

ELETROMAGNETISMO

AIRTON RAMOS

Blucher

ELETROMAGNETISMO

Blucher

AIRTON RAMOS

ELETROMAGNETISMO

Eletromagnetismo

© 2016 Airton Ramos

Editora Edgard Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed.
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,
Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer
meios, sem autorização escrita da Editora.

Todos os direitos reservados pela Editora
Edgard Blücher Ltda.

FICHA CATALOGRÁFICA

Ramos, Airton
Eletromagnetismo / Airton Ramos. – São Paulo:
Blucher, 2016.

Bibliografia

ISBN 978-85-212-0969-0

1. Eletromagnetismo 2. Física I. Título

15-1026

CDD 537

Índices para catálogo sistemático:

1. Eletromagnetismo

Prefácio

A teoria eletromagnética é uma das maiores conquistas intelectuais da humanidade e, possivelmente, aquela que envolveu o maior número de pensadores e experimentadores ao longo do maior período da história humana. Desde tempos ancestrais, pessoas curiosas observaram intrigadas as propriedades não usuais das pedras de âmbar e magnetita, bem como os fenômenos associados a descargas atmosféricas, descargas eletrostáticas e luminescência em torno de objetos metálicos pontiagudos.

Entretanto, somente a partir do trabalho pioneiro do inglês William Gilbert no século XVI a ciência do eletromagnetismo começou a emergir. Experimentador excelente, descobriu diversos materiais que possuíam propriedades semelhantes ao âmbar, determinou que as forças de interação elétrica e magnética diminuem com o aumento da distância, especulou sobre a origem do campo magnético da Terra e contribuiu significativamente por meio de seus experimentos para que o conceito de campo magnético fosse estabelecido cerca de dois séculos mais tarde.

Os próximos passos principais no desenvolvimento da nova ciência foram dados pelo francês Charles Augustin de Coulomb, em 1785, que foi bem-sucedido ao descrever, por meio de um experimento extremamente engenhoso para a época, a lei de interação entre cargas elétricas; e por seu compatriota André-Marie Ampère e o dinamarquês Hans Christian Oersted que, em 1820, descreveram a lei que determina a geração de campo magnético por meio da corrente elétrica. Surgiu,

assim, o primeiro vínculo entre a eletricidade e o magnetismo, até então considerados fenômenos completamente independentes.

A conexão seguinte foi estabelecida em 1831 pelo inglês Michael Faraday, ao anunciar que uma corrente elétrica surge nos condutores de um circuito elétrico quando existe variação no tempo do fluxo magnético através de sua área. Por fim, todo o conjunto formidável de fatos experimentais e teorias elaboradas ao longo de mais de dois séculos de pesquisas foi reunido de maneira coerente pelo também inglês James Clerk Maxwell, em 1865, naquilo que ele designou como “uma teoria dinâmica do campo eletromagnético”. Nessa brilhante construção teórica, Maxwell estabeleceu a conexão final entre a eletricidade e o magnetismo, denominada corrente de deslocamento, por meio da qual um campo elétrico variável no tempo dá origem a um campo magnético. Desde então, as equações de Maxwell formam a base conceitual e a principal ferramenta de análise de teóricos, experimentadores e desenvolvedores de equipamentos e sistemas eletromagnéticos.

Atualmente, graças ao extraordinário desenvolvimento tecnológico do século XX, a humanidade é quase tão dependente do eletromagnetismo quanto cada ser humano é dependente do oxigênio que respira. Em função de sua importância e complexidade, o ensino dessa ciência nas escolas de engenharia tornou-se altamente especializado, quase sempre seguindo a diretriz básica de dividi-la em tópicos como: eletrostática, magnetostática, campos variáveis no tempo e ondas eletromagnéticas, entre outros.

Contudo, desde os tempos de estudante e especialmente durante os anos como professor dessa disciplina, sentia que essa divisão era demasiadamente artificial e até certo ponto prejudicial ao aprendizado. Muitas conexões importantes entre os diversos fenômenos, bem como certos aspectos gerais da teoria, não são adequadamente evidenciados porque a segmentação clássica tende a separar tópicos intimamente relacionados.

Este livro é uma tentativa de apresentar o eletromagnetismo como uma ciência unificada. Não há qualquer separação entre o estudo da eletricidade e o do magnetismo e evitamos a divisão da teoria entre estática e dinâmica. As propriedades eletromagnéticas da matéria são apresentadas em conjunto, enfatizando a origem comum na carga elétrica das partículas subatômicas.

A organização dos tópicos em cada capítulo baseia-se na similaridade. Atenção especial foi dedicada à apresentação de certos temas geralmente negligenciados na literatura básica, como: teoria da dispersão dielétrica, teoria do ferromagnetismo e teoria da irradiação de cargas puntiformes.

Acredito que o formalismo matemático empregado é sóbrio e suficiente para um livro de engenharia. Os exemplos, as técnicas de análise e os exercícios propostos situam-se no meio termo entre a ciência pura e a aplicada, com o objetivo de estimular no estudante a capacidade analítica essencial para um profissional desenvolvedor em engenharia elétrica.

Os dois primeiros capítulos apresentam as principais leis eletromagnéticas e a estrutura matemática e conceitual necessária para descrevê-las e interpretá-las. O restante do livro trata das aplicações básicas, embora mantendo um nível elevado de abstração e idealidade. Em síntese, são apresentados: diversos métodos de cálculo de campo e potencial, força e energia; propriedades eletromagnéticas da matéria; modelagem de circuitos elétricos e magnéticos; e geração e propagação de ondas eletromagnéticas.

Assumimos que os leitores possuem os conhecimentos matemáticos necessários, em especial em relação às teorias das equações diferenciais e do cálculo vetorial. Nos Apêndices, são apresentadas as fórmulas vetoriais mais utilizadas e algumas demonstrações matemáticas essenciais que julgamos ser inoportuno incluir no texto principal. Além disso, o último Apêndice fornece as respostas para todos os exercícios propostos que não envolvem demonstração.

Airton Ramos

Conteúdo

1. As leis de força e o conceito de campo	13
1.1 Lei de Coulomb	14
1.2 Lei de Biot-Savart	17
1.3 Força de Lorentz.....	22
1.4 Cálculo de campo elétrico	23
1.5 Cálculo de indução magnética	29
1.6 Trajetória de partículas carregadas.....	36
1.7 Exercícios	39
2. As equações de Maxwell	41
2.1 Equação da continuidade e corrente de deslocamento	42
2.2 Potencial elétrico e força eletromotriz.....	44
2.3 Lei de Faraday	48
2.4 Potencial magnético.....	49
2.5 Equações de Maxwell.....	51
2.6 Exercícios	54
3. Potencial e energia	57
3.1 Energia elétrica.....	57
3.2 Energia magnética	60

3.3	Teorema de Poynting	61
3.4	O método das imagens	64
3.5	Solução da equação de Laplace em coordenadas retangulares	69
3.6	Solução da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas	72
3.7	Solução da equação de Laplace em coordenadas esféricas	76
3.8	Exercícios	79
4.	Campo eletromagnético na matéria	83
4.1	Condução	84
4.1.1	Metais	84
4.1.2	Eletrólitos	86
4.1.3	Semicondutores	89
4.1.4	Supercondutores	92
4.2	Polarização elétrica	93
4.2.1	Mecanismos de polarização	93
4.2.2	Momento de dipolo elétrico	95
4.2.3	Expansão do potencial elétrico em multipolos	96
4.2.4	Relação constitutiva elétrica	99
4.3	Magnetização	103
4.3.1	Momento de dipolo magnético	103
4.3.2	Momento de dipolo magnético atômico	106
4.3.3	Mecanismos de magnetização	111
4.3.4	Relação constitutiva magnética	117
4.4	Exercícios	119
4.5	Referências	121
5.	Parâmetros de circuito elétrico	123
5.1	Resistência	123
5.2	Capacitância	125
5.3	Indutância	127
5.4	Indutância mútua	130
5.5	Exercícios	133
6.	Análise fasorial	135
6.1	Forma fasorial das leis eletromagnéticas	135
6.2	Conceito de impedância	139
6.3	Efeito pelicular	144
6.4	Impedância de um fio cilíndrico	152

6.5	Esfera em um campo elétrico uniforme	157
6.6	Exercícios	161
7.	Dispersão dielétrica	163
7.1	Polarizabilidade molecular	163
7.2	Polarização orientacional e relaxação dipolar.....	166
7.3	Campo molecular e polarização total.....	168
7.4	Polarização no domínio da frequência.....	172
7.5	Polarização interfacial	174
7.6	Polarização de dupla camada iônica	177
7.7	Polarização por saltos.....	181
7.8	Polarização de eletrodo.....	182
7.9	Dispersão e resposta no tempo	183
7.10	Relações de Kramers-Kronig	186
7.11	Modelos empíricos de dispersão dielétrica.....	188
7.12	Exercícios	195
7.13	Referências	196
8.	Ferromagnetismo	197
8.1	Estado ferromagnético.....	197
8.1.1	Energia de troca e campo molecular.....	197
8.1.2	Domínios magnéticos.....	199
8.1.3	Histerese.....	203
8.1.4	Anisotropia	208
8.2	Antiferromagnetismo e ferrimagnetismo	209
8.3	Resposta em frequência	213
8.3.1	Relaxação dipolar	213
8.3.2	Movimento das paredes de domínio.....	214
8.3.3	Correntes induzidas.....	215
8.4	Campo desmagnetizante.....	218
8.5	Materiais magnéticos	223
8.6	Circuito magnético	228
8.7	Exercícios	230
8.8	Referências	232
9.	Energia e força em sistemas eletromagnéticos	233
9.1	Energia de polarização	233
9.2	Energia de magnetização	239

9.3	Tensor das tensões de Maxwell	247
9.4	Exercícios	255
9.5	Referências	256
10.	Ondas eletromagnéticas	257
10.1	Origem das ondas eletromagnéticas	257
10.2	Irradiação de cargas puntiformes	261
10.3	Irradiação do dipolo hertziano	266
10.4	Teorema de Poynting complexo	274
10.5	Impedância de onda	278
10.6	Irradiação de uma antena linear	279
10.7	Modelo da onda plana uniforme	282
10.8	Dispersão e distorção.....	287
10.9	Polarização	291
10.10	Exercícios	294
10.11	Referências	296
11.	Ondas eletromagnéticas em interfaces	297
11.1	Reflexão e transmissão	297
11.2	Difração	312
11.3	Exercícios	321
	Apêndice A – Fórmulas vetoriais	323
	Apêndice B – Demonstrações.....	327
	Apêndice C – Expansão em funções ortogonais	333
	Apêndice D – Condições de continuidade em interfaces	339
	Apêndice E – Respostas dos exercícios propostos	343

As leis de força e o conceito de campo

Os fenômenos estudados na teoria eletromagnética são provenientes das interações entre partículas eletricamente carregadas. A carga elétrica de um átomo está localizada nos elétrons e prótons e se encontra confinada em volumes extremamente pequenos, pois os raios atômicos são da ordem de décimos de nanômetro ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). Os núcleos atômicos isolados são muito menores, com raios da ordem de 10^{-14} m , e os elétrons isolados são praticamente puntiformes. Em virtude dessas dimensões ínfimas, uma aproximação geralmente válida no estudo da teoria eletromagnética é o modelo da carga puntiforme. Considera-se que uma carga puntiforme ocupa uma posição exata no espaço, ou seja, suas dimensões são desprezíveis em relação às distâncias consideradas. Trata-se, em geral, de uma boa aproximação para descrever as interações entre elétrons e núcleos atômicos, mas mesmo para estruturas maiores e mais complexas, envolvendo átomos e moléculas ionizadas, essa aproximação é aplicável se as distâncias envolvidas forem muito maiores que as dimensões do agregado molecular. No estudo de sistemas eletromagnéticos macroscópicos, ou seja, nos quais uma grande quantidade de partículas esteja envolvida e ocupando volumes muito maiores que as dimensões de qualquer uma dessas partículas, as teorias baseadas no modelo da carga puntiforme são usadas para descrever as interações eletromagnéticas entre quantidades de carga contidas em elementos infinitesimais de volume dentro dessas distribuições.

1.1 LEI DE COULOMB

A lei de força para a interação elétrica foi desenvolvida em 1785 a partir de experimentos realizados pelo francês Charles Augustin de Coulomb. Ela é aplicável a partículas cuja aproximação de carga puntiforme seja válida. A lei de Coulomb estabelece que a força entre duas partículas em repouso depende do produto de suas cargas elétricas e varia com o inverso do quadrado da distância que as separa, estando sempre orientada ao longo da reta que une as partículas. A lei de Coulomb é geralmente escrita na seguinte forma:

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \mathbf{u} \quad (1.1)$$

onde q_1 e q_2 são as cargas das partículas, d é a distância que as separa no vácuo e a constante $1/4\pi\epsilon_0$ foi incluída para compatibilizar as unidades envolvidas. ϵ_0 é denominada permissividade elétrica do vácuo. Com a carga medida em coulomb (C), a força medida em newton (N) e a distância medida em metros (m) no Sistema Internacional, ϵ_0 tem o valor aproximado de $8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ ou F/m [a unidade faraday (F) equivale a C^2/Nm]. Na Equação (1.1), o vetor unitário \mathbf{u} indica a direção e o sentido da força elétrica aplicada. A força exercida sobre q_2 tem os mesmos módulo e direção, porém, sentido contrário à força exercida sobre q_1 . Se as posições de q_1 e q_2 são identificadas pelos vetores \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , então a expressão geral da força sobre q_2 é:

$$\mathbf{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (1.2)$$

Observe que, se as cargas são de mesmo sinal, os vetores de força em cada partícula corretamente apontam no sentido do afastamento das cargas; e, se as cargas são de sinais contrários, os vetores de força apontam no sentido da aproximação das cargas. Quando existem várias partículas carregadas interagindo, é possível obter a força elétrica total sobre cada uma simplesmente somando vetorialmente as forças calculadas pela lei de Coulomb para cada par de partículas. Em situações reais envolvendo volumes macroscópicos de matéria contendo quantidades imensas de elétrons e núcleos atômicos, é impossível considerar a soma de todos os pares de partículas carregadas para se obter a força total resultante sobre cada uma. Simplesmente não há como descrever corretamente a posição instantânea exata de cada partícula nem a quantidade exata de partículas no objeto. A Figura 1.1 mostra um exemplo em que uma partícula é colocada próxima de um objeto contendo muitas outras partículas carregadas distribuídas de uma maneira específica.

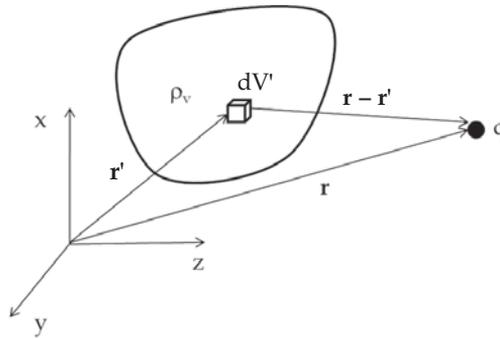


Figura 1.1 Partícula carregada próxima de um volume contendo uma carga distribuída.

Se a densidade de partículas nesse volume é muito alta, podemos ampliar o conceito de carga puntiforme para descrever uma distribuição muito concentrada de partículas carregadas como uma função contínua das coordenadas espaciais: a densidade de carga. Um elemento infinitesimal de volume nesse objeto contém uma quantidade infinitesimal de carga elétrica de acordo com a seguinte equação:

$$dq(\mathbf{r}') = \rho_v(\mathbf{r}') dV' \quad (1.3)$$

onde $\rho_v(\mathbf{r}')$ (em C/m^3) é a densidade volumétrica de carga na posição identificada pelo vetor \mathbf{r}' . Com base nesta descrição, a força exercida sobre a carga puntiforme pode ser calculada pela equação:

$$\mathbf{F}_e(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho_v(\mathbf{r}') dV' \quad (1.4)$$

A Equação (1.4) pode ser usada para definir o campo elétrico como sendo a força por unidade de carga na posição de uma partícula puntiforme colocada na região de influência de uma distribuição de partículas eletricamente carregadas no espaço. Ou seja, o campo elétrico é um campo vetorial que, quando multiplicado pela carga, resulta na força aplicada nesta partícula pela distribuição de carga elétrica que criou o campo. Em função da lei de Coulomb, para cargas em repouso, o campo elétrico no vácuo pode ser escrito na forma a seguir:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho_v(\mathbf{r}') dV' \quad (1.5)$$

Com base nesta equação, podemos avaliar algumas propriedades importantes do campo elétrico. Ao aplicarmos o operador divergente em ambos os lados, obtemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\nabla \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \rho_v(\mathbf{r}') dV'$$

No Apêndice B demonstramos a seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

onde $\delta(\mathbf{r})$ é a função delta de Dirac definida por:

$$\delta(\mathbf{r}) = 0 \text{ se } \mathbf{r} \neq 0$$

$$\int_V \delta(\mathbf{r}) dV = 1 \text{ se } V \text{ inclui a posição } \mathbf{r} = 0; \text{ caso contrário } \int_V \delta(\mathbf{r}) dV = 0$$

Assim, o divergente do campo elétrico é dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \frac{\rho_v(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

Levando em conta o significado físico do divergente de um campo vetorial, concluímos que a densidade volumétrica de fluxo do campo elétrico é proporcional à densidade de carga. Para o fluxo elétrico total através de uma superfície fechada e aplicando o teorema de Gauss, obtemos o seguinte:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.7)$$

onde Q é a carga elétrica total dentro do volume limitado pela superfície de integração.

As duas equações anteriores são conhecidas como **lei de Gauss** e mostram que as cargas elétricas são as fontes de fluxo elétrico. Cargas positivas geram campo com divergência positiva, ou seja, com fluxo total para fora do volume; e cargas negativas produzem campo com divergência negativa, ou seja, fluxo para dentro do volume. Outra propriedade pode ser obtida aplicando-se o operador rotacional na Equação (1.5), com o seguinte resultado:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\nabla \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \rho_v(\mathbf{r}') dV'$$

O integrando dessa equação se anula, pois $\nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 = 0$. Assim, concluímos que o rotacional do campo elétrico gerado por cargas em repouso é nulo. Levando em conta o significado físico do rotacional, podemos concluir que

a circulação do campo ao longo de qualquer caminho é nula. Em outras palavras, o trabalho realizado pelo campo ao se movimentar uma partícula carregada em um percurso fechado é zero, ou seja, o campo é conservativo. Isso significa também que o campo elétrico proveniente de cargas em repouso (ou em movimento uniforme) não é capaz de manter uma corrente elétrica permanente em um circuito. Estas conclusões são descritas pelas equações a seguir:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.8)$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (1.9)$$

1.2 LEI DE BIOT-SAVART

A força elétrica não é a única forma de interação entre as cargas elétricas. Os experimentos realizados pelo francês André-Marie Ampère e pelo dinamarquês Hans Christian Oersted em 1820 mostraram que condutores transportando corrente elétrica se atraem ou se repelem dependendo da intensidade e do sentido dessas correntes. A lei experimental deduzida pode ser assim descrita usando os símbolos mostrados na Figura 1.2:

$$d\mathbf{F}_m = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i_2 d\mathbf{L}_2 \times (i_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{u})}{r^2} \quad (1.10)$$

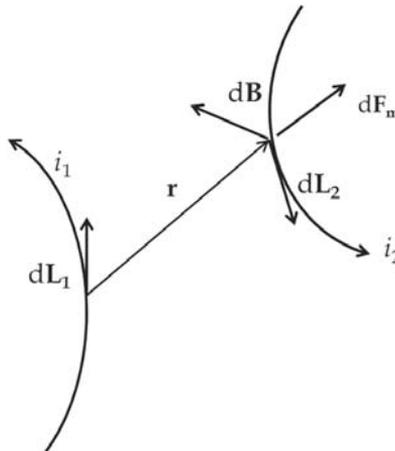


Figura 1.2 Força entre correntes de acordo com os experimentos de Ampère e Oersted.

Essa é a expressão da força sobre o segmento $d\mathbf{L}_2$ do condutor que transporta a corrente i_2 em virtude da interação com a corrente i_1 no segmento $d\mathbf{L}_1$. Esses segmentos diferenciais são orientados em direção e sentido das respectivas correntes.

Note que 'ru' é o vetor de posição do elemento dL_2 em relação a dL_1 (\mathbf{u} é vetor unitário e r é a distância). $\mu_0/4\pi$ é uma constante usada para compatibilizar as unidades das grandezas envolvidas. A constante μ_0 é denominada permeabilidade magnética do vácuo e no Sistema Internacional de Unidades tem o valor $4\pi \times 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2$ ou H/m [Henry (H) equivale a $\text{N s}^2/\text{m C}^2$].

A corrente elétrica em um condutor é a taxa de transporte de carga através da área da seção transversal do condutor. As partículas carregadas, elétrons livres em metais ou íons em soluções iônicas, podem se movimentar sob a ação de um campo elétrico aplicado no condutor. A Figura 1.3 mostra esquematicamente o fluxo de partículas carregadas através da seção transversal de um condutor cilíndrico. Se as partículas transportam carga q , têm densidade volumétrica n e se deslocam com velocidade média v no condutor, a cada intervalo dt de tempo uma quantidade de carga dQ atravessa a área transversal S do condutor segundo a equação $dQ = qnvSdt$. A corrente elétrica no condutor é, então, dada por:

$$i = \frac{dQ}{dt} = qnvS \quad (1.11)$$

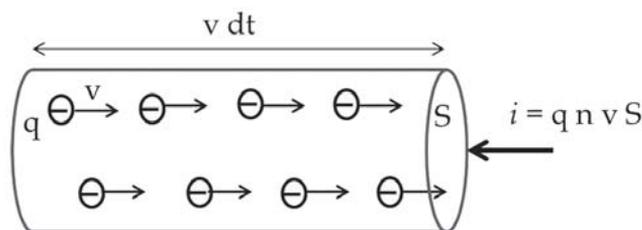


Figura 1.3 Representação esquemática da corrente elétrica em um condutor.

A unidade de medição de corrente elétrica é o ampere (A), que equivale a 1 C/s atravessando a seção transversal do condutor. Dependendo da forma e da extensão da área da seção transversal (e outros fatores a serem discutidos futuramente), o fluxo de partículas pode não ser homogêneo. Nesse caso, para descrever a distribuição de corrente no condutor, usa-se um campo vetorial denominado de densidade de corrente, cujo módulo é a corrente por unidade de área em uma posição específica da seção transversal do condutor e cuja direção e sentido são aqueles do fluxo de partículas nessa posição. Para uma distribuição uniforme de corrente no condutor, a densidade de corrente pode ser calculada a partir da Equação (1.11):

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v} \quad (1.12)$$

Essa expressão é válida também para distribuições não uniformes de corrente desde que as variações de velocidade e densidade de partículas ao longo da seção

transversal do condutor sejam devidamente consideradas. Podemos obter a força total sobre o condutor 2 na Figura 1.2 por meio de duas integrações sucessivas: primeiro ao longo do fio 1 e depois ao longo do fio 2. A partir da Equação (1.10), obtemos:

$$\mathbf{F}_m = \int_{L_2} i_2 d\mathbf{L}_2 \times \left(\frac{\mu_o}{4\pi} \int_{L_1} \frac{i_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{u}}{r^2} \right)$$

O termo entre parênteses nessa fórmula é um campo vetorial que depende apenas da corrente i_1 e da geometria do condutor 1. É denominado indução magnética. A expressão que define a indução magnética produzida por uma corrente filamental (seção transversal do condutor desprezível) é denominada lei de Biot-Savart e pode ser escrita na seguinte forma:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{L'} \frac{i d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.13)$$

onde \mathbf{r}' é o vetor de posição do segmento $d\mathbf{L}'$.

Esse resultado é atribuído ao trabalho dos franceses Jean-Baptiste Biot e Félix Savart, que, baseados nos resultados de Oersted, verificaram experimentalmente que a força exercida pelo campo gerado pela corrente elétrica em um fio reto sobre o polo magnético de um ímã é proporcional à intensidade da corrente, inversamente proporcional ao quadrado da distância perpendicular ao fio e atua na direção perpendicular ao plano que contém o fio e o ponto de atuação.

Com a definição da indução magnética, a expressão da força sobre uma corrente filamental pode ser escrita na seguinte forma:

$$\mathbf{F}_m = \int_L i d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (1.14)$$

A indução magnética pode, então, ser definida como a força magnética por unidade de corrente e unidade de comprimento em uma corrente filamental. As duas equações anteriores aplicam-se às correntes filamentosas, mas podem ser escritas em uma forma mais geral considerando a seguinte relação que facilmente pode ser demonstrada usando as equações (1.11) e (1.12):

$$i d\mathbf{L} = \mathbf{j} dV$$

Com isso, podemos reescrever a indução magnética e a força magnética em uma distribuição de corrente da seguinte forma:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (1.15)$$

$$\mathbf{F}_m = \int_V \mathbf{j} \times \mathbf{B} \, dV \quad (1.16)$$

Baseados na Equação (1.15), podemos avaliar duas importantes propriedades da indução magnética. Ao aplicarmos o operador divergente nessa equação, obtemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{j} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV'$$

Porém, em função da fórmula vetorial $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{A}$, e uma vez que $\nabla \times \mathbf{j} = 0$, pois \mathbf{j} depende unicamente de \mathbf{r}' , e $\nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 = 0$, concluímos que o integrando nessa equação é nulo. Assim, temos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.17)$$

Ou seja, a indução magnética é um campo com divergência nula. Ao aplicarmos o teorema de Gauss, concluímos que o fluxo magnético através de qualquer superfície fechada é sempre nulo.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = 0 \quad (1.18)$$

Agora, ao aplicarmos o operador rotacional na Equação (1.15), obtemos:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[\frac{\mathbf{j} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV'$$

No Apêndice B, demonstra-se que a integral nessa equação pode ser transformada da seguinte forma:

$$\int_V \nabla \times \left[\frac{\mathbf{j} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' = 4\pi \mathbf{j} - \int_V \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\nabla' \cdot \mathbf{j}) dV'$$

onde $(\nabla' \cdot)$ é o operador divergente aplicado nas coordenadas de \mathbf{r}' . Assim, podemos escrever o rotacional da indução magnética como sendo dado por:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\nabla' \cdot \mathbf{j}) dV' \quad (1.19)$$

Uma vez que estamos tratando de fontes que não variam no tempo, ou seja, cargas em repouso ou movimento uniforme que produzem densidades de carga e de corrente constantes, o termo de divergência no integrando citado é nulo. Isso pode ser verificado a partir do seguinte desenvolvimento baseado no teorema de Gauss:

$$\int_{V'} \nabla' \cdot \mathbf{j} \, dV' = \int_{S'} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}' = 0$$

Essa equação expressa o princípio da continuidade. O fluxo total da densidade de corrente através de uma superfície fechada é igual à corrente elétrica total que atravessa essa superfície, ou seja, a carga total por unidade de tempo que sai do volume limitado por esta superfície. Se esse fluxo não se anula, a carga total no volume varia no tempo e o problema é diferente do que estamos tratando neste capítulo, pois envolve campos variáveis no tempo. Este será um dos temas abordados no próximo capítulo. Assim, para problemas envolvendo densidades estáticas de carga e corrente, temos o seguinte:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{1.20}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{1.21}$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 i \tag{1.22}$$

onde a Equação (1.22) é obtida da Equação (1.21) aplicando-se o teorema de Stokes, sendo C uma curva fechada e S uma superfície aberta limitada por C . A integral de fluxo da densidade \mathbf{j} resulta na corrente i que atravessa a superfície S . A Equação (1.20) é denominada equação da continuidade (para o caso estático) e as equações (1.21) e (1.22) descrevem a lei de Ampère. Estas equações são apresentadas aqui no contexto de fontes invariantes no tempo. No próximo capítulo, veremos como elas devem ser modificadas para incluir os efeitos da variação no tempo das densidades de carga e de corrente no sistema eletromagnético.

Essa divisão entre fontes estáticas e fontes variáveis no tempo é artificial e tem finalidade puramente didática. Uma fonte de campo macroscópica é uma amostra de material eletricamente carregado ou um condutor atravessado por corrente elétrica. Em qualquer caso, as partículas carregadas nunca estão realmente em repouso ou em movimento uniforme, pois a agitação térmica mantém um estado permanente de movimentação caracterizado por deslocamentos bruscos e aleatórios (estamos nos referindo a temperaturas diferentes de 0 K). Uma vez que esses deslocamentos são muito rápidos e de pequena amplitude, para finalidades práticas, os campos gerados pelas oscilações na densidade de carga e de corrente podem ser considerados como ruído eletromagnético. Além disso, em relação ao funcionamento de equipamentos eletromagnéticos, é necessário considerar que qualquer sistema precisa ser inicializado em algum momento e possivelmente será desligado em um momento posterior. Isso significa que, durante certos intervalos de tempo, as densidades de carga e corrente nos condutores do sistema estarão variando. Se o cálculo dos campos gerados envolve esses intervalos de

comportamento transitório do sistema, então a teoria apresentada até aqui pode não ser adequada. Contudo, em geral não é esse o caso e, decorrido o tempo característico do transitório, as densidades de carga e corrente serão praticamente constantes e a análise poderá ser feita de acordo com o que foi apresentado até este ponto. De fato, os modelos discutidos neste capítulo são de aplicação muito mais geral do que se poderia supor com base apenas nas premissas das demonstrações realizadas. As aplicações incluem casos em que as correntes efetivamente são mantidas por fontes de tensão alternadas desde que a frequência seja suficientemente baixa para que a parcela de campo irradiado possa ser desprezada. Um exemplo típico é o caso dos campos gerados pelas correntes que circulam no sistema de distribuição de energia elétrica com frequência de 60 Hz. Nesses casos, os campos podem ser calculados com boa exatidão usando as leis de Coulomb, Gauss, Biot-Savart e Ampère, tal como foram apresentadas neste capítulo.

1.3 FORÇA DE LORENTZ

De acordo com o que foi apresentado anteriormente, a interação entre cargas elétricas origina dois tipos de força: a força elétrica e a força magnética. Uma carga puntiforme no espaço sujeita a campos elétrico e magnético gerados por outras fontes de campo experimenta, então, uma força resultante de duas componentes. A componente elétrica da força é facilmente calculada a partir das equações (1.4) e (1.5):

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} \quad (1.23)$$

A componente magnética pode ser obtida a partir da Equação (1.16), considerando a densidade de corrente para uma carga puntiforme em deslocamento como sendo descrita por uma função impulso:

$$\mathbf{j} = q\mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

onde $\mathbf{v} = d\mathbf{r}'/dt$.

Note que essa expressão é equivalente à Equação (1.12) se considerarmos a densidade de partículas carregadas como sendo $n = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Isso faz sentido em se tratando de uma carga puntiforme. Substituindo na expressão da força magnética (1.16), obtemos:

$$\mathbf{F}_m = \int_{V \rightarrow \infty} q\mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{B} dV = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.24)$$

Assim, a força resultante sobre uma carga puntiforme no campo eletromagnético é dada por:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.25)$$

Essa equação define o que é denominado de força de Lorentz. Note que para usá-la é necessário que os campos e a velocidade sejam descritos no mesmo sistema de referência.

1.4 CÁLCULO DE CAMPO ELÉTRICO

O campo elétrico é medido em newtons por coulomb (N/C) ou volts por metro (V/m). Volt é a unidade de potencial elétrico e será apresentada mais adiante. A Equação (1.5) descreve o modo como o campo elétrico de uma distribuição volumétrica de cargas no espaço pode ser calculado. Contudo, sistemas elétricos macroscópicos envolvem quantidades imensas de partículas. No cobre, por exemplo, existem cerca de 10^{23} átomos/cm³, cada um contendo 29 prótons e 29 elétrons. É impossível considerar o efeito de cada carga individualmente por causa do elevado número de partículas e porque elas realizam movimentos muito complexos que dependem também da temperatura do material. A alternativa geralmente usada requer considerar que apenas uma pequena parte das cargas participa da geração do campo elétrico macroscópico (carga em excesso) e, para descrevê-la, é comum assumir que a carga elétrica total se distribui continuamente no espaço com uma densidade conhecida. Dependendo da geometria do problema, uma distribuição de cargas elétricas pode ser descrita por uma densidade volumétrica, superficial ou linear de carga.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \rho_L(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dL' \quad \rightarrow \text{distribuição linear}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \rho_s(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \quad \rightarrow \text{distribuição superficial}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_v(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad \rightarrow \text{distribuição volumétrica}$$

Consideremos o exemplo da esfera uniformemente carregada mostrada na Figura 1.4. Em função da simetria da distribuição de carga em torno da direção radial, apenas a componente radial do campo precisa ser calculada. As relações matemáticas a seguir podem ser usadas:

$$dV' = 2\pi r'^2 \sin\theta dr'$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta}$$

$$r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos\alpha + r' \cos\theta$$

Assim, a integral de campo elétrico é escrita como:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v \cos\alpha dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = \frac{\rho_v}{2\epsilon_0} \int_0^R r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{(r - r' \cos\theta) \text{sen}\theta d\theta}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta)^{3/2}}$$

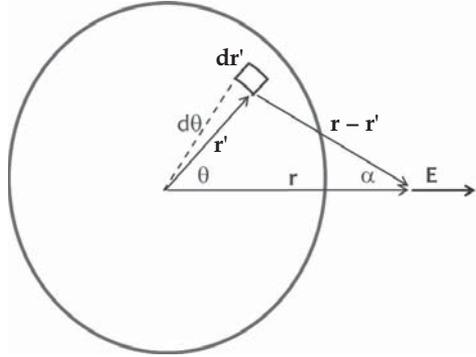


Figura 1.4 Ilustração para cálculo do campo elétrico de uma esfera uniformemente carregada.

Deixamos ao leitor a verificação de que a integral na coordenada angular resulta em:

$$\int_0^\pi \frac{(r - r' \cos\theta) \text{sen}\theta d\theta}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta)^{3/2}} = \frac{2}{r^2}$$

Assim, o campo elétrico é obtido na seguinte forma:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0 r^2} \int_0^R r'^2 dr' \mathbf{u}_r = \frac{\rho_v R^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$$

A carga total na esfera é calculada por:

$$Q = \int_V \rho_v dV' = \rho_v \frac{4}{3} \pi R^3$$

Usando essa relação para substituir a densidade de carga, obtemos o campo elétrico na seguinte forma:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \tag{1.26}$$

Essa expressão indica que a carga uniformemente distribuída no volume da esfera se comporta, em relação ao campo elétrico fora da esfera, como se estivesse

concentrada em seu centro. O mesmo não pode ser dito em relação ao campo no interior da esfera. Nesse caso, o método anterior não é adequado, uma vez que o denominador se anula para $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Podemos, contudo, usar a lei de Gauss para isso. Ao se definir uma superfície esférica concêntrica com a distribuição de carga com raio $r < r'$ para cálculo do fluxo do campo elétrico, em vista da orientação radial e da simetria esférica do campo, obtemos:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v dV = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}$$

Assim, o campo interno na distribuição de carga é obtido por:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \mathbf{u}_r \quad (1.27)$$

Ou seja, o campo aumenta linearmente da origem para a superfície da esfera carregada. Uma conclusão muito importante dessa análise baseada na lei de Gauss afirma o seguinte: se a carga estiver distribuída uniformemente apenas na superfície da esfera e o interior for eletricamente neutro (é o que ocorre para uma esfera metálica), o campo externo será exatamente o mesmo que o calculado anteriormente, mas o campo interno será nulo. Sugerimos que o leitor pense a respeito e justifique este enunciado tanto do ponto de vista do conceito de carga elétrica como fonte de fluxo elétrico, como em relação à força resultante que a carga superficial uniforme exerce em uma carga puntiforme no interior da esfera.

Consideremos agora um disco plano com espessura desprezível carregado uniformemente, cuja geometria de cálculo é mostrada na Figura 1.5. Os termos da integral de superfície para o cálculo do campo elétrico são:

$$\begin{aligned} dS' &= \rho' d\rho' d\phi \\ \mathbf{r}' &= \rho' \cos \phi \mathbf{u}_\rho + \rho' \sin \phi \mathbf{u}_\phi \\ \mathbf{r} &= \rho \mathbf{u}_\rho + z \mathbf{u}_z \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}' &= (\rho - \rho' \cos \phi) \mathbf{u}_\rho - \rho' \sin \phi \mathbf{u}_\phi + z \mathbf{u}_z \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + z^2 - 2\rho\rho' \cos \phi} \end{aligned}$$

Com isso, o campo elétrico é calculado por:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(\rho - \rho' \cos \phi) \mathbf{u}_\rho - \rho' \sin \phi \mathbf{u}_\phi + z \mathbf{u}_z}{(\rho^2 + \rho'^2 + z^2 - 2\rho\rho' \cos \phi)^{3/2}} \rho' d\rho' d\phi$$

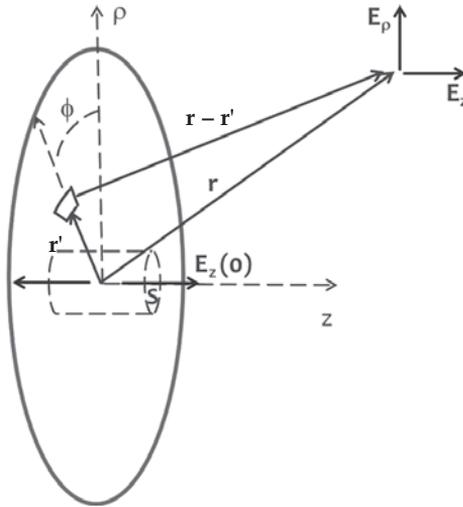


Figura 1.5 Ilustração para o cálculo do campo elétrico de uma placa circular uniformemente carregada.

Pode-se mostrar facilmente que a integral na direção azimutal é nula. As componentes radial e axial do campo são:

$$E_{\rho} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(\rho - \rho' \cos \phi) \rho' d\rho' d\phi}{(\rho^2 + \rho'^2 + z^2 - 2\rho\rho' \cos \phi)^{3/2}} \quad (1.28)$$

$$E_z = \frac{\rho_s z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho' d\rho' d\phi}{(\rho^2 + \rho'^2 + z^2 - 2\rho\rho' \cos \phi)^{3/2}} \quad (1.29)$$

Essas integrais não têm solução analítica a não ser sobre o eixo z (para uma posição arbitrária do espaço é necessário usar integração numérica). Para $\rho = 0$, a componente radial é nula e a componente axial é obtida por:

$$E_z = \frac{\rho_s z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho' d\rho' d\phi}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \quad (1.30)$$

No centro do disco, o campo elétrico é perpendicular à superfície e tem módulo $\rho_s/2\epsilon_0$. O mesmo resultado se aplica como aproximação em outras posições para as quais $z \ll R$ e $\rho \ll R$. Esse resultado também poderia ser obtido por meio da lei de Gauss, usando-se como superfície de integração um cilindro transversal à superfície do disco, como mostra a Figura 1.5:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2E_z(0)S = \frac{\rho_s S}{\epsilon_0} \rightarrow E_z(0) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \quad (1.31)$$

Um último exemplo de aplicação da lei de Coulomb no cálculo de campo elétrico é mostrado na Figura 1.6, uma linha retilínea carregada uniformemente. Os termos da integral de linha para o cálculo do campo são os seguintes:

$$dL' = dz'$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{z - z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

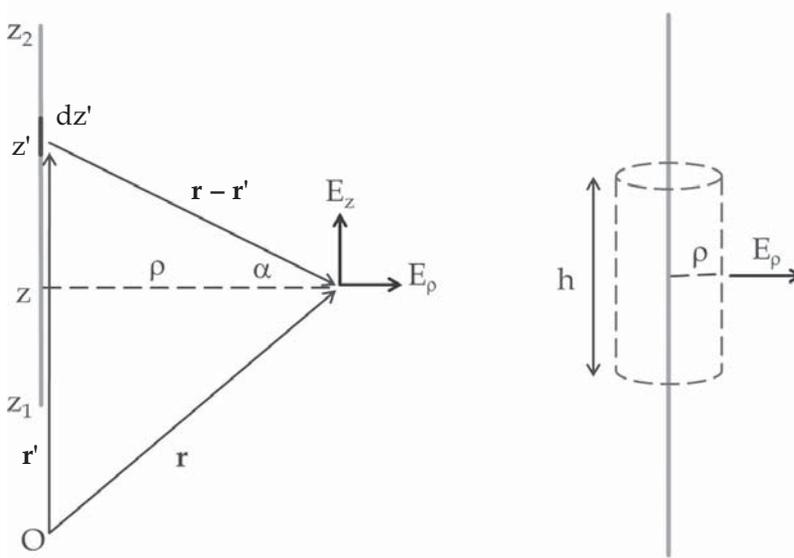


Figura 1.6 Ilustração para o cálculo do campo elétrico de uma linha de cargas.

Substituindo na integral do campo elétrico, obtemos:

$$E_{\rho} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\rho_L \cos \alpha dL'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{[(z - z')^2 + \rho^2]^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\rho_L \text{sen} \alpha dL'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{(z - z') dz'}{[(z - z')^2 + \rho^2]^{3/2}}$$

Usaremos as seguintes integrais indefinidas para obter as componentes de campo:

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Com isso, os resultados são os seguintes:

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0\rho} \left[\frac{(z_2 - z)}{\sqrt{(z - z_2)^2 + \rho^2}} - \frac{(z_1 - z)}{\sqrt{(z - z_1)^2 + \rho^2}} \right] \quad (1.32)$$

$$E_z = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(z - z_2)^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + \rho^2}} \right] \quad (1.33)$$

A solução para uma situação de grande interesse prático é facilmente obtida dos resultados anteriores, considerando-se uma linha muito longa ($z_2 - z_1 \gg \rho$) e posições próximas de seu centro [$z \approx (z_2 + z_1)/2$]. Nesse caso, $E_z \approx 0$ e o campo radial é obtido por:

$$E_\rho \approx \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

O mesmo resultado poderia ser facilmente obtido se usássemos a lei de Gauss com a superfície de integração mostrada na Figura 1.6. Considerando a linha muito longa e o campo axial (E_z) desprezível, temos:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi\rho h E_\rho = \frac{\rho_L h}{\epsilon_0} \rightarrow E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (1.34)$$

Este importante resultado pode ser usado para se obter o campo elétrico de cabos longos usados em sistemas elétricos, como a linha de fios paralelos e o cabo coaxial mostrados na Figura 1.7. Ao analisarmos essas estruturas, geralmente consideramos o sistema balanceado, ou seja, os condutores têm cargas de mesmo módulo e sinais contrários. O campo no interior dos condutores é nulo, pois a carga elétrica em excesso tende a se acumular na superfície. Fora do cabo coaxial, o campo também é nulo. Ao se utilizar a lei de Gauss, é possível verificar isso facilmente.

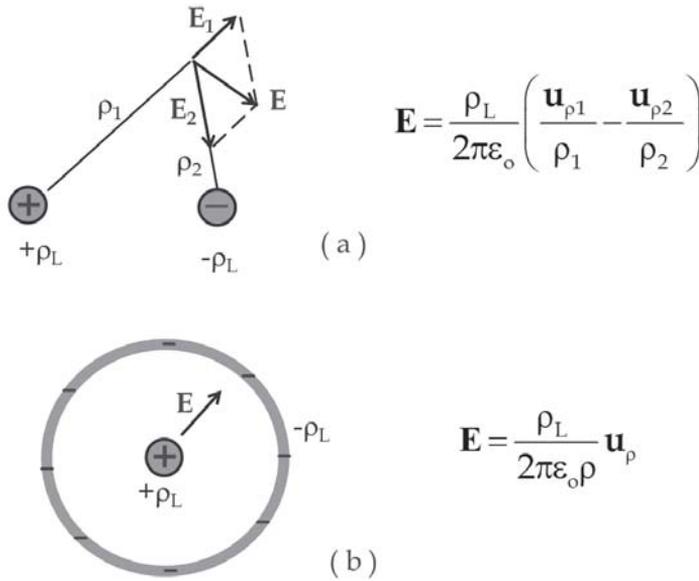


Figura 1.7 Seção transversal e campo elétrico em cabos longos: (a) linha paralela; (b) cabo coaxial.

1.5 CÁLCULO DE INDUÇÃO MAGNÉTICA

A unidade de indução magnética no Sistema Internacional de Unidades é o tesla (T). É comum encontrar na literatura também a unidade gauss (G), que equivale a 10^{-4} tesla. Para corrente filamentar, distribuição superficial ou volumétrica de corrente, a lei de Biot-Savart é escrita de maneira análoga, usando a equivalência entre os elementos de corrente:

$$i \, d\mathbf{L} = \mathbf{k} \, dS = \mathbf{j} \, dV$$

Assim, as equações a serem usadas no cálculo da indução magnética por meio da lei de Biot-Savart são mostradas a seguir. Em qualquer caso, a posição no espaço para calcular a indução não pode ser no interior da distribuição de corrente, uma vez que o integrando na lei de Biot-Savart apresenta singularidade nessa região.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L'} \frac{i \, d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \rightarrow \text{corrente filamentar}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{k} \, dS' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \rightarrow \text{distribuição superficial}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j} \, dV' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \rightarrow \text{distribuição volumétrica}$$

Um exemplo muito simples e importante de aplicação da lei de Biot-Savart é o do fio reto. Um pedaço retilíneo de fio fino é percorrido por uma corrente elétrica como mostra a Figura 1.8. A indução magnética é calculada a partir da integral de linha descrita anteriormente e considerando os termos do integrando da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d\mathbf{L} &= dz' \mathbf{u}_z \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}' &= \rho \mathbf{u}_\rho + (z - z') \mathbf{u}_z \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} \\ d\mathbf{L} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= (\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho) \rho dz' = \rho dz' \mathbf{u}_\phi \end{aligned}$$

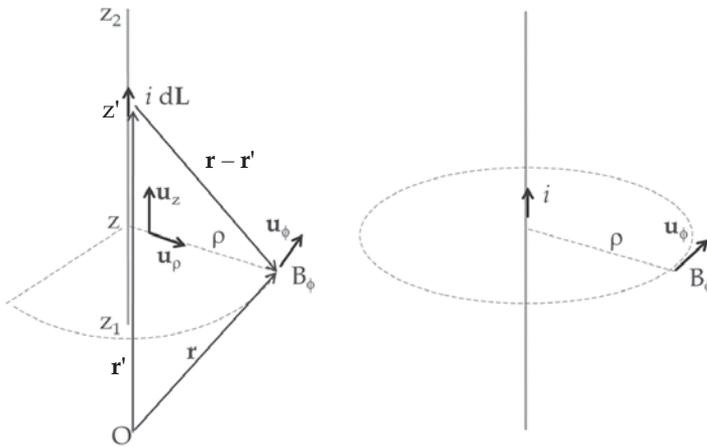


Figura 1.8 Ilustração para o cálculo da indução magnética do fio reto.

Ao substituirmos na integral de Biot-Savart, obtemos a equação mostrada a seguir. A solução apresentada em seguida resulta da aplicação da mesma função primitiva usada no problema da distribuição linear de cargas para o campo radial já analisado no item anterior.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i \rho}{4\pi} \mathbf{u}_\phi \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} \mathbf{u}_\phi \left[\frac{(z - z_1)}{\sqrt{(z - z_1)^2 + \rho^2}} - \frac{(z - z_2)}{\sqrt{(z - z_2)^2 + \rho^2}} \right] \quad (1.35)$$

Evidentemente, em virtude da continuidade da corrente elétrica, um segmento de fio não pode estar isolado no espaço. O segmento faz parte de um circuito elétrico e o restante do circuito também contribui para a indução magnética. Se um circuito é constituído por diversos segmentos retilíneos, podemos usar a equação

anterior para calcular a indução de cada segmento e depois efetuar a soma vetorial desses termos. Outra aplicação importante do resultado anterior é a avaliação da indução magnética de um fio longo, para o qual certas aproximações podem ser feitas nos termos dependentes das coordenadas de posição e, além disso, em função da distância do restante do circuito, pode-se desprezar os outros termos de indução que não sejam originados no próprio fio. Assim, considerando um fio muito longo ($z_2 - z_1 \gg \rho$) e posições próximas de seu centro [$z \approx (z_2 + z_1)/2$], obtemos:

$$\mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\phi$$

Esse resultado poderia ser facilmente obtido usando-se a lei de Ampère com o caminho de integração mostrado na Figura 1.8 para calcular a circulação da indução magnética.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = 2\pi\rho B = \mu_0 i \rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\phi \quad (1.36)$$

Com essa fórmula podemos prever a indução magnética produzida por cabos longos usados em sistemas elétricos. A Figura 1.9 mostra a indução magnética produzida pela linha de fios paralelos e pelo cabo coaxial, ambos com correntes balanceadas, ou seja, correntes iguais nos dois condutores, mas com sentidos opostos.

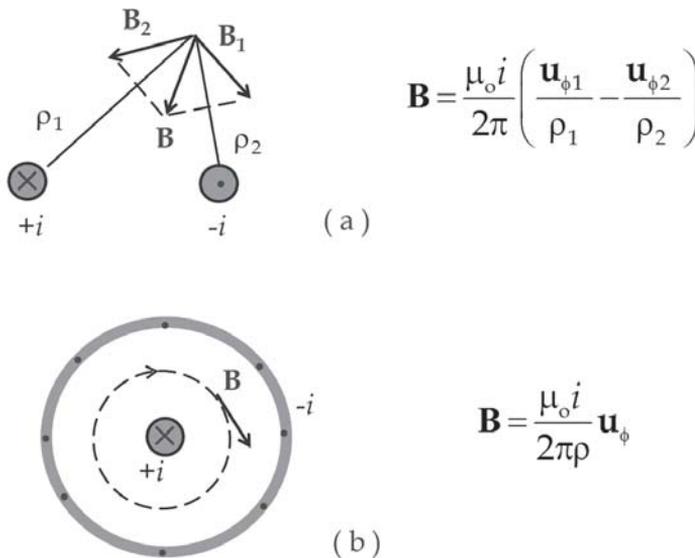


Figura 1.9 Seção transversal e indução magnética em cabos longos: (a) linha paralela; (b) cabo coaxial. Os símbolos (×) e (·) representam o sentido da corrente, para dentro e para fora do plano da figura, respectivamente.

Dentro de um condutor metálico transportando corrente elétrica, existe indução magnética. O cálculo, nesse caso, não pode ser feito com a lei de Biot-Savart, uma vez que o denominador no integrando se anula dentro da distribuição de corrente. Se for possível prever a orientação espacial da indução magnética, o cálculo poderá ser feito usando-se a lei de Ampère. No caso de um condutor cilíndrico, o cálculo é muito simples, como verificado anteriormente para fora do fio. A diferença está na corrente que atravessa a área de integração. Se a densidade de corrente for uniforme na seção transversal do condutor, teremos:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = 2\pi\rho B = \mu_o j \pi\rho^2 \rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_o j \rho}{2} \mathbf{u}_\phi \quad (1.37)$$

Ou seja, a indução magnética aumenta linearmente do centro para a periferia do fio.

Outro exemplo importante é a espira de corrente mostrada na Figura 1.10. A análise dessa estrutura serve de modelo básico para dispositivos magnéticos como solenoides, bobina de Helmholtz e outros. Os termos da integral de Biot-Savart, nesse caso, são:

$$\mathbf{r}' = R(\cos\phi \mathbf{u}_\rho + \text{sen}\phi \mathbf{u}_\phi)$$

$$d\mathbf{L}' = \frac{d\mathbf{r}'}{d\phi} d\phi = R(-\text{sen}\phi \mathbf{u}_\rho + \cos\phi \mathbf{u}_\phi) d\phi$$

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho + z \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (\rho - R \cos\phi) \mathbf{u}_\rho - R \text{sen}\phi \mathbf{u}_\phi + z \mathbf{u}_z$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\rho^2 + R^2 + z^2 - 2\rho R \cos\phi}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{L}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= R(-\text{sen}\phi \mathbf{u}_\rho + \cos\phi \mathbf{u}_\phi) d\phi \times [(\rho - R \cos\phi) \mathbf{u}_\rho - R \text{sen}\phi \mathbf{u}_\phi + z \mathbf{u}_z] = \\ &= Rz \cos\phi d\phi \mathbf{u}_\rho + Rz \text{sen}\phi d\phi \mathbf{u}_\phi + (R - \rho \cos\phi) R d\phi \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

Ao substituirmos na integral de Biot-Savart, verifica-se facilmente que a componente azimutal da indução magnética é nula. As demais componentes são calculadas por:

$$B_z = \frac{\mu_o i R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R - \rho \cos\phi) d\phi}{[\rho^2 + R^2 + z^2 - 2\rho R \cos\phi]^{3/2}} \quad (1.38)$$

$$B_\rho = \frac{\mu_o i R z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi d\phi}{[\rho^2 + R^2 + z^2 - 2\rho R \cos\phi]^{3/2}} \quad (1.39)$$

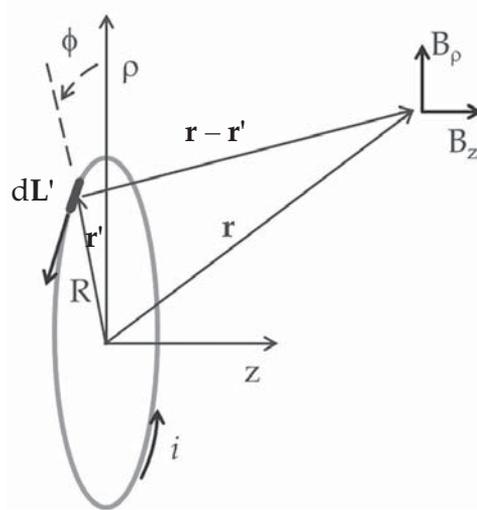


Figura 1.10 Ilustração para o cálculo da indução magnética de uma espira circular.

Essas equações possuem solução analítica apenas sobre o eixo z . Para uma posição arbitrária do espaço, devem ser resolvidas por integração numérica. Quando $\rho = 0$, a componente radial é nula e a componente axial é dada por:

$$B_z = \frac{\mu_o i R^2}{2[R^2 + z^2]^{3/2}} \quad (1.40)$$

Um solenoide formado por um grande número de espiras muito próximas pode ser descrito como uma série de espiras planas posicionadas concentricamente como mostra a Figura 1.11. Nesse caso, devemos usar o conceito de densidade de espiras de modo que o número de espiras no intervalo de comprimento dz' seja $dN = (N/L) dz'$, onde N é o número total de espiras do solenoide. Usando a equação anterior, podemos calcular a indução magnética no eixo do solenoide por meio de:

$$B_z = \int_{-L_s/2}^{+L_s/2} \frac{\mu_o i R^2}{2[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \frac{N}{L} dz' = \frac{\mu_o i N}{2L} \left[\frac{(z + L/2)}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{(z - L/2)}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right] \quad (1.41)$$

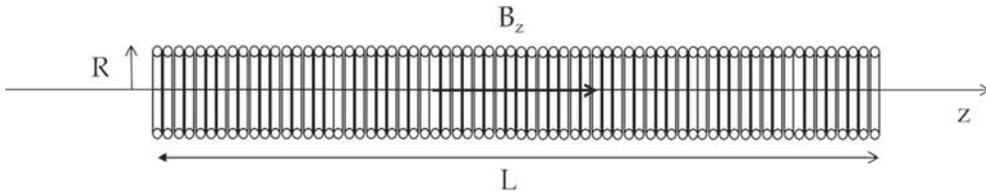


Figura 1.11 Um solenoide descrito como uma série de espiras circulares planas.

Outra estrutura muito importante na construção de indutores e transformadores é a bobina toroidal, mostrada na Figura 1.12. Apenas algumas espiras são representadas na figura, mas vamos assumir que o número de espiras é grande e que a bobina está distribuída de forma uniforme no perímetro do toroide. Nesse caso, a indução magnética em seu interior é aproximadamente independente do ângulo azimutal e pode ser calculada por meio da lei de Ampère. No momento, vamos assumir também que o núcleo é feito de um material não magnético.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = 2\pi\rho B = \mu_0 N_c i \rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 N_c i}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\phi \quad (1.42)$$

Sugere-se ao leitor demonstrar que nas condições do cálculo anterior, fora do volume do toroide, a indução magnética é nula.

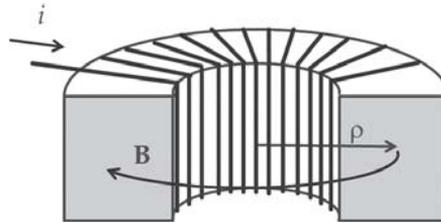


Figura 1.12 Representação esquemática em corte de uma bobina toroidal.

A última estrutura que analisaremos é uma superfície plana transportando corrente elétrica com densidade linear \mathbf{k} , como mostra a Figura 1.13. Se imaginarmos que a placa é formada por filetes com largura dx' , podemos usar o resultado já obtido anteriormente para uma corrente filamental retilínea [Equação (1.35)]. Os termos a seguir serão usados na equação citada:

$$\rho = \sqrt{(x - x')^2 + y^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x - x'}{\rho} = \frac{x - x'}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2}}$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}$$

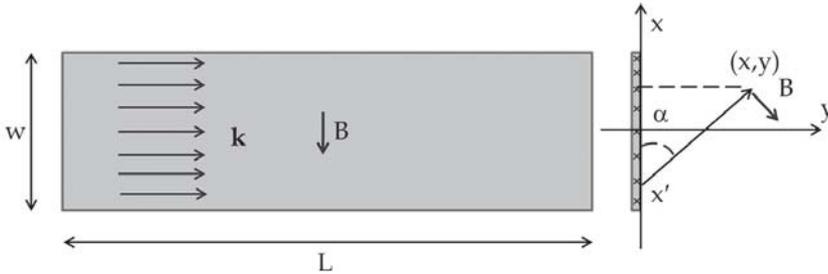


Figura 1.13 Ilustração para o cálculo da indução magnética gerada por uma corrente em superfície plana.

As componentes da indução magnética serão calculadas da seguinte forma:

$$B_x = \frac{\mu_0 k}{4\pi} \int_{-w/2}^{+w/2} \left[\frac{(z-z_1)}{\sqrt{(z-z_1)^2 + \rho^2}} - \frac{(z-z_2)}{\sqrt{(z-z_2)^2 + \rho^2}} \right] \frac{\text{sen}\alpha}{\rho} dx'$$

$$B_y = \frac{\mu_0 k}{4\pi} \int_{-w/2}^{+w/2} \left[\frac{(z-z_1)}{\sqrt{(z-z_1)^2 + \rho^2}} - \frac{(z-z_2)}{\sqrt{(z-z_2)^2 + \rho^2}} \right] \frac{\text{cos}\alpha}{\rho} dx'$$

Essas equações podem ser usadas para se obter a solução por meio de integração numérica. No momento, vamos obter uma solução analítica aproximada para uma situação mais favorável. Consideremos que a placa é suficientemente longa e que desejamos obter a indução nas proximidades do meio de seu comprimento. Assim, como no caso do fio longo, $(z_2 - z_1 \gg \rho)$ e $z \approx (z_2 + z_1)/2$, temos:

$$B_x \approx \frac{\mu_0 k y}{2\pi} \int_{-w/2}^{+w/2} \frac{dx'}{(x-x')^2 + y^2} = \frac{\mu_0 k}{2\pi} \left[\text{atg}\left(\frac{x+w/2}{y}\right) - \text{atg}\left(\frac{x-w/2}{y}\right) \right] \quad (1.43)$$

$$B_y \approx \frac{\mu_0 k}{2\pi} \int_{-w/2}^{+w/2} \frac{(x-x')dx'}{(x-x')^2 + y^2} = \frac{\mu_0 k}{4\pi} \text{Ln} \left[\frac{(x+w/2)^2 + y^2}{(x-w/2)^2 + y^2} \right] \quad (1.44)$$

Observe que, se a largura w da placa for grande, comparada com as coordenadas de posição, as expressões anteriores resultam nos seguintes valores aproximados:

$$B_x \approx \frac{\mu_0 k}{2} \quad B_y \approx 0 \quad (1.45)$$

Nessas condições, o cálculo usando a lei de Ampère conduz facilmente a esse resultado. Deixaremos essa verificação ao leitor como exercício.

1.6 TRAJETÓRIA DE PARTÍCULAS CARREGADAS

O movimento de partículas eletricamente carregadas sob a ação da força de Lorentz pode ser estudado por meio da dinâmica de Newton se as velocidades envolvidas forem pequenas comparadas à velocidade da luz. Ignorando as forças dissipativas, a equação do movimento é:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.46)$$

E em suas componentes retangulares torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m} E_x + \frac{q}{m} (v_y B_z - v_z B_y) \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{q}{m} E_y + \frac{q}{m} (v_z B_x - v_x B_z) \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{q}{m} E_z + \frac{q}{m} (v_x B_y - v_y B_x) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Consideremos uma situação particular em que o campo elétrico (E_o) é uniforme e orientado na direção z e a indução magnética (B_o) é uniforme e orientada na direção x. As equações se simplificam para:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{qB_o}{m} v_z \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{q}{m} E_o - \frac{qB_o}{m} v_y \end{aligned}$$

A velocidade na direção x não é afetada pelos campos. Ao efetuarmos a separação de variáveis entre as outras duas equações, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_y}{dt^2} &= \frac{q^2 B_o E_o}{m^2} - \left(\frac{qB_o}{m} \right)^2 v_y \\ \frac{d^2 v_z}{dt^2} &= - \left(\frac{qB_o}{m} \right)^2 v_z \end{aligned}$$

As soluções dessas equações podem ser expressas na forma de funções cosseno:

$$\begin{aligned} v_y &= V_1 \cos(\omega t + \theta_1) + V_o \\ v_z &= V_2 \cos(\omega t + \theta_2) \end{aligned} \quad (1.48)$$

onde $\omega = qB_o/m$ é a frequência angular do movimento da partícula. A velocidade V_o é uma constante que depende do termo independente na equação diferencial de v_y . Por substituição na equação de v_y encontra-se que $V_o = E_o/B_o$. Se a partícula parte do repouso em $t = 0$, ao aplicarmos as condições iniciais:

$$\begin{aligned} v_y(t=0) &= v_z(t=0) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt}(t=0) &= 0 \\ \frac{dv_z}{dt}(t=0) &= \frac{qE_o}{m} \end{aligned}$$

obtemos $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, $V_1 = V_2 = -V_o$. Então, as soluções são as seguintes:

$$\begin{aligned} v_y &= V_o [1 - \cos(\omega t)] \\ v_z &= V_o \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (1.49)$$

A posição da partícula é obtida pela integração das equações de velocidade:

$$\begin{aligned} y &= y_o + V_o \int_0^t [1 - \cos(\omega t')] dt' = y_o + V_o t - \frac{V_o}{\omega} \sin(\omega t) \\ z &= z_o + V_o \int_0^t \sin(\omega t') dt' = z_o + \frac{V_o}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \end{aligned} \quad (1.50)$$

A partícula se desloca na direção y com velocidade V_o e simultaneamente apresenta um movimento oscilatório no plano yz com frequência ω e amplitude V_o/ω .

Outro efeito importante pode ser avaliado pela modificação das condições propostas inicialmente, ao considerarmos o campo elétrico nulo, mas incluindo uma velocidade inicial não nula da partícula ao entrar na região de influência da indução magnética. As equações desacopladas são:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_y}{dt^2} &= -\left(\frac{qB_o}{m}\right)^2 v_y \\ \frac{d^2 v_z}{dt^2} &= -\left(\frac{qB_o}{m}\right)^2 v_z \end{aligned}$$

Se assumirmos que a velocidade inicial está orientada na direção z , as condições iniciais serão:

$$v_y(t=0) = 0$$

$$v_z(t=0) = V_o$$

$$\frac{dv_y}{dt}(t=0) = \frac{qB_o}{m} V_o$$

$$\frac{dv_z}{dt}(t=0) = 0$$

E as soluções são obtidas da seguinte forma:

$$v_y = V_o \text{ sen}(\omega t) \tag{1.51}$$

$$v_z = V_o \text{ cos}(\omega t)$$

A partícula realiza um movimento oscilatório no plano perpendicular à indução magnética com velocidade igual à velocidade de entrada e frequência $\omega = qB_o/m$. Como a velocidade na direção da indução magnética não é afetada, a partícula segue uma trajetória helicoidal, deslocando-se com velocidade constante na direção da indução e girando em seu plano perpendicular (ver Figura 1.14). Um fenômeno semelhante ocorre na atmosfera terrestre por causa da incidência de partículas carregadas provenientes do espaço (principalmente do Sol) e que interagem com o campo magnético da Terra. As partículas capturadas se deslocam com movimento helicoidal, sendo conduzidas para os polos magnéticos da Terra. Como consequência desse acúmulo de partículas energéticas nos polos, surge o interessante espetáculo das auroras (boreal no hemisfério norte e austral no Hemisfério Sul).

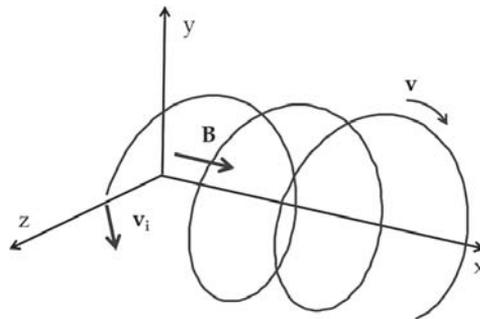


Figura 1.14 Trajetória de uma partícula positivamente carregada em um campo magnético. A velocidade inicial da partícula tem componentes x e z e a indução magnética é uniforme e orientada na direção x.

1.7 EXERCÍCIOS

- 1) Um condutor cilíndrico longo de raio a está carregado com densidade superficial uniforme ρ_s e transporta corrente elétrica com densidade j uniforme em sua seção transversal. Usando a lei de Gauss e a lei de Ampère, calcule o campo elétrico e a indução magnética no espaço dentro e fora do cilindro para uma distância arbitrária em relação a seu centro.
- 2) Uma espira circular de raio R está carregada uniformemente com carga elétrica Q . Calcule o campo elétrico em seu eixo de simetria e encontre as posições de máxima e mínima intensidades de campo elétrico com os respectivos valores.
- 3) Considere uma espira plana quadrada de aresta a percorrida por corrente elétrica no sentido horário. Calcule a indução magnética no centro da espira. Repita o exercício para uma espira plana circular de raio R .
- 4) Considere uma linha paralela de condutores filamentosos separados pela distância d . Supondo que os condutores estão balanceados (cargas e correntes iguais em módulo, mas com sinais contrários nos dois condutores), calcule a força total de interação entre os condutores.
- 5) Considere um cabo coaxial balanceado com raio interno a e raio externo b (espessura w do condutor externo) e com densidade superficial de carga ρ_s e densidade de corrente j no condutor interno. Calcule o campo elétrico e a indução magnética no interior do cabo (incluindo os condutores).
- 6) Mostre que a indução magnética produzida por uma única espira circular com raio R e corrente i em posições do espaço tais que a distância r até o centro da espira atende à condição $r \gg R$ pode ser aproximada por:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{4r^3} (2 \cos \theta \mathbf{u}_r + \sin \theta \mathbf{u}_\theta)$$

onde o ângulo θ é medido entre o vetor r e o eixo da espira.

- 7) Considere um solenoide longo (comprimento $> 10 \times$ diâmetro) com grande número de espiras distribuídas de forma uniforme em seu comprimento. Mostre que a indução magnética nas extremidades é aproximadamente a metade da do centro. Use a lei de Ampère para obter uma aproximação para a indução magnética no centro do solenoide.
- 8) Uma bobina de Helmholtz é formada por duas espiras circulares concêntricas separadas por uma distância igual ao raio das espiras, com correntes elétricas idênticas circulando no mesmo sentido. Calcule a indução magnética como função da posição no eixo da bobina de Helmholtz e mostre que a primeira e a segunda derivadas dessa função são nulas na posição central da bobina.

