Márcio Rogério de Oliveira Cano
coordenador

coleção
6
A REFLEXÃO E A PRÁTICA NO ENSINO MÉDIO

MATEMÁTICA

Rosana Maria Mendes
organizadora do volume

Blucher

A reflexão e a prática no Ensino Médio

6

Matemática

Márcio Rogério de Oliveira Cano
coordenador da coleção

Rosana Maria Mendes
organizadora do volume

Adair Mendes Nacarato
Camila Tenório Freitas de Oliveira
Daiana Bárbara de Almeida
Daniela Dias dos Anjos
Danielli Ferreira Silva
Helena Libardi
João Paulo Rezende
José Antônio Araújo Andrade
Leonor Santos
Marco Aurélio Kistemann Jr.
Maria Teresa Martins Dias
Phablo Roberto Figueiredo
Rosana Maria Mendes
Rosangela Eliana Bertoldo Frare
Silvia Maria Medeiros Caporale
Stefânia Efigênia Izá
Taís Soares Marques
autores

Coleção A reflexão e a prática no Ensino Médio – volume 6 – Matemática

Editora Edgard Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-012 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Matemática / Adair Mendes Nacarato...[et al.]. ; organizado por Rosana Maria Mendes. – São Paulo : Blucher, 2019.

208 p. : il. (Coleção A reflexão e a prática no Ensino Médio ; 6 / coordenada por Márcio Rogério de Oliveira Cano)

Bibliografia
ISBN 978-85-212-1378-9 (impresso)
ISBN 978-85-212-1379-6 (e-book)

1. Ensino 2. Matemática (Ensino médio) – Estudo e Ensino 3. Didática (Ensino médio) 4. Professores de segundo grau – Formação I. Mendes, Rosana Maria. II. Cano, Márcio Rogério de Oliveira.

19-0194 CDD 373

Índice para catálogo sistemático:
1. Ensino médio – Matemática – Prática de ensino

Conteúdo

1

Atividades de ensino-aprendizagem de números fundamentadas na perspectiva lógico-histórica

João Paulo Rezende

1.1 PARA INÍCIO DE CONVERSA...

Um dos interesses da educação matemática consiste em identificar e investigar os saberes que fazem parte da profissão "professor de Matemática". São inúmeros esses saberes, mas vamos nos reportar a três que figuram nos discursos sobre o assunto de modo recorrente, sendo eles: o saber disciplinar específico, isto é, aquele relacionado a conteúdos matemáticos, como funções, trigonometria e análise combinatória; o saber metodológico, ou seja, que se dedica às formas de se organizar, promover e avaliar o processo de ensino-aprendizagem de matemática, como as tradicionais aulas expositivas, a resolução de problemas e os trabalhos e projetos em grupo; e o saber filosófico, aquele relacionado às concepções que se tem sobre o que é ser professor, o que é matemática e como se ensina e se aprende matemática.

Vamos nos reportar: Este texto, embora contenha experiências pessoais do autor, está escrito na primeira pessoa do plural por dois motivos: 1) um texto só se concretiza em forma de conhecimento se é tomado como elo entre autor e leitor. Dessa forma, o tempo verbal escolhido é um convite para que os leitores possam acompanhar o autor nas reflexões propostas; 2) o conhecimento é de natureza coletiva, sendo assim, mesmo que algumas das experiências relatadas sejam de cunho pessoal, surgiram do contato do autor com professores, alunos, colegas de classe, artigos, livros etc.

Não pretendemos discutir detalhadamente esses saberes, mas precisamos fazer algumas reflexões para melhor entender a proposta que apresentamos neste texto. É senso comum, e concordamos com ele, que o professor de Matemática deve saber matemática – o que não significa memorizar uma lista de definições e fórmulas, mas sim possuir habilidades específicas dessa área de conhecimento. Contudo, a concepção de que somente esses saberes não são suficientes para o professor não parece ser tão corriqueira, embora muitos reconheçam a necessidade de ter conhecimento sobre modos específicos de ensinar e aprender os conceitos matemáticos.

1.2 OS MODOS DE ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA

Em nossa experiência com orientação de estágio supervisionado obrigatório na licenciatura em Matemática, esbarramos com relatórios em que os estagiários depositam toda sua confiança nas metodologias, acreditando que possam resolver os problemas do processo de ensino-aprendizagem. Porém, a metodologia é subjacente ao que se entende por matemática e pelas formas de produzir e disseminar esse conhecimento. Assim, justifica-se a importância do saber filosófico.

Um professor que acredita que a matemática existe de modo independente do homem e que cabe aos grandes estudiosos descobri-la, possivelmente também crê que o conhecimento matemático é acessível a poucos, que os estudantes têm que se esforçar para adquirir esse conhecimento e que, para isso, devem estar atentos às explicações do professor. Já o professor que acredita que a matemática é um produto cultural, possivelmente crê que esse conhecimento é produzido coletivamente e visa atender às necessidades humanas, sejam elas práticas, teóricas ou de cunho religioso.

As diferentes crenças também resultam em diferentes metodologias. Para o primeiro caso, é conveniente uma metodologia que preconize aulas expositivas em que os estudantes, individualmente, devem atentar-se ao máximo às explicações do professor, tomar nota da aula e resolver vários exercícios para assimilar o conhecimento transmitido. Já no segundo caso, atividades em grupo, em que os estudantes resolvem problemas coletivamente buscando atender a necessidades do processo de ensino-aprendizagem parecem mais interessantes. Em síntese, pode-se dizer que a metodologia escolhida é subjacente às crenças do professor em relação aos modos de produção e disseminação do conhecimento que leciona.

Existem estudos que tomam como fundamentação filosófica e epistemológica a perspectiva lógico-histórica. Isso significa, dentre outras coisas, que o conhecimento matemático é um produto cultural, criado a partir das necessidades humanas e em constante transformação, acompanhando a história da humanidade. Compreender o conhecimento matemático nessa perspectiva fez surgir a ideia de nexos conceituais, isto é, dos elementos fundamentais para o entendimento de dado conceito manifestados em sua história. Exemplo disso é a ideia de valor posicional, essencial para o entendimento do conceito de numeral indo-arábico, mas que não está explícita.

Existem estudos: As teses de doutorado de Maria do Carmo de Sousa (2004) e de Marisa da Silva Dias (2007) e a dissertação de mestrado de João Paulo Rezende (2016), dentre outros trabalhos, discutem com mais profundidade a perspectiva lógico-histórica como fundamentação para se pensar o processo de ensino-aprendizagem de matemática.

Valor posicional: Diz respeito ao valor que dado símbolo (algarismo) assume dependendo da posição que ocupa na escrita do numeral. O algarismo 2, por exemplo, aparece duas vezes na representação do numeral 232, mas o primeiro da direita para a esquerda vale duas unidades, e o último, duzentas unidades. A história (IFRAH, 2001) nos revela que nem sempre o valor posicional foi considerado nos sistemas de numeração. É o caso dos numerais romanos e egípcios, por exemplo.

A perspectiva lógico-histórica, portanto, aponta para a compreensão de que a matemática é histórica e culturalmente produzida e, como consequência disso, permite que o professor opte por uma metodologia que possa fazer com que esses aspectos também estejam presentes na sala de aula. Por acreditarmos nisso, organizamos este capítulo de modo a apresentar primeiro como temos compreendido, de estudos e pesquisas realizados, tais constructos teóricos. Essa compreensão tem nos revelado necessidades de reorganização do processo de ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos. Para exemplificar isso, apresentamos uma proposta de atividade de ensino que explora alguns dos nexos conceituais de número natural, que é um conceito de extrema importância no Ensino Médio, uma vez que possibilita uma melhor compreensão de conjuntos numéricos, suas propriedades e operações.

1.3 O LÓGICO-HISTÓRICO E OS NEXOS CONCEITUAIS

O lógico-histórico fundamenta-se no materialismo histórico dialético de Karl Marx. Um dos pontos fundamentais dessa teoria é a relação dialética entre pensamento e realidade, ou seja, o autor rompe com as filosofias idealistas – que concebiam a realidade no mundo das ideias e não reconheciam a atividade prática como modo de obter a verdade – e com o materialismo tradicional – em que o processo de conhecer o mundo era possível pela contemplação, pois a realidade estava na matéria (MORETTI; ASBAHR; RIGON, 2011, p. 478). Para Marx, o processo de conhecer dava-se pela atividade prática do homem que possibilitava a interação entre o abstrato e o concreto. Nesse processo, o homem modifica a natureza e a si mesmo e, portanto, o conhecimento, inclusive o matemático, trata-se de um produto cultural que está sempre se transformando.

Karl Marx: Karl Marx foi um pensador alemão que viveu no século XIX. Suas obras tratavam principalmente de filosofia, economia e socialismo alemão. Sua obra mais famosa, dentre muitas outras, foi intitulada *O capital*.

Filosofias idealistas: Um dos precursores desse modo de pensamento foi o filósofo grego Platão. Segundo Miguel (1995), essa visão filosófica contribui para a constituição de um modo internalista de conceber a matemática, isto é, considerando-a como dependente única e exclusivamente da razão.

Nesse sentido, concordamos com Caraça (1984, p. 110) quando ele resgata um ensinamento do filósofo Heráclito de Éfeso e aponta que a vida está pautada em um eterno vir a ser, em que a única coisa que se mantém é a fluência. Os objetos transformam-se, modificam-se, constituem-se nesse devir. As etapas de surgimento e desenvolvimento do objeto constituem sua própria história. O pensamento busca reproduzir a história, mas limpa todos os desvios, casualidades, zigue-zagues presentes na história do objeto, que não é linear, mas marcada por dilemas e incertezas. Assim, o "lógico é o meio pelo qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica [...] o lógico é o histórico libertado das casualidades que o perturbam" (KOPNIN, 1978, p. 183).

Porém, ao buscar no lógico a compreensão do objeto, nós o vemos em um aspecto quase puro, ou seja, sem todos os zigue-zagues que permearam a sua construção e as estruturas internas que o fundamentam. Essa pureza não se realiza na história. Daí a necessidade de buscarmos na história os elementos que fundamentam o lógico para a compreensão do objeto. É um processo dialético e necessário.

O pensar, por exemplo, no conceito de medida de um ângulo, remete-nos imediatamente a sua formalização teórica, que pressupõe uma unidade de medida e um numeral, por exemplo, 37º 25' 33" (trinta e sete graus, vinte e cinco minutos e trinta e três segundos). Essa representação lógica da medida de um ângulo carrega toda a história desse conceito e, em um breve resumo, podemos encontrar alguns elementos históricos (IFRAH, 2001, p. 67), como o sistema de numeração de base sexagesimal usado pelos sumérios e depois transmitido aos babilônicos (sucessores dos sumérios na Mesopotâmia), que, dentre outros estudos, se preocuparam com a astronomia e criaram um calendário anual com 360 dias, tempo necessário para o Sol descrever um movimento em forma de circunferência completa centrada na Terra. Claro que alguns conhecimentos, analisados com o olhar de hoje, a partir da matemática formal, induzem-nos a pensar que estavam equivocados segundo as teorias atuais. No entanto, há de se entender o quanto era conveniente usar a base sexagesimal, pois 60 é divisor de 360, o que ainda permitia várias relações possíveis com o movimento da Terra. Deve-se compreender também que era interessante dividir uma circunferência em 360 partes iguais.

Olhar apenas para a formalização lógica dos conceitos não nos permite compreender sua mutabilidade, pois nos apropriamos apenas de suas definições e propriedades, as quais parecem ter sempre sido construídas alheias às necessidades humanas. Compreender apenas seu caráter externo, definições e propriedades que, de acordo com Sousa (2004), são chamadas de nexos externos. Poderíamos olhar para a história e nos perder diante de dilemas, incertezas e desvios que ela carrega, porém, guiados pela lógica, encontramos os elementos fundamentais à formalização do conceito. A esses elementos Sousa denomina "nexos internos do conceito" (2004, p. 61). Assim, a compreensão do conceito por meio de seus nexos internos e externos exige um movimento dialético entre a lógica e a história. Trata-se da dialética lógico-histórica.

Sousa ajuda-nos a compreender os limites entre os nexos internos e externos de um conceito:

> *os nexos externos se limitam aos elementos perceptíveis do conceito enquanto os internos ao lógico-histórico do conceito. Os nexos externos ficam por conta da linguagem. São formais. Exemplo disso é a classificação dos ângulos em retos, agudos e obtusos. (2004, p. 61)*

A compreensão de um conceito matemático por meio do lógico-histórico não só é mais rica e profunda do que aquela que valoriza apenas os nexos externos, como humaniza o conhecimento matemático, pois o entende como construção social. "Os nexos conceituais que fundamentam os conceitos, contêm a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento" (SOUSA, 2004, p. 61). Portanto, ao elaborar propostas de atividades de ensino na perspectiva lógico-histórica, o professor tem a oportunidade de refletir e possibilitar que seus alunos também reflitam sobre os processos humanos que possibilitaram que determinados conceitos se cristalizassem nos currículos escolares. Isso significa tomar consciência de que certas escolhas são feitas no processo histórico de vir a ser e que, na medida em que o lógico aparece, vai haver certa limpeza nos conceitos de todas as casualidades, próprias do trabalho humano, que permearam a sua criação. Contudo, mais importante que isso, permite que os sujeitos em atividade de ensino pensem no conteúdo não só por ele mesmo, mas pelos processos de abstrações e simplificações, adquirindo habilidades, autonomia e não apenas um amontoado de informações desconexas.

Nexos internos e externos: Sousa (2004) define "nexos internos" como sinônimo de "nexos conceituais". Cunha (2008), por sua vez, define "nexos conceituais" como nexos internos e externos. Essa diferença é natural, já que um nexo externo, em dado contexto, pode ser um nexo interno em outro. Nesse texto, consideramos a definição de Cunha.

1.4 OS NEXOS CONCEITUAIS DE NÚMERO EM ATIVIDADES DE ENSINO

Nossa compreensão acerca da perspectiva lógico-histórica nos faz pensar em novas formas de organização do ensino-aprendizagem de matemática. Uma das formas que mais tem sido abordada pelas pesquisas que discutem o tema é a atividade orientadora de ensino. Esse conceito é elaborado e aprimorado pelo professor Manuel Oriosvaldo de Moura e é pautada na teoria da atividade de Leontiev. Dentre os princípios que a sustentam, destacam-se:

> *1) a atividade representa a ação humana que mediatiza a relação entre o homem, sujeito da atividade, e os objetos da*

Teoria da atividade: A teoria da atividade foi desenvolvida pelo sociólogo russo Aleksei Nikolaievitch Leontiev. Fundamentada no materialismo dialético de Marx, versa sobre a atividade humana e seus determinantes, como as necessidades, os motivos e as ações. O professor Manuel Oriosvaldo de Moura, desde os anos 1990, com base nas teorias de Leontiev, desenvolve a ideia de atividade orientadora de ensino.

realidade, dando a configuração da natureza humana; 2) o desenvolvimento da atividade psíquica, isto é, dos processos psicológicos superiores, tem sua origem nas relações sociais do indivíduo em seu contexto social e cultural (LIBÂNEO; FREITAS, 2006, p. 4).

Esses princípios, assim como a perspectiva lógico-histórica, também se fundamentam no materialismo histórico dialético. Na mesma corrente teórica, Lev Vygotsky (2002) defende a psicologia histórico-cultural que considera que o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos se dá de fora para dentro. O sujeito internaliza, de forma abstrata, a realidade que o cerca e essa internalização é mediada pelas relações socioculturais, principalmente por meio da linguagem. As significações sociais são estabelecidas pela cultura, e o sujeito humaniza-se ao apropriar-se dessa cultura, que é histórica. "É na relação do sujeito com o meio físico e social que, mediadas por instrumentos e signos (entre eles a linguagem), se processa o desenvolvimento cognitivo" (MOURA et al., 2010, p. 208).

O homem se apropria da cultura por meio de atividades, ou seja, ações que tem um objetivo abstrato *a priori* e um resultado concreto *a posteriori*, modificando a realidade e o próprio sujeito. No caso da escola, a atividade do professor é a de ensino e a atividade do aluno é a de aprendizagem (MOURA et al., 2010). Para que essas atividades se realizem, é necessário que elas se relacionem de forma dialética por meio de um conjunto de ações do estudante e do professor que Moura (2001) denomina de atividade orientadora de ensino (AOE).

Portanto, buscamos organizar o processo de ensino-aprendizagem de forma que os sujeitos envolvidos nesse processo interajam coletivamente e negociem significados em relação aos conceitos matemáticos. Entendemos que a organização do ensino não se dá somente em sala de aula, ele se inicia antes, com a preparação do professor. Nesse sentido, é necessário preparar o ambiente onde a atividade vai acontecer, os conceitos que vão ser trabalhados, os aspectos do conceito que vão ser privilegiados e a forma como os estudantes vão interagir, seja entre eles, seja com os objetos e as mídias escolhidos para fazer parte da atividade, seja com o professor.

Para compreender melhor esse processo, apresentamos uma possível forma de organização do processo de ensino-aprendizagem de número natural. É resultado dos estudos que desenvolvemos

Nexos externos: O nexo externo está ligado aos elementos mais perceptíveis do conceito. Porém, o conhecimento superficial dos conceitos faz esses nexos se relacionarem, principalmente, com o formalismo. Ao pedirmos que um estudante, por exemplo, explique o que é mínimo múltiplo comum (MMC), ele possivelmente nos responderá mostrando o algoritmo para encontrar o MMC. Portanto, esse algoritmo é um nexo externo. O estudante pode ter domínio do algoritmo, mas não compreender o conceito.

Entre número, numeral e algarismo: Número é a ideia de quantidade, numeral é a representação dessa quantidade e algarismos são os símbolos utilizados para compor o numeral. Por exemplo, uma mesma quantidade numérica pode ser representada pelos distintos numerais 23 (numeral indo-arábico) e XXIII (numeral romano). Na primeira representação são usados os algarismos 2 e 3; na segunda são usados X e I.

Número natural: Os demais conjuntos numéricos, segundo Caraça (1984), foram criados a partir de ampliações do conceito de número natural. Os números fracionários, por exemplo, foram elaborados para suprir a necessidade de representar quantidades não inteiras, mas sua criação não se deu por meio da reinvenção do conceito de número, mas sim pela ampliação do conceito de número natural.

nos últimos anos e traduz nosso entendimento em relação à perspectiva lógico-histórica como sustentação para o desenvolvimento de atividades de ensino.

Os conjuntos numéricos, abordados no Ensino Fundamental e amplamente utilizados no Ensino Médio, principalmente no estudo de funções, comumente são tratados de forma a privilegiar somente os nexos externos do conceito de número, principalmente no que se refere às operações aritméticas. Poucos estudantes e professores, por exemplo, sabem a diferença entre número, numeral e algarismo. Esse entendimento é fundamental para a compreensão do conceito de número, bem como das características que nos permitem classificá-los em conjuntos. Entender o número natural é o primeiro passo para compreender o conjunto dos números reais e, por consequência, as funções, conceitos bastante usados no Ensino Médio.

Desse modo, o primeiro passo para a organização do ensino do conceito de número natural é compreendê-lo em seu percurso lógico-histórico e, para isso, precisamos recorrer à história do conceito. Destacam-se, então, dois aspectos: "primeiro, o contexto no qual conceitos matemáticos são desenvolvidos, e, segundo, o movimento do pensamento no contexto em que tais conceitos foram concebidos" (DIAS; SAITO, 2009, p. 5). Em nossas últimas pesquisas, buscamos compreender o conceito de número natural sob esses aspectos e, para isso, nos apoiamos em obras como as de Karlson (1961), Caraça (1984), Ifrah (2001) e Roque (2012).

Não é foco deste trabalho resgatar o percurso lógico-histórico do conceito de número natural. Apenas queremos mostrar o produto desse resgate, isto é, os nexos conceituais de números naturais e uma possível forma de abordá-los em atividades de ensino. Sendo assim, apoiados em Rezende (2010), destacamos os seguintes nexos conceituais de número natural:

- **Senso numérico**: Está relacionado à capacidade de o homem perceber quantidades de dado conjunto, mesmo sem recensear seus elementos. Não é necessário contar os elementos de dois conjuntos distintos para avaliar se um tem mais ou menos elementos que o outro, desde que a diferença entre eles seja suficientemente discrepante. Tampouco é preciso contar os elementos, um por um, de um conjunto que tenha apenas quatro, por exemplo. Apenas em um relance, podemos identificar essa quantidade.

Percurso lógico-histórico: O livro *Números e operações: elementos lógico-históricos para a atividade de ensino*, de Marisa da Silva Dias e Vanessa Dias Moretti (2011), apresenta uma versão do percurso lógico-histórico dos conjuntos numéricos e suas operações. Entendemos que outra versão pode ser encontrada na parte um do livro *Conceitos fundamentais da Matemática*, de Bento de Jesus Caraça (1984), embora possivelmente não tenha sido a intenção do autor.

Roque (2012): O livro *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*, de Tatiana Roque (2012), é a primeira obra publicada no Brasil que tenta romper com uma visão tradicional da história da matemática, pois desfaz as ideias de linearidade no desenvolvimento dos conceitos; busca por criadores/descobridores dos conceitos; valorização da biografia dos grandes matemáticos etc. Em vez disso, o livro tenta relacionar os conceitos matemáticos com os contextos em que foram produzidos.

Percurso lógico-histórico do conceito de número natural: Uma discussão mais ampliada do assunto pode ser encontrada no trabalho de conclusão de curso de graduação de João Paulo Rezende, intitulado *Nexos conceituais de número natural como sustentação para o desenvolvimento de atividades de ensino* (2010).

Nexos conceituais de número natural: Como os outros conjuntos numéricos são »

» ampliações dos naturais, os nexos conceituais de número natural também são nexos de outros tipos de número, porém, apresentam características próprias e, consequentemente, podem conter outros nexos. A ideia de conjunto denso, por exemplo, está presente nos números racionais, mas não nos naturais.

Correspondência um a um: Ao relacionar cada ponto de uma reta a um número real, estamos fazendo correspondência um a um. O mesmo acontece quando relacionamos domínio e imagem de uma função. Essa ideia extraordinária de fazer correspondência está presente em vários conceitos matemáticos, inclusive nos mais complexos, como os de densidade e continuidade.

Se desenvolveu: Aqui, entendemos evolução no sentido restrito da palavra, isto é, como movimento. Nesse caso, houve movimento no tempo. Esse cuidado é necessário para não atribuir juízo de qualidade a diferentes épocas da história da humanidade e favorecer a ideia de que a melhor época é sempre a mais moderna.

- **Correspondência um a um**: Refere-se à técnica de fazer corresponder cada um dos elementos de um conjunto que se deseja recensear a um elemento de um conjunto de controle. É o clássico exemplo das ovelhas e das pedras. Para controlar a quantidade de ovelhas, os pastores faziam com que passassem, uma por uma, por um corredor estreito e, para cada ovelha, colocavam uma pequena pedra em um saco. Para conferir a quantidade de animais, repetiam o processo; se no final sobrassem pedras, estavam faltando animais, e se sobrassem animais, o rebanho havia aumentado. Isso poderia ser feito substituindo as pedras por entalhes em madeira, osso ou pedra, por exemplo. Ainda hoje, utilizamos essa técnica, mas em vez de pedras, fazemos correspondência com o conjunto dos números naturais.
- **Agrupamento**: Com a utilização de entalhes em ossos, por exemplo, ficava confuso conferir a quantidade de entalhes se fossem mais do que cinco e estivessem organizados homogeneamente. Porém, se fossem agrupados, ficava mais fácil identificar a quantidade representada. Por exemplo, na representação |||||||||||||||||||| cada traço indica uma unidade. Portanto, são vinte unidades, mas é difícil reconhecer isso, a não ser se os reorganizarmos em pequenos grupos ||||| ||||| ||||| |||||. Em vez de separarmos os traços, poderíamos também usar símbolos distintos. Um símbolo novo a cada cinco unidades, por exemplo, ||||V ||||V ||||V ||||V. Com isso, o homem percebeu que era desnecessário fazer todos os entalhes, uma vez que o novo entalhe poderia representar, em vez de uma unidade, um agrupamento. Então, V, por exemplo, poderia representar um agrupamento de cinco unidades; assim, vinte poderia ser representado por VVVV. Porém, para representar números maiores, o problema persistia, mas isso foi resolvido facilmente com a invenção de novos símbolos. Segundo Ifrah (2001), essa prática deu origem ao sistema de numeração romano.
- **Valor posicional**: À medida que a sociedade se desenvolveu, surgiu a necessidade de representações de quantidades muito grandes ou muito pequenas. Se fosse mantida a ideia anterior e fossem inventados mais e mais símbolos para representar diferentes quantidades, possivelmente teríamos problema em memorizar tantos símbolos. A ideia de valor posicional resolveu esse problema. No sistema de

numeração indo-arábico, por exemplo, existem apenas dez símbolos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0). Porém, um mesmo símbolo assume valores diferentes dependendo da posição que ocupa. O numeral 22, por exemplo, é composto apenas do algarismo 2 que se repete, sendo que o primeiro 2, da esquerda para a direita, vale 20 unidades, pois indica que existem dois agrupamentos de dez unidades, e o segundo 2 vale duas unidades.

- **Base**: No sistema indo-arábico, por exemplo, é usada a base 10. Significa que dez é a quantidade de referência para formar agrupamentos. Dez unidades formam uma dezena, dez dezenas formam uma centena, dez centenas formam uma unidade de milhar, e assim por diante. Outro exemplo bastante comum atualmente são as unidades de medida de tempo que utilizam base 60. Nesse caso, o que ocorre é uma mistura, pois, para representar essas medidas, são utilizados algarismos indo-arábicos.
- **Composição de decomposição**: O numeral indo-arábico, portanto, é formado pela composição de agrupamentos numéricos. Assim, ao operar com esses numerais, podemos decompô-los e recompô-los sempre que necessário, utilizando, para isso, as operações aritméticas e/ou as ideias de valor posicional e base. O número 125, por exemplo, pode ser representado de várias formas:

$$125 = 100 + 25 = 5^3 = \frac{250}{2} = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0 = ...$$

- **Representação (número, numeral e algarismo)**: O número é um ente abstrato, isto é, não existe no mundo real. Em outras palavras, o número é a ideia de quantidade. O numeral, por sua vez, é a representação dessa quantidade. Ao representar uma quantidade de forma escrita, utilizamos símbolos gráficos, que são os algarismos. O número cento e vinte e cinco, por exemplo, pode ser representado pelos numerais 125 e CXXV. No primeiro caso, são usados os algarismos indo-arábicos 1, 2 e 5; no segundo, são usados os algarismos romanos V, X e C.

Esses são os sete nexos conceituais de número natural que identificamos; contudo, podem existir outros. Na sequência, apresentamos uma proposta de atividade para o processo de ensino-aprendizagem com o objetivo de explorar esses nexos conceituais.

Composição de decomposição: Saber como são compostos os números naturais (agrupamentos de base 10) pode ser o primeiro passo para compreender como são formados os decimais não inteiros. Uma unidade é decomposta em 10 partes iguais, que são chamadas décimos. Um décimo é dividido em 10 partes formando os milésimos, e assim por diante.

Representação: A ideia de representação é de grande importância para outros tipos de números. Um número racional, por exemplo, pode ser representado em forma de fração ($q = \frac{a}{b}$, *sendo a e b naturais e* $b \neq 0$) ou em forma decimal. No entanto, não se discute de maneira concisa a relação entre essas duas representações. Acreditamos que isso pode ser feito de várias formas, mas uma das mais interessantes é considerar a representação decimal como sendo uma fração equivalente, cujo denominador é uma potência de base 10. Por exemplo, $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25$.

Sete nexos: O oitavo nexo conceitual, que ainda não foi considerado porque não temos estudos suficientes, poderia ser a noção de infinito. Existe uma infinidade de números inteiros e, entre dois números racionais, existe uma infinidade de outros números racionais. São diferentes tipos de infinitos, »

» podendo existir outros que guardam propriedades dos números que estão sendo considerados. Os números reais, por exemplo, só puderam ser pensados a partir do momento em que foi possível identificar que, mesmo havendo infinitos números racionais em um intervalo finito, ainda assim existiam "buracos" nesse intervalo, os quais foram preenchidos com os números irracionais.

Minicurso: Minicurso intitulado "De onde vem o vai 1?", desenvolvido por Isabel Cristina Rabelo Gomes e Thiarla Xavier Dal-Cin Zanon (2010).

Quantidade maior que dois: Por essa razão, o jogo é chamado "nunca 3".

1.5 O "JOGO DO NUNCA"!

Conhecemos o "Jogo do nunca" em um minicurso oferecido no X Encontro Nacional de Educação Matemática (Enem). Ao percebermos sua potencialidade para explorar alguns dos nexos conceituais de número natural, decidimos usá-lo, porém com algumas adaptações. O objetivo do jogo é fazer os estudantes envolvidos compreenderem melhor os números naturais explorando os sete nexos conceituais que identificamos.

O jogo pode ser realizado em grupos de quatro estudantes. Apresentamos aqui uma proposta para duas aulas de 50 minutos cada, mas isso pode ser expandido dependendo da necessidade e da disponibilidade do professor e dos estudantes. Como material, utilizamos um conjunto de 100 palitos de picolé, 20 elásticos, papel e caneta para as anotações. Como o jogo apresenta algumas variações, demonstramos neste texto apenas o "nunca 3", mas acreditamos que, conhecendo esta versão, facilmente o leitor vai poder adaptá-la para "nunca 4", "nunca 5", "nunca 10" etc. As regras do "nunca 3" são as seguintes:

1º Não é permitido que o participante permaneça com uma quantidade maior que dois em suas mãos;

2º Cada vez que o participante tiver a quantidade três, deve agrupá-la com um elástico, quantas vezes forem necessárias;

3º Um participante por vez arremessa dois dados e retira do monte de palitos a quantidade referente ao produto dos valores obtidos nos dois dados, organizando-os em seguida de acordo com as regras anteriores;

4º Os passos da atividade devem ser registrados.

Exemplo

Um estudante lança os dois dados e sorteia os valores 5 e 3. Deve retirar 15 palitos do monte. Ele pega o primeiro e o segundo palito, mas, ao pegar o terceiro, não pode ficar com três palitos soltos, já que o jogo é nunca 3. Então, pega um elástico e prende os palitos passando a ter, em vez de 3 palitos, um agrupamento. O estudante continua o processo sempre agrupando os palitos de 3 em 3; porém, ao pegar o nono palito, ele passa a ter 3 agrupamentos. Como isso não pode acontecer, novamente usa o elástico para unir os três grupos formando um grupo maior. Ao final, terá um agrupamento de 9 palitos (3 grupos de 3 palitos), dois agrupamentos de 3 palitos e nenhum palito solto.

Dessa forma, são formados agrupamentos de tamanhos distintos e, portanto, é preciso criar uma nomenclatura que os diferenciem. Para isso, dizemos que os palitos soltos são agrupamentos de ordem zero, os agrupamentos de 3 palitos são de ordem 1, aqueles de 9 palitos são de ordem 2, os de 27 palitos são de ordem 3, e assim por diante.

Para facilitar o registro, podemos usar uma tabela:

Tabela 1.1 *– Representações do jogo do "nunca 3"*

Ordem dos agrupamentos				Representação	Quantidade de palitos
3	**2**	**1**	**0**		
0	1	2	0	120	||| ||| ||| ||| |||
0	0	2	1	21	||| ||| |
0	1	0	2	102	||| ||| ||| ||

Observe que a primeira quantidade representada na tabela é a de quinze palitos do exemplo anterior. A representação dessa quantidade no jogo do "nunca 3" é:

120

→ Nenhum palito solto.

→ Dois agrupamentos com 3 palitos cada.

→ Um agrupamento com 9 palitos.

Apesar de usarmos os mesmos símbolos do sistema de numeração indo-arábico, os numerais representam quantidades distintas.

Após essa atividade, pode-se pedir que os estudantes façam ao menos dez lançamentos e registrem os dados na tabela. Depois, podem responder às seguintes questões:

Responder às seguintes questões: As questões que colocamos são sugestões; o professor que decidir desenvolver essa atividade em suas turmas pode adaptá-las ou criar novas.

1. Qual a semelhança entre a representação dos agrupamentos e a representação usual dos números do nosso sistema de numeração?

Com essa questão, espera-se que os estudantes percebam que uma mesma quantidade está representada de distintas formas, porém existem estruturas semelhantes nas duas formas de representação, como o agrupamento e o valor posicional. Além disso, como a nova representação (“nunca 3”) possivelmente não é conhecida pelos estudantes, eles terão que contar (fazer correspondência uma a um) os tracinhos da última coluna da Tabela 1.1. Pode-se aproveitar a oportunidade para verificar se os estudantes fizeram as representações, nessa última coluna, por meio de agrupamentos. Por exemplo, o numeral 120 (“nunca 3”) está representado com traços agrupados de três em três (||| ||| ||| ||| |||), porém os estudantes poderiam tê-los organizado em um só grupo (|||||||||||||||). A quantidade representada é a mesma, mas no segundo caso é mais difícil ter uma ideia precisa da quantidade. Assim, os educandos podem perceber a ideia de senso numérico.

2. O algarismo 1, na ordem três, tem valor diferente do que na ordem um?

Esta questão permite que os estudantes percebam o nexo conceitual de valor posicional.

3. Se respondeu “sim” à questão anterior, qual a diferença entre esses agrupamentos?

Espera-se que os estudantes discutam sobre o valor a que cada agrupamento corresponde dependendo de sua ordem. Por exemplo, o algarismo 1 vale três unidades na ordem 1 e 27 unidades na ordem 3. Assim, podem perceber o nexo conceitual de valor posicional.

4. De que são compostos os agrupamentos utilizados?

Espera-se que os estudantes respondam que são compostos de agrupamentos menores. Com isso, o professor pode instigá-los a descobrir o valor de um agrupamento em cada ordem. Uma possível forma de fazer isso é por meio de uma tabela:

***Tabela 1.2** – Número de palitos por ordem dos agrupamentos*

Ordem	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
Número de palitos por agrupamento	81	27	9	3	1

Com essa tabela, os estudantes podem perceber também que os agrupamentos representam quantidades que são potências de base 3. Assim, o professor pode pedir que acrescentem uma terceira linha na tabela com essas potências, como indicado a seguir.

Tabela 1.3 *– Número de palitos por ordem dos agrupamentos representados como potências de base 3*

Ordem	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
Número de palitos por agrupamento	81	27	9	3	1
Representação por potências de base 3	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0

5. Como encontrar as representações de uma quantidade dada no jogo do "nunca 3" no sistema de numeração indo-arábico?

Tomando como referência a Tabela 1.3 da questão anterior, os estudantes podem perceber que os agrupamentos são múltiplos das potências de base três e que o expoente de cada potência corresponde à ordem dos agrupamentos. O numeral 120 ("nunca 3"), por exemplo, tem um agrupamento de ordem 2, dois agrupamentos de ordem 1 e nenhum agrupamento de ordem zero. Então, para representá-lo no sistema indo-arábico, podemos escrevê-lo desta forma: $1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 0 \times 3^0 = 9 + 6 = 15$.

Nessa questão, os estudantes têm a possibilidade de compreender o nexo conceitual de base. Uma conclusão cabível é a de que o jogo do "nunca 3" é organizado com numerais escritos em base 3 e o sistema de numeração indo-arábico, em base 10. Isso significa que este último pode ser trabalhado com o jogo do "nunca 10". Da mesma forma, outras bases podem ser trabalhadas com o "nunca 5", "nunca 8" etc.

Além da base, os estudantes podem reforçar o entendimento dos nexos conceituais de representação, composição e decomposição, valor posicional e agrupamento.

6. Qual a diferença entre a representação desses números e a representação no sistema de numeração romano?

Espera-se, com essa questão, que os estudantes percebam que nem sempre os sistemas de numeração tiveram a mesma configuração. O sistema romano, por exemplo, era organizado por meio de agrupamentos, mas não tinha valor posicional. O professor pode aproveitar a oportunidade para questionar sobre o zero. Existe zero nos algarismos romanos? Havendo tempo para explorar melhor a questão, pode-se discutir sobre as representações de outros sistemas de numeração, como o egípcio, maia e babilônico.

Egípcio, maia e babilônico: Mais detalhes sobre esses sistemas de numeração podem ser encontrados no livro *Os números: a história de uma grande invenção*, de Georges Ifrah (2001).

7. Como fazer operações com um sistema de numeração de base 3?

Com esta questão, espera-se que os estudantes investiguem como os tradicionais algoritmos das operações aritméticas podem ser usados em um sistema de numeração com base 3. Ao fazer isso, eles acabam explorando os nexos conceituais de número natural. É possível apresentar alguns exemplos de como as operações podem ser pensadas.

Como as operações podem ser pensadas: Nesta etapa, é interessante sugerir que os estudantes representem os numerais com os palitos e os usem para entender o algoritmo. Lembre-se de que, como se trata do jogo do "nunca 3", somente podem ser usados os algarismos 1, 2 e 0 para compor os numerais. Nesse caso, $2 + 1 = 10$; $2 + 2 = 11$; $22 \times 2 = 121$.

Ao término das atividades, todos os nexos conceituais de número natural que apresentamos terão sido explorados, mas há necessidade de que o professor, sempre que possível, reforce essas ideias com os estudantes.

1.6 PARA FINALIZAR...

Inicialmente, neste texto, defendemos a ideia de que a escolha de dada metodologia é condicionada pelas concepções do professor acerca do que é matemática e de como esse conhecimento é produzido. Portanto, apresentamos as concepções teóricas que têm fundamentado nosso trabalho, isto é, a perspectiva lógico-histórica e os nexos conceituais. Na sequência, apresentamos alguns dos nexos conceituais de número natural e uma proposta de atividade, o "Jogo do nunca", que tem a potencialidade de explorar tais nexos. Nosso intuito com essa apresentação não foi esgotar o assunto, até porque acreditamos que isso não é possível. Em vez disso, buscamos apresentar um panorama para que o leitor possa perceber um possível caminho de uso da perspectiva lógico-histórica em atividades de ensino.

Em síntese, pode-se dizer que esse caminho consiste em identificar, nos registros da história da Matemática, os nexos conceituais dos conceitos, bem como contextos, formas de pensamento e necessidades que levaram à elaboração de dado conceito. Por fim, busca-se possibilitar que os nexos conceituais identificados sejam explorados em atividades de ensino. Um estudo embasado nessa perspectiva não tem a intenção de, necessariamente, reportar a história do conceito, mas entender o movimento do pensamento que culminou em sua formalização teórica, ou seja, possibilitar que os estudantes se apropriem das particularidades do histórico que fundamentam o lógico.

Portanto, o "Jogo do nunca" serviu de exemplo de nossa proposta de trabalho. Apesar de trabalharmos um conceito frequentemente considerado como básico, percebemos que, mesmo no Ensino Médio, os estudantes não compreendem nosso sistema de numeração. Contudo, julgamos que temos a oportunidade de explorar tal conceito no momento em que discutimos conjuntos numéricos com os estudantes. Um trabalho parecido pode ser feito com outros tipos de números e também com outros conceitos matemáticos, no entanto, devemos estar atentos ao fato de a compreensão dos números naturais ser o ponto de partida.

Quando o estudante compreende melhor os nexos conceituais de número natural, torna-se capaz de entender também uma série de outros conceitos matemáticos, como os algoritmos das operações aritméticas; a álgebra, pois a consideramos como o ramo do conhecimento que nos possibilita pensar o número sem sua presença, isto é, apenas por meio de suas propriedades gerais; os outros conjuntos numéricos, já que sua construção, embora não tenha sido feita de maneira linear, como apontam os livros didáticos, foi realizada a partir da ampliação de ideias já presentes no conceito de número natural; as funções, pois são matematicamente definidas por meio de uma relação unívoca entre dois conjuntos numéricos, e assim por diante.

Desse modo, esperamos que este texto seja o ponto de partida para o leitor ampliar seu entendimento em relação à organização do ensino-aprendizagem de matemática fundamentado na perspectiva lógico-histórica. Esperamos, ainda, que os professores que tenham contato com nosso trabalho possam repensar suas práticas e também, havendo interesse, lançar-se em pesquisas acerca do tema, ampliando o repertório que já existe sobre o assunto. Para isso, indicamos, na seção seguinte, alguns trabalhos que podem contribuir para a ampliação do tema.

Os outros conjuntos numéricos: Algumas ampliações do conceito de número ocorreram por meio da negação de algumas impossibilidades. A impossibilidade da subtração, por exemplo, foi resolvida com a criação dos números negativos. A impossibilidade da divisão, com exceção da divisão por zero, foi resolvida com a invenção dos números fracionários. A impossibilidade da representação da medida de alguns segmentos, como a diagonal de um quadrado de lado 1, por exemplo, foi resolvida com a criação dos números irracionais. Já a impossibilidade da raiz de índice par e radicando negativo tornou-se possível a partir da criação dos números complexos.

Relação unívoca: Relação entre dois conjuntos A e B de forma que, para cada elemento pertencente ao conjunto A, exista em correspondência somente um elemento pertencente ao conjunto B.

1.7 SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO DO TEMA

Ao leitor que deseja ampliar os estudos sobre os temas propostos neste livro, destacamos alguns trabalhos separados por tema:

- Filosofia da Matemática: Fiorentini (1995); Miguel (1995).
- Perspectiva lógico-histórica: Cunha (2008); Dias (2007); Kopnin (1978); Rezende (2016); Sousa (2004).
- Atividade orientadora de ensino: Moura (2001); Moura et al. (2010).

COM FOCO NO ENSINO MÉDIO, ESTA COLEÇÃO TRAZ UM MATERIAL PRODUZIDO A PARTIR DE PESQUISAS E REFLEXÕES DE PROFESSORES E PESQUISADORES DE DIVERSAS INSTITUIÇÕES DO BRASIL, QUE SE DESTACARAM NOS ÚLTIMOS ANOS POR SUAS CONTRIBUIÇÕES NO AVANÇO DA EDUCAÇÃO.

Este livro visa colocar em discussão questões que relacionem o processo de ensino e de aprendizagem de matemática em conformidade com os temas estruturadores propostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM): "Álgebra: números e funções", "Geometria e medidas" e "Análise de dados". Esperamos que o professor e a professora possam ter, a partir das experiências compartilhadas, a oportunidade de refletir sobre a utilização de metodologias de ensino, como modelagem matemática, utilização de materiais manipulativos e uso de jogos no processo de ensinar e aprender matemática, e que esta leitura proporcione o desenvolvimento de novas propostas de trabalho em sala de aula.

LIVROS DA COLEÇÃO

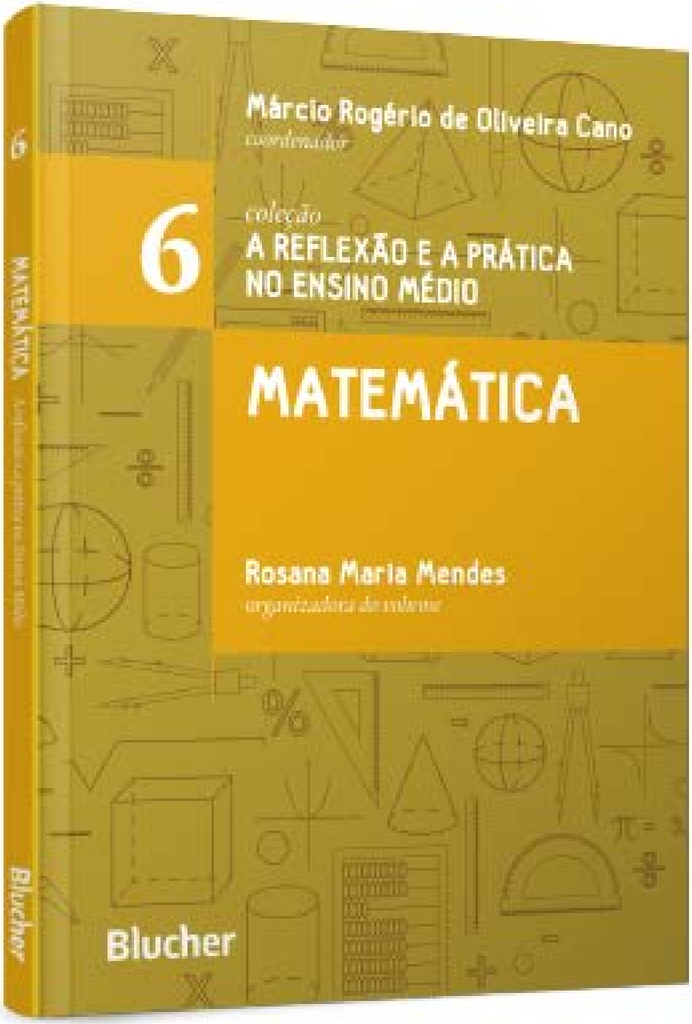
A reflexão e a prática no Ensino Médio

1 LÍNGUA PORTUGUESA
2 LÍNGUA INGLESA
3 LITERATURA
4 EDUCAÇÃO FÍSICA
5 ARTE
6 MATEMÁTICA
7 QUÍMICA
8 FÍSICA
9 BIOLOGIA
10 HISTÓRIA
11 GEOGRAFIA
12 SOCIOLOGIA
13 FILOSOFIA

www.blucher.com.br

ISBN 978-85-212-1378-9

Blucher



Matemática

Coleção a Reflexão e a Prática no Ensino Médio - Volume 6

Rosana Maria Mendes

ISBN: 9788521213789

Páginas: 208

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2019

Peso: 0.350 kg