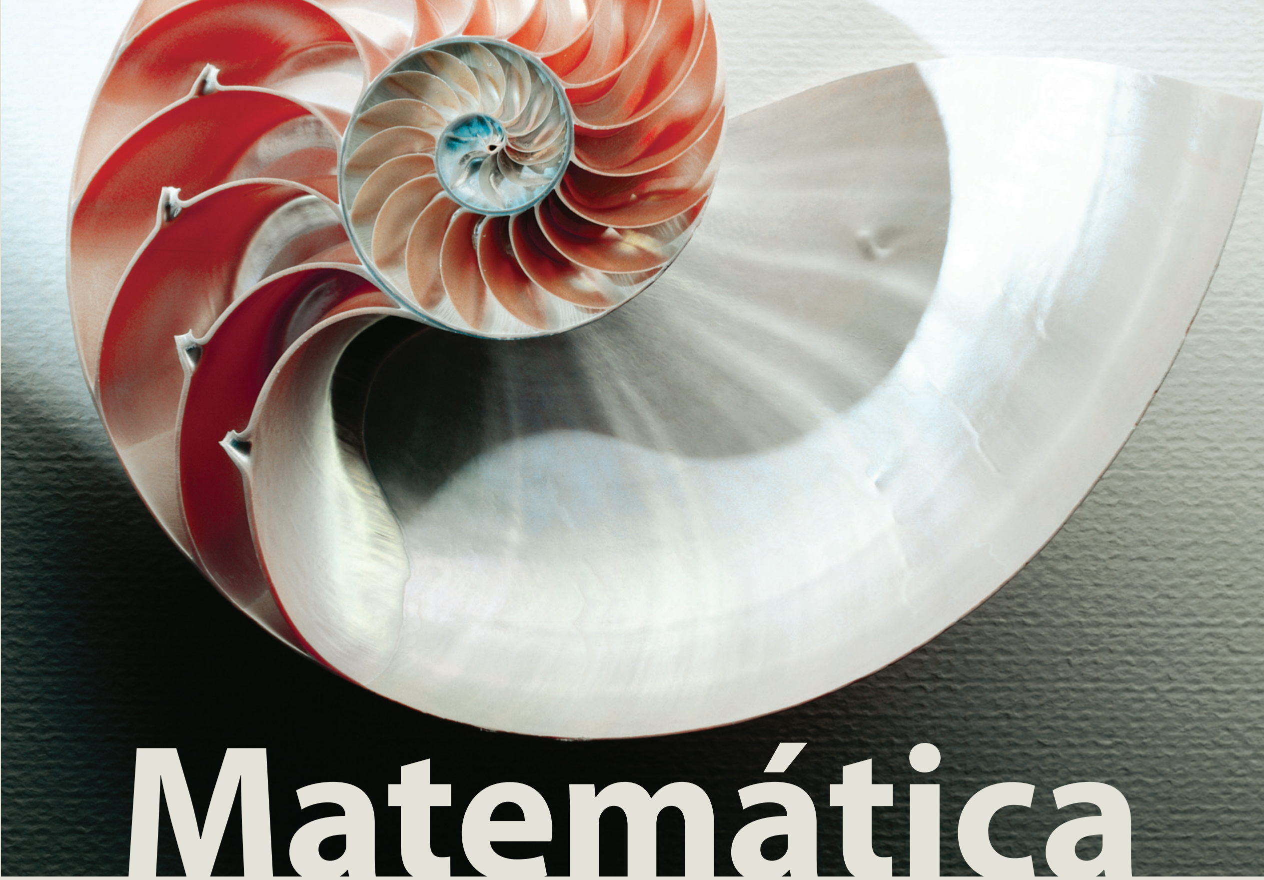


# Matemática

## com Aplicações Tecnológicas

*Matemática Básica* | **Volume 1**


**Seizen Yamashiro**

**Suzana Abreu de Oliveira Souza**

**Dirceu D'Alkmin Telles** (organizador)



Blucher

FATEC-SP

FUNDAÇÃO FAT

# MATEMÁTICA

## com Aplicações Tecnológicas

*Matemática básica* | **Volume 1**

Blucher

DIRCEU D'ALKMIN TELLES

Organizador

SEIZEN YAMASHIRO

SUZANA ABREU DE OLIVEIRA SOUZA

Autores

# MATEMÁTICA

## com Aplicações Tecnológicas

*Matemática básica* | **Volume 1**

Matemática com aplicações tecnológicas – edição organizada por Dirceu D'Alkmin Telles


Capa: Alba Mancini – Mexerica Design

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-012 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
**contato@blucher.com.br**
**www.blucher.com.br**

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009



Ficha Catalográfica

Yamashiro, Seizen
Matemática com aplicações tecnológicas / Souza, Suzana Abreu de Oliveira; organizado por [Dirceu D' Alkmin Telles]. — São Paulo: Blucher, 2014.

Bibliografia
ISBN 978-85-212-0777-1

1. Matemática - Problemas, questões, exercícios I. Título II. Souza, Suzana Abreu de Oliveira III. Telles, Dirceu D´Alkmin

13-0596 CDD 510

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática – Problemas, questões, exercícios

*Dedico este trabalho à minha esposa Setu-Co e aos meus filhos Maurício e Marisa, aos meus irmãos que muito me apoiaram com seu incentivo.*

Seizen

*Dedico este trabalho ao meu esposo Geraldo e aos meus filhos David e Nathan, que me incentivaram com seu apoio e confiança.*

Suzana

*Dedicamos este livro aos nossos familiares, irmãos e sobrinhos pelo apoio constante.*

## AO ESTUDANTE

1. Este livro foi escrito numa linguagem acessível, motivando-o a adquirir o hábito de estudo, a compreender e a gostar da Matemática, ingrediente de muitas das mais elevadas realizações da mente humana.
2. Relembraremos e passaremos muitas informações básicas e relevantes da Matemática que o ajudarão a compreender melhor o curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral.
3. Foram selecionados exercícios que requerem simplificações de expressões envolvendo álgebra e trigonometria que serão utilizados diretamente ou indiretamente nos cálculos de limites, derivadas e integrais.
4. Através da resolução de exercícios específicos em ordem crescente de dificuldade pretendemos efetuar, em cada capítulo, uma revisão e fixação dos conhecimentos básicos e fundamentais para a aprendizagem dos assuntos do Curso Superior.
5. No último capítulo incluímos exercícios resolvidos e exercícios propostos que servirão de roteiro de estudos, recapitulação e fixação dos conteúdos estudados.

# PREFÁCIO

Os docentes da área de Matemática do Departamento de Ensino Geral da FATEC-SP, sob a coordenação do Prof. Dr. Dirceu D'Alkmin Telles, lançam o livro *Matemática básica com aplicações tecnológicas*, destinado a alunos e professores dos cursos superiores de Tecnologia, Engenharia, bacharelado e licenciatura em Matemática. O presente volume mostra como usar as ferramentas da Matemática em diversas disciplinas do ciclo básico dos cursos acima citados por meio de teoria, exercícios resolvidos e propostos.

Externo meus agradecimentos aos autores prof. Me. Seizen Yamashiro e profª. Drª. Suzana Abreu de Oliveira Souza pelo relevante trabalho realizado de valor inestimável e que certamente trará muitos benefícios para a comunidade acadêmica das instituições de Ensino Superior do país.

Profª Drª Luciana Reyes Pires Kassab

Diretora da FATEC-SP

# APRESENTAÇÃO

Este livro é o primeiro de uma coleção que tem por objetivo ampliar a compreensão das aplicações tecnológicas da Matemática. Ciência que é a base de todas as ciências, marca presença especialmente nas novas tecnologias, o que a faz essencial para o desenvolvimento de um profissional preparado para atuar em qualquer campo das atividades humanas.

A coleção "Matemática com Aplicações Tecnológicas" foi concebida e organizada por experientes professores da Faculdade de Tecnologia de São Paulo, em quatro volumes. Este primeiro – Matemática Básica – traz teorias e conceitos fundamentais, com suas aplicações tecnológicas. Textos, ilustrações e orientações para a solução de exercícios contribuem para uma maior compreensão dos problemas propostos. Os demais volumes abrangerão, respectivamente: Cálculo I, Cálculo II e Matemática Financeira.

Uma obra que deverá ser de grande auxílio para o desenvolvimento acadêmico de alunos e professores de cursos superiores, nos quais o conhecimento da teoria e da aplicabilidade da Matemática é fundamental para garantir uma formação básica sólida; entre eles: Tecnologia, Engenharia, Ciências da Computação, Administração, Secretariado, Turismo, preparatórios para vestibulares e outros interessados relacionados à área.

Parabenizo os autores por este trabalho. A publicação de obras didáticas, como o presente livro, é sem dúvida uma contribuição ao ensino profissional de qualidade, fundamental para o desenvolvimento econômico e social do Brasil.

Laura Laganá

Diretora Superintendente do Centro Paula Souza

# SOBRE OS AUTORES

## SEIZEN YAMASHIRO

É licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade Presbiteriana Mackenzie – São Paulo, 1964; mestre em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica – PUC – São Paulo, 1991; professor decano da Academia de Polícia Militar do Barro Branco: lecionou Matemática e Estatística no período de 1 de agosto de 1970 a 11 de fevereiro de 2008; professor pleno na Faculdade de Tecnologia de São Paulo – FATEC-SP, onde leciona Cálculo e Estatística desde 29 de fevereiro de 1980; professor do Curso de Reforço para alunos ingressantes na FATEC-SP no início de todos os semestres, desde 1997.

## SUZANA ABREU DE OLIVEIRA SOUZA

É bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1986; mestre em Ciências – Matemática Aplicada – pela Universidade de São Paulo, 1992; doutora em Ciências – Matemática Aplicada – pela Universidade de São Paulo, 2001; professora na Faculdade de Tecnologia de São Paulo – FATEC-SP, na Universidade Presbiteriana Mackenzie e no Centro Universitário Padre Saboia de Medeiros (FEI); professora do Curso de Reforço para alunos ingressantes na FATEC-SP no início de todos os semestres, desde 1997.

# SOBRE O ORGANIZADOR

**DIRCEU D´ALKMIN TELLES**

Engenheiro, Mestre e Doutor pela Escola Politécnica da USP. Atua como Colaborador da FAT, Professor do Programa de Pós-Graduação do CEETEPS.

Foi Presidente da ABID, professor e diretor da FATEC-SP, Coordenador de Irrigação do DAEE e Professor do Programa de Pós-Graduação da Escola Politécnica – USP. Organizou e escreveu livros e capítulos nas seguintes áreas: reúso da água, agricultura irrigada, aproveitamento de esgotos sanitários em irrigação, elaboração de projetos de irrigação, ciclo ambiental da água e física com aplicação tecnológica.

## AGRADECIMENTOS PELO APOIO E INCENTIVO

À Profa. Dra. Luciana Reyes Pires Kassab,
diretora da Fatec-SP

Ao Prof. Dr. Dirceu D'Alkmin Telles,
organizador da coleção

Aos colegas de área de Matemática

Aos colegas de todos os Departamentos da FATEC-SP

# CONTEÚDO

# 1 NOÇÕES DE CONJUNTOS

## 1.1 INTRODUÇÃO

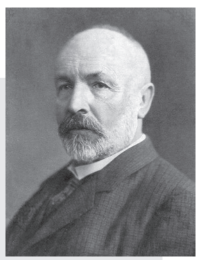
Estudaremos, neste capítulo, as noções iniciais da teoria dos conjuntos, sob um ponto de vista intuitivo e de maneira informal, por meio de exemplos e de exercícios resolvidos e propostos.

A ideia de conjunto, embora sempre existente no pensamento comum e na Matemática, só teve tratamento formal, pela primeira vez, em fins do século XIX, com o matemático alemão Georg Cantor.

O crescimento da ciência Matemática, de 1900 até nossos dias, deu origem à teoria dos conjuntos que teve o papel fundamental de mostrar a unidade da Matemática.

**GEORG CANTOR**
***(1845-1918)***

Matemático russo, criado na Alemanha, conhecido por elaborar a teoria dos conjuntos. Deve-se a Cantor uma produtiva análise do conceito de infinito, que anteriormente fora iniciada por Bernard Bolzano, em paradoxos do Infinito. Em 1877, Cantor provou que existiam vários tipos de conjuntos infinitos, introduzindo a noção de potência de conjuntos.



## 1.2 NOÇÕES PRIMITIVAS

Desde o início da geometria euclidiana, desenvolvida por volta de 300 anos a.C., algumas noções principais são aceitas sem definição prévia, como, por exemplo, o ponto, a reta e o plano. Assim também acontece com a teoria dos conjuntos. São consideradas primitivas algumas noções como a de conjunto, a de elemento, a de relação de pertinência entre elemento e conjunto.

### 1.2.1 CONJUNTO

A noção matemática de conjunto, que é a mesma que se usa na linguagem comum, corresponde à de conjunto entendido como agrupamento ou coleção que pode ser de objetos, pessoas, letras, números, ou de qualquer outra coisa que se queira classificar.

Exemplo:

**E 1.1**

a) Conjunto das vogais.

b) Conjunto das cartas de um baralho.

c) Conjunto dos números pares.

d) Conjunto dos planetas do sistema solar.

Indicaremos os conjuntos por letras latinas maiúsculas: A, B, C,..., X, Y, Z.

### 1.2.2 ELEMENTO

Cada um dos objetos, pessoas, números etc. que formam um conjunto é chamado elemento do conjunto. Assim, temos os elementos:

1) a, e, i, o, u.

2) às de ouro, rei de paus,...

3) 2, 4, 6, 8,...

4) Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno.

Os elementos, que se supõem sempre distintos, serão indicados por letras latinas minúsculas: a,b,c,..., x, y, z.

### 1.2.3 RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Com o símbolo "$\in$", introduzido pela primeira vez por Peano, indicaremos a expressão "pertence a". Para indicar a negação dessa expressão, escrevemos "$\notin$" e leremos "não pertence".

Exemplo:

**E 1.2**

Seja A = {a, e, i, o, u}, então teremos: $a \in A$, que será lido como "a pertence a A" e $b \notin A$, que será lido "b não pertence a A".

## 1.3 DETERMINAÇÃO DE UM CONJUNTO

Um conjunto pode ser determinado de mais de uma maneira, como veremos a seguir:

1) Pela designação ou enumeração de seus elementos, ou representação tabular. Devemos indicá-lo escrevendo seus elementos entre chaves.

Exemplo:

**E 1.3**

a) Conjunto das vogais: A = {a, e, i, o, u}.

b) Conjunto dos números ímpares positivos: B = {1, 3, 5, 7,...}.

2) Pela propriedade de seus elementos ou representação analítica. Um conjunto fica determinado quando conhecemos uma propriedade que caracterize seus elementos. Se chamarmos essa propriedade de P, o conjunto dos elementos x que têm a propriedade P é indicado por:

{x tal que x tem a propriedade P}

ou

{x | x tem a propriedade P}

**Observação**

"|" lê-se "tal que".

Exemplo:

**E 1.4**

a) A = {x | x é figura geométrica} = {triângulo, quadrilátero, pentágono,...}

b) B = {x | x é vogal} = {a, e, i, o, u}

c) C = {x | x é satélite natural da terra} = {lua}

## 1.4 TIPOS DE CONJUNTOS

### 1.4.1 CONJUNTOS FINITOS

Um conjunto é chamado finito quando possui uma quantidade finita de elementos.

Exemplo:

**E 1.5**

a) A = {x, y, z}

b) B = {azul, amarelo, vermelho}

c) C = {x | x é vogal} = {a, e, i, o, u}

### 1.4.2 CONJUNTO UNITÁRIO

Um conjunto é chamado de conjunto unitário quando possui apenas um elemento.

Exemplo:

**E 1.6**

a) A = {branco}

b) B = {y}

c) C = {x | x divide todos os números} = {1}

### 1.4.3 CONJUNTO VAZIO

Conjunto vazio é o conjunto que não possui elementos. Indica-se por { } ou Ø.

Exemplo:

**E 1.7**

a) A = {x | 0·x = 5} = Ø

b) B = { }

c) C = {x | x é par e ímpar}

Observações

1) O símbolo usual para o conjunto vazio é Ø, que é uma letra de origem norueguesa;

2) Não se deve escrever { Ø }, pois isso pode significar um conjunto unitário de elemento Ø.

### 1.4.4 CONJUNTO UNIVERSO

Ao desenvolvermos um determinado assunto de Matemática, admitimos a existência de um conjunto U ao qual pertencem todos os elementos utilizados no tal assunto. Esse conjunto U recebe o nome de conjunto universo. Assim, se estamos estudando a Geometria Plana, o conjunto universo é o conjunto dos pontos de um plano; se estudamos a geografia física das Américas, o conjunto universo é o continente americano e se estudamos a classificação das letras, o conjunto universo é o alfabeto.

## 1.5 RELAÇÃO ENTRE CONJUNTOS

### 1.5.1 OS QUANTIFICADORES

Em relação ao conjunto A = {a, e, i, o, j}, podemos dizer que:

a) qualquer que seja o elemento de A, ela é uma letra do alfabeto da língua portuguesa;

b) existe elemento de A que é uma vogal;

c) existe um único elemento de A que é uma consoante;

d) não existe elemento de A que é letra da palavra guru.

Em Matemática, dispomos de símbolos próprios e universais que representam as afirmações acima. Esses símbolos são denominados quantificadores. São eles:

**Quantificador universal:**

$\forall$ – lê-se qualquer que seja, para todo

**Quantificador existencial:**

$\exists$ – lê-se: existe

$\exists!$ – lê-se: existe um único

$\nexists$ – lê-se: não existe

Colocando-se $x \in A$ ao lado de cada um dos quantificadores, lemos:

- $\forall\, x \in A$: qualquer que seja x pertencente a A ou para todo x pertencente a A;
- $\exists\, x \in A$: existe x pertencente a A;
- $\exists!\, x \in A$: existe um único x pertencente a A;
- $\nexists\, x \in A$: não existe x pertencente a A.

Então, no exemplo do conjunto A = {a, e, i, o, j}, temos:

a) $\forall\, x \in A \mid x$ é letra do alfabeto da língua portuguesa;

b) $\exists\, x \in A \mid x$ é vogal;

c) $\exists!\, x \in A \mid x$ é consoante;

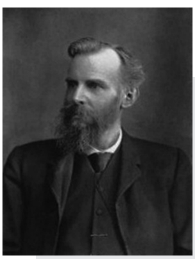
d) $\nexists\, x \in A \mid x$ é letra da palavra guru.

## 1.5.2 RELAÇÃO DE IMPLICAÇÃO E BICONDICIONAL

Outros símbolos importantes em Matemática que utilizamos entre proposições são:

a) $p \Rightarrow q$ – lê-se: p implica q;

b) $p \Leftrightarrow q$ – lê-se: p se, e somente q; ou p é equivalente a q.



John Venn, matemático inglês, desenvolveu os diagramas para representar conjuntos, ampliando e formalizando as representações anteriormente desenvolvidas por Leibniz e Euler. Somente na década de 1960, esses conceitos foram incorporados ao currículo escolar de matemática. Foto: http://pt.wikipedia.org/wiki/John_Venn

**JOHN VENN**
***(1834-1923)***

### 1.5.3 DIAGRAMAS

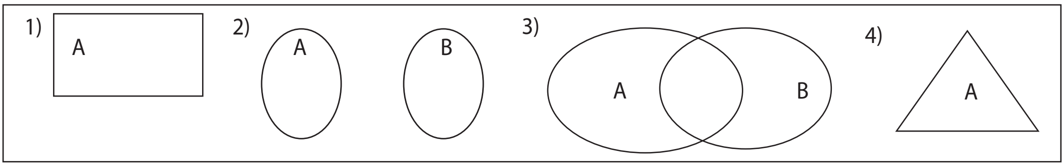
A representação de conjuntos por partes do plano chama-se diagrama. Essa representação tem a vantagem da visualização das propriedades. No caso em que se usam somente círculos, os diagramas são denominados diagramas de Euler ou diagramas de Venn.

Leonhard Euler nasceu na Basileia, Suíça, mas trabalhou a maior parte da sua vida na Academia de Berlim, onde atuou em várias áreas da matemática, mesmo depois de ficar cego de um olho e, posteriormente, do outro. Ele ditava seus trabalhos e, assim, trabalhou até a sua morte, sendo um dos matemáticos que mais escreveu artigos e livros em sua época. Foto: http://whatifoundonthenet.com/leonhard-euler/

**LEONHARD EULER**
*(1707-1783)*

Exemplo:

**E 1.8**




### 1.5.4 SUBCONJUNTO

Um conjunto A é subconjunto de B se, e somente se, todo elemento de A pertence também a B. Com a notação "$A \subset B$" indicamos que "A é subconjunto de B" ou "A está contido em B" e a notação "$B \supset A$" significa "B contém A". Em símbolos temos:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall\ x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

**Observações**

1) O símbolo "$\subset$" é denominado sinal de inclusão;
2) Com a notação "$\not\subset$" indicamos que A não está contido em B.

Exemplo:

**E 1.9**

a) $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$

b) Se L é o conjunto dos losangos e Q é o conjunto dos quadrados, então $Q \subset L$ pois todo quadrado é um losango.

c) $\{x, z\} \not\subset \{x, y, t\}$

***Propriedades:***

Dado um conjunto universo **U**, consideremos três subconjuntos quaisquer A, B e C de **U**:

a) Reflexiva: $A \subset A$;

b) Antissimétrica: $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$;

c) Transitiva: $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

### 1.5.5 IGUALDADE DE CONJUNTOS

Um conjunto A é igual a B se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$. Indicamos a igualdade por $A = B$. Em símbolos temos:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ e } B \subset A)$$

ou

$$A = B \Leftrightarrow (\forall\, x)\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

ou seja, dois conjuntos são iguais se todo elemento do primeiro pertence ao segundo e reciprocamente.

**Observação**

Conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto A. Em símbolos,

$$\varnothing \subset A,\ \forall\, A.$$

De fato, admitamos que a proposição seja falsa, isto é, $\varnothing \not\subset A$. Nesse caso, existe um elemento $x \in \varnothing$ tal que $x \notin A$, o que é um absurdo, pois $\varnothing$ não tem elemento algum. Conclusão: $\varnothing \subset A$ não é falsa, portanto, $\varnothing \subset A$, $\forall\, A$.

### 1.5.6 CONJUNTO DAS PARTES DE UM CONJUNTO

A partir de um conjunto A podemos pensar num novo conjunto cujos elementos são todos os subjconjuntos ou partes de A.

Notação: indicamos esse novo conjunto por $\wp(A)$.

$$\wp(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

Exemplo:

**E 1.10**

Seja o conjunto $A = \{a, b\}$, logo $\wp(A) = \wp(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Observemos a relação entre o número de elementos de A e o número de elementos de $\wp(A)$. Denominaremos por $n(A)$ o número de elementos de A.

a) $A = \varnothing$; $n(A) = 0$.
$\wp(A) = \{\varnothing\}$; $n(\wp(A)) = 1$.

b) $A = \{a\}$; $n(A) = 1$.

$\wp(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$; $n(\wp(A)) = 2$.

c) $A = \{a, b\}$; $n(A) = 2$.

$\wp(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$; $n(\wp(A)) = 4$.

d) $A = \{a, b, c\}$; $n(A) = 3$.

$\wp(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$; $n(\wp(A)) = 8$.

Pelos exemplos dados, intui-se que se A tem n elementos, então $n(\wp(A)) = 2^n$. De fato,

a) $n(\wp(\varnothing)) = 1 = 2^0$;

b) $n(\wp(\{a\})) = 2 = 2^1$;

c) $n(\wp(\{a,b\})) = 4 = 2^2$;

d) $n(\wp(\{a, b, c\})) = 8 = 2^3$.

## 1.6 OPERAÇÃO ENTRE CONJUNTOS

Vamos introduzir algumas operações entre conjuntos, admitindo-se que os conjuntos dados são todos parte de um conjunto universo U.

### 1.6.1 REUNIÃO DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B subconjuntos de U, chama-se reunião ou união de A e B ao conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B. Indicamos esse conjunto por $A \cup B$, que se lê "A união B" ou "A reunião B". Em símbolos, temos:

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

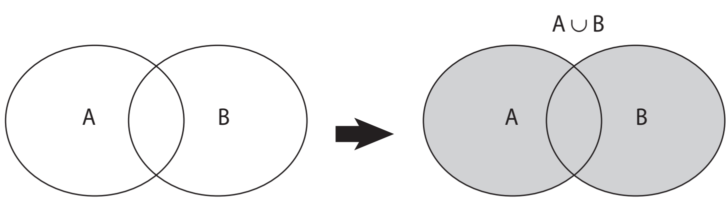
ou

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$$

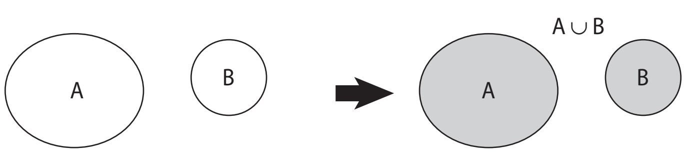
Exemplo:

**E 1.11**

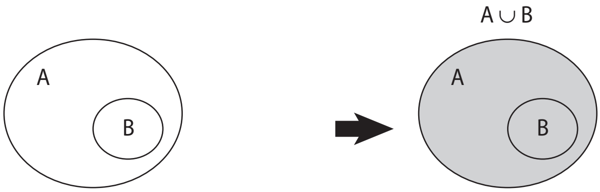
a)




b)



c)




$$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$$

d) $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

### 1.6.2 INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B, subconjuntos de **U**, chama-se interseção de A e B ao conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também a B. Indicamos esse conjunto por $A \cap B$, que se lê “A interseção B” ou “A inter B”. Em símbolos, temos:

$$A \cap B = \{x \in \mathbf{U} / x \in A \text{ e } x \in B\}$$

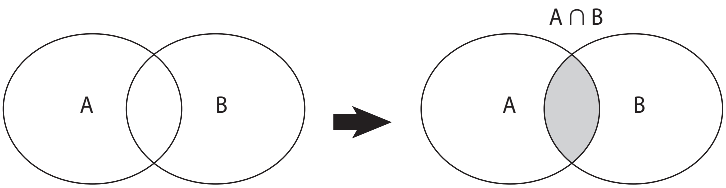
ou

$$A \cap B = \{x \in \mathbf{U} / x \in A \wedge x \in B\}$$

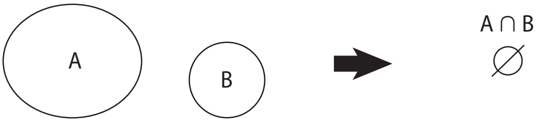
Exemplo:

**E 1.12**

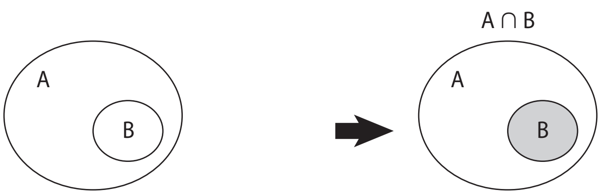
a)




b)




c)




$$B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$$

d) $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{ b, c\}$

### 1.6.3 DIFERENÇA ENTRE CONJUNTOS

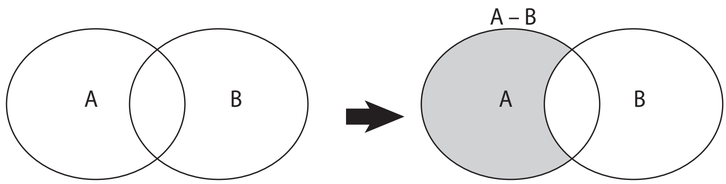
Dados dois conjuntos A e B, subconjuntos de U, chama-se diferença de A e B ao conjunto formado pelos elementos de U que pertencem a A e não pertencem a B. Indicamos esse conjunto por A – B, que se lê “diferença de A por B”. Em símbolos, temos:

$$A - B = \{x \in U / x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

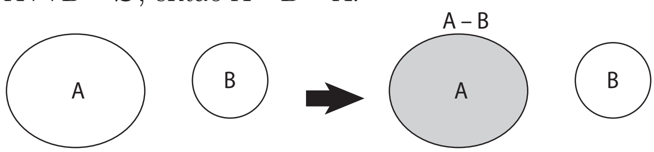
Exemplos:

**E 1.13**

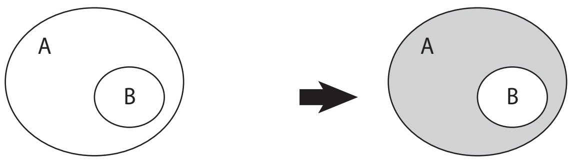
a)



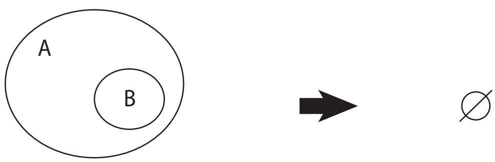

b) Se $A \cap B = \varnothing$, então $A - B = A$:




c) Se $B \subset A$ e $B \neq A$, então $A - B$:




d) Se $B \subset A$ e $B \neq A$, então $B - A = \varnothing$:




e) $\{a, b, c\} - \{b, c, d\} = \{a\}$

**E 1.14**

Sejam U = {letras do alfabeto português do Brasil},

A = {a, b, c, d},

B = {c, d, f, g}

C = {a, e, i o, u}, então:

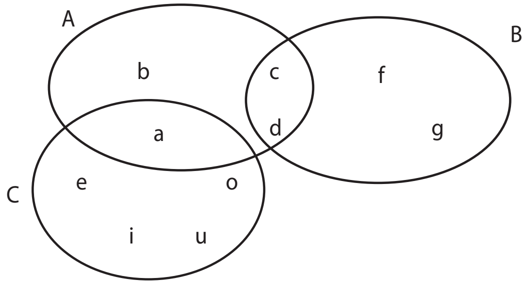
a) $A \cup B = \{a, b, c, d, f, g\}$

b) $A \cap B = \{c, d\}$

c) $B \cap C = \varnothing$

d) $A - C = \{b, c, d\}$

e) Diagrama de Euler-Venn:




## 1.6.4 CONJUNTO COMPLEMENTAR

Dados dois conjuntos A e B, subconjuntos de U, se $B \subset A$, então o conjunto diferença A – B é denominado conjunto complementar de B em relação a A ou complemento de B em A. Indicamos $C_A B$. Em símbolos, temos:

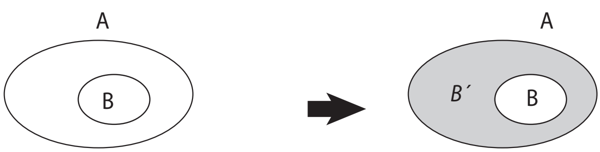
$$B \subset A \Rightarrow C_A B = A - B = \{x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

**Observação**
No caso do complemento em relação ao conjunto universo U, não há necessidade de U ser indicado e, nesse caso, representamos por CB ou $\bar{B}$ logo, $CB = U - B = B' = \bar{B} = B^C$.
A operação para obter $C_A B$ é denominada operação de complementação.

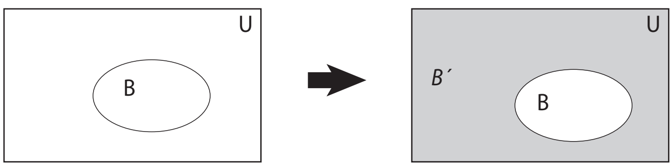
Exemplo:

**E 1.15**

a)




b)




### *1.6.4.1 Propriedades das operações*

Vamos apresentar as seguintes propriedades que podem ser aceitas intuitivamente.

1) **Propriedades da operação de reunião:**

a) comutativa: $A \cup B = B \cup A$

b) associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

c) idempotente: $A \cup A = A$

d) propriedade do conjunto vazio: $A \cup \varnothing = A$

e) propriedade do conjunto universo: $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$

2) Propriedades da operação de interseção:

a) comutativa: $A \cap B = B \cap A$

b) associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c) idempotente: $A \cap A = A$

d) propriedade do conjunto vazio: $A \cap \varnothing = \varnothing$

e) propriedade do conjunto universo: $A \cap \mathbf{U} = A$

3) Propriedades distributivas:

a) da operação de reunião em relação à operação de interseção:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

b) da operação de interseção em relação à operação de reunião:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4) Propriedades da complementação:

a) $(CA) \cap A = \varnothing$ a') $(CA) \cup A = \mathbf{U}$

b) $C\varnothing = \mathbf{U}$ b') $C\mathbf{U} = \varnothing$

c) $C(CA) = A$

5) Propriedades da dualidade – Leis de De Morgan:

a) $C(A \cap B) = (CA) \cup (CB)$

b) $C(A \cup B) = (CA) \cap (CB)$

Augustus De Morgan, embora tenha nascido na Índia, era matemático lógico britânico. Apresentou as leis de De Morgan e foi o primeiro a usar o método de indução matemática para demonstrações de proposições. Ele deu início à lógica matemática como se conhece hoje. Foto: http://pt.wikipedia.org/wiki/Augustus_De_Morgan

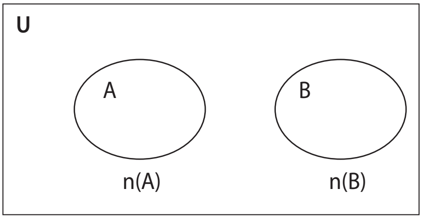
**AUGUSTUS DE MORGAN**

***(1806-1871)***

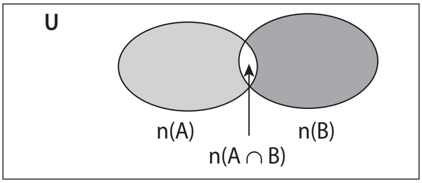
## 1.7 NÚMERO DE ELEMENTOS DE UM CONJUNTO FINITO

Representamos o número de elementos de um conjunto finito A por n(A). Podem ser verificadas, de maneira intuitiva, pelo diagrama de Venn-Euler, as seguintes igualdades.

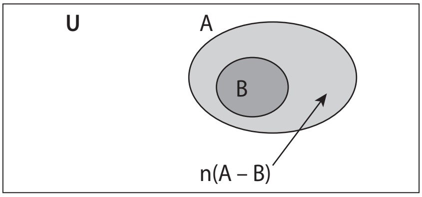
1) Se $A \cap B = \varnothing$ (A e B disjuntos), então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$:




2) Se $A \cap B \neq \varnothing$, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$:




3) Se $B \subset A$, então $n(A - B) = n(A) - n(B)$:

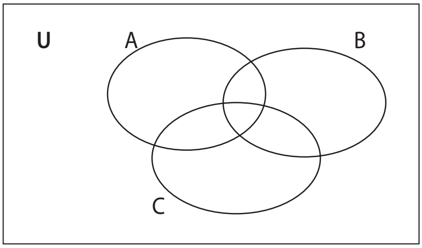



## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**R 1.1** Dados os conjuntos A, B e C, representados a seguir pelo diagrama de Venn-Euler, destaque no diagrama a solução para as expressões:

a) $(A \cup B) \cap C$

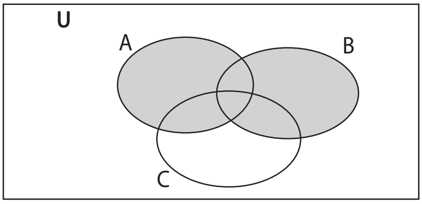
b) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$



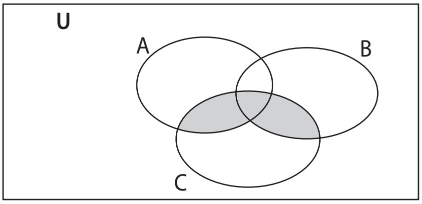

*Resolução:*

a)

1º) $A \cup B$

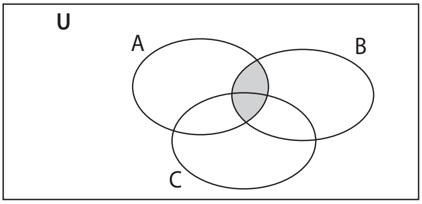



2º) $(A \cup B) \cap C$

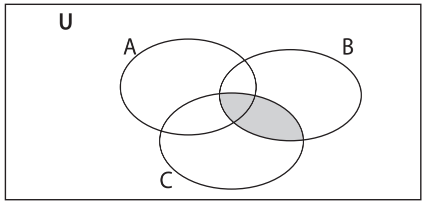


b)

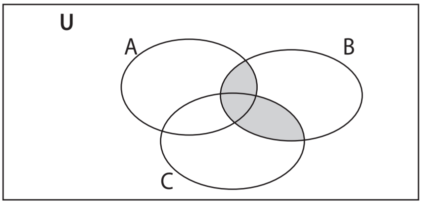
1º) $(A \cap B)$




2º) $(B \cap C)$



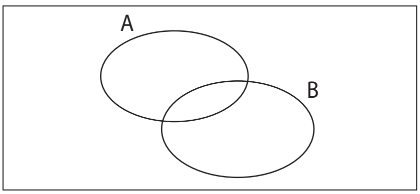

3º) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$



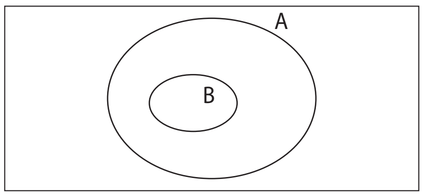

---

**R 1.2** Dados os diagramas a seguir, hachure $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$

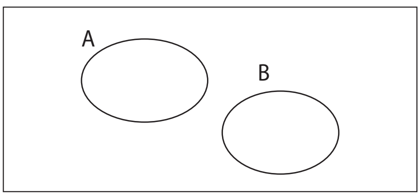
a)




b)



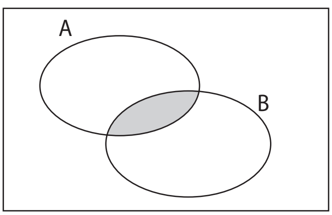

c)



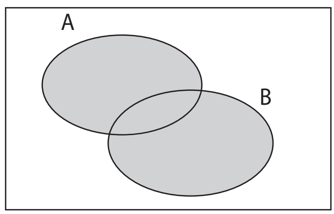

*Resolução:*

a)

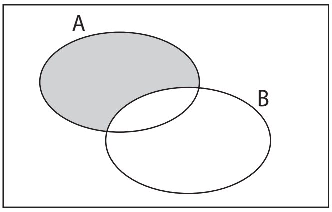
1º) $A \cap B$




2º) $A \cup B$

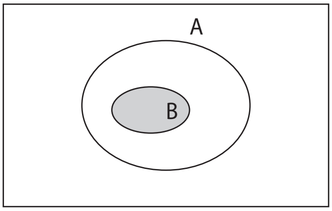


3º) A – B

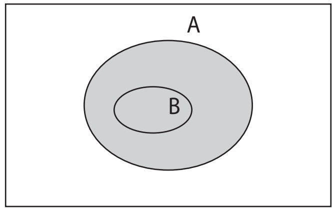



b)

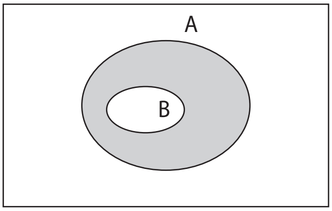
1º) $A \cap B$




2º) $A \cup B$



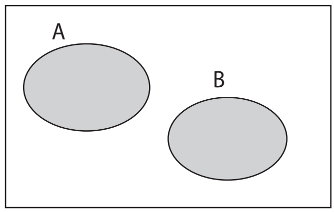

3º) A – B



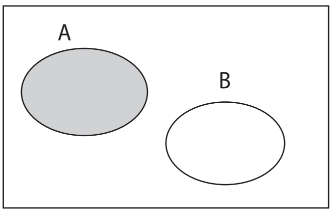

c)

1º) $A \cap B$ $\varnothing$

2º) $A \cup B$




3º) A – B




---

**R 1.3** Dados os conjuntos A = {a, b, c}, B = {a, b, d, e} e C = {b, c, d}, determinar:

a) $A \cap B$

b) $A \cap C$

c) $B \cap C$

d) $A \cap B \cap C$

*Resolução:*

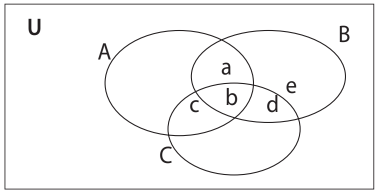
a) $A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{a, b, d, e\} = \{a, b\}$

b) $A \cap C = \{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}$

c) $B \cap C = \{a, b, d, e\} \cap \{b, c, d\} = \{b, d\}$

d) $A \cap B \cap C = \{a, b, c\} \cap \{a, b, d, e\} \cap \{b, c, d\} = \{b\}$

Representando em diagrama, temos




---

**R 1.4** Denominamos diferença simétrica dos conjuntos A e B, ao conjunto AΔB (lê-se "A delta B"), dado por: $A\Delta B = \left(A - B\right) \cup (B - A)$

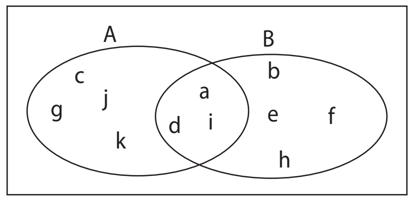
Dados A = {a, c, d, g, i, j, k} e B = {a, b, d, e, f, h, i}, determine AΔB.

*Resolução:*

Pelo diagrama de Venn-Euler,

A – B = {c, g, j, k} e B – A = {b, e, f, h}. Então, AΔB = {b, c, e, f, g, h, j, k}

*Resposta*: AΔB = {b, c, e, f, g, h, j, k}



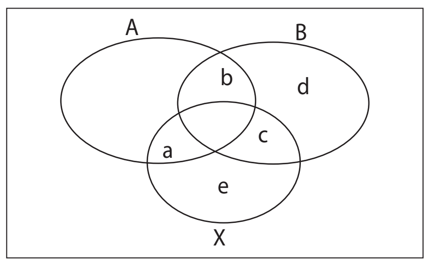

---

**R 1.5** Dados os conjuntos A = {a, b} e B = {b, c, d}, determine o conjunto X tal que $A \cap X = \{a\}$, $B \cap X = \{c\}$ e $A \cup B \cup X = \{a, b, c, d, e\}$.

*Resolução:*

De A = {a, b} e $A \cap X = \{a\}$, observamos que $b \notin X$; de B = {b, c, d} e $B \cap X = \{c\}$, segue que $c \in X$, $b \notin X$ e $d \notin X$; e de $A \cup B \cup X = \{a, b, c, d, e\}$, temos que $e \notin A$ e $e \notin B$, o que segue que $e \in X$. Logo, em diagrama, temos:

*Resposta:* X = {a, c, e}.




---

**R 1.6** Em uma classe de alunos, 28 jogam futebol, 12 jogam voleibol e 8 jogam futebol e voleibol. Quantos alunos há nessa classe?

*Resolução:*

Vamos chamar de:

F = conjunto dos alunos que jogam futebol

V = conjunto dos alunos que jogam voleibol

M = conjunto dos alunos que jogam futebol e voleibol

Então, pelo enunciado do problema, $n(F) = 28$ e $n(V) = 12$ e $n(F \cap V) = 8$, temos:

$n(F \cup V) = n(F) + n(V) - n(F \cap V) = 28 + 12 - 8 = 32$.

*Resposta:* Nessa classe há 32 alunos.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**P 1.1** Ilustre com os diagramas de Venn-Euler os conjuntos A, B e C, satisfazendo as condições dadas em cada caso:

a) $A \subset (B \cap C)$.

b) $A \subset B$, $A \cap C = \varnothing$ e $C - B \neq \varnothing$.

**P 1.2** Dados $A \cap B = \{2, 3, 8\}$, $A \cap C = \{2, 7\}$, $B \cap C = \{2, 5, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, determine o conjunto C.

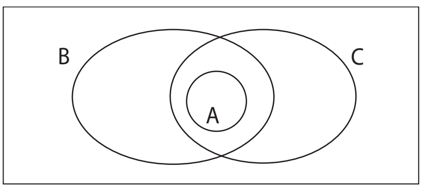
**P 1.3** Um conjunto A tem 13 elementos, $A \cap B$ tem 8 elementos e $A \cup B$ tem 15 elementos. Quantos elementos tem o conjunto B?

**P 1.4** O conjunto B tem 52 elementos, $A \cap B$ tem 12 elementos e $A \cup B$ tem 60 elementos, então determinar o número de elementos do conjunto A.

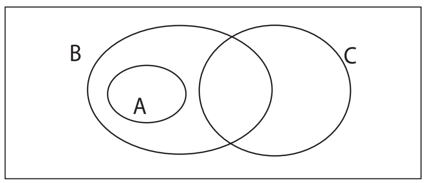
## RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**P 1.1**

a)




b)




**P 1.2** $C = \{2, 5, 6, 7, 9\}$

**P 1.3** O conjunto B tem 10 elementos.

**P 1.4** O conjunto A tem 20 elementos.