Matemática
com Aplicações Tecnológicas

Cálculo II | **Volume 3**

Seizen Yamashiro
Suzana Abreu de Oliveira Souza
Dirceu D'Alkmin Telles (organizador)

Blucher
Fatec São Paulo
Fundação FAT

DIRCEU D'ALKMIN TELLES
Organizador

SEIZEN YAMASHIRO
SUZANA ABREU DE OLIVEIRA SOUZA
Autores

MATEMÁTICA

com Aplicações Tecnológicas

Cálculo II | **Volume 3**

Matemática com aplicações tecnológicas – Volume 3 – Cálculo II

Editora Edgard Blücher Ltda.

Capa: Alba Mancini – Mexerica Design

Sobre a capa:
Com seus 3776 metros de altura, o Monte Fuji, um dos símbolos mais conhecidos do Japão, tem a forma de um cone vulcânico e apresenta-se frequentemente nevado. Próximo à costa do Pacífico, a oeste de Tóquio, de onde pode ser visto em dias claros, é a mais alta montanha da ilha de Honshu e de todo o arquipélago japonês. Podemos estudar sua altura por meio de máximos e mínimos de funções de duas variáveis e sua topografia por meio do estudo da curva de nível.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-012 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Yamashiro, Seizen

Matemática com aplicações tecnológicas : Cálculo II – Volume 3 / Seizen Yamashiro, Suzana Abreu de Oliveira Souza ; organizado por Dirceu D'Alkmin Telles. – São Paulo : Blucher, 2018.

326 p. : il.

Bibliografia

ISBN 978-85-212-1221-8

17-0851 CDD 510

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática – Problemas, questões, exercícios

CONTEÚDO

Capítulo 1 FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS: CONCEITOS E LIMITES 21

1.1 Introdução 21

1.2 Conceito e exemplos de funções de duas ou mais variáveis 21

1.3 Funções de duas variáveis 22

1.4 Limites para funções de duas variáveis ou mais variáveis 34

1.5 Continuidade de funções de duas ou mais variáveis 39

1.6 Roteiro de estudos com exercícios resolvidos e exercícios propostos 42

Capítulo 2 DERIVADAS DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS 63

2.1 Introdução 63

2.2 Derivada parcial de uma função de duas ou mais variáveis 63

2.3 Interpretação geométrica das derivadas parciais 67

2.4 Derivadas parciais de ordem superior ou derivadas parciais sucessivas 68

2.5 Regra da cadeia para derivadas parciais 72

2.6 Derivada direcional 74

2.7 Vetor gradiente 80

2.8 Plano tangente 91

2.9 Máximos e mínimos de funções de duas variáveis 93

2.10 Máximos e mínimos de funções de duas variáveis com restrições 97

2.11 Campo vetorial 101

2.12 Divergente de um campo vetorial 103

2.13 Rotacional de um campo vetorial 106

2.14 Campos conservativos 108

2.15 Roteiro de estudos com exercícios resolvidos e exercícios propostos 110

Capítulo 3 INTEGRAIS DUPLAS E TRIPLAS 129

3.1 Integrais duplas 129

3.2 Integrais triplas 143

3.3 Roteiro de estudos com exercícios resolvidos e exercícios propostos 154

Capítulo 4 INTEGRAIS DE LINHA 175

4.1 Curva parametrizada 175

4.2 Integral de linha 180

4.3 Roteiro de estudos com exercícios resolvidos e exercícios propostos 197

Capítulo 5 INTRODUÇÃO À TEORIA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS 211

5.1 Introdução histórica 211

5.2 Equação diferencial 211

5.3 Equações diferenciais ordinárias 215

5.4 Métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias 216

5.5 Roteiro de estudos com exercícios resolvidos e exercícios propostos 241

Capítulo 6 SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS 263

6.1 Introdução histórica 263

6.2 Conceito de sequência numérica 264

6.3 Conceito de série numérica 267

6.4 Princípio da Indução Finita 286

6.5 Roteiro de estudos com exercícios resolvidos e exercícios propostos 287

APÊNDICE 1 303

APÊNDICE 2 309

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 325

1 FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS: CONCEITOS E LIMITES

1.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, estudaremos alguns conceitos básicos do cálculo para funções de duas ou mais variáveis. Iniciaremos estudando limites e continuidades de funções de duas ou três variáveis.

No Volume 2, estudamos funções reais de uma variável. Mas, quando vamos fazer modelagem matemática, na maioria das aplicações, precisamos de mais de uma variável para representar as expressões.

Exemplos:

E 1.1 Cálculo da área de um retângulo. Sejam x a largura e y a altura de um retângulo qualquer. A sua área é dada por $x.y$. Então para cada retângulo, a função área é $f\left(x,y\right)=x.y$.

E 1.2 Cálculo do perímetro de um retângulo. Sejam x a largura e y a altura de um retângulo qualquer. O seu perímetro é dado por $2x+2y$. Para cada retângulo, temos que, então, a função perímetro é $f\left(x,y\right)=2\left(x+y\right)$.

1.2 CONCEITO E EXEMPLOS DE FUNÇÕES DE DUAS OU MAIS VARIÁVEIS

Seja D um conjunto no espaço n-dimensional, ou seja, $D\subseteq\mathbb{R}^n$. Os elementos de D são n-uplas ordenadas $P=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ de números reais.

Se a cada ponto P pertencente ao conjunto D associamos um único elemento $w \in \mathbb{R}$, temos uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que é denominada função de n variáveis reais independentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Os números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são também denominados variáveis de entrada da função e $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou $w = f(P)$ é a variável dependente, também denominada variável de saída.

O conjunto D é chamado de domínio da função e o conjunto dos valores de w assumidos pela função é o conjunto imagem da função.

Exemplos:

E 1.3 Cálculo da área de um triângulo. Sejam x a largura da base e y a altura de um triângulo qualquer. Pela fórmula da geometria,

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{xy}{2}$$

Então, a função área do triângulo é dada por $f(x,y) = \frac{xy}{2}$. Se o triângulo tem base 3 e altura 4, logo, a área é dada por: $f(3,4) = \frac{3.4}{2} = 6$ unidades de área (u.a.).

E 1.4 Cálculo do volume de uma caixa retangular. Sejam x, y e z os lados de uma caixa retangular qualquer. Pela fórmula da geometria,

$$V = \text{área da base} \times \text{altura}$$

Então, a função volume de uma caixa retangular é dada por $f(x,y,z) = x.y.z$. Se a caixa tem dimensões 3, 4 e 5, seu volume é dado por: $f(3,4,5) = 3.4.5 = 60$ unidades de volume (u.v.).

E 1.5 Cálculo da média aritmética de n números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Pela fórmula estatística,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Então, a função média aritmética de n números reais é dada por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

1.3 FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Uma função real *f* de duas variáveis é uma relação que transforma em um único número real z cada par ordenado (x, y) de números reais pertencentes a certo conjunto

D, denominado domínio da função. Temos, de $z = f(x,y)$, em que x e y são variáveis independentes, z é a variável que depende de x e y, e o conjunto formado pelos valores de z é denominado conjunto imagem da função f.

Observemos que o domínio da função de duas variáveis é uma região do plano $(\mathbb{R}^2)$ e a imagem é um subconjunto do conjunto dos números reais.

1.3.1 DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

Para determinarmos a região do plano que determina o domínio de uma função de duas variáveis, precisamos analisar as condições de existência da função, lembrando as restrições de domínio das funções de uma variável real, estudadas no Volume 1.

Exemplos:

Determinar a região do plano que define o mais amplo domínio das funções de duas variáveis a seguir:

E 1.6 $f(x,y) = \sqrt{y - 2x}$

Resolução:

Pela condição de existência, o radicando não pode ser negativo, ou seja:

$$y - 2x \geq 0 \rightarrow y \geq 2x$$

Vamos traçar a reta e analisar a região do plano que satisfaz a desigualdade. Como se trata de uma reta, bastam dois pontos para determiná-la:

x	$y = 2x$
0	0
1	2

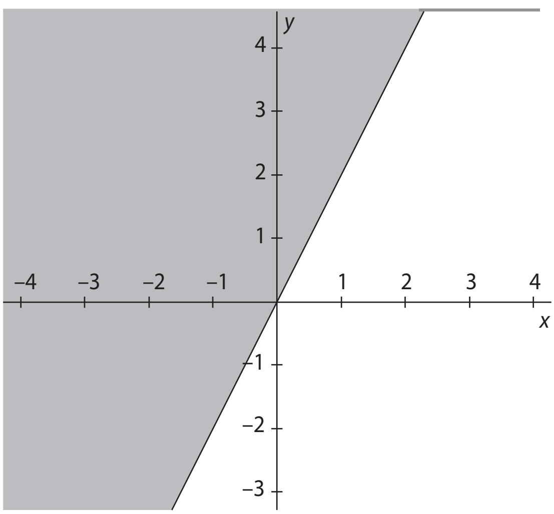

Figura 1.1

A região em que $y = 2x$ está sobre a reta. Basta analisar o ponto que está na região e satisfaz a desigualdade.

Resposta: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geq 2x\}$.

E 1.7 $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

Resolução:

Pela condição de existência, o logaritmando deve ser positivo, ou seja:

$$1 - x^2 - y^2 > 0 \rightarrow 1 > x^2 + y^2$$

Observando que $x^2 + y^2 = 1$ é a equação da circunferência de centro 0 e raio 1 e que não vale a igualdade, vamos esboçar o gráfico da circunferência tracejado. E, analisando que a região em questão é menor do que o raio, isto indica que o domínio está dentro da circunferência. Portanto:

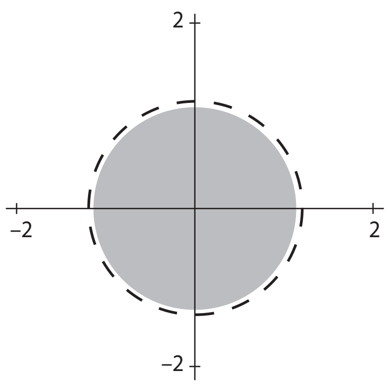

Figura 1.2

Resposta: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 < 1\}$.

E 1.8 $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x + y)$

Resolução:

Pela condição de existência, o resultado da função seno está entre –1 e 1, ou seja:

$$-1 \leq x + y \leq 1$$

Vamos analisar separadamente

$$-1 \le x + y \to y \ge -1 - x$$

$$x + y \le 1 \to y \le 1 - x$$

x	$y = -1 - x$
0	−1
−1	0

x	$y = 1 - x$
0	1
1	0

Colocando as retas no gráfico e analisando as regiões de acordo com as desigualdades,

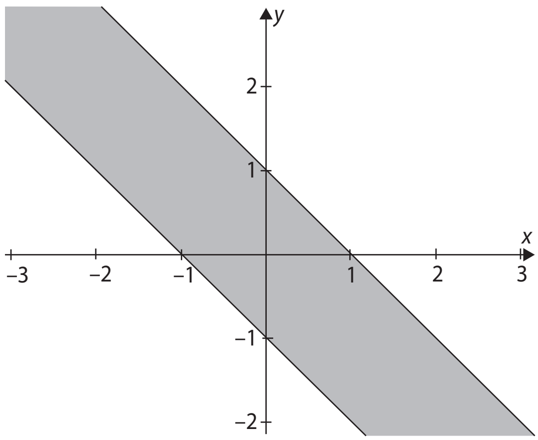

Figura 1.3

Resposta: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -1 \le x + y \le 1\}$.

1.3.2 GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

O gráfico de uma função f de duas variáveis é o conjunto de todos os pontos (x,y,z) no espaço cartesiano tridimensional, tal que (x,y) pertence ao domínio D da função. O gráfico da função é uma superfície, cuja projeção perpendicular ao plano xy é D.

A função f transforma o par (x,y) do plano no número $z = f(x,y)$, formando, assim, um ponto no espaço.

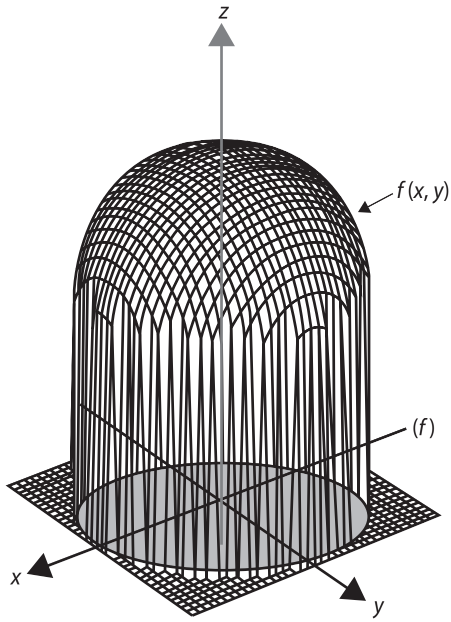

Figura 1.4

1.3.2.1 Curvas de nível

Seja $z = f(x,y)$, com $(x,y) \in D(f)$, uma função real de duas variáveis reais. Tomemos $c \in Im(f)$, onde c é um número real fixo, ou seja, uma constante. O conjunto de todos os pontos (x,y), tais que $f(x,y) = c$, denomina-se curva de nível da função f, correspondente ao nível $z = c$. Assim, a função f é constante sobre cada curva de nível.

Exemplos:

E 1.9 Mapa de um empreendimento contendo curvas de nível que desenhem a topografia da região.

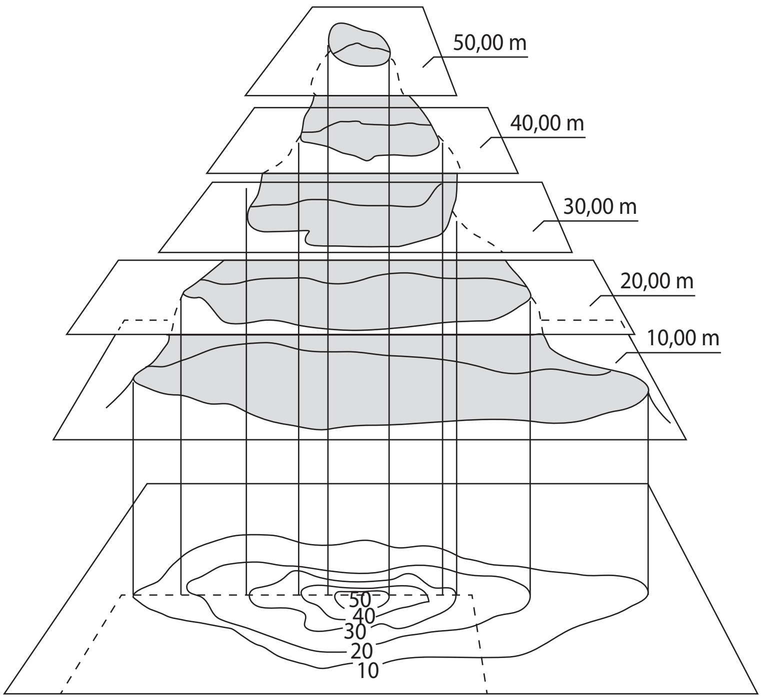

Figura 1.5

Fonte: Lima (2012, p. 93).

E 1.10 Se $T(x,y)$ é a temperatura em um ponto (x,y) sobre uma placa de metal, medida em graus Celsius, no plano xy, então, as curvas de nível T são chamadas de *curvas isotérmicas*, isto é, todos os pontos sobre tal curva têm a mesma temperatura. Suponhamos que uma placa ocupe o primeiro quadrante do plano cartesiano e que $T(x,y) = x.y$. Vamos:

- Esboçar as curvas isotérmicas sobre as quais $T = 1$ e $T = 2$;
- Se um ponto P está na posição $P(1,4)$, determinar a trajetória percorrida por esse ponto e qual a sua temperatura ao longo da trajetória.

Resolução:

Como $T(x,y) = x.y$, para:

$$T = 1 \to 1 = x.y \to y = \frac{1}{x} \text{ (função recíproca)}$$

$$T = 2 \to 2 = x.y \to y = \frac{2}{x}$$

- Para o ponto $P(1,4)$ é a temperatura $T = 1.4 = 4$ constante ao longo da trajetória. A trajetória é dada por $4 = x.y \to y = \frac{4}{x}$.
  Graficamente,

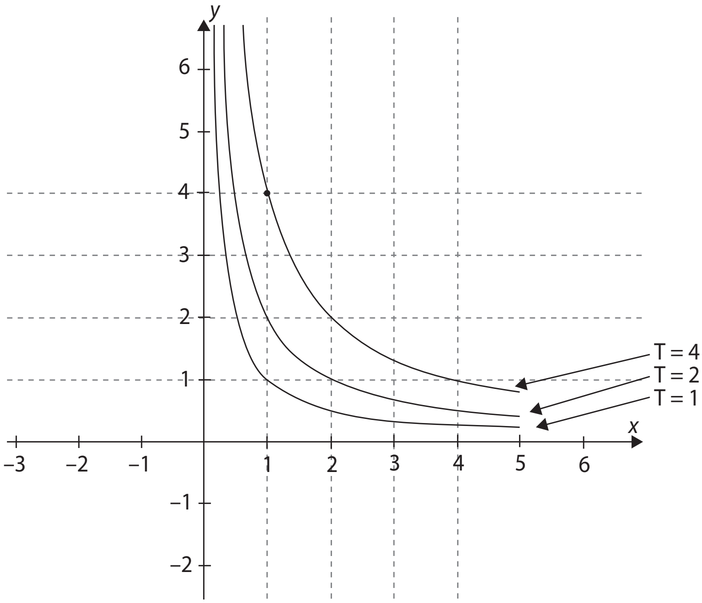

Figura 1.6

Observação

Se $f(x,y)$ é a pressão de um gás de volume x e temperatura y, as curvas $f(x,y) = c$ são chamadas de *isóbaras*.

E 1.11 Se $V(x,y)$ é a voltagem ou potencial sobre um ponto (x,y) no plano xy, então, as curvas de nível V são chamadas de *curvas equipotenciais*. Logo, ao longo de tal curva, a voltagem permanece constante. Se $V(x,y) = x^2 + y^2$, esboçar as curvas equipotenciais para $V = 1$ e $V = 4$.

Resolução:

Se $V(x,y)=c$, então, $x^2+y^2=c$. Assim, as curvas de nível para $c>0$, são as circunferências concêntricas, de centro na origem e raio c. Então, para

$$c=1 \rightarrow x^2+y^2=1 \rightarrow \text{raio}=1$$

$$c=4 \rightarrow x^2+y^2=4 \rightarrow \text{raio}=2$$

Graficamente,

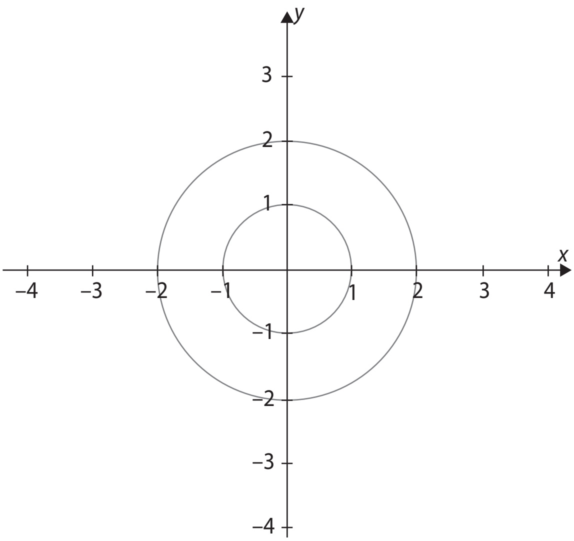

Figura 1.7

E 1.12 Consideremos a função $f(x,y)=y^2-x^2$. O gráfico desta função é chamado de *paraboloide hiperbólico* e também é denominado *superfície de sela* por causa da sua configuração.

Para esboçar o gráfico desta função, vamos analisar as curvas de nível, curvas em que $y^2-x^2=c$, onde c é uma constante e as curvas auxiliares, ou seja, curvas em que $y^2-c^2=z$ e $c^2-x^2=z$, onde c é uma constante.

Vamos começar pelas curvas de nível. Neste caso, $y^2-x^2=c$.

1º) Para $c>0$, as curvas são hipérboles paralelas ao eixo dos x:

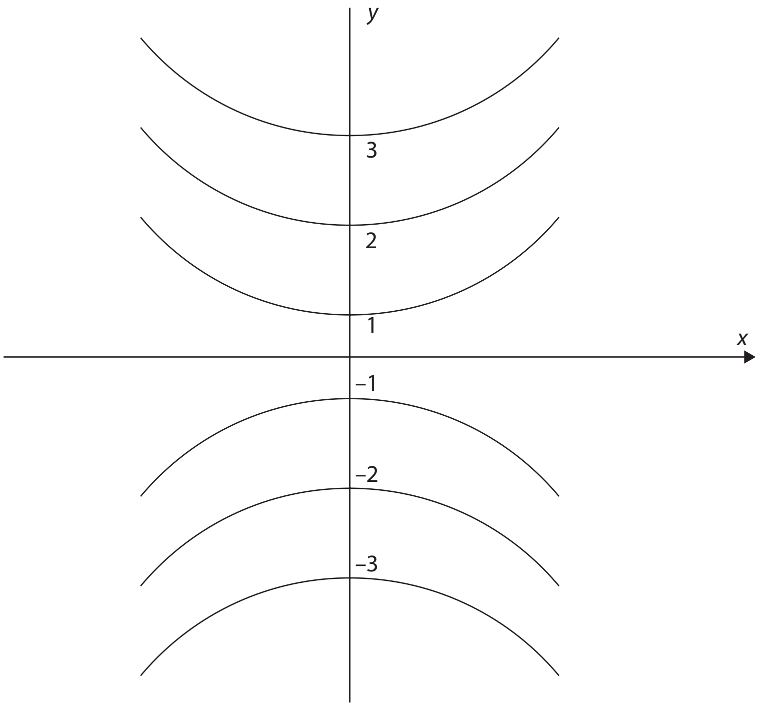

Figura 1.8

2º) Para $c < 0$, as curvas são hipérboles paralelas ao eixo dos y:

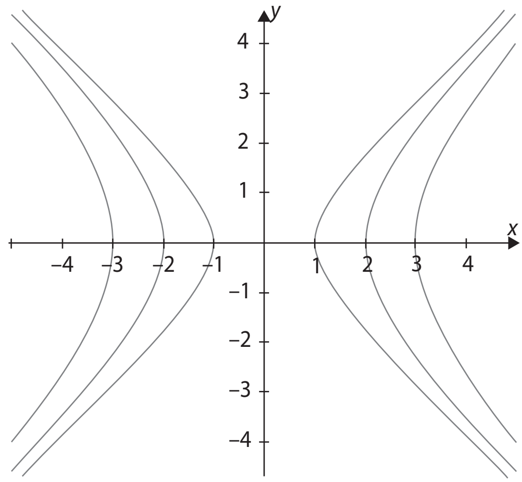

Figura 1.9

3º) Para $c = 0$, temos $y^2 = x^2$, ou seja, as retas $y = x$ e $y = -x$, que são as bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares:

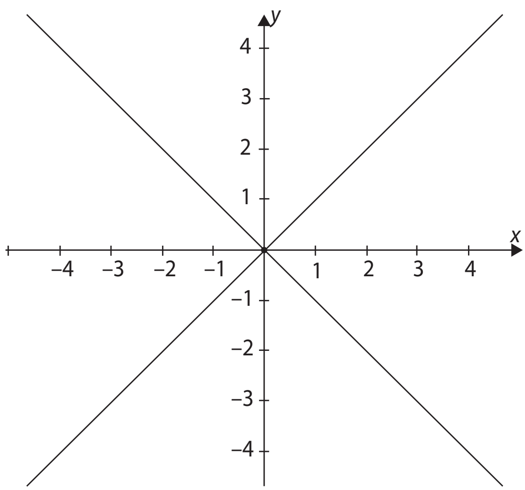

Figura 1.10

Agora vamos fazer $y^2 - c^2 = z$, onde c é uma constante. Neste caso, $z = y^2 - k$, onde $k = c^2 \in \mathbb{R}$. Para cada valor de c, o gráfico é uma parábola de concavidade positiva no plano yz:

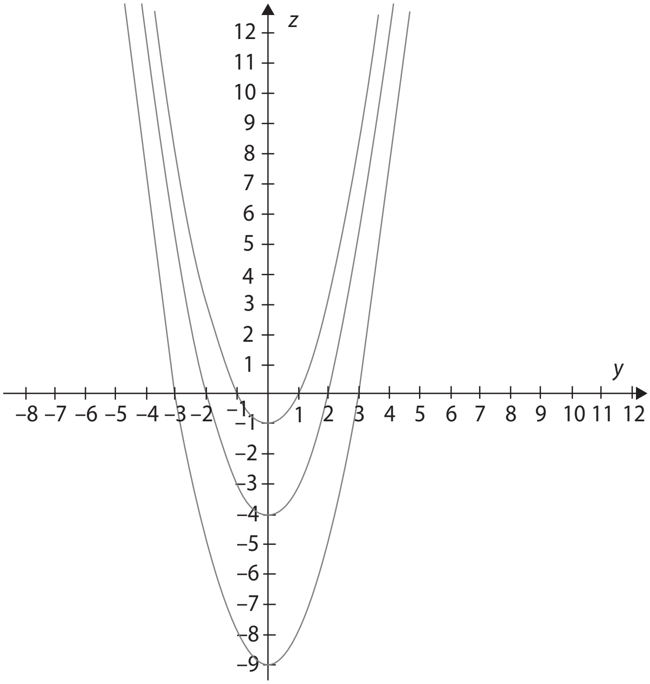

Figura 1.11

Fazendo $c^2 - x^2 = z$, onde c é uma constante. Neste caso, $z = k - x^2$, onde $k = c^2 \in \mathbb{R}$. Para cada valor de c, o gráfico é uma parábola de concavidade negativa no plano xz:

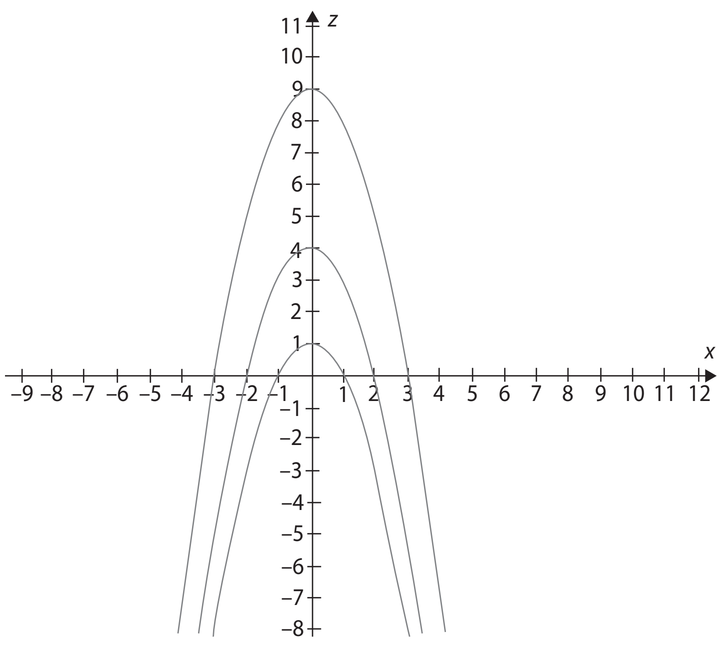

Figura 1.12