duas raízes do polinômio quadrático restante). Observamos que os pontos críticos, onde cada termo linear muda seu sinal, são (na ordem crescente) -4, 0 e 3. Por conveniência, colocamos os fatores na mesma ordem: $(x+4)x(x-3) > 0$. Se $x < -4$, então todos os fatores são negativos e, consequentemente, o produto é negativo, i.e., a desigualdade não está satisfeita; se $-4 < x < 0$, então o primeiro fator é positivo e os dois restantes – negativos, resultando em produto positivo, i.e., a desigualdade está satisfeita; para $0 < x < 3$, os dois primeiros fatores são positivos e o último é negativo, resultando em produto negativo, i.e., a desigualdade não está satisfeita; finalmente, para $x > 3$, todos os três fatores são positivos e, portanto, o produto positivo, i.e., a desigualdade está satisfeita. Assim, a solução analítica é a união dos intervalos abertos $(-4, 0)$ e $(3, +\infty)$, e a sua forma geométrica são dois intervalos correspondentes na reta coordenada.

Podemos chegar à mesma solução usando o método analítico-geométrico de intervalos. O raciocínio segue as considerações acima, mas, para melhor visualização, é acompanhado pela representação geométrica. Então, comecemos da desigualdade $(x+4)x(x-3) > 0$ e seus pontos críticos -4, 0 e 3. Marcamos na reta coordenada os intervalos de sinal positivo e negativo para cada fator do lado esquerdo e, depois, interceptando esses sinais, fazemos a conclusão sobre o sinal do produto. Na Fig.5.7, são mostrados os intervalos do sinal fixo para os primeiros dois fatores (marcação do primeiro termo fica em cima e do segundo – abaixo da reta). A Fig.5.8 representa os intervalos do terceiro fator acima da reta coordenada e o sinal resultante do produto abaixo da reta, com a parte ondular representando a solução da desigualdade.

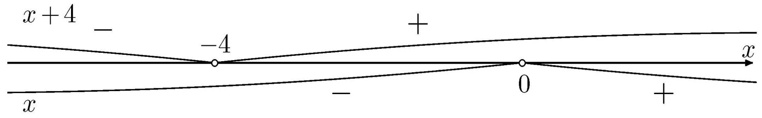


Figura 5.7 Pontos críticos e sinais dos termos $x+4$ e x.

3) A equação modular equivale as duas sem módulo: $\frac{3-x}{x+1} = 2$ e $\frac{3-x}{x+1} = -2$ (lembramos que $|a| = 2$ significa $a = 2$ e $a = -2$). Resolvendo a primeira, obtemos $x_1 = \frac{1}{3}$ e da segunda temos $x_2 = -5$. Assim, temos dois pontos na reta real com coordenadas $\frac{1}{3}$ e -5. Notemos que, nesse

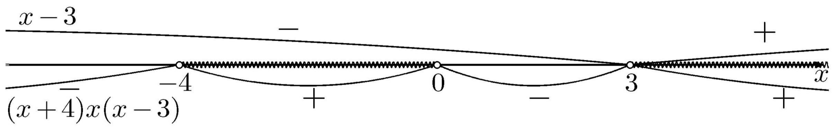


Figura 5.8 Pontos críticos e sinais do termo $x-3$ e do lado esquerdo $(x+4)x(x-3)$.

caso, embora a resolução analítica seja simples, a equação não dispõe de uma solução geométrica direta.

4) A desigualdade modular $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 3$ já foi resolvida analiticamente no Exercício 5 da seção 3. Vamos refazê-la usando método analítico-geométrico de intervalos. Reescrevemos essa desigualdade na forma sem módulo $-3 < \frac{x-1}{x+2} < 3$. A desigualdade direita pode ser reescrita na forma $\frac{x-1}{x+2} - 3 = \frac{-2x-7}{x+2} < 0$ ou ainda $\frac{2x+7}{x+2} > 0$. Os zeros do numerador e denominador são $x = -\frac{7}{2}$ e $x = -2$, respectivamente. Marcamos estes pontos na reta coordenada e anotamos os intervalos onde o numerador e denominador mantém o mesmo sinal com símbolos "+" e "−": para não confundir, as anotações para o numerador fazemos acima da reta coordenada e para o denominador, abaixo (veja Fig.5.9). A razão $\frac{2x+7}{x+2}$ fica positiva quando os sinais do numerador e denominador coincidem, e essa parte da reta é marcada na forma ondulada. Da mesma maneira, a desigualdade esquerda pode ser reescrita na forma $\frac{x-1}{x+2} + 3 = \frac{4x+5}{x+2} > 0$. Fazendo as marcações semelhantes em relação aos zeros $x = -\frac{5}{4}$ e $x = -2$, concluímos imediatamente que a razão $\frac{4x+5}{x+2}$ tem sinal positivo na parte ondulada da reta coordenada (veja Fig.5.10). Para satisfazer ambas as desigualdades, devemos escolher a parte comum (fazer intersecção) das partes onduladas no primeiro e segundo desenho. Assim, chegamos à solução final $S = \{x : x < -\frac{7}{2}\} \cup \{x : x > -\frac{5}{4}\}$.

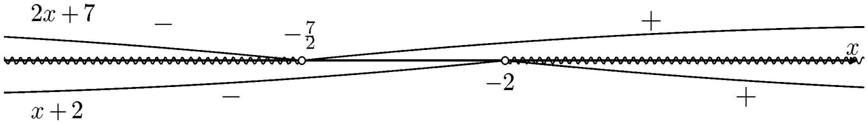


Figura 5.9 Pontos críticos e sinais das expressões da desigualdade direita.

2. Encontrar o ponto médio do intervalo AB, $A = -2$, $B = 6$ e o ponto C que divide esse intervalo na proporção $\frac{d(A,C)}{d(C,B)} = \frac{1}{5}$.

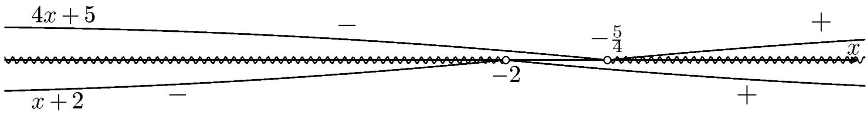


Figura 5.10 Pontos críticos e sinais das expressões da desigualdade esquerda.

Solução.

Da fórmula (5.2), segue imediatamente que o ponto médio D tem coordenada $d = \frac{-2+6}{2} = 2$. Aplicando a fórmula (5.3), temos $c = \frac{-2+\frac{1}{5}\cdot 6}{1+\frac{1}{5}} = -\frac{2}{3}$.

3. Encontrar o ponto B simétrico a A em relação a C se:

1) $A = 5$ e $C = -1$;
2) $A = -1$ e $d(A, C) = 3$;
3) $d(A, B) = 6$ e $C = 2$.

Solução.

1) Usando fórmula (5.4), obtemos imediatamente $B = 2\cdot(-1)-5 = -7$.

2) Nas condições desse problema, temos duas opções. Se C ficar à direita de A, então $C = 2$ e $B = 2 \cdot 2 - (-1) = 5$. Se C ficar à esquerda de A, então $C = -4$ e $B = 2 \cdot (-4) - (-1) = -7$.

3) Nas condições desse problema, temos duas opções. Se A ficar à direita de B, então $A = 2 + 3 = 5$ e $B = 2 - 3 = -1$. Caso contrário, $A = -1$ e $B = 5$.

Exercícios

1. Marcar pontos cujas coordenadas satisfazem as seguintes equações:

1) $|x| = 2$;
2) $|2x - 1| = 3$;
3) $|2 + x| = 2$;
4) $x^2 + x - 2 = 0$;
5) $x^2 + x + 2 = 0$;
6) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
7) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
8) $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$;
9) $\frac{2-x}{x-1} = 0$;
10) $\frac{2x-1}{x-2} = 1$;
11) $\left|\frac{2-x}{x-1}\right| = 0$;

12) $\left|\frac{2x-1}{x-2}\right| = 1.$

2. Caracterizar geometricamente todos os pontos cujas coordenadas satisfazem as seguintes relações:

1) $x < 2$;
2) $|x| < 2$;
3) $|x| \geq 2$;
4) $|2x-1| \leq 3$;
5) $|2x-1| > 3$;
6) $x^2 + x - 2 \leq 0$;
7) $x^3 + 2x^2 - 3x \geq 0$;
8) $x^3 + 2x^2 - 3x < 0$;
9) $\frac{2-x}{x-1} < 0$;
10) $\frac{2x-1}{x-2} > 1$;
11) $\left|\frac{2-x}{x-1}\right| < 2$;
12) $\left|\frac{2x-1}{x-2}\right| > 1.$

3. Encontrar a distância entre os pontos A e B cujas coordenadas são:

1) $a = 3$ e $b = 11$;
2) $a = 5$ e $b = 2$;
3) $a = -1$ e $b = 3$;
4) $a = -1$ e $b = -3$;
5) $a = 4$ e $b = -6$.

4. Encontrar o ponto médio entre os pontos A e B do Exercício 3.

5. Encontrar o ponto C que divide o intervalo AB na proporção $\frac{d(A,C)}{d(C,B)} = \frac{1}{2}$ e $\frac{d(A,C)}{d(C,B)} = 3$, usando os pontos A e B do Exercício 3.

6. Encontrar o ponto A se:

1) $B = -1$, $d(A,B) = 5$ e A fica à direita de B;
2) $B = -1$, $d(A,B) = 5$ e A fica à esquerda de B;
3) $B = -2$, e o ponto médio de AB é $C = 3$;
4) $B = -2$, e o ponto médio de AB é $C = -3$;
5) $B = 3$, e o ponto que divide AB na proporção $\frac{1}{2}$ é $C = 5$;
6) $B = 3$, e o ponto que divide AB na proporção 2 é $C = 5$;
7) $B = 3$, e o ponto que divide AB na proporção $\frac{1}{2}$ é $C = -3$;
8) $B = 3$, e o ponto que divide AB na proporção 2 é $C = -3$.

7. Encontrar o ponto B simétrico a A em relação a C se:

1) $A = 2$ e $C = 0$;
2) $A = 2$ e $C = 4$;
3) $A = -6$ e $C = 3$;
4) $A = -3$ e $d(A,C) = 4$;

5) $d(A, B) = 5$ e $C = -1$;
6) $A = 4$ e $d(C, B) = 3$.

8. Encontrar os pontos que dividem o intervalo AB em três partes iguais
1) $A = 2$ e $B = 6$;
2) $A = 1$ e $B = -8$;
3) $A = -5$ e $B = -1$.

10. Considerando que A e B são simétricos em relação a C, responder as seguintes questões:
1) todos os três pontos podem ficar na parte negativa da reta coordenada?
2) qual é a condição que garante que A e B fiquem nos lados opostos da reta coordenada?
3) se a coordenada de A é irracional, a coordenada de B também deve ser?
4) se as coordenadas de A e C são racionais, a de B também deve ser?
5) se as coordenadas de A e B são racionais, a de C também deve ser?
6) se as coordenadas de A e C são inteiros pares, a de B também deve ser?
7) existe um quarto ponto D simétrico tanto a A quanto a B em relação a C?

Seção 1.6 Transformações de coordenadas

Duas *transformações de coordenadas* a serem consideradas aqui são a *translação* e a *mudança de escala.*

1 Translação

A *translação* consiste em mudança do ponto de origem, mantendo todas as outras atribuições das coordenadas – a escolha do sentido positivo e da escala (unidade de distância).

Seja Q o novo ponto origem, com coordenada q no sistema original (com a origem O) e coordenada 0 no novo sistema de coordenadas. Mantemos a mesma notação de coordenadas originais e usaremos a notação com linha nas coordenadas novas: desta maneira, a coordenada de P no sistema original vai ser p e no sistema novo p'. A definição e o significado das coordenadas é o mesmo em cada um dos dois sistemas: a coordenada p de P é igual à distância de P até a origem quando P fica à direita da origem, e p igual à distância com sinal menos acrescido quando P fica à esquerda da origem.

Vamos supor, no momento, que a nova origem Q fica à direita de O. Então, das considerações geométricas, seguem as seguintes fórmulas: para os pontos P à direita de Q, temos $p' = d(Q,P) = d(O,P) - d(O,Q) = p - q$; para $P = Q$, temos $p' = 0 = p - p$; para P entre O e Q, segue $p' = -d(Q,P) = -(d(O,Q) - d(O,P)) = -(q-p) = p - q$; para $P = O$, temos $p' = -d(O,Q) = -q = 0 - q$; e para P à esquerda de O, segue $p' = -d(Q,P) = -(d(O,Q) + d(O,P)) = -(q + (-p)) = p - q$ (veja Fig.6.1). Juntando, chegamos a uma única fórmula

$$p' = p - q \tag{6.1}$$

qualquer que seja a posição de P.

Da mesma maneira, pode ser mostrado que a mesma fórmula é válida no caso em que o ponto Q fica à esquerda de O (deixamos isso como exercício para os leitores). Assim, para qualquer ponto P e qualquer posição de Q é válida a fórmula $p' = p - q$ da relação entre coordenadas originais p e coordenadas novas p', onde q é a coordenada da nova origem Q em coordenadas originais.

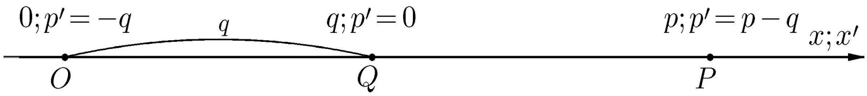


Figura 6.1 Translação: relação entre coordenadas.

2 Mudança de escala

Nessa transformação de cooordenadas, manteremos o mesmo sentido do eixo, o mesmo ponto origem, mas mudaremos a unidade de medida (de escala). Assim, na mesma reta vamos ter a unidade original que corresponde à distância de O até o ponto I (cuja coordenada é 1 no sistema original) e também a unidade nova que corresponde à distância de O até o ponto I' com coordenada k no sistema original (e coordenada 1 no novo sistema) (veja Fig.6.2). Como antes, para pontos P mantemos a mesma notação p de coordenadas originais e usaremos a notação p' nas coordenadas novas. As medidas das duas escalas vamos denotar pelas mesmas letras dos seus pontos da definição – I e I'. Como a coordenada de I' no sistema original é k, então entre essas duas medidas tem a relação $1' = k \cdot 1$, onde 1 e $1'$ são unidades no sistema original e novo, respectivamente.

Consideremos um ponto arbitrário P à direita da origem comum O dos dois sistemas de coordenadas. A coordenada p deste ponto é a distância de O em escala original. Como a nova medida é k vezes maior (ou $\frac{1}{k}$ menor) que a medida original, então a nova coordenada do ponto P vai ser

$$p' = \frac{1}{k}p\,. \tag{6.2}$$

Em particular, se $P = I'$ então $p' = \frac{1}{k}\cdot k = 1$ e se $P = I$, então $p' = \frac{1}{k}\cdot 1 = \frac{1}{k}$. Para um ponto à esquerda de O, temos a mesma relação entre coordenadas, uma vez que a relação entre as distâncias de P até O é a mesma e ambas as coordenadas são negativas.

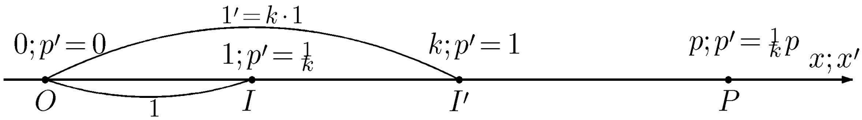


Figura 6.2 Mudança de escala: relação entre coordenadas.

3 Combinação de transformações

Caso seja realizada a mudança da origem de O para Q, com posterior mudança de escala de I para I', podemos aplicar as fórmulas já deduzidas acima para estabelecer a relação entre as coordenadas originais p e as da transformação resultante $\tilde{p}$. No primeiro passo, considerando as coordenadas intermediárias p' referentes à mudança da origem para Q (cuja coordenada é q no sistema original), temos $p' = p - q$. No passo seguinte, a relação entre coordenadas intermediárias e as finais é dada pela fórmula $\tilde{p} = \frac{1}{k}p'$. Juntando as duas relações, temos

$$\tilde{p} = \frac{1}{k}(p - q)\,. \tag{6.3}$$

De maneira semelhante, se a ordem de transformações é invertida – a mudança de escala é seguida pela mudança da origem, então a fórmula resultante é

$$\tilde{p} = \frac{1}{k}p - q'\,, \tag{6.4}$$

onde q' é o deslocamento nas coordenadas intermediárias. (A dedução dessa fórmula segue os mesmos passos da anterior e é deixada a cargo do leitor.)

Exercícios resolvidos

1. Encontrar a coordenada do ponto $P = -2$ no novo sistema se:
1) a origem foi transladada para o ponto $Q = 4$;
2) a nova unidade de medida é $1' = 4 \cdot 1$;
3) a translação da origem para o ponto $Q = -5$ foi seguida pela mudança de escala com a medida $1' = \frac{1}{3} \cdot 1$.

Solução.
1) Aplicando a fórmula (6.1) com $p=-2$ e $q=4$, temos $p'=-2-4=-6$.
2) Da fórmula (6.2), com $p = -2$ e $k = 4$, segue $p' = \frac{1}{4} \cdot (-2) = -\frac{1}{2}$.
3) Usando (6.3) com $p = -2$, $q = -5$ e $k = \frac{1}{3}$, temos $\tilde{p} = 3 \cdot (-2 - (-5)) = 9$.

2. Encontrar a translação efetuada se as coordenadas do ponto P são -1 e 6 no sistema original e novo, respectivamente.

Solução.
A relação entre a coordenada nova, a original e o valor da translação q é dada via fórmula (6.1), donde, isolando q, obtemos $q = p - p' = -1 - 6 = -7$. Assim, a origem O foi transladada 7 unidades para esquerda, onde ficou a origem nova.

3. Encontrar a mudança de escala efetuada se as coordenadas do ponto P são 3 e 5 no sistema original e novo, respectivamente.

Solução.
A relação entre a coordenada nova, a original e o coeficiente de escala k é dada via fórmula (6.2), donde, isolando k, obtemos $k = \frac{p}{p'} = \frac{3}{5}$. Assim, a unidade original foi reduzida $\frac{5}{3}$ vezes para corresponder à nova unidade de medida (por exemplo, o ponto 1 fica $\frac{5}{3}$ em novas coordenadas).

Exercícios

1. Dados pontos $A = 1$, $B = -3$ e $C = 7$, encontrar suas coordenadas no novo sistema se:
1) a nova origem é o ponto $Q = 4$;
2) a nova origem é o ponto $Q = -1$;
3) a nova unidade de medida é $1' = 2 \cdot 1$;
4) a nova unidade de medida é $1' = \frac{1}{3} \cdot 1$.

2. A origem é transladada para o ponto $I = 1$. Qual é a coordenada da origem no novo sistema de coordenadas?

3. Em qual ponto deve ser transladada a origem para que a coordenada original -3 do ponto A se torne -6?

4. As coordenadas do ponto A no sistema original e novo, obtido do original via translação, são 3 e 7, respectivamente. Encontrar a coordenada da nova origem no sistema original e a coordenada da origem inicial no sistema novo.

5. A nova unidade de medida é $1' = 3 \cdot 1$. Qual é a coordenada do ponto $I = 1$ no novo sistema de coordenadas.

6. Qual deve ser relação entre duas unidade de medida para que o ponto $A = 4$ tenha coordenada $3'$ no novo sistema?

7. As coordenadas do ponto A no sistema original e novo, obtido do original via mudança de escala, são 3 e $7'$, respectivamente. Encontrar a coordenada do ponto $I = 1$ no novo sistema e a coordenada do ponto $I' = 1'$ no sistema original.

O objetivo principal deste livro é oferecer um estudo da geometria analítica plana de nível universitário, usando as ferramentas mínimas, conhecidas pelos alunos do ensino médio. O uso de técnicas rudimentares não compromete o nível de rigorosidade e profundidade da teoria considerada neste livro, nem restringe o espectro de tópicos abordados.

Durante toda a exposição do material, enfatizamos a interligação entre os dois lados dos objetos estudados – geométrico e analítico, o que é a essência da geometria analítica. Os principais assuntos tratados são: geometria analítica na reta; coordenadas no plano; retas no plano cartesiano; formas canônicas de curvas quadráticas; formas gerais e classificação de curvas quadráticas.

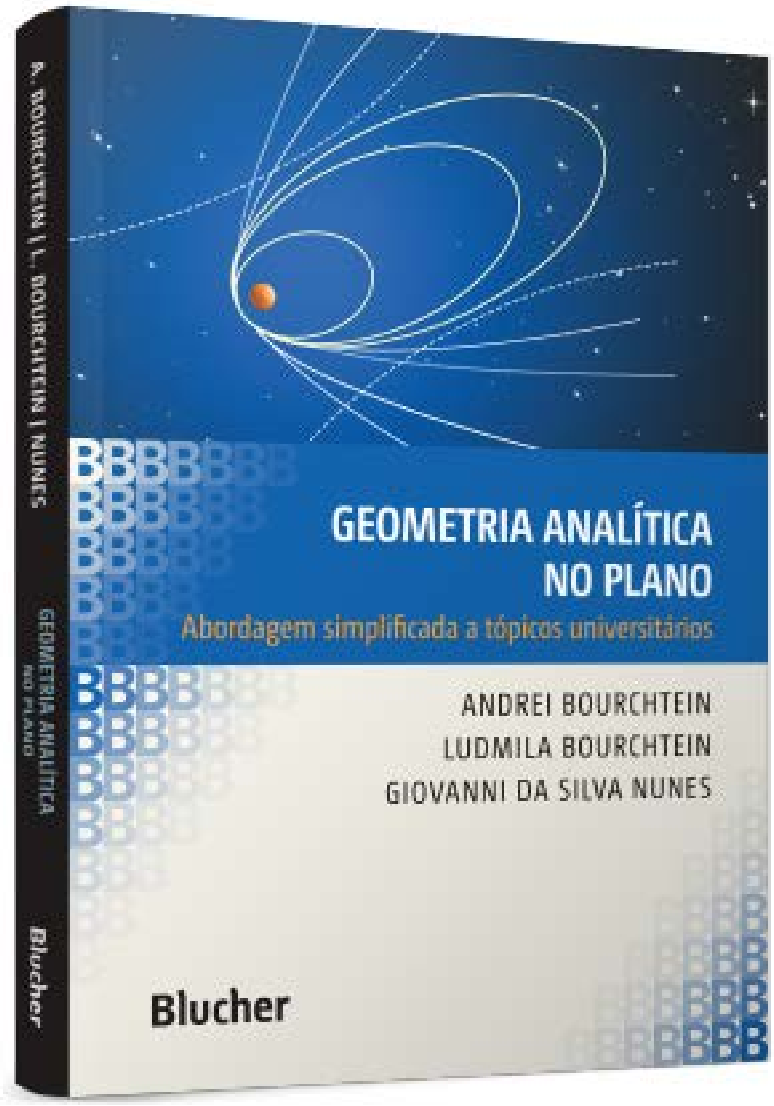
O livro se destina a estudantes de graduação em Matemática e outros cursos da área de exatas que gostariam de utilizar uma abordagem mais direta e completa no desenvolvimento da disciplina de Geometria Analítica. Também é acessível para alunos do ensino médio, pois emprega técnicas matemáticas elementares e mostra como os tópicos de uma disciplina são tratados seguindo os padrões de rigorosidade e profundidade da matemática universitária.

www.blucher.com.br

ISBN 978-85-212-1402-1

9 788521 214021

Blucher



Clique aqui e:

VEJA NA LOJA

Geometria Analítica no Plano

Abordagem Simplificada a Tópicos Universitários

Andrei Bourchtein , Ludmila Bourchtein , Giovanni da Silva Nunes

ISBN: 9788521214021

Páginas: 336

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2019

Peso: 0.575 kg
