OSCAR E. FERNANDEZ

POR QUE O CAFÉ ESFRIA TÃO RÁPIDO?

E outras aplicações do cálculo no seu dia

Blucher

POR QUE O CAFÉ ESFRIA TÃO RÁPIDO?

POR QUE O CAFÉ ESFRIA TÃO RÁPIDO?

E outras aplicações do cálculo no seu dia

Oscar E. Fernandez

Tradução
Celso Roberto Paschoa

Revisão Técnica
Helena Castro

Título original em língua inglesa: *Everyday Calculus: Discovering the Hidden Math All around Us*

Publisher Edgard Blücher

Editor Eduardo Blücher

Produção editorial Bonie Santos, Camila Ribeiro, Isabel Silva

Diagramação Guilherme Henrique Martins Salvador

Preparação de texto Ana Maria Fiorini

Revisão de texto Diego da Mata

Capa Leandro Cunha

Produção gráfica Alessandra Ferreira

Comunicação Jonatas Eliakim

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa, Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

FICHA CATALOGRÁFICA

Fernandez, Oscar E.
Por que o café esfria tão rápido? : E outras aplicações do cálculo no seu dia / Oscar E. Fernandez; tradução de Celso Roberto Paschoa. – São Paulo: Blucher, 2016.

ISBN 978-85-212-1026-9
Título original: Everyday Calculus: Discovering the Hidden Math All around Us.

1. Cálculo – obras populares 2. Matemática I. Título II. Paschoa, Celso Roberto.

16-0102 cdd 515

Índices para catálogo sistemático:
1. Cálculo

Dedicado a Zoraida,

você é a graça da minha vida

e também à nossa filha:

minha menina, você será sempre minha querida

e, certamente, à minha mãe:

sem teu amor, eu jamais estaria aqui.

Sumário

Prefácio

Desde o fim do século XVII, quando o cálculo estava sendo desenvolvido pelos maiores matemáticos da época, milhares de pessoas ao redor do mundo fazem a mesma pergunta: "Quando é que eu vou usar isso?".

Se você está lendo este livro, provavelmente está interessado na resposta a essa pergunta, assim como eu estava quando comecei a aprender cálculo. Há respostas, como "o cálculo é utilizado por engenheiros ao projetar x", mas esta é mais a afirmação de um fato do que uma resposta à pergunta. As páginas a seguir respondem à questão de uma maneira muito diferente, revelando a matemática oculta – o cálculo em particular – que descreve nosso mundo.

Para contar essa narrativa reveladora, eu o conduzirei por um dia típico de minha vida. Você pode estar pensando: "Um dia *típico*? Você é um matemático! Como seu dia pode ser *típico*?". Mas, como você verá, meu dia é tão normal como o de qualquer outra pessoa. Pela manhã, às vezes me sinto grogue; passo o que me parecem horas no trânsito (apesar de serem apenas minutos) a caminho do trabalho; ao longo do dia, escolho o que e onde comer;

e, em algum momento, penso em dinheiro. Nós não prestamos atenção a esses eventos diários, mas neste livro irei descascar o verniz do dia a dia para revelar seu DNA matemático.

O cálculo explicará por que nossos vasos sanguíneos se ramificam em determinados ângulos (Capítulo 5) e por que todos os objetos atirados ao ar descrevem um arco com o formato de uma parábola (Capítulo 1). Suas ideias nos farão repensar o que sabemos sobre tempo e espaço, demonstrando que podemos viajar no tempo para o futuro (Capítulo 3), e que nosso universo está expandindo (Capítulo 7). Também explicarei como o cálculo pode nos ajudar a acordar mais descansados (Capítulo 1), reduzir o consumo de combustível de nossos carros (Capítulo 5) e encontrar o melhor assento em um cinema (Capítulo 7).

Assim, se você já se perguntou para que o cálculo pode ser usado, após a leitura deste livro você terá dificuldades em descobrir para que ele *não pode* ser usado. As aplicações discutidas serão acompanhadas ao longo dos capítulos por várias fórmulas. Essas equações gentilmente ajudarão você a consolidar seu entendimento matemático do cálculo, mas não se preocupe se você estiver meio "enferrujado"; não será preciso entender nenhuma delas para aproveitar o livro. Mas caso você fique curioso sobre a matemática, o Apêndice A apresenta uma revisão sobre funções e gráficos para você se aquecer, e os Apêndices de 1 a 7 incluem os cálculos mencionados por todo o livro, que são indicados por asteriscos que se parecem com este,*[1]. Você ainda encontrará notas de rodapé indicadas por algarismos romanos e notas finais indicadas por algarismos arábicos. Finalmente, nas páginas 15 e 16 você encontrará uma lista com os conceitos matemáticos discutidos em cada capítulo.

Quer você seja um iniciante em cálculo, esteja estudando cálculo atualmente, ou não tenha contato com a matéria já há alguns anos, encontrará nos próximos capítulos um modo totalmente novo de ver o mundo. Talvez você não veja fórmulas sofisticadas brilhando à sua frente quando terminar de ler este livro, mas espero que atinja uma iluminação similar à que Neo experimenta no filme *Matrix* quando fica sabendo que um código de computador constitui a base da sua realidade. Embora eu não seja tão legal quanto Morpheus, estou ansioso para ajudar você a sair pelo outro lado da toca do coelho.

Oscar Edward Fernandez

Newton, MA

Tópicos de cálculo discutidos por capítulo

A tabela a seguir detalha os tópicos de cálculo discutidos em cada capítulo.

Capítulo 1	Funções lineares
	Funções polinomiais
	Funções trigonométricas
	Funções exponenciais
	Funções logarítmicas
Capítulo 2	Inclinações e taxas de variação
	Limites e derivadas
	Continuidade
Capítulo 3	Interpretação da derivada
	A segunda derivada
	Aproximação linear
Capítulo 4	Regras de derivação
	Taxas relacionadas

Capítulo 5	Diferenciais
	Otimização
	O teorema do valor médio
Capítulo 6	Somas de Riemann
	Área sob uma curva
	A integral definida
	O teorema fundamental do cálculo
	Primitivas
	Aplicação de integração a tempos de espera
Capítulo 7	Valor médio de uma função
	Comprimento de arco de uma curva
	Aplicação ao melhor assento no cinema
	Aplicação à idade do universo

1. Acorde e descubra as funções[i]

É manhã de sexta-feira. O despertador, ao meu lado, indica 6h55. Em cinco minutos, ele me acordará, e eu despertarei renovado após dormir durante aproximadamente 7,5 horas. Imitando os seguidores do antigo matemático Pitágoras – cujo dogma era "tudo é número" – eu deliberadamente optei por dormir por 7,5 horas. Mas, verdade seja dita, não tive muita escolha. De fato, uma porção de números, incluindo o 7,5, comandam nossas vidas todos os dias. Deixe-me explicar.

Muito tempo atrás, em uma universidade muito, muito distante, eu estava subindo a escadaria do dormitório da faculdade até meu quarto. Morava, à época, no segundo andar, a apenas alguns metros do quarto de meu amigo Eric Johnson. Nós dois éramos calouros do curso de Física, e eu geralmente passava em seu quarto para discutirmos a aula. Dessa vez, no entanto, ele não estava lá. Não me preocupei com sua ausência e continuei caminhando pelo

---

i "*Wake up and smell the functions*", aparentemente uma brincadeira do autor com a conhecida expressão da língua inglesa "*Wake up and smell the coffee*" ("Acorda!", "Se toca!", ou, mais formalmente, "Perceba o que está ocorrendo à sua volta!"), é uma tentativa de alertar o leitor para que ele comece a perceber a matemática ao seu redor. (N. do T.)

corredor estreito em direção ao meu quarto. EJ apareceu do nada, com uma folha amarela de *Post-it* nas mãos. "Estes números mudarão sua vida", disse ele, com seriedade, enquanto me entregava a folha. No cantinho, constava uma sequência de números:

1,5		4,5		7,5
	3		6	

A exemplo de Hurley, da série televisiva *Lost*, descobrindo sua sequência mística de números pela primeira vez, minha intuição me dizia que esses números significavam algo, mas eu não sabia o quê. Sem saber o que dizer, simplesmente emiti um "Ahn?". EJ tirou o papel de minhas mãos e apontou para o número 1,5. "Uma hora e meia com mais uma hora e meia são três", disse ele. Explicou que o ciclo de sono de um homem comum tem a duração de 90 minutos (1,5 hora). Comecei a conectar os números no formato de um W. Todos eles mantinham uma distância entre si de 1,5– a duração do ciclo do sono. Aquilo estava começando a soar como uma boa explicação de por que em alguns dias eu acordava me sentindo extremamente animado, enquanto em outros me "arrastava" por toda a manhã. A ideia de que uma simples sequência de números pudesse me afetar tanto era fascinante.

Na realidade, conseguir *exatamente* 7,5 horas de sono é algo muito difícil. E se você conseguisse dormir por apenas 7 horas, ou 6,5? Quão desperto você se sentiria? Poderíamos responder a essas perguntas se tivéssemos a *função* do ciclo do sono. Vamos criá-la com base nos dados disponíveis.

O que a trigonometria tem a ver com nossas manhãs?

Um ciclo do sono típico começa com o sono REM – em que as pessoas geralmente sonham – e depois progride até o sono não-REM.

Ao longo dos quatro estágios do sono não-REM, nossos corpos se autorreparam[1], com os dois últimos estágios – 3 e 4 – correspondendo ao sono profundo. Quando emergimos do sono profundo, retrocedemos nos estágios até o sono REM, e o ciclo completo dura uma média de 1,5 hora.

Se representarmos graficamente o estágio de sono S em função das horas de sono t, obteremos o diagrama da Figura 1.1a. O formato desse gráfico fornece uma pista a respeito da função que devemos usar para descrever o estágio do sono. Como o gráfico se repete grosseiramente a cada 1,5 hora, vamos aproximá-lo por uma *função trigonométrica*.

Para encontrar a função, comecemos observando que S depende do número de horas t que você esteve dormindo. Sob o ponto de vista matemático, dizemos que seu estágio de sono S é uma função do número de horas t em que você esteve adormecido[ii], e indicamos $S = f(t)$. Agora, podemos utilizar o que sabemos sobre os ciclos de sono para apresentar uma equação razoável para $f(t)$.

Como sabemos que nosso ciclo com os estágios REM/não-REM se dá a cada 1,5 hora, isso nos informa que $f(t)$ é uma *função periódica* – uma função cujos valores se repetem após um intervalo de tempo T, denominado *período* – e que o período $T = 1{,}5$ hora. Vamos atribuir o estágio de sono "acordado" a $S = 0$, e cada estágio subsequente ao próximo número inteiro negativo; por exemplo, o estágio de sono 1 será tratado como $S = -1$, e assim por diante.

Assumindo que $t = 0$ é quando você adormece, a função trigonométrica resultante é:[*1]

$$f(t) = 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) - 2,$$

em que $\pi \approx 3{,}14$.

ii O Apêndice A inclui uma breve revisão sobre funções e gráficos.

Antes de declararmos que $f(t)$ é um bom modelo matemático para o nosso ciclo de sono, é necessário fazermos alguns testes básicos. Primeiro, $f(t)$ deverá nos informar que estamos despertos (estágio de sono 0) a cada 1,5 hora. De fato, $f(1{,}5) = 0$ e assim por diante para múltiplos de 1,5. Em seguida, nosso modelo deve reproduzir o ciclo real do sono na Figura 1.1a. A Figura 1.1b exibe o gráfico de $f(t)$ e, como pode ser visto, captura muito bem não apenas os estágios do despertar mas também os momentos de sono profundo (os vales)[iii].

No meu caso, embora tenha feito o melhor possível para conseguir exatamente 7,5 horas de sono, provavelmente não atingi a marca por ao menos alguns minutos. Se eu tiver errado por muitos minutos, vou acordar nos estágios 3 ou 4 e me sentir grogue, então gostaria de saber quão próximo de um múltiplo de 1,5 hora será preciso acordar para que eu me sinta relativamente desperto.

Agora podemos responder a essa pergunta com nossa função $f(t)$. Por exemplo, como o sono do estágio 1 é relativamente leve, podemos determinar todos os valores de t para os quais $f(t) \geq -1$, ou:

$$2\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) - 2 \geq -1.$$

iii Conforme mostrado na Figura 1.1a, após aproximadamente três ciclos de sono completos (4,5 horas de sono) nós não passamos novamente pelos estágios de sono profundo. Não incluímos isso ao projetar o modelo, o que explica a razão de $f(t)$ não capturar os vales mais rasos vistos na Figura 1.1a para $t > 5$.

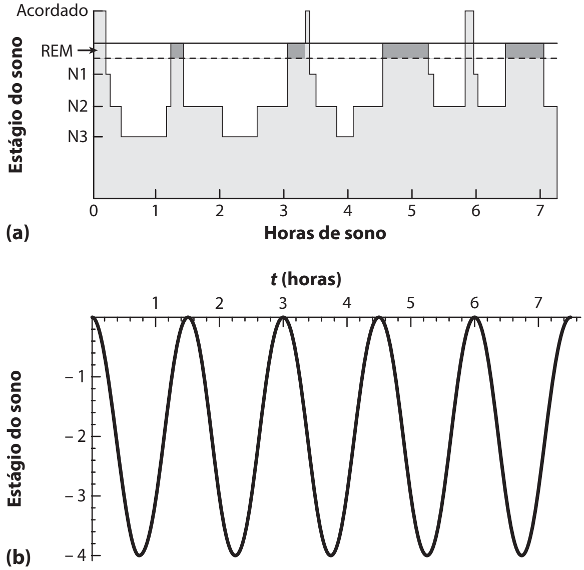

Figura 1.1 (*a*) *Um ciclo de sono típico*[2]*;*
(*b*) *nossa função trigonométrica* $f(t)$.

O meio rápido de encontrar esses intervalos é traçar uma linha horizontal no estágio de sono −1 na Figura 1.1b. Assim, todos os valores *t* para os quais nosso gráfico estiver acima dessa linha vão satisfazer nossa desigualdade. Poderíamos usar uma régua para obter boas estimativas, mas é possível também determinar os intervalos exatos pela resolução da equação $f(t) = -1$:[*2]

[0; 0,25], [1,25; 1,75], [2,75; 3,25],
[4,25; 4,75], [5,75; 6,25], [7,25; 7,75] etc.

É possível ver que as extremidades de cada intervalo estão 0,25 hora – ou 15 minutos – distantes de um múltiplo de 1,5. Portanto, nosso modelo mostra que não atingir o objetivo de 1,5 hora por 15 minutos, independentemente do lado, não influenciará significativamente o nosso humor matinal.

Essa análise assumiu que 90 minutos representavam a extensão *média* do ciclo do sono, o que significa que para algumas pessoas a extensão está mais próxima de 80 minutos, enquanto para outras, mais próxima de 100. Essas variações podem ser facilmente incorporadas em $f(t)$: basta alterar o período T. Poderíamos também substituir a tolerância de 15 minutos por qualquer outro intervalo de tempo. Esses *parâmetros livres* podem ser especificados para cada indivíduo, tornando nossa função $f(t)$ extremamente personalizável.

Mal desperto e a matemática já influi em minha vida. Não apenas ela nos permitiu decifrar o enigma dos múltiplos de 1,5 de EJ, mas também revelou que todos nós acordamos com uma função trigonométrica embutida que estabelece o compasso de nossas manhãs.

Como uma função racional frustrou Thomas Edison, e por que a indução impulsiona o mundo

Como a maioria das pessoas, eu acordo com o som de um despertador, mas, diferentemente de muitas delas, programo dois alarmes: um em meu rádio relógio ligado na tomada e o outro em meu iPhone. Adotei essa tática de dois alarmes em meus tempos de faculdade, quando um corte de energia fez com que eu me atrasasse para um exame final. Todos sabemos que nossos aparelhos funcionam à base de eletricidade, de modo que uma queda de energia deve ter interrompido o fluxo de eletricidade ao meu antigo despertador. Mas o que é "eletricidade" e o que a faz circular?

Normalmente, meu despertador consegue eletricidade na forma de *corrente alternada* (CA). No entanto, nem sempre foi assim. Em 1882, um famoso inventor – Thomas Edison – fundou a primeira companhia de distribuição de energia elétrica, que operava com a utilização de *corrente contínua* (CC)[3]. Os negócios dele logo se expandiram, e a corrente contínua começou a mover o mundo. Todavia, em 1891, os sonhos de Edison com um império baseado em CC foram esmagados, não por interesses corporativos, lobistas ou ambientalistas, mas por um suspeito incomum: uma *função racional*.

A história dessa função racional começa com o físico francês André-Marie Ampère. Em 1820, ele descobriu que dois fios conduzindo corrente elétrica podem se atrair ou repelir mutuamente, como se fossem ímãs. Começava a busca por descobrir qual era a relação entre as forças da eletricidade e do magnetismo.

O gênio inesperado que mais contribuiu para esse esforço foi o físico inglês Michael Faraday. Ele, que praticamente não tinha educação formal ou treino em matemática, conseguiu visualizar as interações entre ímãs. Para os demais cientistas, o fato de o polo norte de um ímã atrair o polo sul de um outro – se você os colocar próximos um do outro, eles rapidamente se unem – não passava disto, um fato. Mas para Faraday, havia uma *causa* para esse fenômeno. Ele acreditava que os ímãs apresentavam "linhas de força" que emanavam de seus polos norte e convergiam em seus polos sul. Ele denominou essas linhas de *campo magnético*.

Para Faraday, a descoberta de Ampère insinuava que os campos magnéticos e a corrente elétrica guardavam relação. Em 1831, ele a descobriu, verificando que mover um ímã próximo de um circuito cria uma corrente elétrica no circuito. Colocado de outro modo, essa *lei da indução* estabelece que um campo magnético variável gera uma *tensão* no circuito. Estamos acostumados com as tensões produzidas por baterias ou pilhas (como a existente em meu iPhone), nas quais reações químicas liberam energia que resulta em uma tensão entre os terminais positivo e negativo da bateria. Mas a descoberta de Faraday nos informa que as reações químicas são prescindíveis; apenas agite um ímã próximo a um circuito e, pronto, será produzida uma tensão! Essa tensão então moverá os elétrons no circuito, provocando um fluxo deles, ou o que hoje chamamos *corrente elétrica* ou *eletricidade*.

Então, o que Edison tem a ver com tudo isso? Bem, lembre-se de que suas usinas de geração operavam em corrente contínua, a mesma corrente produzida pelas baterias atuais. E assim como essas baterias operam a uma tensão fixa (uma bateria de 12 volts jamais se transformará magicamente em uma de 15 volts), as usinas de corrente contínua de Edison operavam sob uma tensão fixa. Essa parecia ser uma boa ideia na época, mas se transformou em um retumbante fracasso. A razão: elementos matemáticos ocultos.

Imagine que as usinas de Edison gerem uma quantidade *V* de energia elétrica (isto é, tensão) e transmitam a corrente elétrica resultante ao longo de uma linha de força a uma casa do século XIX, na qual um aparelho (talvez um novo e sofisticado forno elétrico) consuma a energia a uma taxa constante P_0. O raio *r* e o comprimento *l* da linha de força se correlacionam com *V* por:

$$r(V) = k\frac{\sqrt{P_0 l}}{V},$$

em que *k* é um número que mede com que facilidade a linha de força permite que a corrente flua[iv]. Essa *função racional* é a nêmese que Edison não esperava.

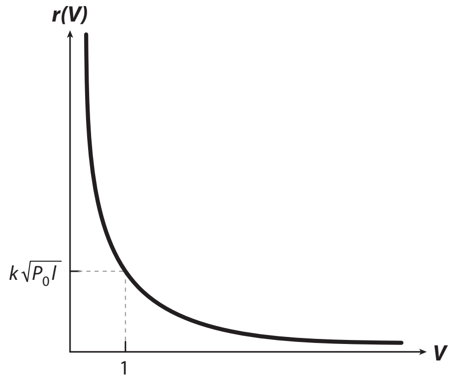

Figura 1.2 Uma representação gráfica da função racional r (V).

iv Essa propriedade dos materiais é denominada *resistividade elétrica*. As linhas de transmissão geralmente são feitas de cobre, pois esse metal tem baixa resistividade elétrica.

Para começo de conversa, o meio mais fácil de distribuir eletricidade é por linhas de transmissão suspensas. E há um incentivo inerente em fazê-las o mais finas possível (r pequeno) z, senão aumentariam muito de custo e peso – um perigo potencial para qualquer pessoa que caminhasse embaixo delas. No entanto, nossa função racional nos informa que para conduzir eletricidade em longas distâncias (l grande) precisaremos de altas tensões (V grande) se desejarmos que o raio r das linhas de transmissão sejam pequenos (Figura 1.2). E este foi precisamente o problema de Edison; suas usinas de energia operavam à baixa tensão de 110 volts. O resultado: os consumidores precisavam morar em um perímetro inferior a 2 milhas (≈ 3,2 quilômetros) da usina geradora para receber a eletricidade. Como os custos iniciais para a construção de novas usinas eram excessivamente altos, esse método logo se tornou antieconômico para ele. E, além de tudo, em 1891, uma corrente alternada foi gerada e transportada a *108 milhas* (≈ 173,8 quilômetros) em uma exposição na Alemanha. Como se diz no jargão esportivo, Edison apostou no cavalo errado[4].

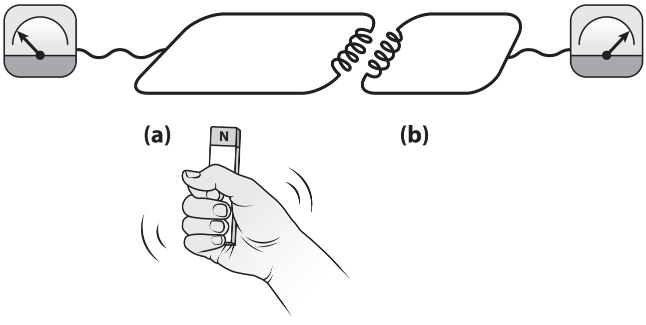

Figura 1.3 Lei da indução de Faraday: (a) um campo magnético variável gera uma tensão em um circuito; (b) a corrente alternada gerada cria outro campo magnético variável, provocando outra tensão em um circuito próximo.

No entanto, a função $r(V)$ tem dupla personalidade. Vista de uma perspectiva diferente, ela diz que se aumentarmos significativamente a tensão V também é possível aumentar o comprimento l, por um pouco menos, e *ainda assim* reduzir o raio r do fio. Em outras palavras, podemos transmitir uma tensão V muito alta ao longo de uma distância l muito grande utilizando uma linha de transmissão muito fina. Isso é ótimo! Porém, mesmo conseguindo isso, ainda precisaremos de um modo de transformar essa alta tensão nas baixas tensões usadas em nossos aparelhos domésticos. Infelizmente, a função $r(V)$ não nos informa como fazer isso. Todavia, um homem já conhecia a resposta: nosso gênio inglês Michael Faraday.

Faraday utilizou o que nós, matemáticos, chamaríamos de "pensamento transitivo", a dedução de que se A causa B e B causa C, então A também deve causar C. Especificamente, como um campo magnético variável gera uma corrente em um circuito (sua lei da indução), e o fluxo de correntes por circuitos provoca campos magnéticos (descoberta de Ampère), então deveria ser possível utilizar campos magnéticos para *transferir* corrente de um circuito para outro. A seguir, mostraremos como ele fez isso.

Imagine Faraday – um homem alto com barba bem-feita e cabelo repartido ao meio – segurando um ímã e agitando-o em torno de um circuito próximo. A indução faz com que esse campo magnético variável gere uma tensão V_a em um circuito (Figura 1.3a). A corrente alternada gerada iria, pela descoberta de Ampère, produzir outro campo magnético variável. O resultado seria *outra* voltagem V_b em um circuito *próximo* (Figura 1.3b), produzindo corrente nesse circuito.

À medida que Faraday movimenta o ímã, às vezes ele aproxima-o do circuito e outras o afasta; às vezes mexe rapidamente e outras lentamente. Em outras palavras, a tensão V_a produzida *varia*. Hoje, os ímãs são embutidos em dispositivos como moinhos de vento, que fazem esses movimentos de oscilação para nós. Quando as lâminas giram com o vento, o campo magnético produzido no interior da turbina também varia. Nesse caso, as variações são descritas por uma *função trigonométrica* (não por um agito de mão frenético de Faraday). Essa tensão alternada provoca também a alternância da corrente, colocando o "alternada" na corrente alternada.

Ótimo, agora podemos transferir corrente entre circuitos. Mas ainda temos o problema da tensão: a maioria das tomadas domésticas opera em baixas tensões (fato herdado dos feitos de Edison), e, no entanto, nossas redes modernas produzem voltagens tão altas como 765 mil volts. Como reduzi-las à faixa padrão de 120 a 220 volts utilizada na maioria dos países?

Suponhamos que a fiação do circuito original tenha sido bobinada em N_a voltas, e que a fiação do circuito próximo tenha sido bobinada em N_b voltas (Figura 1.4a). Então:

$$V_b = \frac{N_b}{N_a} V_a.$$

Essa fórmula diz que uma alta tensão de entrada V_a pode ser "reduzida" a uma baixa tensão de saída V_b graças ao uso de um grande número de voltas N_a do enrolamento de entrada em relação ao enrolamento de saída. Essa transferência de tensão é chamada *indução mútua*, e está no centro da moderna transmissão de eletricidade. De fato, se você colocar o pé na rua neste momento e olhar as linhas de transmissão provavelmente verá compartimentos cilíndricos como o da Figura 1.4b. Esses *transformadores* utilizam a indução mútua para reduzir as altas tensões geradas por modernas usinas elétricas até tensões mais baixas, seguras, para o consumo doméstico.

Os dois dispositivos que me fizeram contar essa história – o iPhone e meu rádio relógio – honram os legados tanto de Edison como de Faraday. Meu iPhone opera em corrente CC de sua bateria, e meu rádio relógio extrai sua energia da corrente CA vinda da tomada na parede, que foi gerada a *dezenas* de quilômetros em uma usina elétrica por uma tensão alternada. E, em algum ponto intermediário, a indução mútua de Faraday está trabalhando na redução da tensão de modo a podermos ligar nossos aparelhos.

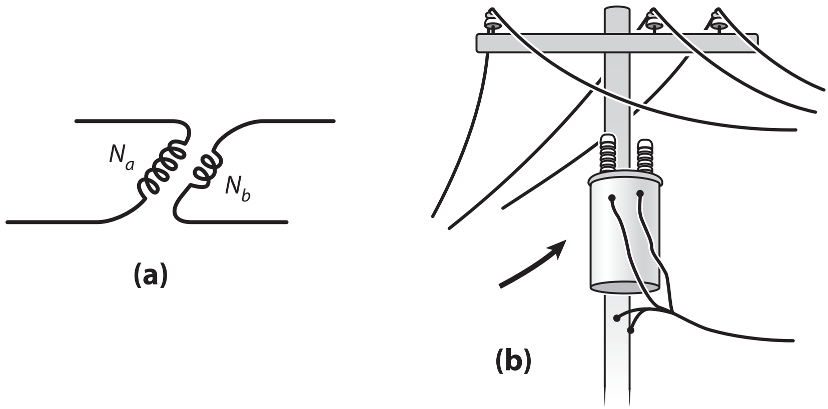

Figura 1.4 (*a*) *Dois circuitos com diferentes números de embobinamento* N_a *e* N_b*;* (*b*) *o desenho de um transformador.*

No entanto, o principal elemento aqui é a função racional $r(V)$. Ela prejudicou os trabalhos de Edison, mas graças a uma interpretação diferente sugeriu que baseássemos nossa rede elétrica em tensões *muito* maiores que os 110 volts de Edison. Essa ideia de "prestarmos mais atenção" à matemática para aprendermos mais sobre o mundo é um tema recorrente deste livro. Já exibimos duas funções – a trigonométrica $f(T)$ e a racional $r(V)$ – que o seguem aonde quer que você va. Deixe-me acordar para que eu possa revelar ainda mais funções matemáticas ocultas.

Os logaritmos ocultos no ar

Agora são 7 horas da manhã e meu despertador finalmente toca. Ele está programado para ligar o rádio na hora determinada, em vez de emitir o pavoroso "Piiii! Piiii!" que não suporto. No tempo em que eu vivia em Ann Arbor, acordava com a transmissão da 91,7 FM, a estação local da National Public Radio (NPR).

Mas agora que vivo em Boston, não consigo captar a 91,7 FM. O que aconteceu com a estação de Ann Arbor? O meu rádio está quebrado? Onde está a minha NPR?!

A estação local da NPR para Boston é a WBUR-FM, em 90,9 FM no botão do rádio. Como agora estou muito distante de Ann Arbor, meu rádio não consegue "captar" a antiga estação 91,7 da NPR. Todos nós intuitivamente sabemos isso: dirija até localidades relativamente distantes de sua cidade natal e a captação de todas as suas estações de rádio preferidas enfraquecerá até sumir. Mas espere um segundo, essa é a mesma relação que vimos na Figura 1.2 com a função $r(V)$. Poderia haver outra função racional oculta em algum ponto nas ondas do ar?

Retornemos à WBUR para descobrir isso. A "potência efetiva irradiada" da estação – uma medida da força de seu sinal – é de 12 mil watts[5]. Você deve reconhecer essa unidade da sua experiência com lâmpadas; da mesma forma que uma lâmpada de 100 watts acesa durante uma hora *consumiria* 100 watts-hora de energia, a estação da WBUR *emite* 12 mil watts-hora de energia em uma hora. Isso é equivalente à energia de 12.000/100 = 120 lâmpadas comuns por hora! Mas para onde vai essa energia?

Imagine uma lâmpada colocada sobre o assoalho no meio de um cômodo escuro. Acenda-a, e a luz que ela emite ilumina tudo que estiver no cômodo. A lâmpada irradia sua energia, parcialmente sob a forma de luz, igualmente por todo o espaço do cômodo. Analogamente, a antena da WBUR irradia sua energia para longe sob a forma de *ondas de rádio*.

Agora, do mesmo modo que você percebe que a luz da lâmpada é mais brilhante à medida que se aproxima dela, os sinais de rádio provenientes da antena da WBUR chegam mais definidos quando estou mais próximo da antena. Podemos medir isso calculando a *intensidade* $J(r)$ do sinal a uma distância r da antena:

$$J(r) = \frac{\textit{potência irradiada}}{\textit{área da superfície}} = \frac{12000}{4\pi r^2} = \frac{3000}{\pi r^2}, \tag{1.1}$$

em que assumimos que a energia é irradiada esfericamente para longe. Ah! Eis aí a função *racional* que tínhamos previsto. Vamos ver se é possível "ouvi-la" e aprender algo sobre o funcionamento de rádios.

A fórmula $J(r)$ nos diz que a intensidade do sinal decresce à medida que aumenta a distância r da antena. Isso explica o que ocorreu na minha mudança de Ann Arbor para Boston: não é que a estação da NPR de Ann Arbor já não me alcance mais, e sim que a intensidade de seu sinal é fraca demais para ser capturada por meu rádio. Em contrapartida, na minha distância atual da antena da WBUR, meu rádio não tem nenhum problema para captar a estação.

Enquanto ainda estou deitado na penumbra, capto algumas manchetes da voz emitida pelo rádio: algo sobre economia e, depois, sobre política. Nada muito animador, então continuo na cama, ouvindo. Há sempre o perigo de eu adormecer novamente (pense no "segundo despertador"); para impedir isso, decido ativar meu cérebro fazendo uma simples pergunta: "o que estou ouvindo?".

A resposta, certamente, é a WBUR na 90,9 FM. Mas essa é uma onda de rádio, e nós humanos não conseguimos *ouvir* uma onda de rádio. A faixa de frequência auditiva vai de 20 a 20 mil hertz[6], e o sinal da WBUR é transmitido a 90,9 megahertz[v]. Logo, não é a onda de rádio que eu ouço. O que eu ouço são as *ondas sonoras* emitidas de meu rádio. E, de alguma forma, esse pequeno aparelho

v Um megahertz (MHz) é 1×10^6 hertz. Hertz (Hz) é a unidade de frequência (veja o Apêndice A para uma breve revisão).

consegue converter uma onda de rádio – que não consigo ouvir – em uma onda sonora, que eu consigo. Mas como?

Parte da resposta está oculta no fato de a WBUR transmitir a 90,9 megahertz. Todos os sons têm uma frequência associada a eles; por exemplo, a 49ª tecla – denominada A4 – em um piano de 88 teclas tem uma frequência de 440 hertz. E sabemos (seja por causa do Apêndice A ou de nosso conhecimento geral) que os fenômenos que envolvem frequências podem ser representados como funções oscilantes, a exemplo de nossas funções do ciclo do sono. Mas, então, o que está oscilando neste caso? *Algo* tem de se mover de um lado para o outro entre o rádio e meu ouvido. E a única possibilidade é o ar, de modo que a resposta deve estar correlacionada a variações na *pressão do ar*.

Em termos gerais, o som é uma *onda de pressão*. Isso é fácil de confirmar: mantenha a palma de sua mão bem próxima da boca e tente falar sem deixar que o ar atinja sua mão. Boa sorte, pois sem o movimento das moléculas de ar não há onda de pressão. Agora, mantenha sua mão a uma distância relativamente próxima de seu ouvido e agite-a vigorosamente para cima e para baixo. Você deverá ouvir um som periódico quando seu braço oscila: esse som é a onda de pressão.

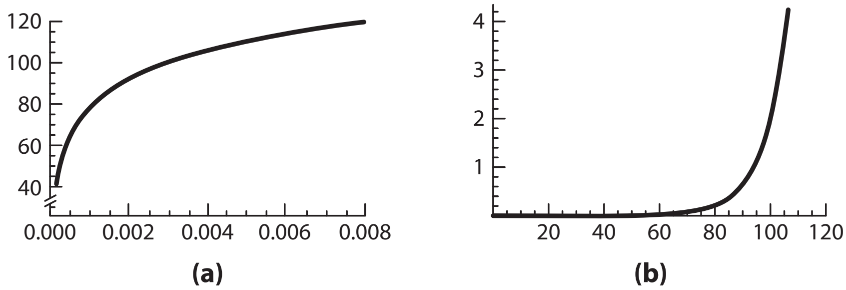

Figura 1.5 (a) Representação gráfica da função L (p); (b) representação gráfica da função p (L).

Como seu braço, um rádio pulsa seus alto-falantes para cima e para baixo a fim de gerar as ondas de pressão que nossos ouvidos detectam como som. E, exatamente como seu braço, quanto mais violentamente os auto-falantes vibram, mais alto é o som criado. Sob o ponto de vista matemático, se denotarmos a pressão sonora de uma onda de pressão por p, então o "nível de som" $L(p)$ é dado pela função logarítmica (Figura 1.5a):

$$L(p) = 20 \log_{10} (50000\, p) \text{ decibéis.}$$

Vamos examinar a conhecida unidade *decibéis* (Db). Como referência, a água que escorre de um chuveiro de teto emite um som de cerca de 80 decibéis, e um avião a jato a cerca de 100 pés (≈ 30 metros) de altura, 140 decibéis. Com base nesses números, é possível ver por que a exposição durante longos períodos de tempo a sons tão baixos como 90 decibéis tem o potencial de causar perda auditiva[7]. Todos nós estamos mais acostumados à escala dos decibéis do que a medir ondas de pressão, de modo que vamos inverter a equação $L(p)$. Obtemos a função exponencial[*3] (Figura 1.5b)

$$p(L) = \frac{1}{50000} 10^{L/20}.$$

A equação $p(L)$ nos diz que, por exemplo, um nível de som de $L = 0$ decibel fornece uma pressão de $p(0) = 1/50.000 = 20 \times 10^{-6}$ pascal, a unidade de pressão. Essa combinação de nível de som e pressão corresponde grosseiramente ao som que um mosquito faria batendo as asas a cerca de 10 pés (≈ 3 metros) de você[8]; portanto, um valor reduzido de pressão.

Agora que eu já me levantei e estou trabalhando nesse problema da pressão, um pensamento chato começou a ocupar a minha mente. Há alguns minutos eu estava em algum ponto de meu ciclo de sono – modelado pela função trigonométrica $f(t)$ – quando meu rádio ligou, graças à nossa função racional $r(V)$ e à função de intensidade $J(r)$ da antena da WBUR. A voz do locutor da NPR criou então uma onda de pressão que interpretei como som por meio da função $L(p)$ (nós de fato *ouvimos* funções logarítmicas; isso não é muito bacana?). Há muitas outras coisas ocorrendo. Há alguma ordem nesse caos? Será que as minhas manhãs consistem em encontros fortuitos com diversas funções, ou será que elas estão relacionadas de alguma forma? Seria ótimo contarmos com uma hierarquia ou princípio unificador.

A frequência de funções trigonométricas

Minha nova busca me dá algo para pensar enquanto escolho minhas roupas. Na outra extremidade do quarto há um pequeno *closet* em que eu e minha esposa Zoraida guardamos nossas roupas. Eu reviro minhas roupas tentando encontrar algo para usar após o banho. No fundo, um som suave começa a aumentar consistentemente de intensidade; Zoraida está ressonando. Penso em acordá-la (temos de ir trabalhar logo) ligando a televisão; ela gosta de acordar com os programas matutinos. Naturalmente, eu estendo a mão em busca de outro de nossos dispositivos modernos: o controle remoto.

Na posse do controle, aciono o botão "*channel up*", procurando algum canal que ela goste. O controle emite *ondas de luz infravermelha* a frequências de cerca de 36 mil hertz. Embora não consiga ver esses sinais – eles estão fora do alcance de nossa faixa de frequência de visão –, os pulsos de 1 e 0 que são emitidos instruem a TV a mudar para o próximo canal. Encontro um daqueles *shows* matutinos e coloco em um volume suficientemente alto para conseguir acordá-la.

Agora que escolhi uma calça cáqui e uma camisa, volto a pensar sobre aquele negócio do "princípio unificador" a caminho do chuveiro. O corredor está escuro; lá fora, o dia está nublado. Espero que, como estamos em julho, o sol rapidamente siga a chuva.

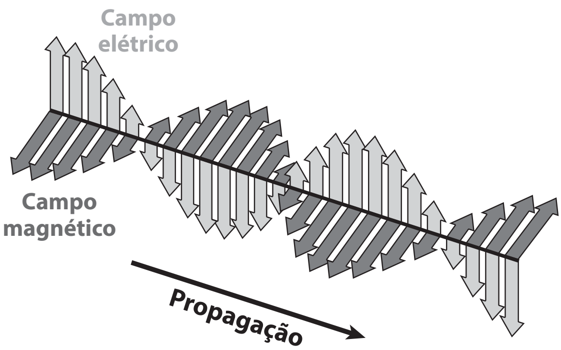

Figura 1.6 Uma onda eletromagnética. Os campos elétrico e magnético que ela conduz oscilam perpendicularmente entre si quando a onda se propaga. Imagem extraída de www.molphys.leidenuniv.nl/monos/smo/index.html?basics/light.htm.

Isso me faz lembrar de uma conversa que tive sobre a luz no Ensino Médio com meu amigo Blake. Estávamos falando sobre como as cores que vemos são descritas por diferentes frequências de luz. Por exemplo, a luz vermelha tem uma faixa de frequência de cerca de 430 a 480 terahertz[vi, 9]. Blake perguntava-se se os extraterrestres veriam a luz vermelha – luz na faixa de frequência de 430 a 480 terahertz – como realmente "vermelha". Isso foi na aula de Biologia, de modo que passamos algum tempo pensando sobre o que nossos olhos imaginam que o "vermelho" é.

No meio de todas essas recordações, sou interrompido por uma palavra simples, mas claramente articulada: *frequência*. E então, me deu um clique. A corrente CA, as ondas de rádio, as ondas infravermelhas e a luz do sol, todas têm uma frequência associada a elas. Eis aqui o princípio unificador que eu estava procurando! Por serem caracterizadas por uma frequência, todas são funções oscilantes – *funções trigonométricas*.

---

vi Um terahertz (THz) é 1×10^{12} hertz.

Este princípio unificador *matemático* também tem um análogo *físico*. Todas essas ondas – com a exceção da corrente alternada, que discutiremos em breve – são tipos específicos de *ondas eletromagnéticas* (abreviadas como ondas EM). Como o nome sugere, uma onda eletromagnética conduz um campo elétrico *e* um campo magnético[vii]. Esses campos oscilam perpendicularmente entre si conforme a onda se propaga, e cada um pode ser representado por funções trigonométricas (Figura 1.6).

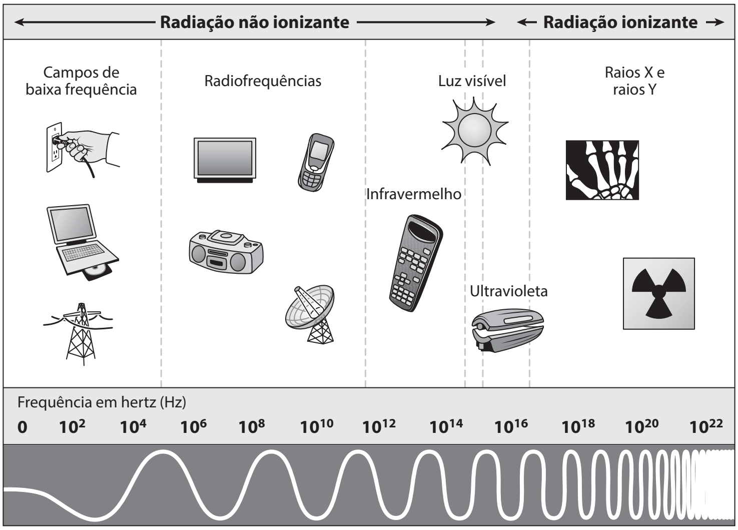

Figura 1.7 O espectro de ondas eletromagnéticas. Imagem extraída de www.hermes-program.gr/en/emr.aspx.

Uma das maiores descobertas do século XIX – pelo descobridor da indução, Michael Faraday – foi a de que a luz, em si, é uma onda EM. Isso explica a razão da luz ter uma *frequência* associada a ela. Portanto, a luz infravermelha, as ondas radiofônicas e qualquer outra radiação que tenha uma frequência associada a ela é uma onda EM (Figura 1.7). A corrente alternada, embora não seja uma onda eletromagnética, emite ondas eletromagnéticas quando

vii Um campo elétrico é análogo a um campo magnético, em que cargas positivas e negativas desempenham os papéis dos polos norte e sul de um ímã.

viaja por um fio. Uma onda eletromagnética, em conjunto com sua representação matemática como função trigonométrica, é o conceito unificador que eu estava procurando.

Quando acendo a luz de meu banheiro, paro por um segundo para admirar todas as ondas EM que me cercam. A luz gerada pela lâmpada? Uma onda EM. A luz solar que entra pela janela? Outra onda EM. As ondas radiofônicas transmitindo a NPR ao rádio do quarto? Sim, outra onda eletromagnética. Portanto, não apenas podemos ouvir *logaritmos* (lembre-se de nossa função $L\ (p)$); agora, você sabe que podemos *ver* funções trigonométricas (luz). Quem diria que as funções trigonométricas ocorrem com tanta frequência ao longo do dia? (Jogo de palavras proposital.)

O raciocínio parabólico de Galileu

Abro o registro da banheira e mando a água para o chuveiro; ela está congelante! Levará cerca de um minuto para ela aquecer. Sem problema, escovarei os dentes enquanto espero. Enquanto escovo os dentes de cima para baixo, da esquerda para a direita (não se preocupe, eu não mencionarei aqui a função trigonométrica; ops, acabei de fazer isso!), continuo a olhar o fluxo de água, como se isso fosse fazê-la aquecer mais rapidamente.

Inspirado pela habilidade de Faraday de enxergar campos magnéticos, começo a tentar ver o "campo gravitacional" e seu efeito no fluxo. Sei que o campo existe, pois a água não se projeta em uma linha reta, embora saia do chuveiro com alta velocidade; em vez disso, parece que ela é "atraída" até o piso. Certamente, não há nenhum magnetismo ocorrendo aqui; é só a gravidade, mas isso é *física*. E a *matemática*? O homem que descobriu esse fenômeno, Galileu Galilei, foi citado por ninguém menos que Einstein como o "pai da ciência moderna". Ele utilizou o telescópio, inventado por

Hans Lippershey, para confirmar decisivamente que a Terra gira em torno do Sol, e não o contrário. Além disso, Galileu também é conhecido por suas experiências com objetos em queda livre. A mais famosa delas é a da inclinação da Torre de Pisa. Vincenzo Viviani, pupilo de Galileu, descreveu a experiência em uma biografia do mestre. Ele escreveu que Galileu jogou bolas com diferentes massas do alto da torre para testar a hipótese de que elas atingiriam o solo ao mesmo tempo, independentemente de suas massas[viii, 10]. O cientista, em seus primeiros estudos, havia proposto que um objeto em queda cairia com uma aceleração uniforme (constante). Ao utilizar essa proposição simples, ele tinha também demonstrado matematicamente que a distância percorrida pelo objeto seria proporcional ao quadrado do período de tempo em que o objeto estava em movimento.[11]

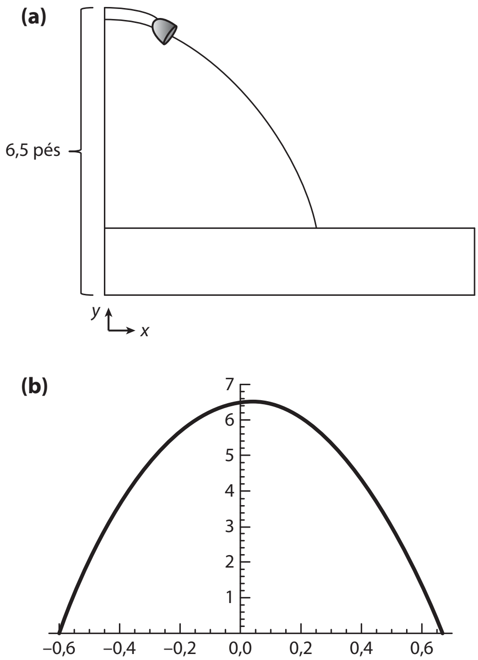

Figura 1.8 Desenho esquemático de meu chuveiro (a) e gráfico da função parabólica $y(x) = 6{,}5 + x - 16x^2$ (b).

viii Esse conto popular pode, na verdade, ser uma lenda, mas Vincenzo não está mais entre nós para confirmar ou não sua veracidade.

Para apreciar completamente esse resultado, vamos considerar o seu significado no contexto da água saindo de meu chuveiro. A Figura 1.8a exibe um perfil de meu chuveiro. Podemos definir um *sistema de coordenadas* cuja origem é o chão, diretamente abaixo do chuveiro. Vamos chamar a direção horizontal x, e a vertical, y, e supor que a água está saindo do chuveiro com uma velocidade constante v_x, na direção x, e v_y, na direção y. Como a gravidade atua somente na direção vertical, *não há aceleração na direção horizontal* (conforme diz a piada, "às vezes a gravidade me deixa para baixo", mas jamais para a "esquerda", para a "direita" ou "para cima"). Agora, é possível utilizar a conhecida equação *distância* = *velocidade* × *tempo* para determinar a distância *horizontal x(t)* percorrida por uma molécula de água:

$$x(t) = v_x t,$$

em que mediremos t em segundos desde que a molécula de água deixou o chuveiro.

E o movimento na direção vertical (y)? Cada molécula de água que sai do chuveiro está sendo forçada para baixo pela gravidade, que Galileu afirma que acelera os objetos a uma taxa constante; vamos denotar essa grandeza por $-g$, em que o sinal negativo tem o papel de nos lembrar que essa é uma aceleração para baixo. Utilizando-a, juntamente com o fato de que a velocidade inicial de nossa molécula de agua é v_y no instante $t = 0$ e que a denominaremos $v(t)$ no instante $t > 0$, então descobrimos[*4] que a velocidade vertical $v(t)$ de nossa molécula de agua é a *função linear*

$$v(t) = v_y - gt,$$

sua velocidade inicial mais a contribuição da gravidade. Também era conhecido na época de Galileu que a distância percorrida por objetos cuja velocidade varia linearmente com o tempo é dada por:

$$y(t) = y_0 + v_m t, \text{ em que } v_m = \frac{1}{2}(v_{\text{inicial}} + v_{\text{final}}),$$

em que y_0 é a posição inicial do objeto. Para a nossa molécula de água, como sua posição vertical é 6,5 pés (≈ 1,98 m) acima do piso quando ela sai do chuveiro, sabemos que $y_0 = 6{,}5$. E mais, como sua velocidade vertical inicial era v_y e sua velocidade vertical final, $v(t) = vy - gt$, então sua velocidade média é:

$$v_m = v_y - \frac{1}{2}gt, \text{ de modo que } y(t) = 6{,}5 + v_y t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Diferentemente da fórmula $x(t)$, a posição vertical da molécula de água é uma *função polinomial* de t; mais especificamente, uma *função quadrática*.

Podemos agrupar essas duas isolando t na equação $x(t)$ e substituindo o resultado na fórmula $y(t)$. Chegamos a:[*5]

$$y(x) = 6{,}5 + \frac{v_y}{v_x}x - \frac{g}{2v_x^2}x^2.$$

Como v_x, v_y e g são números, essa equação pode ser reescrita na forma $y = 6{,}5 + Bx - Ax^2$, que é a equação para uma *parábola* (Figura 1.8b). E, visto que o coeficiente de x^2 é negativo, essa parábola *abre-se para baixo*. Portanto, a matemática está nos informando que a água que sai de meu chuveiro inclina-se na direção do piso. E é exatamente isso que ocorre!

Essa equação, em minha opinião, é uma das grandes conquistas da ciência medieval. Ela se aplica não somente à água que sai de meu chuveiro, mas também a uma bola de futebol, a um disco de *frisbee*, ou a qualquer outro objeto atirado ao ar, e nos informa que *todos os objetos que se movem na Terra seguem trajetórias parabólicas*. Para os cientistas da Idade Média, trabalhando em uma época em que a religião era o meio predominante de entender o mundo, resultados como esse foram vistos como lampejos da mente de Deus. Eles inspiraram os futuros cientistas a continuar aplicando conceitos matemáticos ao nosso mundo na esperança de conseguir *insights* igualmente profundos.

Passaremos o próximo capítulo falando sobre um desses cientistas – Isaac Newton –, que seguiu os passos de Galileu e promoveu avanços igualmente revolucionários para a sua época. Por enquanto, espero que este capítulo tenha convencido você de que as funções não são construções matemáticas abstratas. Ao contrário, conforme demonstrado por Galileu e Faraday, elas podem ser vistas, ouvidas e sentidas ao nosso redor todos os dias. A jornada que nos trouxe até aqui iniciou com a crença de Pitágoras de que "tudo é número", mas este capítulo sugere um tipo mais atual de dito pitagoreano: "tudo são funções".