



# FÍSICA

com Aplicação Tecnológica

*Oscilações, Ondas,  
Fluidos e Termodinâmica* | **Volume 2**

**Dirceu D'Alkmin Telles  
João Mongelli Netto**

**Organizadores**

**Blucher**

**FAT** FUNDAÇÃO  
DE APOIO À  
TECNOLOGIA

# FÍSICA

com Aplicação Tecnológica

*Oscilações, Ondas, Fluidos* | Volume 2  
*e Termodinâmica*

**Blucher**

DIRCEU D'ALKMIN TELLES

JOÃO MONGELLI NETTO

Organizadores

# FÍSICA

com Aplicação Tecnológica

*Oscilações, Ondas, Fluidos  
e Termodinâmica* | Volume 2

Física com aplicação tecnológica – edição coordenada por Dirceu D’Alkmin Telles/João Mongelli Netto  
© 2013 Volume 2 – Oscilações, ondas, fluidos e termodinâmica – Organizador: João Mongelli Netto  
Direitos reservados para Editora Edgard Blücher Ltda.  
Capa: Alba Mancini – Mexerica Design

# Blucher

---

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar  
04531-012 – São Paulo – SP – Brasil  
Tel.: 55 11 3078-5366  
**contato@blucher.com.br**  
**www.blucher.com.br**

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme  
5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua  
Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras,  
março de 2009

É proibida a reprodução total ou parcial por  
quaisquer meios, sem autorização escrita da  
Editora.

---

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard  
Blücher Ltda.

## Ficha Catalográfica

---

Física com aplicação tecnológica – v. 2 /  
organização de Dirceu D’Alkmin Telles, João  
Mongelli Netto. – São Paulo: Blucher, 2013.

Vários autores

ISBN 978-85-212-0755-9

1. Física I. Telles, Dirceu D’Alkmin II. Mongelli  
Netto, João

13-0336

CDD 530

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Física

## APRESENTAÇÃO

A publicação de uma obra como *Física com Aplicação Tecnológica* representa uma oportunidade de contribuir para a transferência e a difusão do conhecimento científico e tecnológico, possibilitando assim a democratização do conhecimento. Nós, da Fundação FAT – Fundação de Apoio à Tecnologia –, sentimos muito honrados em participar na divulgação desta obra. Ações como esta se adequam aos objetivos estabelecidos pela Fundação de Apoio à Tecnologia, criada em 1987, por um grupo de professores da Faculdade de Tecnologia de São Paulo – FATEC-SP.

A Fundação FAT, que nasceu com o objetivo básico de ser um elo entre o setor produtivo e o ambiente acadêmico, parabeniza os autores pelo excelente trabalho.

Ações como essa se unem ao conjunto de outras que a Fundação FAT oferece, como assessorias especializadas, cursos, treinamentos em diversos níveis, consultorias e concursos para toda a comunidade. Essas ações são direcionadas tanto às Instituições públicas como privadas.

A obra *Física com Aplicação Tecnológica, Volume 2: Oscilações, Ondas, Fluidos e Termodinâmica*, que abrange as teorias da Física e suas aplicações tecnológicas, será fundamental para o desenvolvimento acadêmico de alunos e professores dos cursos superiores de Tecnologia, Engenharia, Bacharelado em Física e para estudiosos da área.

No processo de elaboração da obra, os autores tiveram o cuidado de incluir textos, ilustrações e orientações para solução de exercícios. Isso faz com que a obra possa ser considerada ferramenta de aprendizado bastante completa e eficiente.

A cidadania é promovida visando à conscientização social, a partir do esforço das instituições em prol da difusão do conhecimento.

*Professor César Silva*

Presidente da Fundação FAT – Fundação de Apoio à Tecnologia  
[www.fundacaofat.org.br](http://www.fundacaofat.org.br)



## PREFÁCIO

Os docentes de Física do Departamento de Ensino Geral da FATEC-SP, sob a coordenação do Prof. João Mongelli Netto e Prof. Dr. Dirceu D'Alkmin Telles, lançam, em continuidade ao trabalho iniciado anteriormente, o livro *Física com Aplicação Tecnológica, Volume 2: Oscilações, Ondas, Fluidos e Termodinâmica*.

Destinado a alunos e professores dos cursos superiores de Tecnologia, Engenharia, Bacharelado em Física e estudiosos da área, o presente volume apresenta às comunidades acadêmicas tópicos de Oscilações, Ondas, Fluidos e Termodinâmica, por meio de teorias, aplicações tecnológicas, exercícios resolvidos e propostos.

Gostaria de parabenizar a todos que contribuíram para a concretização de mais um volume, que, seguramente, terá valor inestimável para as Instituições de Ensino Superior do país.

*Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Luciana Reyes Pires Kassab*

Diretora da FATEC-SP



## **SOBRE OS AUTORES**

### **JUAN CARLOS RAMIREZ MITTANI**

Graduado em Física pela Universidade Nacional de San Agustín (Arequipa – Perú). Mestre e Doutor pela Universidade de São Paulo. Pós-doutorado na USP e na Universidade de Oklahoma (Estados Unidos). Atualmente é professor da Faculdade de Tecnologia de São Paulo e realiza pesquisas na área de Datação e Dosimetria, usando técnicas de luminescência.

juan@fatecsp.br

### **JOÃO MONGELLI NETTO**

Licenciado em Física pela Universidade de São Paulo. Autor de *Física Básica*, pela Editora Cultrix: vol. 1 Mecânica; vol.2 Hidrostática, Termologia e Óptica; coautor de *Física Geral – curso superior* – Mecânica da Partícula e do Sólido, sob coordenação do Professor Tore Johnson. Leciona atualmente essa disciplina na Faculdade de Tecnologia de São Paulo.

mongelli@fatecsp.br; vestibular@centropaulasouza.sp.gov.br

### **DIRCEU D'ALKMIN TELLES**

Engenheiro, Mestre e Doutor em Engenharia Civil – Escola Politécnica – USP. Consultor nas áreas de Irrigação e de Recursos Hídricos. Professor do Programa de Pós-Graduação da Escola Politécnica – USP e Ceeteps. Coordenador e Professor do Curso de Especialização da FATEC-SP. Organizou e escreveu livros e capítulos nas seguintes áreas: reúso da água, agricultura irrigada, aproveitamento de esgotos sanitários em irrigação, elaboração de projetos de irrigação, ciclo ambiental da água e física com aplicação tecnológica. Atua como colaborador da Fundação FAT.

dirceu.telles@fatgestao.org.br; datelles@fatecsp.br

**MANUEL VENCESLAU CANTÉ**

Bacharel e Mestre em Física pela Unicamp. Doutor em Engenharia de Materiais e Processos de Fabricação pela Unicamp. Tem experiência em ensino de Física, tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior. Atualmente, é professor associado da Faculdade de Tecnologia da Zona Leste, no Curso de Polímeros.

mvcante@terra.com.br

**EDUARDO ACEDO BARBOSA**

Bacharel em Física pelo Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Mestre em Física pela Unicamp. Doutor em Tecnologia Nuclear pelo IPEN. Professor e pesquisador da Faculdade de Tecnologia de São Paulo na área de Lasers, Holografia e Metrologia óptica.

ebarbosa@fatecsp.br

**FRANCISCO TADEU DEGASPERI**

Bacharel em Física pelo Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Mestre e Doutor pela Feec – Unicamp. Trabalhou por 24 anos no Ifusp e trabalha em tempo integral na Faculdade de Tecnologia de São Paulo, desde 2000. Montou e, atualmente, coordena o Laboratório de Tecnologia do Vácuo da FATEC-SP. Realiza trabalhos acadêmicos e industriais, desenvolvendo Processos, Metrologia e Instrumentação na área de Vácuo.

ftd@fatecsp.br

**LUCIANA KAZUMI HANAMOTO**

Bacharel em Física pela Universidade de São Paulo. Doutora em Física do Estado Sólido pela Universidade de São Paulo. Professora associada na Faculdade de Tecnologia de São Paulo.

## CONTEÚDO

Volume 2

Capítulo 1	ELASTICIDADE E OSCILAÇÕES	13
Capítulo 2	ONDAS	67
Capítulo 3	FLUIDOS	123
Capítulo 4	TEMPERATURA E DILATAÇÃO	177
Capítulo 5	CALORIMETRIA E TRANSFERÊNCIA DE CALOR	193
Capítulo 6	A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA	235
Capítulo 7	A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA E TEORIA CINÉTICA DOS GASES	295
	BIBLIOGRAFIA GERAL	349



# 1

# ELASTICIDADE E OSCILAÇÕES

Juan Carlos Ramirez Mittani

## 1.1 ELASTICIDADE

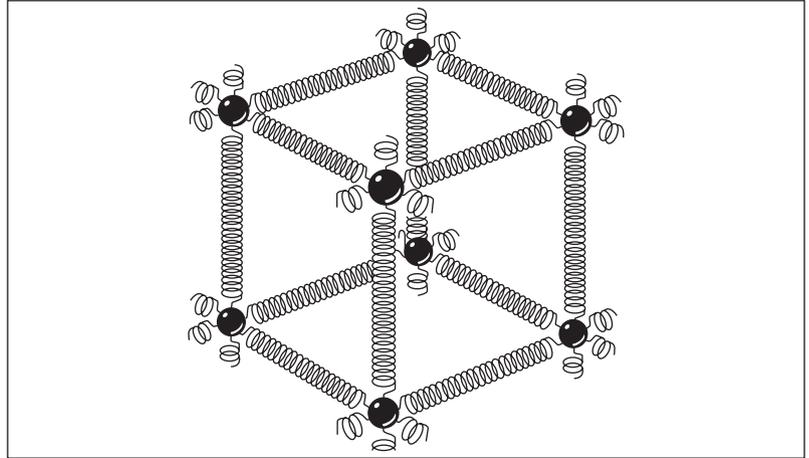
### 1.1.1 INTRODUÇÃO

Até agora, a maioria dos casos envolvendo a ação de forças sobre corpos têm se concentrado sobre os chamados **corpos rígidos**, isto é, corpos ideais não deformáveis, o que, na realidade, é uma simples ilusão. Os sólidos são formados por átomos, os quais não se encontram em contato rígido ou não têm superfícies duras que possam se compactar apertadamente. A nuvem eletrônica dos átomos pode ser moldada ou deformada por forças externas.

Em um sólido, os átomos são unidos por forças cujo comportamento é muito parecido com as forças exercidas por molas. A Figura 1.1 mostra a representação de uma pequena parte de um arranjo regular dos átomos. Nela podemos observar que cada átomo encontra-se em equilíbrio sob a influência de seis molas, todas com constante elástica  $k$  muito grande, sendo necessária, assim, uma grande força para tirar os átomos da posição de equilíbrio. Em decorrência disso se dá a ideia de rigidez. Em materiais menos rígidos os valores dessas constantes elásticas são menores, por exemplo, na borracha, na qual pequenas forças são suficientes para mudar a posição dos átomos.

Todo corpo sólido é deformável até certo ponto, isto é, podemos mudar suas dimensões ligeiramente ao esticá-lo, comprimi-lo ou torcê-lo, e alguns corpos sofrem uma deformação

Figura 1.1

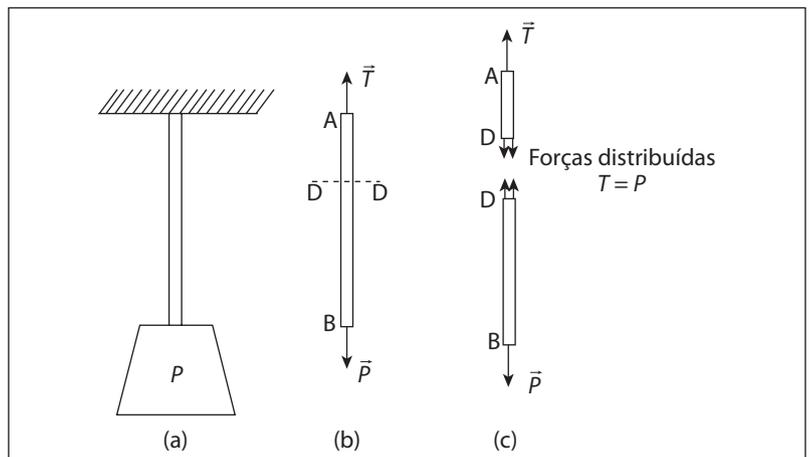


maior que a de outros. Uma vez que a força aplicada deixa de atuar, e desde que esta não exceda certo limite (força de ruptura  $F_r$ ), alguns corpos recuperam sua forma primitiva, enquanto outros não.

Os primeiros são chamados corpos elásticos, enquanto os outros, corpos plásticos. No presente capítulo, nos concentraremos no estudo dos primeiros, lembrando que corpos elásticos puros não existem.

Se, em um fio metálico AB, de peso desprezível, suspendermos um peso  $P$ , como mostrado na Figura 1.2a, o diagrama de corpo livre do sistema mostra que o fio se encontra submetido a forças de tração (Figura 1.2b). Se o fio não se rompe, é porque, no seu interior, se desenvolvem tensões, originadas pelas forças de interação molecular, que mantêm as secções transversais do fio unidas, isto é, se DD é uma das secções transversais (Figura

Figura 1.2



1.2c), a parte superior AD puxará a inferior DB com a mesma intensidade com que DB puxará a parte superior AD. As forças internas  $T$ , iguais e opostas, são capazes de equilibrar a força externa  $P$  ( $T = P$ ).

De maneira similar, se, sobre uma barra vertical, aplicamos um peso  $P$  na parte superior (Figura 1.3a), a barra se encontrará submetida a uma compressão (Figura 1.3b). Da mesma maneira que no caso anterior, na parte interna da barra também se desenvolvem forças de compressão  $C$  capazes de equilibrar a força externa  $P$  ( $C = P$ ) (Figura 1.3c).

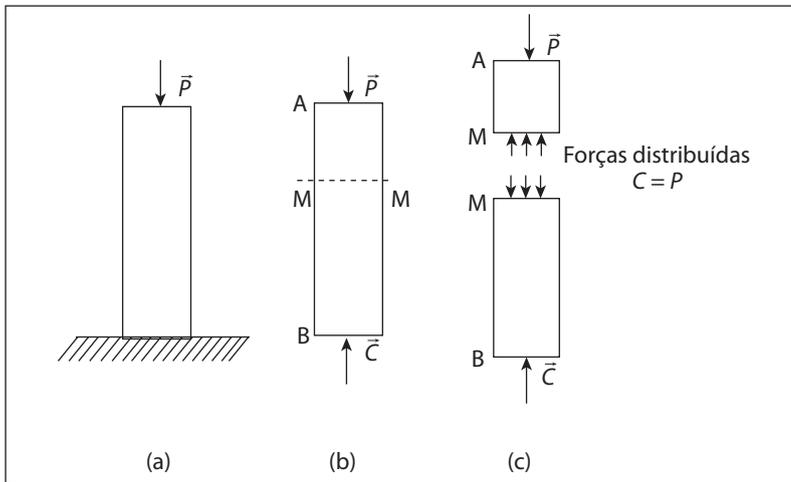


Figura 1.3

Concluindo, uma tensão de tração ou de compressão aplicada em um corpo provoca mudanças nas dimensões físicas desse corpo. Na continuação, estudaremos mais detalhadamente a relação que existe entre as mudanças físicas e as forças aplicadas.

### 1.1.2 LEI DE HOOKE

Robert Hooke (1635-1703), contemporâneo de Newton, foi o primeiro a descobrir a relação existente entre a variação do comprimento  $\Delta x$  experimentado por um fio e a força  $F$  a que está submetida. Ele observou que a variação de comprimento era linearmente proporcional à força aplicada.

A lei de Hooke se escreve  $F = k \Delta x$ , onde a constante de proporcionalidade  $k$  depende do material e das dimensões do fio.

Cabe lembrar que a lei de Hooke também é válida para compressões e aplica-se muito bem às molas.

### 1.1.3 LIMITE DA ELASTICIDADE E PONTO DE RUPTURA

Se, por meios mecânicos adequados, submetermos um tarugo metálico a uma tração de maneira contínua e crescente, medindo a força  $F$  aplicada e a variação de comprimento  $\Delta x$  em intervalos convenientes, o gráfico de  $\Delta x$  em função de  $F$  nos mostrará duas regiões muito bem diferenciadas (Figura 1.4).

- De O até A temos uma região que corresponde a uma elongação da ordem de 1% do comprimento inicial ( $L_0$ ) e a relação entre  $\Delta x$  e  $F$  é linear, obedecendo à lei de Hooke.

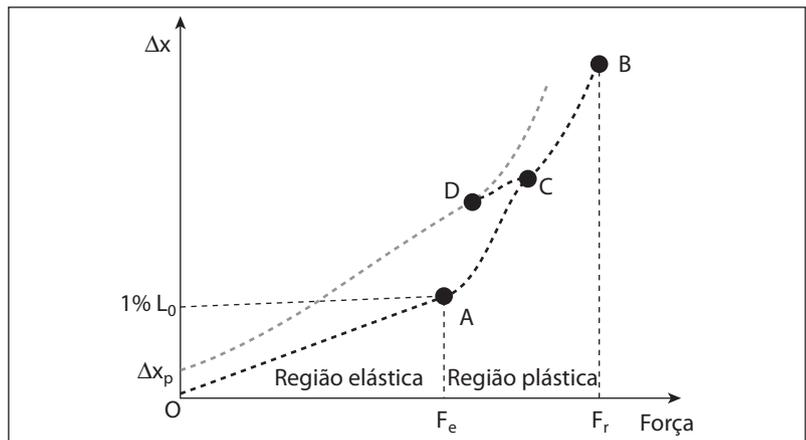
Diz-se que o tarugo se encontra na **região elástica**, submetido a forças  $F \leq F_e$ . Se a força diminuir paulatinamente até se anular, o tarugo também voltará ao seu comprimento inicial.

- De A até B a elongação não é mais proporcional à força aplicada. Observa-se uma alteração dimensional visível no tarugo, isto é, uma diminuição do diâmetro em alguma região.

Diz-se que o tarugo se encontra em uma região plástica com forças atuando entre os intervalos  $F_e < F < F_r$ . Uma diminuição paulatina de  $F$  a partir de qualquer ponto dessa região, o ponto C, por exemplo, ocasionará uma diminuição na elongação do tarugo, seguindo a curva de recuo ao longo de CD, de maneira que, quando a força se anula, o tarugo não volta ao seu estado original, ficando deformado permanentemente com uma elongação  $\Delta x_p$ .

- Se, a partir do ponto D da trajetória de regresso, voltamos a aumentar a força, outra curva será obtida.

Figura 1.4



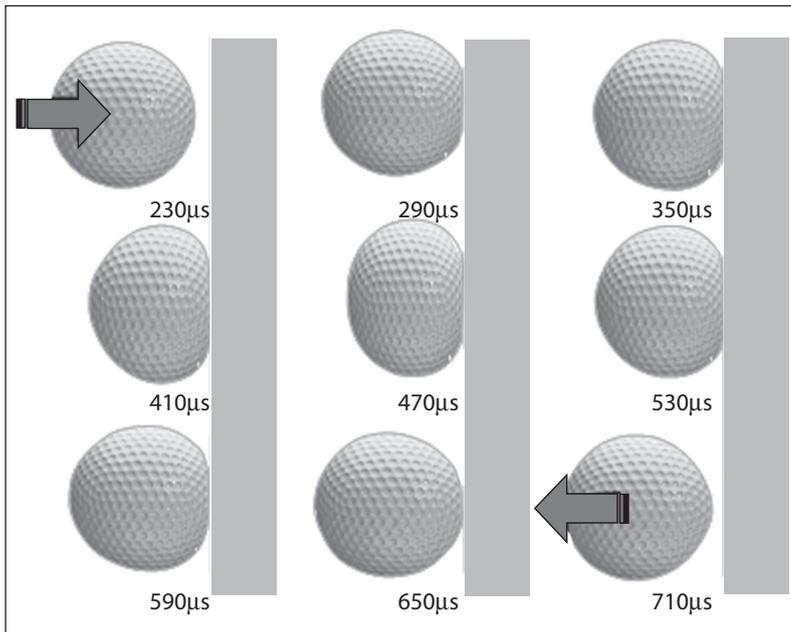
Em resumo, dentro da região plástica não existe mais um único valor de  $\Delta x$  para cada valor de  $F$ . O valor de  $\Delta x$  dependerá do tratamento anterior a que foi submetido o material. Um fenômeno desta natureza, no qual o valor de uma grandeza física depende da história anterior, denomina-se histerese.

Para forças de módulo superior a  $F_r$ , uma vez atingida a deformação indicada pelo ponto B, o tarugo se rompe.

### 1.1.4 DEFORMAÇÕES

Um corpo extenso pode ser deformado de várias maneiras. Por exemplo, uma bola de golfe, quando golpeada por um taco, se comprime até adquirir qualquer forma rara imaginável (Figura 1.5). Se analisarmos a deformação de um ponto de vista microscópico, isto é, analisando pequenas porções (volume infinitesimal  $dV$ ) da bola, observaremos que estas experimentam três tipos básicos de deformações:

- variação do volume sem alterar sua forma;
- variação da forma sem alterar seu volume;
- variação de ambas as características.



**Figura 1.5**

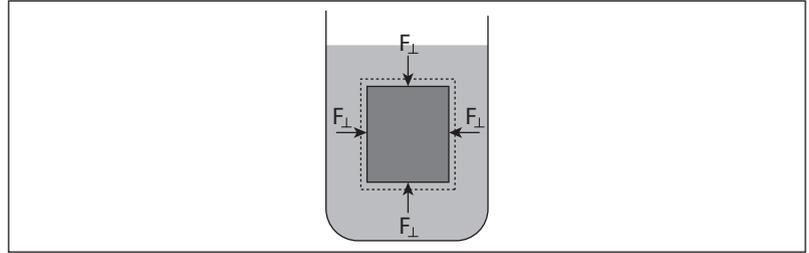
Deformação de uma bola de golfe, ao chocar-se com um obstáculo rígido.

Analisemos cada um dos casos, em separado:

- a) Imaginemos um pequeno cubo submerso numa massa líquida, como mostrado na Figura 1.6. Devido à pressão do líquido, o cubo é submetido a forças perpendiculares  $F_{\perp}$  em cada face, causando uma diminuição do volume, porém, mantendo sua forma cúbica. Se o volume inicial (fora do líquido) é  $V_o$  e o final (dentro do líquido)  $V_f$ , a variação do volume do cubo será  $\Delta V = V_f - V_o$ . Nesse caso,  $\Delta V$  é uma boa aproximação da medida da deformação, embora seja mais conveniente considerar a variação relativa do volume, que denominaremos de deformação volumétrica por compressão hidráulica.

$$\frac{\Delta V}{V_o} = \beta \quad (1.1)$$

Figura 1.6

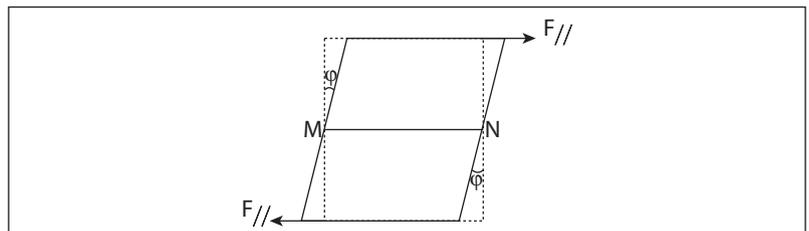


- b) Se, no lugar de submergir o cubo em um líquido, aplicarmos duas forças paralelas  $F_{//}$ , atuando em sentidos contrários sobre superfícies opostas, o cubo sofrerá uma deformação, como mostrado na Figura 1.7.

Nesse caso, o cubo se deforma, porém, mantendo seu volume inicial. As laterais formam um ângulo  $\varphi$  com a vertical.

Esse tipo de deformação recebe o nome de cisalhamento. Cada plano horizontal do cubo sofre um deslocamento, seja no lado direito ou esquerdo, com referência no plano de tensão MN. Podemos medir o cisalhamento por meio do ângulo  $\varphi$ .

Figura 1.7



Se o cubo permanece fixo na parte inferior (base) e aplicamos uma força  $F_{//}$  na parte superior do cubo (Figura 1.8), obteremos resultados análogos ao caso anterior.

Como  $\varphi$  é um ângulo muito pequeno, seu valor em radianos coincide com o valor da sua tangente trigonométrica. Sendo assim, a deformação por cisalhamento será:

$$\varphi = \tan \varphi = \frac{\Delta x}{h}$$

Onde  $\Delta x$  representa o deslocamento do lado superior do cubo e  $h$  a altura.

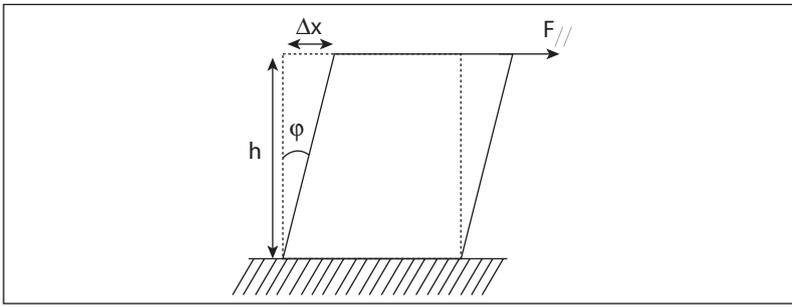


Figura 1.8

- c) Se um tarugo metálico é submetido a uma força de tração ao longo do seu eixo longitudinal, o efeito será a elongação do tarugo e uma diminuição da sua secção transversal (Figura 1.9). Nesse caso, o corpo varia tanto o seu volume quanto a sua forma. Embora continue sendo um cilindro, suas dimensões são modificadas de modo que

$$\frac{L}{r} \neq \frac{L_0}{r_0}$$

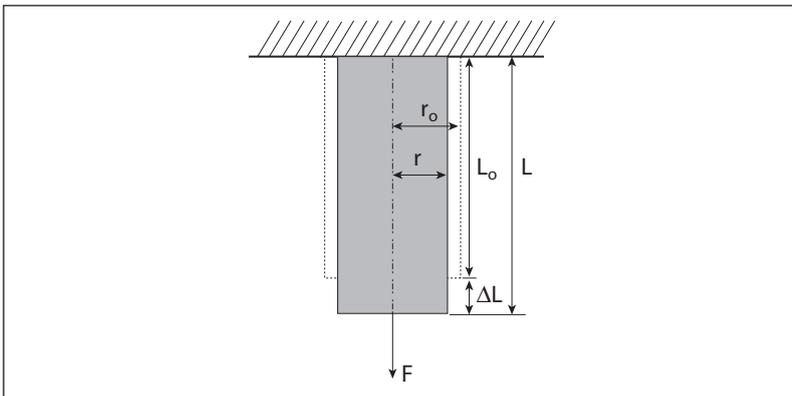


Figura 1.9

Como o alongamento longitudinal  $\Delta L$  é mais notório, então, definimos a deformação por tração como:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1.2)$$

Caso o tarugo metálico seja comprimido ao longo do eixo longitudinal, nesse caso, observaremos uma diminuição no comprimento do tarugo e um incremento na secção transversal. As definições feitas anteriormente permanecem vigentes para este novo caso.

### 1.1.5 TENSÃO

Definimos três tipos de deformação: volumétrica, por cisalhamento e por tração/compressão. Agora, consideraremos as tensões que as produzem.

Entendemos por tensão, não a força aplicada diretamente no corpo, mas sim, o resultado da força aplicada sobre uma unidade de área da secção transversal do corpo.

Assim definimos:

a) **Tensão hidráulica:**

É a pressão que o fluido exerce sobre o corpo imerso nele.

$$p = \frac{F_{\perp}}{A} \quad (1.3)$$

b) **Tensão por cisalhamento:**

É a tensão que atua na direção tangencial à área da secção transversal do corpo. Essa tensão também é chamada de tensão tangencial ou cisalhante e é representada pela letra grega tau ( $\tau$ ).

$$\tau = \frac{F_{\parallel}}{A} \quad (1.4)$$

c) **Tensão por tração ou compressão longitudinal:**

É a tensão que ocorre na direção normal (perpendicular) à área da secção transversal e é chamada também de tensão normal. Esse tipo de tensão é representado pela letra grega sigma ( $\sigma$ ).

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.5)$$

Enquanto as deformações são adimensionais, as tensões têm a dimensão da pressão

$$[Tensão] = \frac{[Força]}{[Área]}$$

e sua unidade no S. I. é

$$\frac{N}{m^2} = \text{Pa (pascal)}$$

### 1.1.6 MÓDULOS DE ELASTICIDADE

A lei de Hooke, tratada anteriormente pode ser enunciada, de uma maneira geral, como:

“Em todo corpo elástico, a tensão é diretamente proporcional à deformação”

$$tensão = constante \cdot deformação$$

onde a constante é o módulo elástico.

A constante independe da forma ou da dimensão e só depende do material do qual o corpo é constituído.

#### a) Módulo de compressão

$$M = \frac{Tensão\ hidráulica}{Deformação\ volumétrica} = -\frac{p}{\beta} = -\frac{p}{\Delta V / V_o} \quad (1.6)$$

O sinal negativo é adicionado para que o módulo resulte em um valor positivo, já que,  $\Delta p = p_f - p_o$  tem sinal oposto a  $\Delta V = V_f - V_o$ .

É bastante comum o uso do coeficiente de compressibilidade  $k$  definido como o inverso do módulo de compressão

$$k = \frac{1}{M} = -\frac{\Delta V}{V_o p} \quad (1.7)$$

#### b) Módulo de cisalhamento

$$G = \frac{Tensão\ por\ cisalhamento}{Deformação\ por\ cisalhamento} = \frac{\tau}{\phi} = \frac{\frac{F_{||}}{A}}{\frac{\Delta x}{h}} \quad (1.8)$$

## c) Módulo de Young

$$E = \frac{\text{Tensão longitudinal (tração ou compressão)}}{\text{Deformação por tração}} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} \quad (1.9)$$

A dimensão dos módulos elásticos coincide com a dimensão da tensão, tendo, assim, as mesmas unidades.

A Tabela 1.1 mostra os valores aproximados dos três módulos elásticos para alguns materiais.

Tabela 1.1

Material	Compressão – M (GPa)	Cisalhamento – G (GPa)	Young – E (GPa)
Alumínio	70	30	70
Latão	61	36	91
Cobre	140	44	110
Ferro	90	40	100
Aço	160	84	200
Chumbo	8	6	16
Tungstênio	200	150	390
Vidro	31	23	55
Concreto	–	–	30
Diamante	540	450	1.120
Gelo	8	3	14
Ossos	-	80	15*
Água	2,2	0	0
Mercúrio	28	0	0
Ar (pressão normal)	0,0001	0	0

\* Em compressão.

Os módulos de cisalhamento e de Young são nulos para todos os líquidos e gases.

## 1.2 OSCILAÇÕES

### 1.2.1 INTRODUÇÃO

Seja um sistema em equilíbrio estável. Se o perturbarmos ligeiramente de seu ponto de equilíbrio, o sistema realizará oscilações em torno desse ponto. As oscilações têm a característica

de serem periódicas, isto é, para intervalos de tempo iguais, de valor  $T$ , repetem-se as características cinéticas e dinâmicas do sistema. O tempo  $T$  recebe o nome de período de oscilação.

Devemos diferenciar o movimento oscilatório do movimento ondulatório, embora ambos estejam relacionados. Por exemplo, o som de um violão é produzido pelas vibrações ou oscilações da corda do instrumento. Nesse caso, as cordas oscilam em torno de sua posição de equilíbrio. Já as ondas sonoras são perturbações das moléculas de ar devidas às oscilações da corda, e se propagam no espaço, afastando-se do ponto em que foram produzidas.

### **Movimento periódico**

Denomina-se movimento periódico qualquer movimento que se repete em intervalos regulares de tempo. Por exemplo, as vibrações das cordas de algum instrumento musical, as contrações do coração, o movimento de um pêndulo etc.

### **Movimento harmônico**

Corresponde ao caso particular em que o movimento periódico pode ser representado matematicamente por meio de uma série de senos e cossenos (série de Fourier). Por exemplo, se o movimento acontece em uma dimensão, podemos representá-lo como:

$$x(t) = A_1 \text{sen}(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) + A_2 \text{sen}(2\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) + A_3 \text{sen}(3\omega t) + \dots$$

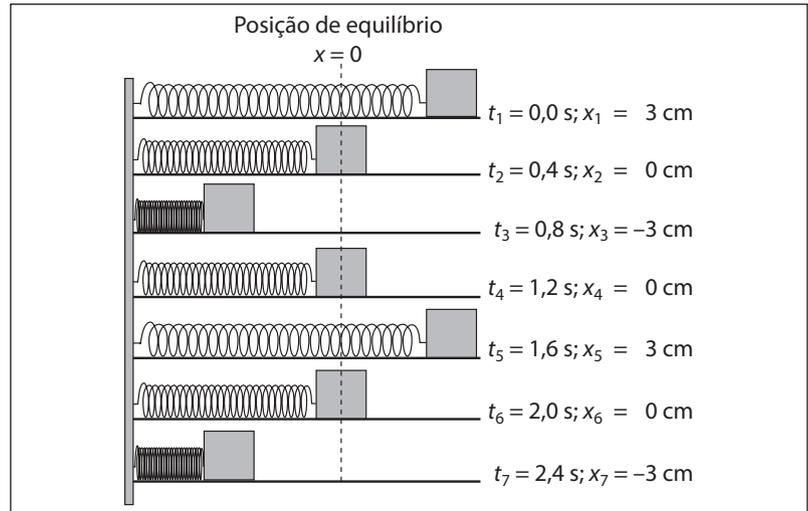
onde os termos  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$  são denominados de: 1º harmônico, 2º harmônico, 3º harmônico etc. Dentre os possíveis movimentos harmônicos que existem, o mais simples é aquele que pode ser descrito por uma função seno ou cosseno.

## **1.2.2 MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES**

É o caso mais simples de movimento oscilatório ou periódico. Para entender melhor, consideremos o caso de um bloco de massa  $m$  ligado a uma mola, movimentando-se sobre um plano horizontal, sem atrito, como mostrado na Figura 1.10. Quando afastamos o bloco do seu ponto de equilíbrio e logo o soltamos, observamos um movimento de ida e volta em torno do ponto de

equilíbrio  $x = 0$ , o que se repete em intervalos de tempo regulares. Esse tipo de movimento é chamado movimento harmônico simples.

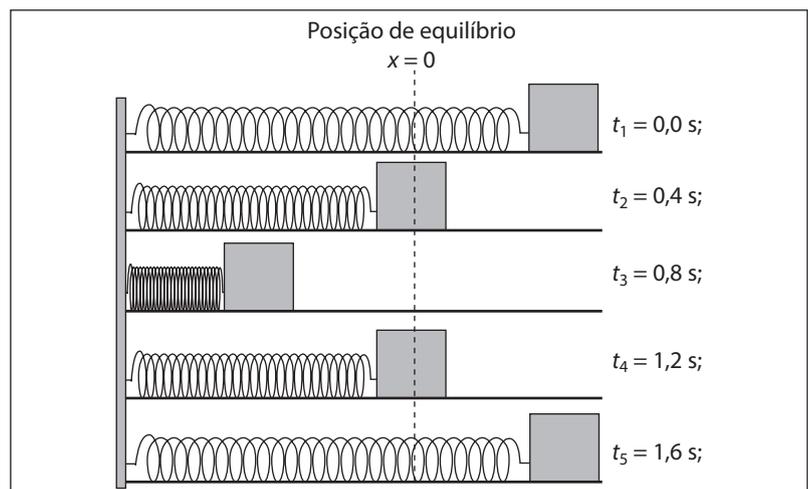
**Figura 1.10**



O tempo necessário para ir de um lado a outro e voltar à sua posição inicial, isto é, realizar uma oscilação completa, é denominado período  $T$ . A Figura 1.11 mostra uma oscilação completa realizada pelo bloco. No caso, o período de oscilação é  $T = 1,6 \text{ s}$ .

A frequência das oscilações é o inverso do período  $f = 1/T$  e a unidade é o hertz  $= 1/\text{s}$ . A frequência nos informa o número de oscilações que acontecem em um segundo. No exemplo da Figura 1.11, a frequência da oscilação é  $f = 1/(1,6 \text{ s})$  ou  $f = 0,63 \text{ Hz}$ .

**Figura 1.11**



Se fizermos o gráfico da posição  $x$  do bloco em função do tempo  $t$  para os valores mostrados na Figura 1.10, obteremos a curva da Figura 1.12.

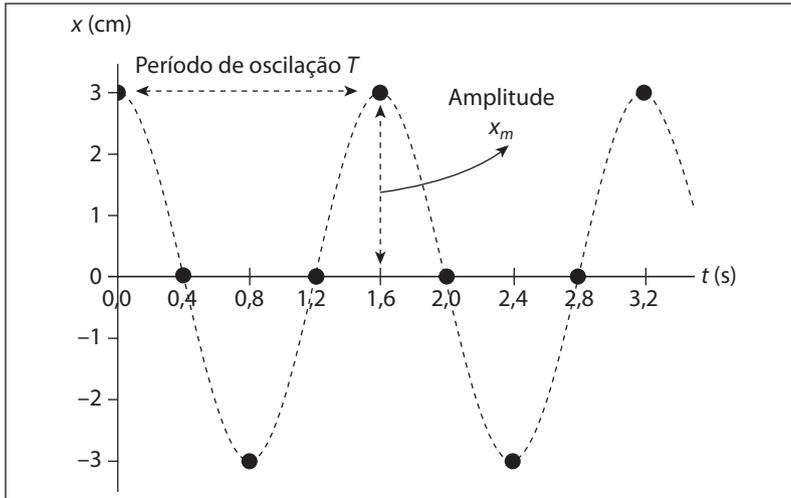


Figura 1.12

Olhando para a curva podemos observar que esta tem uma semelhança com a função matemática **cosseno**. Uma análise matemática detalhada mostra que a posição do bloco em função do tempo é descrita pela expressão  $x(t) = 3 \cos\left(\frac{5\pi}{4}t\right)$ .

De maneira geral, para um sistema oscilante qualquer com movimento harmônico simples MHS, sua posição em função do tempo pode ser descrita pela relação

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.10)$$

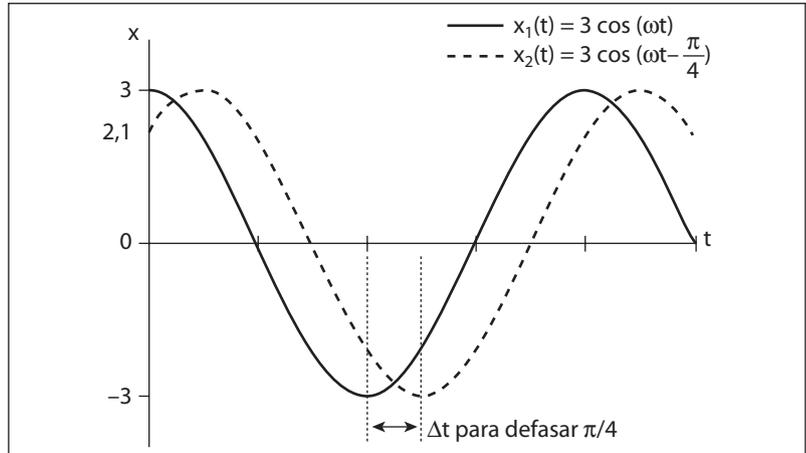
onde  $x_m$  é a amplitude da oscilação máxima,  $\omega$  a frequência angular,  $(\omega t + \varphi)$  a fase e  $\varphi$  a constante de fase.

A função cosseno se repete a cada vez que o ângulo aumenta em  $2\pi$ , ou seja, o sistema realiza uma oscilação completa; assim, a frequência angular será  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ . Uma característica importante do movimento harmônico simples é que o período de oscilação não depende da amplitude do movimento. Essa propriedade é importante na música, já que o tom das notas musicais independe da sua intensidade.

A constante de fase  $\varphi$  nos permite conhecer o deslocamento no instante  $t = 0$  s e é importante, principalmente quando queremos comparar o movimento de dois sistemas oscilantes. Por exemplo, a Figura 1.13 apresenta as curvas do deslocamen-

to de dois osciladores, estando ambos separados por uma fase de  $\pi/4$ . No instante  $t = 0$  s uma curva apresenta deslocamento igual a 3,0 unidades; enquanto a outra, um deslocamento igual a 2,1 unidades.

**Figura 1.13**



### 1.2.3 VELOCIDADE E ACELERAÇÃO DO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

#### 1.2.3.1 Velocidade

Para obter a velocidade do movimento harmônico simples derivamos, com relação ao tempo, a equação da posição  $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -x_m \omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad (1.11)$$

Observa-se que  $v(t)$  também oscila harmonicamente com a frequência angular  $\omega$ , entre os valores máximos  $-x_m \omega$  e  $+x_m \omega$ . Portanto,  $x_m \omega$  é o valor máximo da velocidade.

$$v_{\text{máx}} = x_m \omega \quad (1.12)$$

O sinal positivo ou negativo em  $x_m \omega$  indica o sentido do movimento.

#### 1.2.3.2 Aceleração

Derivando novamente, com relação ao tempo, a equação da velocidade  $v(t) = -x_m \omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ , obtemos a equação da aceleração.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -x_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.13)$$

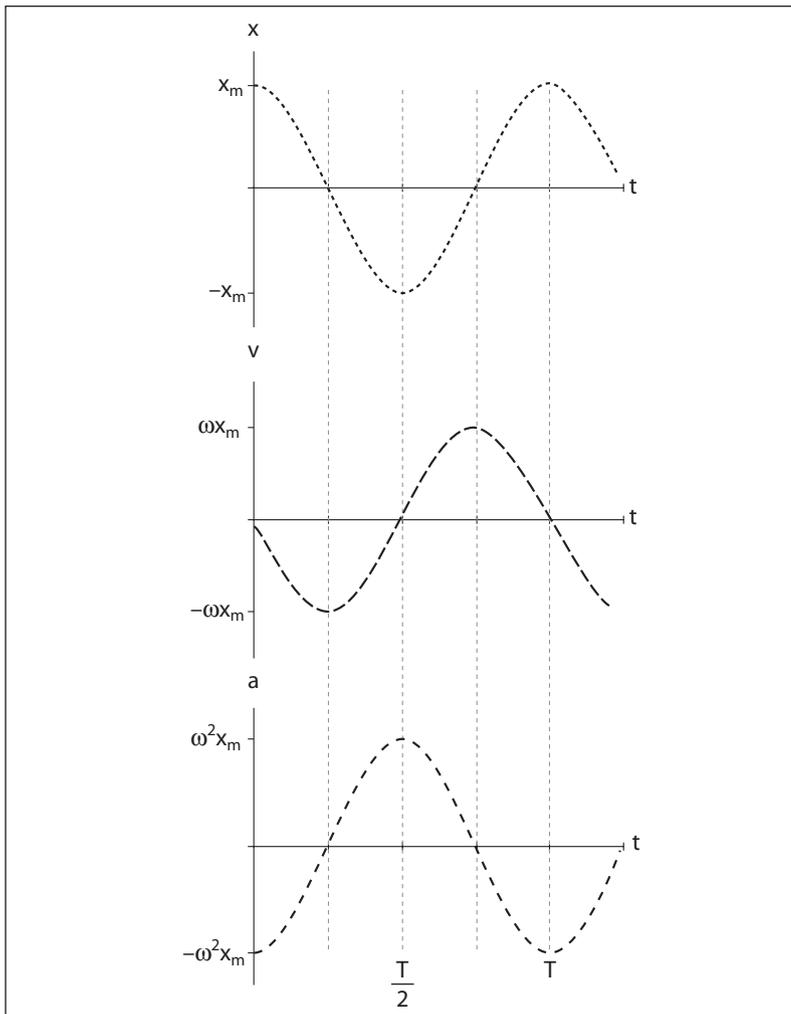
Assim como no caso da velocidade, a aceleração também oscila harmonicamente com a frequência angular  $\omega$  e  $x_m \omega^2$  é o valor da aceleração máxima.

$$a_{\text{máx}} = x_m \omega^2 \quad (1.14)$$

Considerando que a equação do deslocamento é  $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$ , podemos escrever a equação da aceleração como:

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \quad (1.15)$$

Os gráficos da posição, velocidade e aceleração em função do tempo são mostrados na Figura 1.14. No caso da posição e



**Figura 1.14**

da velocidade, é observada uma defasagem de  $\pi/2$  entre ambas. Esse resultado indica que, quando o objeto se encontra no seu deslocamento máximo, isto é, em  $x_m$  ou  $-x_m$ , a velocidade é nula em ambos os casos; e quando o objeto se encontra na posição de equilíbrio  $x = 0$ , a velocidade tem seu valor máximo ou  $v_{\text{máx}} = x_m \omega$ . De maneira similar, também é observada uma defasagem de  $\pi$  entre o deslocamento e a aceleração, e isso nos indica que, quando a partícula se encontra no seu deslocamento máximo em  $x_m$  ou  $-x_m$ , a aceleração terá seu valor máximo igual a  $-x_m \omega^2$  ou  $x_m \omega^2$  respectivamente. Lembre-se que o sinal de positivo ou negativo indica o sentido da aceleração.

### 1.2.4 FREQUÊNCIA E PERÍODO DO SISTEMA BLOCO-MOLA

Analisaremos mais detalhadamente o sistema bloco-mola, já mencionado anteriormente. Quando afastamos o bloco de sua posição de equilíbrio, observamos que há uma força  $F$ , de sentido contrário ao deslocamento, que atua sobre o bloco por causa da mola, como mostrado na Figura 1.15. A intensidade dessa força, também chamada de força restauradora, pode ser obtida a partir da segunda lei de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Como o sistema é um oscilador harmônico, a aceleração será igual  $a = -\omega^2 x$ ; assim, o módulo da força restauradora será:

$$F = -m(\omega^2 x)$$

Porém, da lei de Hooke, sabemos também que  $F = -kx$ , onde  $F$  é a força exercida pela mola, e  $k$  é a constante elástica. Igualando ambas as relações, temos:

$$k = m\omega^2$$

Da relação, podemos deduzir que o bloco oscila harmonicamente, em torno da posição de equilíbrio, com uma frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.16)$$

Observa-se que a frequência de oscilação depende da natureza do sistema oscilante, e é representada pela constante elástica da mola e pela massa da partícula. Normalmente  $\omega$  recebe o nome de frequência própria ou frequência natural.

Da frequência, podemos obter o período de oscilação do sistema

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.17)$$

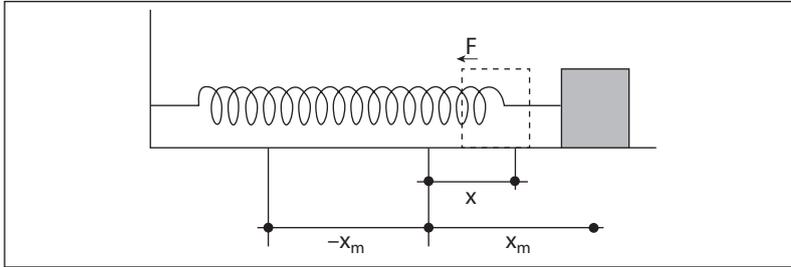


Figura 1.15

### 1.2.5 ENERGIA DO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (BLOCO-MOLA)

A energia mecânica total é a soma da energia cinética com a energia potencial

$$E_M = E_C + E_P$$

A energia potencial, no caso de um sistema bloco-mola, é dada por

$$E_P = \frac{kx^2}{2}$$

Lembramos que a energia potencial aumenta nas elongações, tendo valor máximo nos pontos extremos  $x_m$  e  $-x_m$ , e valor nulo na posição de equilíbrio  $x = 0$  (Figura 1.16).

A energia cinética do bloco em algum ponto do movimento oscilatório é

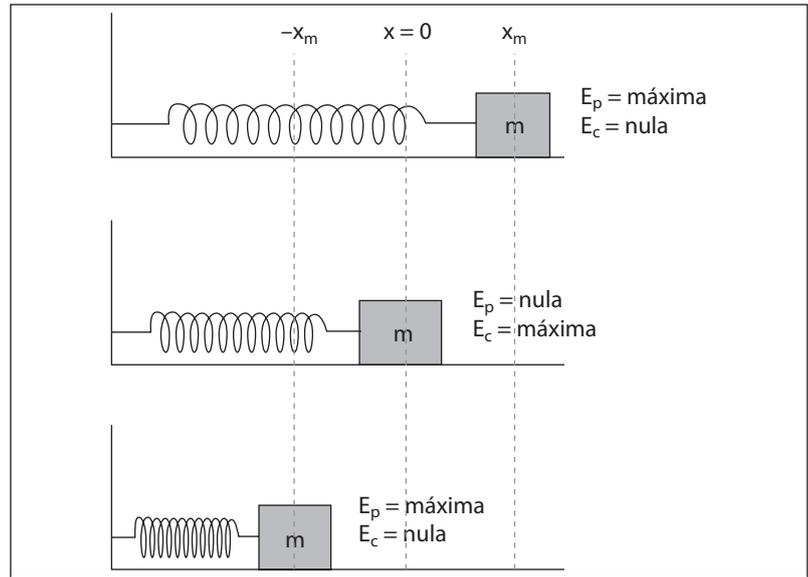
$$E_C = \frac{mv^2}{2}$$

A energia cinética será nula nas extremidades e máxima na posição de equilíbrio (Figura 1.16).

Como não há atrito entre o bloco e a superfície, o sistema é conservativo, isto é, a energia mecânica total  $E_M$  sempre permanece constante. Logo

$$E_M = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

Figura 1.16



Substituindo  $x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$  e  $v = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$  na expressão acima obtemos

$$E_M = \frac{kx_m^2}{2} \quad (1.18)$$

A energia mecânica total do movimento harmônico simples é proporcional ao quadrado da amplitude  $x_m$  da oscilação.

## 1.2.6 PÊNDULO SIMPLES

Pêndulo simples é um ente matemático sem representação física, porém, uma aproximação bastante aceitável seria a de uma partícula de massa  $m$  suspensa por um fio de comprimento  $L$  e massa desprezível. A partícula, quando liberada desde um ângulo inicial, como mostrado na Figura 1.17, oscilará de um lado para outro, periodicamente, com uma amplitude angular igual ao ângulo inicial.

Quando levamos o pêndulo fora da sua posição de equilíbrio e o soltamos, ele irá oscilar em decorrência da ação de uma força restauradora. O esquema de forças atuando sobre a partícula de massa  $m$  é mostrado na Figura 1.18. Do esquema, podemos observar que a força restauradora que atua sob o pêndulo é a componente  $F_x = mg \sin \theta$  do peso da partícula.

Considerando que a amplitude de oscilação do pêndulo é muito pequena, quando comparada com o comprimento do fio,

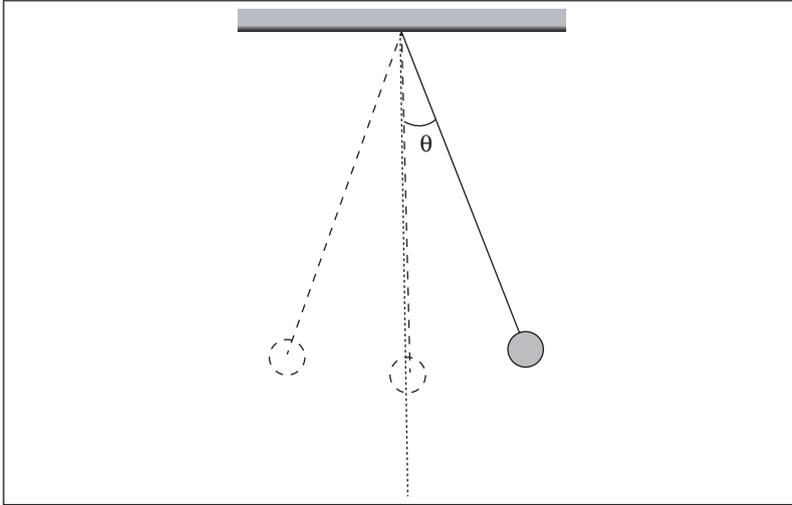


Figura 1.17

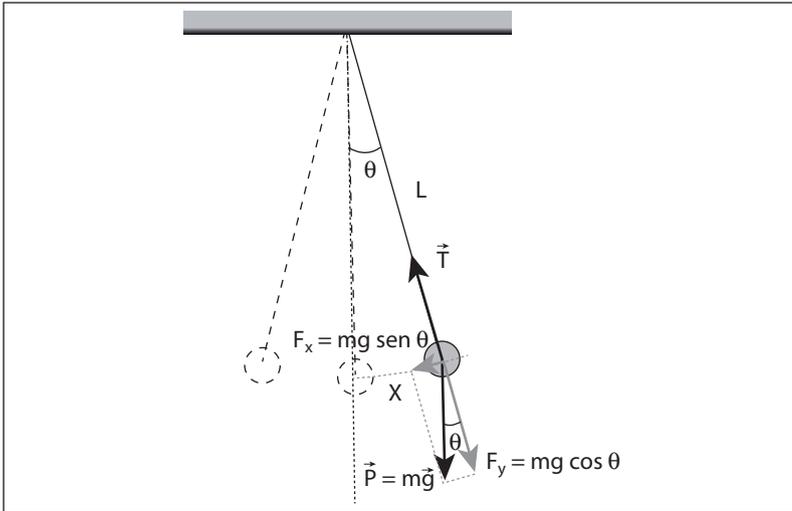


Figura 1.18

o arco que o pêndulo faz durante a oscilação pode ser aproximado por um segmento de reta  $x$ . Nessa aproximação, temos,  $\text{sen } \theta = \frac{x}{L}$ . Assim, o módulo da força restauradora será

$$F_x = -mg \left( \frac{x}{L} \right)$$

Por outro lado, conforme foi mencionado anteriormente, o módulo da força que atua sobre uma partícula em movimento harmônico simples é

$$F_x = ma = m(-\omega^2 x)$$

Comparando-se esta última relação com a equação da força restauradora, obtém-se a frequência angular de oscilação do pêndulo

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (1.19)$$

e o período de oscilação

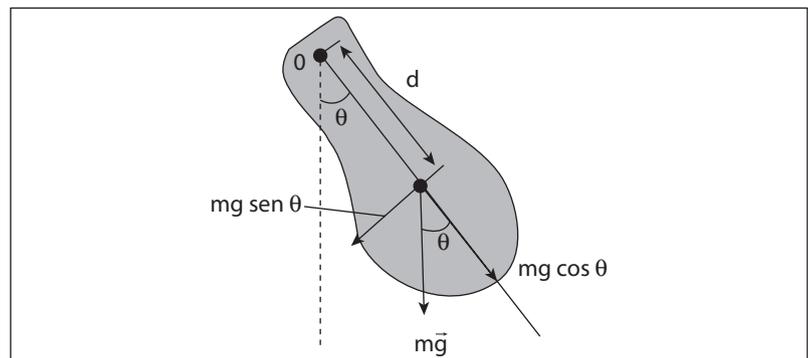
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1.20)$$

Se o ângulo inicial for muito pequeno, como no presente caso, o pêndulo oscilará com movimento harmônico simples. Nesta situação, observa-se que o período independe do ângulo inicial e só depende do comprimento do fio e da aceleração da gravidade. Em razão desse fato, o pêndulo simples torna-se um dispositivo bastante adequado e preciso para a medição da aceleração da gravidade.

### 1.2.7 PÊNDULO FÍSICO

Diferentemente do pêndulo simples, um pêndulo físico é qualquer corpo rígido vinculado a um eixo fixo, não necessariamente no centro de massa, oscilando com movimento harmônico simples, Figura 1.19.

Figura 1.19



Se o eixo se encontra a uma distância  $d$  do centro de massa, como mostrado na Figura 1.19, a força decorrente da gravidade produzirá um torque restaurador  $\tau = -mgd \sin \theta$ . Como se trata de um corpo rígido, o torque também pode ser escrito como  $\tau = I\alpha$ , onde  $I$  é o momento de inércia e  $\alpha$  a aceleração angular, ambos em relação ao eixo O.

Igualando ambas as expressões para o torque temos que

$$I\alpha = -mgd \operatorname{sen}\theta$$

Supondo que o pêndulo físico também se desloca em ângulos muito pequenos, nesse caso, podemos usar a aproximação  $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ , e a relação apresentada aqui se reduz a

$$\alpha = -\frac{mgd}{I}\theta$$

Como já foi mencionado, a aceleração do movimento harmônico simples unidimensional é da forma  $a = -\omega^2 x$ , então, seu equivalente angular será da forma  $\alpha = -\omega^2 \theta$ , logo

$$\omega^2 \theta = \frac{mgd}{I}\theta$$

Desta maneira, a frequência angular do pêndulo físico será

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (1.21)$$

e o período do movimento

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (1.22)$$

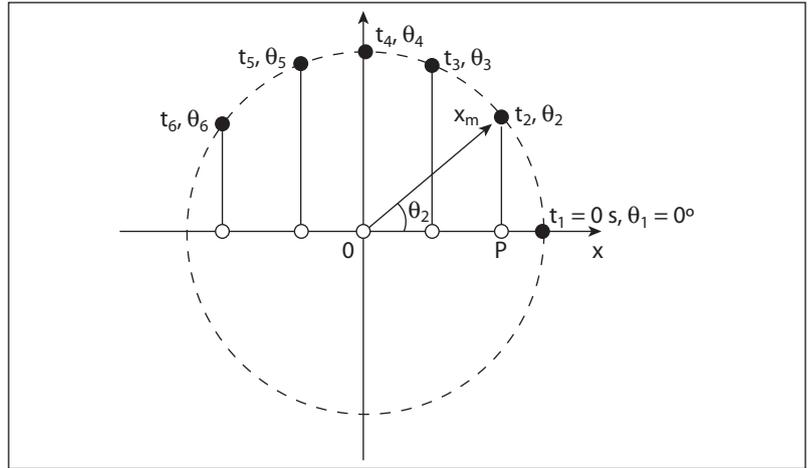
Novamente, observamos que a frequência de oscilação depende da natureza do sistema que, no caso, é representada pelo momento de inércia e a massa do corpo rígido.

### 1.2.8 MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

Existem outras maneiras de se observar um movimento harmônico simples. Uma delas é o movimento da **projeção** de um ponto material que realiza um movimento circular uniforme sobre o diâmetro central (Figura 1.20). Consideremos uma partícula movimentando-se circularmente no sentido anti-horário com raio  $x_m$  e velocidade angular constante  $\omega = \frac{\theta}{t}$ .

No instante  $t = t_2$ , a projeção da partícula ao longo do eixo  $x$ , é dada pela distância OP. Conforme transcorre o tempo nos instantes  $t_3, t_4, t_5$  etc., observa-se que o ponto P se desloca inicialmente para o lado esquerdo, passando pelo centro do círcu-

Figura 1.20



lo até atingir a posição extrema; depois, volta a se movimentar para o lado direito. Desta maneira, observa-se um movimento oscilatório em torno do diâmetro central da circunferência com uma amplitude igual a seu raio.

A posição do ponto P em  $t = t_2$  será  $x_2(t) = x_m \cos \theta_2$  e em um tempo posterior, por exemplo, em  $t = t_3$  será  $x_3(t) = x_m \cos \theta_3$ . Em geral, podemos escrever a posição do ponto P segundo a relação

$$x(t) = x_m \cos(\theta)$$

Como a partícula está se movimentando com velocidade angular constante  $\omega = \frac{\theta}{t}$ , temos que  $\theta = \omega t$ . Substituindo-o na equação anterior, obtemos

$$x(t) = x_m \cos(\omega t)$$

Dessa relação, podemos concluir que o ponto P realiza efetivamente um movimento harmônico simples sobre o eixo  $x$ . Denomina-se o ângulo  $\theta$  de fase do movimento.

Como o movimento circular da partícula é uniforme,  $\theta$  variará linearmente com o tempo. De maneira geral, podemos escrever:

$$\theta = \omega t + \varphi$$

Nessa expressão, o ângulo  $\varphi$  é a fase do movimento para  $t = 0$  s (Figura 1.21).

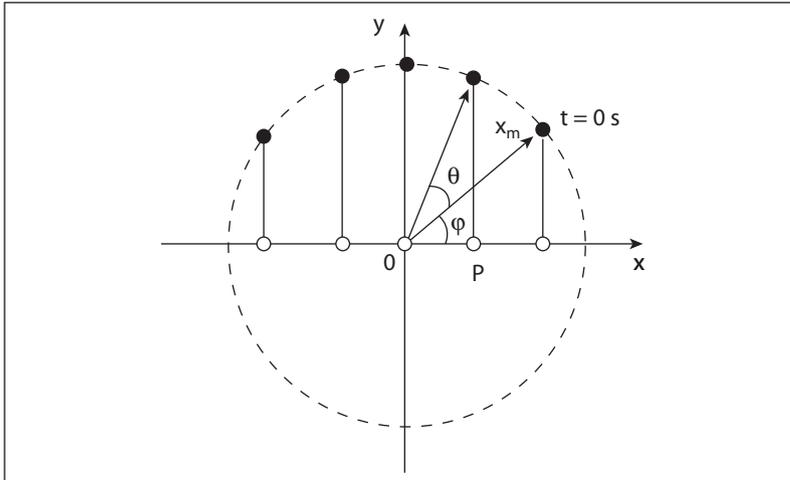


Figura 1.21

De maneira geral, podemos escrever o movimento de P seguindo a relação

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.23)$$

e como já vimos anteriormente é a relação do MHS.

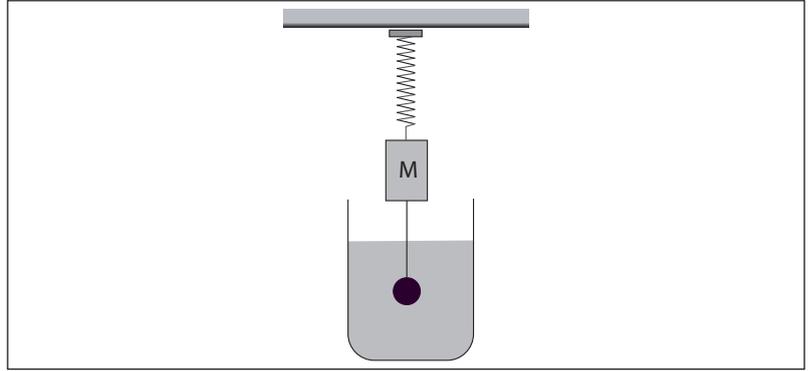
### 1.2.9 MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES AMORTECIDO

Até agora, estudamos movimentos harmônicos simples, nos quais a energia mecânica do sistema sempre permanece constante, de maneira que o oscilador não para de oscilar. Embora essa situação seja ideal, na realidade a amplitude das oscilações de um sistema real diminui com o tempo, até o sistema parar de oscilar em virtude da interação do oscilador com o meio no qual está se movimentando. Por exemplo, no caso de um pêndulo simples real em oscilação após certo tempo, a amplitude de suas oscilações será tão pequena que será imperceptível à simples vista, isto se ele não tiver se detido completamente, em virtude, principalmente, do atrito com o ar.

Analisemos matematicamente o movimento harmônico amortecido. Para isto, seja o sistema mostrado na Figura 1.22, onde uma esfera de massa desprezível está submersa em um líquido, presa por uma haste fina de massa desprezível. A mola tem constante elástica  $k$ , e o bloco, massa  $M$ .

Quando fornecemos um impulso inicial ao bloco, o sistema começa a oscilar, porém, em decorrência do atrito da bola com o líquido, o movimento oscilatório começa a perder energia. Como consequência, se observará uma diminuição gradual da amplitude de oscilação até o sistema parar por completo.

Figura 1.22



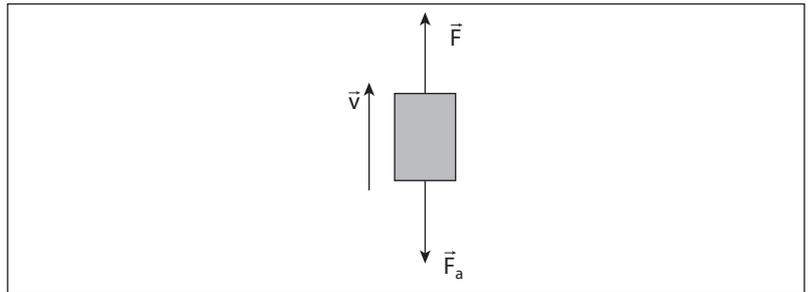
A força de atrito entre a bola e o líquido é proporcional à velocidade do corpo e é da forma

$$F_a = -bv \quad (1.24)$$

Na relação,  $b$  é uma constante que tem unidade  $\text{N/m s}^{-1}$  e depende das características de viscosidade do líquido e da forma do corpo submerso (geometria da superfície e tamanho do corpo).

Como a força de atrito  $F_a$  sempre se opõe ao sentido do movimento, o diagrama de forças em um instante determinado será o da Figura 1.23.

Figura 1.23



Supondo que a força gravitacional à qual o bloco está submetido seja extremamente pequena, quando comparada com as forças  $F$  da mola e de atrito, e aplicando a segunda lei de Newton temos

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= M\vec{a} \\ \vec{F} + \vec{F}_a &= M\vec{a} \\ -kx - bv &= Ma \end{aligned}$$

Substituindo a aceleração e a velocidade por  $d^2x/dt^2$  e  $dx/dt$  respectivamente, e rearranjando os termos, segue

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{M} x = 0$$

Analisando as unidades do termo  $b/M$  temos que

$$\frac{b}{M} = \frac{\frac{\text{N}}{\text{m/s}}}{\text{kg}} = \frac{\frac{\text{kgm/s}^2}{\text{m/s}}}{\text{kg}} = \frac{1}{\text{s}}$$

segundo este resultado, denotaremos  $\frac{b}{M} = \frac{1}{\tau}$ , sendo  $\tau$  no caso o tempo de relaxação. Já o termo  $k/M$  é  $\omega_0^2$ , o qual é a expressão da frequência angular para o sistema bloco–mola já visto anteriormente.

Assim, obtemos a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.25)$$

A solução para esta equação diferencial é do tipo

$$x(t) = x_m e^{-bt/2M} \cos(\omega t + \phi) = x_m e^{-t/2\tau} \cos(\omega t + \phi)$$

Onde  $x_m$  é a amplitude inicial e  $\omega$  a frequência angular do oscilador amortecido, que é dada pela expressão

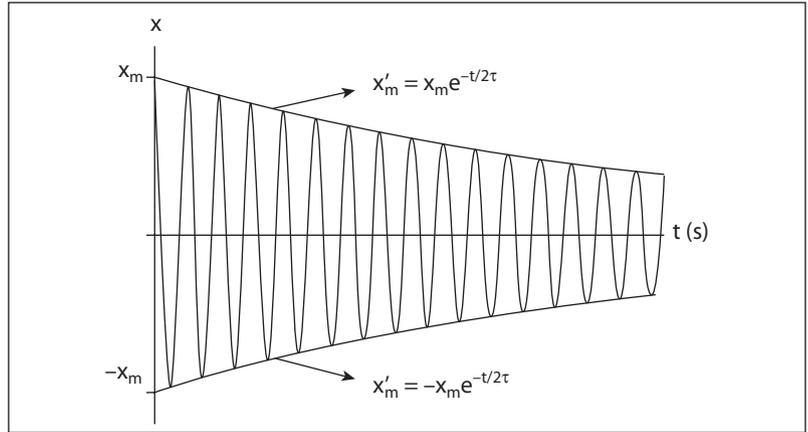
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{b^2}{4M^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \quad (1.26)$$

Note que a solução também se pode interpretar como um movimento harmônico simples com a amplitude variável  $x'_m = x_m e^{-t/2\tau}$  da forma

$$x(t) = x'_m \cos(\omega t + \phi) \quad (1.27)$$

A Figura 1.24 mostra o gráfico da posição em função do tempo para o oscilador amortecido.

Figura 1.24

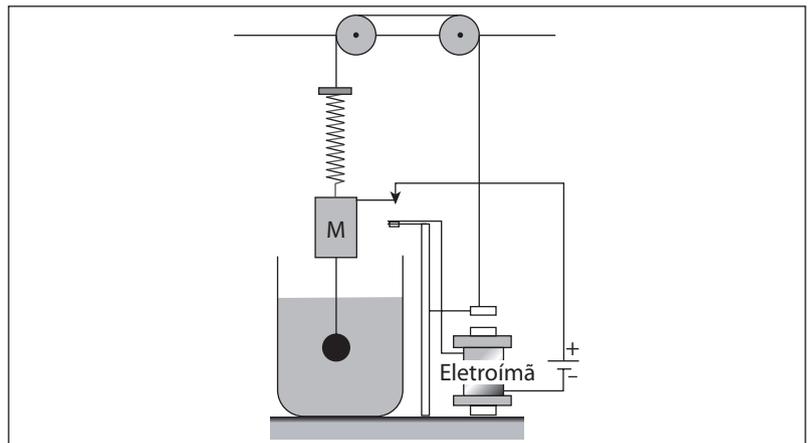


### 1.2.10 OSCILAÇÕES FORÇADAS E RESSONÂNCIA

Como já foi analisado anteriormente, em um oscilador amortecido, a energia diminui com o tempo, em virtude da interação do oscilador com o meio no qual está se movimentando. Porém, é possível compensar essa perda de energia aplicando uma força externa, de tal maneira que ela realize um trabalho positivo. A proposta é ajustar o sistema, de modo que o bloco fique oscilando ininterruptamente.

A Figura 1.25 mostra o oscilador amortecido analisado anteriormente junto a um agente externo, provedor da força necessária para compensar a perda de energia, decorrente do amortecimento. O agente externo é composto por um eletroímã de maneira que, quando o bloco está se movimentando para baixo, fecha-se o contato que está ao lado do bloco. Nesse instante, o eletroímã é acionado, gerando um puxão na linha, restituindo, assim, a energia dissipada naquela oscilação.

Figura 1.25



Do exemplo anterior, é possível acrescentar energia ao sistema, por meio de uma força que opere na direção do movimento oscilatório.

Para podermos fazer uma análise do ponto de vista matemático, vamos supor que essa força externa  $F_{ext}$  seja aplicada harmonicamente no tempo da forma

$$F_{ext} = F_o \cos \omega_e t$$

onde  $F_o$  é uma constante e  $\omega_e$  a frequência angular da força externa, que **não está** relacionada com a frequência angular do sistema  $\omega_o$ .

No caso, o objeto de massa  $M$ , ligado à mola de constante  $k$ , está submetido à força de amortecimento e à força externa. Aplicando a segunda lei de Newton, temos

$$\begin{aligned} \sum F &= Ma \\ F + F_a + F_{ext} &= Ma \\ -kx - bv + F_o \cos(\omega_e t) &= Ma \\ -kx - b \frac{dx}{dt} + F_o \cos(\omega_e t) &= M \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x &= \frac{F_o}{M} \cos(\omega_e t) \end{aligned} \quad (1.28)$$

A solução desta equação diferencial possui duas componentes, uma chamada de transitória e outra de estacionária. A componente transitória da solução é similar à do oscilador amortecido

$$x(t) = x_m e^{-t/2\tau} \cos(\omega t + \phi) \quad (1.29)$$

Nela, as constantes  $x_m$  e  $\phi$  dependem das condições iniciais. Após certo tempo transcorrido, esta parte da solução se torna desprezível, já que, como foi observado na Figura 1.24, a amplitude diminui exponencialmente com o decorrer do tempo, ficando assim só a parte estacionária, a qual não depende das condições iniciais e apresenta a seguinte forma:

$$x(t) = x_n \cos(\omega_e t - \phi) \quad (1.30)$$

Nessa expressão a amplitude  $x_n$  é dada por

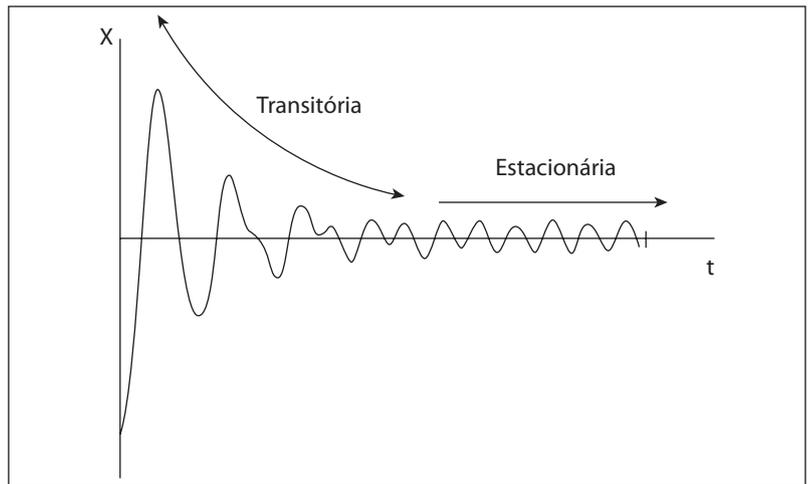
$$x_n = \frac{F_o/M}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_e^2)^2 + \left(\frac{b\omega_e}{M}\right)^2}} \quad (1.31)$$

e a constante de fase  $\varphi$

$$\tan \varphi = \frac{b\omega_e}{M(\omega_o^2 - \omega_e^2)} \quad (1.32)$$

A Figura 1.26 mostra a curva da posição em função do tempo de um sistema em movimento oscilatório forçado. No início da oscilação é observada a fase transitória e, após certo tempo, a fase estacionária. O movimento estacionário é independente das condições iniciais, dependendo somente dos parâmetros do sistema e, obviamente, da força aplicada. Já o movimento transitório depende das condições iniciais.

**Figura 1.26**



Das equações anteriores, pode-se concluir:

- O sistema oscila com a frequência  $\omega_e$  da força externa e não com a sua frequência natural  $\omega_o$ ;
- O movimento não é amortecido, já que a amplitude  $x_n$  é constante no tempo;
- $x_n$  depende da frequência da força externa e tem seu valor máximo quando  $\omega_e^2 = \omega_o^2 - \frac{b^2}{2M^2}$ .

Para valores pequenos de  $\frac{b^2}{2M^2}$  a frequência  $\omega_e$  é aproximadamente igual à frequência natural do oscilador. Então, se diz que a força exterior está em ressonância com o oscilador. Nessa situação,  $\varphi = \pi/2$ .

A Figura 1.27 mostra a representação gráfica da amplitude em função da frequência de um oscilador amortecido sob influência de uma força externa periódica. Quando a frequência da força externa é igual à frequência natural do sistema, acontece a ressonância. A forma da curva da ressonância depende do valor do coeficiente de amortecimento  $b$ .

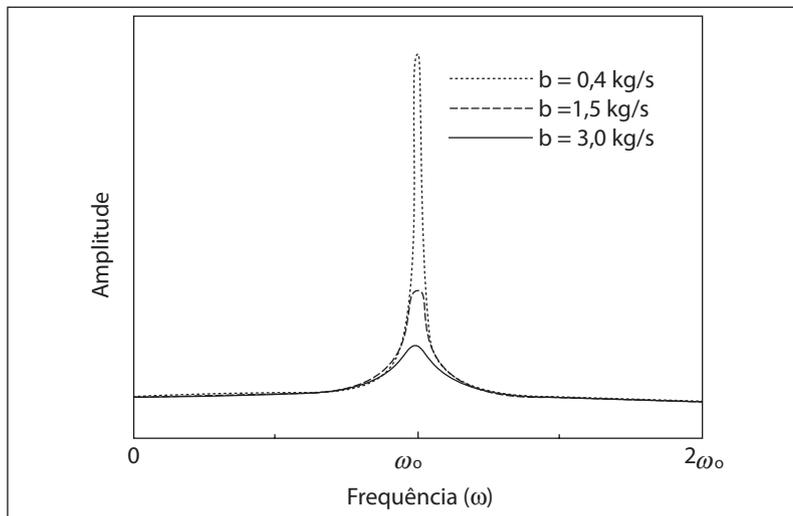


Figura 1.27

Em geral, quando um objeto é excitado por alguma influência externa em sua frequência natural, dá-se a ressonância. No caso, o objeto vibra nessa frequência com amplitude máxima, limitada só pelos amortecimentos.

Crianças brincando no balanço, apesar de nunca terem ouvido falar de ressonância, sabem muito bem como usá-la, isto é, durante o movimento de vai e vem, sabem qual é o momento certo de dobrar o corpo para aumentar a amplitude do movimento.

O corpo de um instrumento musical, um violão, por exemplo, é uma caixa de ressonância. As vibrações da corda entram em ressonância com a estrutura da caixa de madeira, que “amplifica” o som e acrescenta vários harmônicos, dando o timbre característico do instrumento.

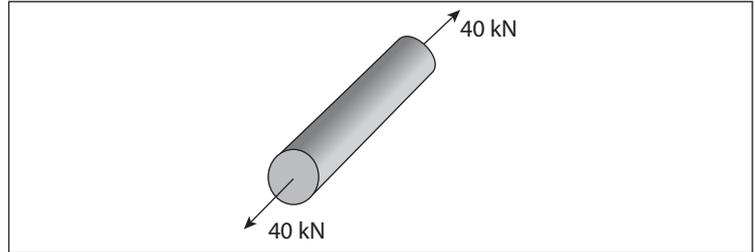
## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

### ELASTICIDADE

- 1) Uma barra de aço, com 50 mm de diâmetro e 70 cm de comprimento, é tracionada por uma carga normal de 40 kN, como mostrado na Figura 1.28.

Determinar a tensão, o alongamento e a deformação da barra.

Figura 1.28



*Solução:*

- a) A tensão por tração será

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{4 \cdot 10^4 \text{ N}}{\pi (25 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 20,4 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

- b) Calculamos o alongamento segundo a fórmula

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F/A}{\Delta L/L_0}$$

O módulo de Young do aço é de 200 GPa

$$\Delta L = \frac{\sigma L_0}{E} = \frac{(20,4 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2)(0,7 \text{ m})}{200 \cdot 10^9 \text{ Pa}}$$

$$\Delta L = 0,07 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,07 \text{ mm}$$

- a) A deformação da barra será

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{0,07 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0,7 \text{ m}} = 0,1 \cdot 10^{-3} = 0,01\%$$

- 2) Em uma barra de secção transversal quadrada é aplicada uma força de 500 N como mostrado na Figura 1.29. Determinar a tensão de tração e a tensão de cisalhamento que atuam no material (a) no plano da secção a-a e (b) no plano da secção b-b.

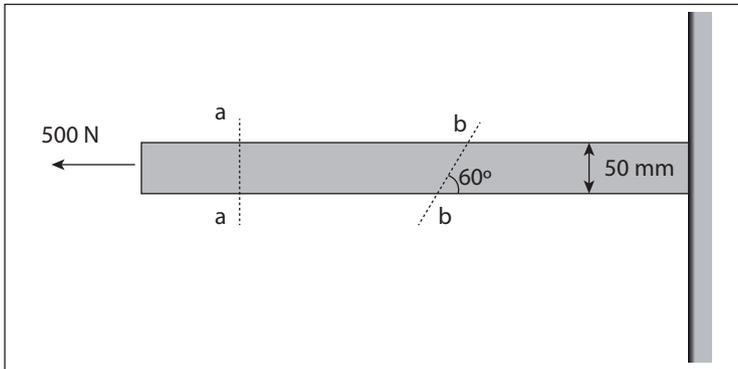


Figura 1.29

*Solução:*

- a) No plano a-a

A tensão de tração será

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{500 \text{ N}}{(0,05 \text{ m})^2} = 200.000 \text{ Pa} = 200 \text{ kPa}$$

A tensão de cisalhamento se deve às forças tangenciais atuando na superfície do plano. No caso do plano a-a todas as forças atuantes são de tração, não tendo nenhuma força tangencial, portanto  $F_{//} = 0$

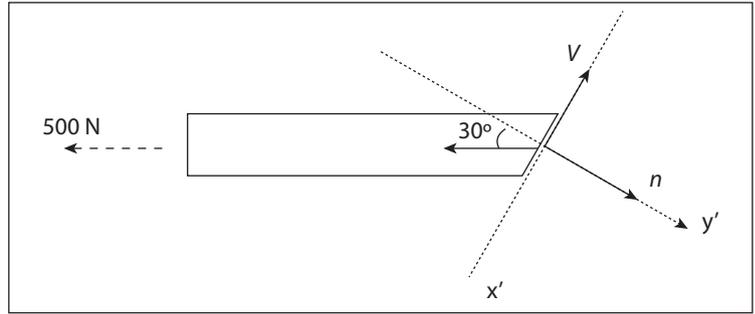
$$\tau = \frac{F_{//}}{A} = 0$$

- b) No plano b-b

Se a barra for seccionada ao longo de b-b, o diagrama de corpo livre será como o mostrado na Figura 1.30. Nesse caso, tanto a força normal  $n$  como a força tangencial de cisalhamento  $V$  atuarão sobre a área seccionada.

Para calcular a tensão de tração e cisalhamento, calculamos primeiramente os valores das forças  $n$  e  $V$ , utilizando como referência os eixos de coordenadas  $x'$  e  $y'$ .

Figura 1.30

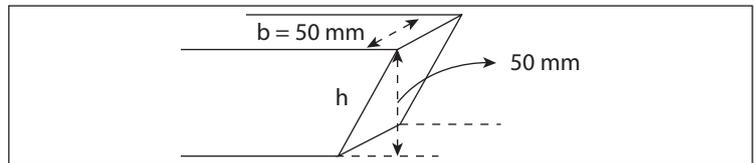


$$\begin{aligned}\sum F_{y'} &= 0 \\ n - 500 \cos 30^\circ &= 0 \\ n &= 500 \cos 30^\circ \\ n &= 433 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_{x'} &= 0 \\ V - 500 \sin 30^\circ &= 0 \\ V &= 500 \sin 30^\circ \\ V &= 250 \text{ N}\end{aligned}$$

Para calcularmos as tensões de tração e de cisalhamento precisamos calcular a área do plano da secção b-b

Figura 1.31



$$\begin{aligned}h &= \frac{50 \text{ mm}}{\sin 60^\circ} = 57,7 \text{ mm} \\ \text{Área} &= A = h \cdot b = (0,0577 \text{ m})(0,05 \text{ m}) \\ A &= 2,89 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\end{aligned}$$

A tensão de tração será

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{433 \text{ N}}{2,89 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2} = 150 \text{ kPa}$$

e a tensão de cisalhamento

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{250 \text{ N}}{2,89 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2} = 87 \text{ kPa}$$

- 3) Um quadro muito grande, com massa de 15 kg, está pendurado em uma parede por um fio de aço de 1,2 m de comprimento e 1,2 mm de diâmetro, como mostra a Figura 1.32. (Módulo de Young do aço  $E = 200 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ .)
- Qual é o alongamento do fio de aço?
  - Se o comprimento do fio for duplicado, qual será o novo alongamento?

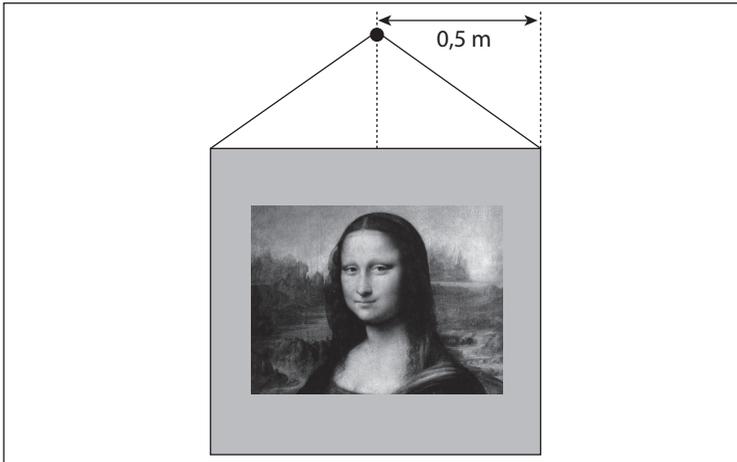


Figura 1.32

*Solução:*

- Em virtude do peso do quadro, os fios AB e BC, mostrados na Figura 1.33, estão submetidos a uma força de tração, sofrendo assim, cada um deles, um determinado alongamento.

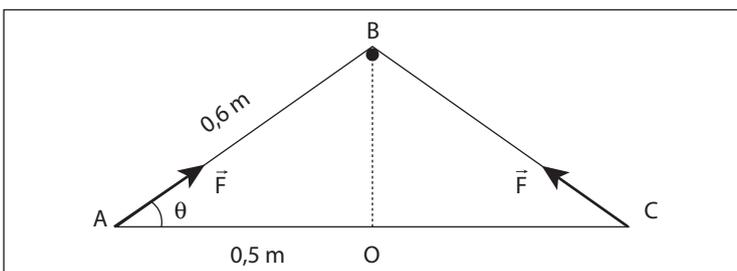


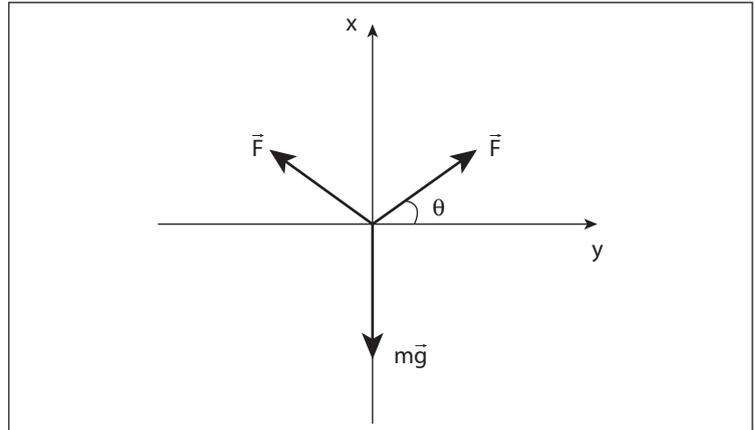
Figura 1.33

Calculamos  $\theta$  usando o triângulo ABO

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0,5}{0,6}\right) = 33,6^\circ$$

Para o cálculo do alongamento dos fios AB e BC é necessário conhecer a força de tração  $F$ . Usando o diagrama de equilíbrio do ponto B, calculamos  $F$ .

**Figura 1.34**



$$\Sigma F_y = 0$$

$$2F \sin \theta - mg = 0$$

$$F = \frac{mg}{2 \sin \theta} = \frac{15 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2}{2 \cdot \sin 33,6^\circ}$$

$$F = 132,8 \text{ N}$$

No cálculo do alongamento do fio AB, usamos a equação

$$\Delta L_{AB} = \frac{\sigma L_o}{E} = \frac{FL_o}{AE} = \frac{FL_o}{\pi R^2 E}$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{132,8 \text{ N} \cdot 0,6 \text{ m}}{\pi (0,6 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 (200 \cdot 10^9 \text{ Pa})}$$

$$\Delta L_{AB} = 0,35 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta L_{AB} = 0,35 \text{ mm}$$

Assim, o alongamento total será

$$\Delta L = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = 0,35 + 0,35$$

$$\Delta L = 0,70 \text{ mm}$$

- b) Se o comprimento total do fio for duplicado, o comprimento do fio AB será 1,2 m e, portanto,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0,5}{1,2}\right) = 65,4^\circ$$

$$F = \frac{mg}{2 \sin\theta} = \frac{(15\text{ kg})(9,8\text{ m/s}^2)}{2 \cdot \sin 65,4} = 80,8\text{ N}$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{80,8\text{ N} \cdot 1,2\text{ m}}{\pi(0,6 \cdot 10^{-3}\text{ m})^2 (200 \cdot 10^9\text{ Pa})}$$

$$\Delta L_{AB} = 0,43 \cdot 10^{-3}\text{ m}$$

$$\Delta L_{AB} = 0,43\text{ mm}$$

Neste caso, o alongamento total será

$$\Delta L = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = 0,43 + 0,43$$

$$\Delta L = 0,86\text{ mm}$$

## OSCILAÇÕES

- 4) Escrever a equação da curva mostrada na Figura 1.35.

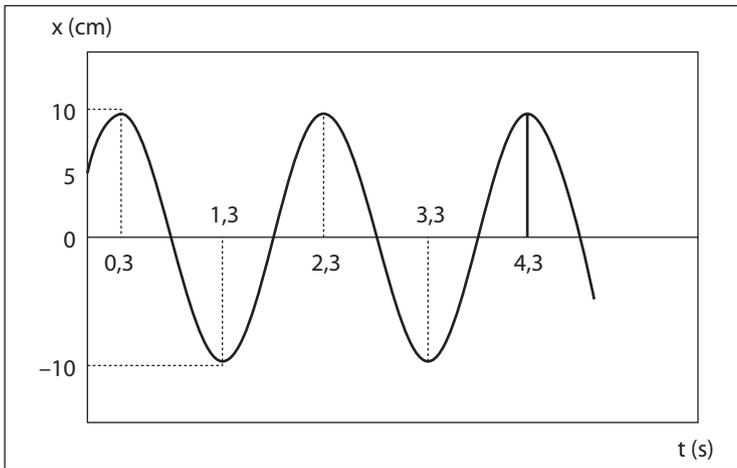


Figura 1.35

*Solução:*

Escrevemos a equação segundo a expressão

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Do gráfico, podemos identificar alguns termos da expressão

- Amplitude máxima  $x_m = 10$  cm
- Período  $T = 2,3 - 0,3 \rightarrow T = 2$  s
- Frequência angular  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} \rightarrow \omega = \pi$  rad / s
- Constante de fase  $\varphi$

Para  $t = 0$  s,  $x = 5$  cm

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$5 = 10 \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{5}{10}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

Assim a equação da curva será:

$$x(t) = 10 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ cm}$$

- 5) Uma mola é esticada até que seu comprimento aumente 5 cm. Logo é liberada, podendo oscilar livremente, de maneira que ela realiza 30 oscilações a cada 5 segundos. Determinar:

- a equação do movimento;
- a posição após 10 segundos de iniciado o movimento e
- o tempo que demora para atingir a posição de equilíbrio desde seu ponto de máximo afastamento.

*Solução:*

- Como a posição inicial em  $t = 0$  s coincide com o deslocamento máximo, a constante de fase será nula; portanto, a equação do movimento procurada será da forma

$$x(t) = x_m \cos(\omega t)$$

$$x_m = 5 \text{ cm}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \frac{30 \text{ ciclos}}{5 \text{ s}}$$

$$\omega = 12\pi \text{ rad / s}$$

$$x(t) = 5 \cos(12\pi t) \text{ cm}$$

b) A posição em  $t = 10$  s

$$x(t = 10 \text{ s}) = 5 \cos(12\pi \cdot 10) \text{ cm}$$

$$x(t) = 5 \text{ cm}$$

c) Posição de equilíbrio  $x = 0$

$$x(t) = 5 \cos(12\pi t)$$

$$0 = 5 \cos(12\pi t)$$

$$12\pi t = \frac{\pi}{2}$$

$$t = 0,042 \text{ s}$$

- 6) Determinar a velocidade e a aceleração em  $t = 0$  s de um corpo ligado a uma mola cujo movimento é descrito pela equação  $x(t) = 0,3 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ cm}$ .

*Solução:*

Obtemos a velocidade derivando a expressão da posição em relação ao tempo

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -2 \cdot 0,3 \text{ sen}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$v(t) = -0,6 \text{ sen}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

em  $t = 0$  s

$$v(t) = -0,6 \text{ sen}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$v(t) = -0,6 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$v(t) = -0,3 \text{ m/s}$$

Obtemos a aceleração derivando a velocidade em relação ao tempo

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -2 \cdot 0,6 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$a(t) = -1,2 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Em  $t = 0$  s

$$a(t) = -1,2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$a(t) = -1,04 \text{ m/s}^2$$

- 7) Uma partícula com massa  $m = 0,1 \text{ kg}$  oscila com movimento harmônico segundo a expressão  $x(t) = 0,2 \cos(2\pi t) \text{ m}$ .
- Calcular a energia mecânica da partícula.
  - Representar graficamente a energia cinética e potencial da partícula.

*Solução:*

- a) Calculamos a energia mecânica de um oscilador harmônico, usando a expressão:

$$E_M = \frac{kx_m^2}{2}$$

Onde

$$k = m\omega^2 = 0,1 \cdot (2\pi)^2 = 3,95 \text{ N/m}$$

$$E_M = \frac{kx_m^2}{2} = \frac{3,95(0,2)^2}{2} = 0,079 \text{ J}$$

- b) Calculamos as energias cinética e potencial segundo as expressões:

$$E_C = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_P = \frac{kx^2}{2}$$

$$v = \frac{dx(t)}{dt} = -0,4\pi \sin(2\pi t)$$

$$x(t) = 0,2 \cos(2\pi t)$$

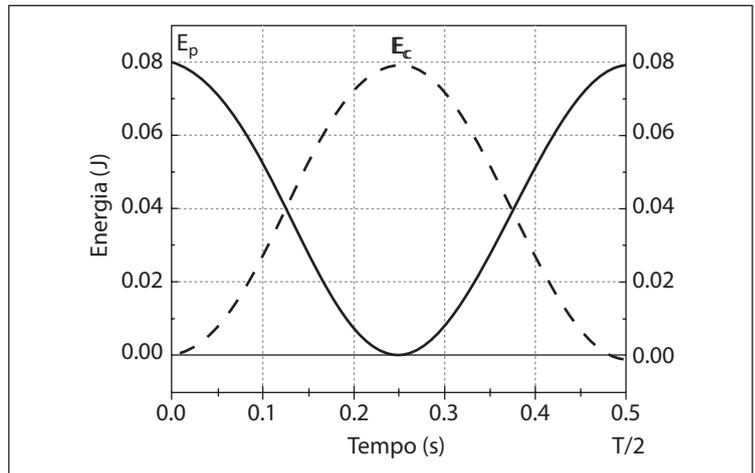
$$E_C = \frac{0,1 \cdot [-0,4\pi \sin(2\pi t)]^2}{2}$$

$$E_P = \frac{3,95 \cdot [0,2 \cos(2\pi t)]^2}{2}$$

$$E_C = 0,079 [\sin(2\pi t)]^2 \text{ J}$$

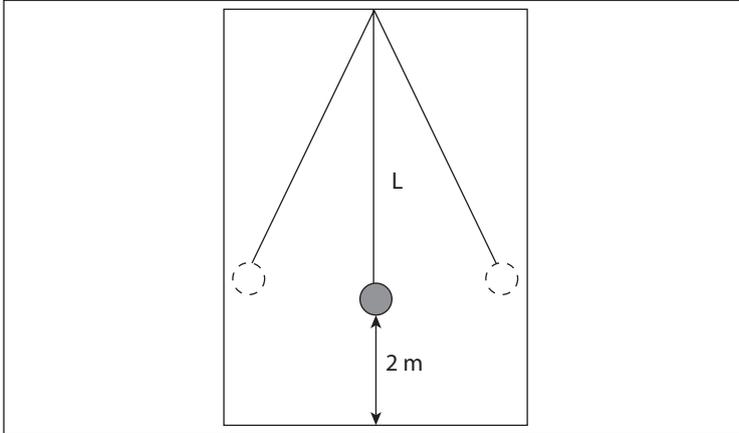
$$E_P = 0,079 [\cos(2\pi t)]^2 \text{ J}$$

**Figura 1.36**



- 8) Uma lâmpada pendurada do teto de uma igreja se encontra a 2 m do chão. Observa-se que a lâmpada oscila levemente com uma frequência de 0,1 Hz. Qual é a altura do teto?

*Solução:*



**Figura 1.37**

Para obter a altura do teto é necessário calcular o comprimento  $L$  por meio da relação

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Calculamos o período:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,1}$$

$$T = 10\text{s}$$

Logo

$$L = g \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{9,8\text{m/s}^2 (10\text{s})^2}{4\pi^2}$$

$$L = 24,82\text{m}$$

A altura do teto será  $h = 24,82 + 2$

$$h = 26,82\text{ m}$$

- 9) Calcular o período de oscilação de um pêndulo simples de 50 cm de comprimento no planeta Marte, supondo que o

peso de um objeto nesse planeta é 0,4 vezes o seu peso na Terra.

*Solução:*

Como o peso em Marte é 0,4 vezes o peso na Terra, então

$$g_{\text{Marte}} = 0,4 g_{\text{Terra}} = 0,4(9,8 \text{ m/s}^2)$$

$$g_{\text{Marte}} = 3,92 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Assim,

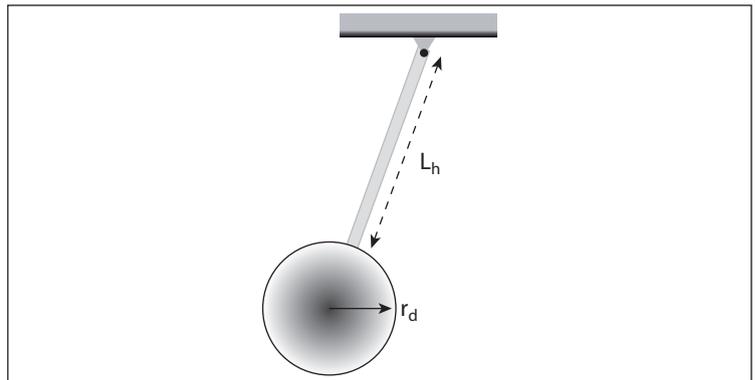
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_{\text{Marte}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,5 \text{ m}}{3,92 \text{ m/s}^2}}$$

$$T = 2,24 \text{ s}$$

- 10) Um pêndulo físico é composto por um disco preso a uma haste uniforme, como mostrado na Figura 1.38. O disco uniforme possui um raio  $r_d = 10 \text{ cm}$  e massa  $M_d = 300 \text{ g}$  enquanto que a haste tem comprimento  $L_h = 30 \text{ cm}$  e massa  $m_h = 200 \text{ g}$ .

Qual é o período de oscilação desse pêndulo físico?

**Figura 1.38**



*Solução:*

Calculamos o período de oscilação de um pêndulo físico usando a relação

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

onde  $I$  é o momento de inércia do pêndulo em torno do eixo de rotação,  $m$  a massa total e  $d$  a distância do eixo de rotação ao centro de massa do sistema disco-haste.

O momento de inércia do disco com eixo de rotação no centro de massa é

$$I_{cm(\text{disco})} = \frac{M_d r_d^2}{2}$$

já o momento de inércia do disco em torno do eixo de rotação, localizado no extremo da haste, é calculado usando-se o teorema dos eixos paralelos

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

$$I_{\text{disco}} = \frac{M_d r_d^2}{2} + M_d (r_d + L_h)^2$$

O momento de inércia da haste com eixo de rotação que passa pelo centro de massa é

$$I_{cm(\text{haste})} = \frac{m_h L_h^2}{12}$$

e o momento de inércia da haste em torno do eixo de rotação no extremo é, segundo o teorema dos eixos paralelos,

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

$$I_{\text{haste}} = \frac{m_h L_h^2}{12} + m_h \left( \frac{L_h}{2} \right)^2$$

$$I_{\text{haste}} = \frac{m_h L_h^2}{3}$$

O momento de inércia total do pêndulo físico é a soma dos momentos de inércia do disco e da haste em torno do eixo de rotação

$$I = I_{\text{disco}} + I_{\text{haste}}$$

$$I = \frac{M_d r_d^2}{2} + M_d (r_d + L_h)^2 + \frac{m_h L_h^2}{3}$$

$$I = \frac{(0,3)(0,1)^2}{2} + (0,3)(0,1+0,3)^2 + \frac{(0,2)(0,3)^2}{3}$$

$$I = 0,056 \text{ kg.m}^2$$

Agora, calculamos a distância entre o eixo de rotação e o centro de massa do sistema disco–haste, usando a relação

$$d = \frac{M_d l_d + m_h l_h}{M_d + m_h}$$

onde  $l_d = (r_d + L_h) = 0,4 \text{ m}$  e  $l_h = L_h/2 = 0,15 \text{ m}$  são as distâncias entre o eixo de rotação e os centros de massa do disco e da haste, respectivamente.

$$d = \frac{(0,3)(0,4) + (0,2)(0,15)}{0,3 + 0,2}$$

$$d = 0,3 \text{ m}$$

O período de oscilação do sistema disco–haste será

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{(M_d + m_h)gd}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,056}{(0,5)(9,8)(0,3)}}$$

$$T = 1,23 \text{ s}$$

- 11) Um pêndulo de 1 m de comprimento é solto desde um ângulo inicial de  $15^\circ$ . Após 1.000 s a amplitude do pêndulo se reduz a  $5^\circ$ , em decorrência do atrito com o ar. Calcular o valor de  $b/2m$ .

*Solução:*

Sabemos que a amplitude de uma oscilação amortecida varia segundo a relação

$$x'_m = x_m e^{-t/2\tau}$$

$$x'_m = x_m e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Logo

$$\frac{b}{2m} = -\frac{1}{t} \ln \frac{x'_m}{x_m}$$

Dos dados do problema, temos  $x_m = 15^\circ$ ,  $t = 1.000 \text{ s}$  e  $x'_m = 5^\circ$

$$\frac{b}{2m} = -\frac{1}{1.000} \ln\left(\frac{5}{15}\right)$$

$$\frac{b}{2m} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

12) Um bloco de 5 kg está preso em uma das extremidades de uma mola de constante elástica  $k = 125 \text{ N/m}$ . O bloco é puxado da sua posição de equilíbrio em  $x = 0 \text{ m}$  até  $x = 0,687 \text{ m}$  e logo solto do repouso. O bloco se movimenta com oscilação amortecida ao longo do eixo  $x$ . A força de amortecimento é proporcional à velocidade. Quando o bloco volta para  $x = 0 \text{ m}$ , a velocidade é  $-2 \text{ m/s}$  e aceleração  $5,6 \text{ m/s}^2$ .

- Calcular o módulo da aceleração do bloco após ser liberado em  $x = 0,687 \text{ m}$ .
- Calcular o coeficiente de amortecimento  $b$ .
- Determinar o trabalho realizado pela força amortecedora durante o trajeto  $x = 0,687 \text{ m}$  até  $x = 0$ .

*Solução:*

- A equação diferencial do movimento harmônico simples amortecido é segundo a equação (1.25).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1dx}{\tau dt} + \omega_0^2 x = 0$$

onde  $\frac{b}{M} = \frac{1}{\tau}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{M} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Sabemos que  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$  e  $v = \frac{dx}{dt}$  logo

$$a + \frac{b}{M} v + \omega_0^2 x = 0$$

Quando  $x = 0,687 \text{ m}$  a velocidade  $v = 0$ ; assim, temos

$$a = -\omega_0^2 x$$

$$a = -\frac{k}{M} x$$

$$a = -\frac{125\text{N}}{5\text{kg}}0,687\text{m}$$

$$a = -17,18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- b) Dos dados do exercício sabemos que  $x = 0\text{ m}$ ,  $v = -2\text{ m/s}$  e  $a = 5,6\text{ m/s}^2$ .

$$a + \frac{b}{M}v + w_0^2x = 0$$

$$a + \frac{b}{M}v = 0$$

$$b = -\frac{M}{v}a$$

$$b = -\frac{5\text{kg}}{(-2\text{m/s})}5,6\text{m/s}^2$$

$$b = 14\text{kg/s}$$

- c) Na posição  $x = 0,687\text{ m}$  temos

$$E_1 = E_c + E_p = 0 + \frac{kx_m^2}{2}$$

$$E_1 = \frac{125(0,687)^2}{2}$$

$$E_1 = 29,5\text{J}$$

e na posição  $x = 0\text{ m}$

$$E_2 = E_c + E_p = \frac{mv^2}{2} + 0$$

$$E_2 = \frac{5(-2)^2}{2}$$

$$E_2 = 10\text{J}$$

O trabalho realizado será

$$\tau = E_2 - E_1 = 10 - 29,5$$

$$\tau = -19,5\text{J}$$

## EXERCÍCIOS COM RESPOSTAS

### ELASTICIDADE

- 1) Dois fios metálicos feitos de materiais A e B têm seus comprimentos e diâmetros relacionados por  $L_A = 2 L_B$  e  $D_A = 4 D_B$ . Quando os fios estão submetidos a mesma força de tração, a relação entre os alongamentos é  $\Delta L_A / \Delta L_B = 1/2$ . Qual é a relação entre os módulos de Young de ambos  $E_A / E_B$ ?

*Resposta:* 1/4.

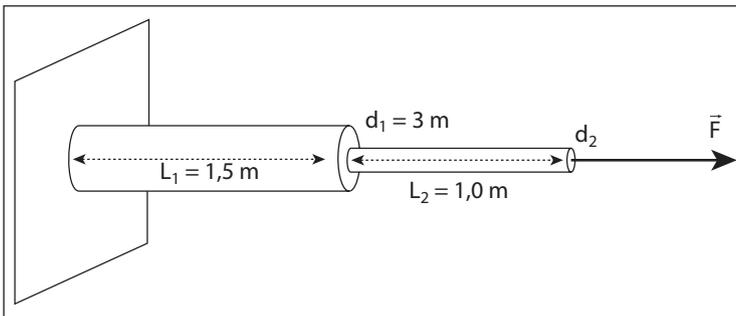
---

- 2) Um cabo de aço com secção transversal de  $5 \text{ cm}^2$  é utilizado para levantar um elevador de 800 kg. Qual é a aceleração máxima que pode ter o elevador, de tal maneira que a tensão  $\sigma$  não exceda  $1/3$  do limite elástico? (limite elástico =  $2,4 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ ).

*Resposta:*  $40,2 \text{ m/s}^2$ .

---

- 3) Duas barras cilíndricas feitas de um mesmo material, com módulo de Young  $E = 2,6 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ , estão sob a ação de uma força  $F = 7 \cdot 10^4 \text{ N}$ , como mostrado na Figura 1.38. Calcular o diâmetro  $d_2$  da barra cilíndrica externa, de tal maneira que o alongamento total de ambas as barras seja 1,25 mm.



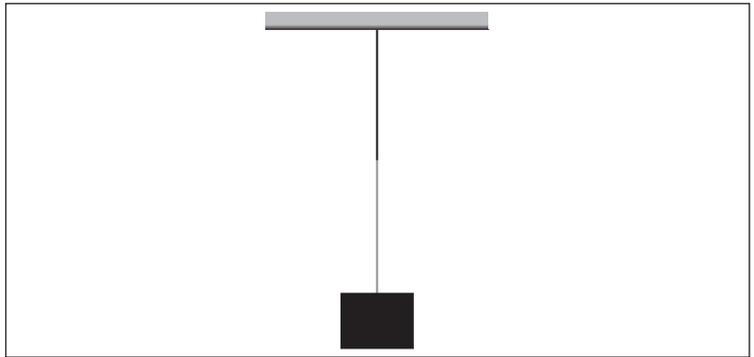
**Figura 1.39**

*Resposta:*  $d_2 = 2,21 \text{ cm}$ .

---

- 4) Um fio de alumínio e outro de aço, ambos com diâmetros iguais, estão unidos por uma de suas extremidades, como mostrado na Figura 1.40. No fio composto é suspenso um peso  $P$ . Calcular:
- a) a relação entre seus comprimentos, de maneira que ambos possuam a mesma elongação;
  - b) a tensão de tração  $\sigma$  que atua sobre cada fio se o fio de alumínio tiver 0,8 m de comprimento e o alongamento de cada um for 2 mm.

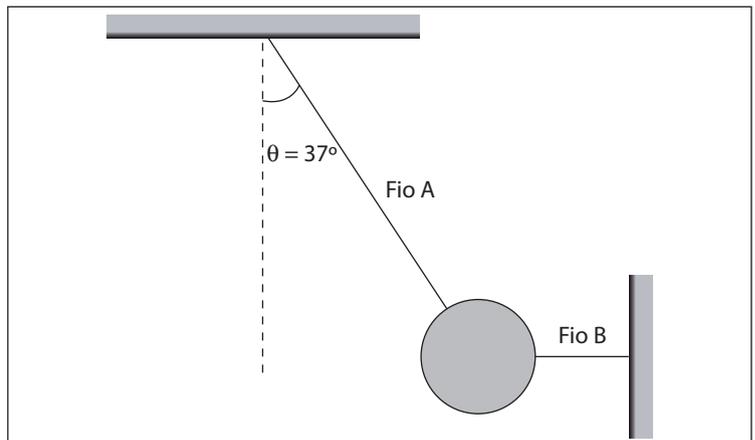
Figura 1.40



*Respostas:* a)  $L_{\text{al}} = (7/20) L_{\text{aço}}$ ; b)  $\sigma_{\text{al}} = 17,5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ ,  $\sigma_{\text{aço}} = 17,5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ .

- 5) Na Figura 1.41, o fio metálico A tem um comprimento inicial de 10 m, secção transversal  $4 \text{ mm}^2$  e módulo de Young  $E = 10^{10} \text{ N/m}^2$ . O peso da esfera é  $10^3 \text{ N}$  e o sistema está em equilíbrio.

Figura 1.41

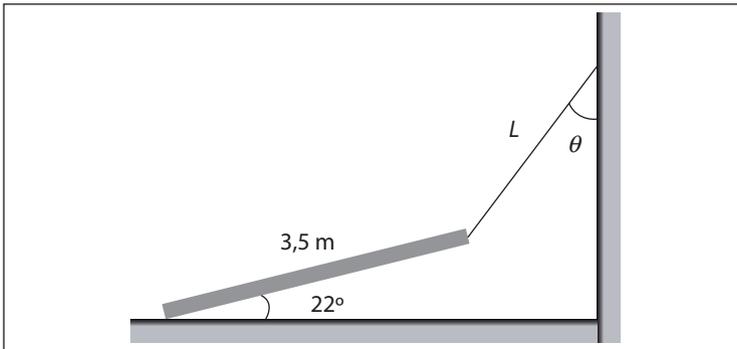


- a) Calcular o alongamento do fio A.  
 b) Se o fio B for solto, qual será o alongamento do fio A quando o corpo estiver na posição mais baixa do seu movimento?

*Respostas:* a) 0,0313 m; b) 0,363 m.

---

- 6) Uma barra metálica uniforme de 80 kg de massa e 3,5 m de comprimento é suspensa por um cabo de aço, de acordo com a Figura 1.42. O sistema está em equilíbrio estático se  $\theta = 60^\circ$ . Calcular:
- a) a força de tração no cabo e a força de atrito;  
 b) a secção transversal do cabo, de tal maneira que não ultrapasse o limite de linearidade ( $3,6 \cdot 10^8$  Pa) e  
 c) o alongamento  $\Delta L$  se o comprimento inicial do fio for  $L = 5$  m e o módulo de Young for  $E = 20 \cdot 10^{10}$  Pa.



**Figura 1.42**

*Respostas:* a)  $2,6 \cdot 10^3$  N;  $2,3 \cdot 10^3$  N; b)  $7,25 \text{ mm}^2$ ; c) 9 mm.

---

## OSCILAÇÕES

- 7) Um objeto com movimento harmônico simples tem um deslocamento máximo de 0,2 m em  $t = 0$  s, e realiza oito oscilações em um segundo.
- a) Encontrar os tempos para as posições 0,1 m; 0 m;  $-0,1$  m e  $-0,2$  m, com referência ao ponto de equilíbrio, no início do movimento.  
 b) Quais são as velocidades nesses pontos?

*Respostas:* a) 0,02 s, 0,031 s, 0,042 s, 0,0625 s;  
b)  $-8,70$  m/s,  $-10,05$  m/s,  $-8,70$  m/s, 0.

---

- 8) Um objeto realiza um movimento harmônico simples, com uma frequência de 10 Hz e velocidade máxima de 3 m/s. Qual é a amplitude do movimento?

*Resposta:* 0,048 m.

---

- 9) A frequência de uma partícula que oscila no extremo de uma mola é de 5 Hz. Qual é a aceleração da partícula quando o deslocamento é 0,15 m?

*Resposta:*  $-148$  m/s<sup>2</sup>.

---

- 10) Um objeto, unido à extremidade de uma mola, realiza um movimento harmônico simples. Sua velocidade máxima é de 3 m/s e sua amplitude de 0,4 m. Qual é o deslocamento quando a velocidade é 1,5 m/s?

*Resposta:* 0,35 m.

---

- 11) Uma partícula de 0,5 kg unida no extremo de uma mola tem um período de 0,3 s. A amplitude do movimento é de 0,1 m.

- a) Qual é a constante da mola?  
b) Qual é a energia potencial armazenada na mola no deslocamento máximo?  
c) Qual é a velocidade máxima da partícula?

*Respostas:* a) 219,10 N/m; b) 1,096 J; c) 2,09 m/s.

---

- 12) Um objeto com massa de 10 g realiza um movimento harmônico simples, com amplitude igual a 24 cm e período 4 s. Se o deslocamento em  $t = 0$  s é 24 cm, calcular:

- a) a posição do objeto no instante  $t = 0,5$  s;  
b) a intensidade e direção da força que atuam sob o objeto quando  $t = 0,5$  s, e

- c) o tempo necessário para que o objeto se desloque da posição inicial  $x = 24$  cm até o ponto de elongação  $x = -12$  cm.

*Respostas:* a) 0,17 m; b)  $-4,2 \cdot 10^{-3}$  N; c) 1,33 s.

---

- 13) Um objeto de 4 kg, no extremo de uma mola, em posição vertical, puxa a mola 16 cm a partir da posição de equilíbrio. Se no lugar do objeto de 4 kg for colocado outro de 0,5 kg e posto em movimento harmônico simples, qual será o período de oscilação desse sistema?

*Resposta:* 0,28 s.

---

- 14) Uma das extremidades de um diapasão executa um movimento harmônico simples com uma frequência de 1.000 oscilações por segundo e amplitude de 0,4 mm. Calcular:

- a) a velocidade e a aceleração máxima do extremo do diapasão e  
b) a velocidade e a aceleração do extremo do diapasão para um deslocamento de 0,2 mm.

*Respostas:* a) 2,51 m/s,  $-15,8 \text{ m/s}^2$ ; b) 2,17 m/s,  $-8.223 \text{ m/s}^2$ .

---

- 15) Um oscilador harmônico simples encontra-se em um determinado instante de tempo na posição igual à terceira parte da sua amplitude. Determinar, para esse instante, a relação entre a energia cinética e a energia potencial  $E_c/E_p$ .

*Resposta:* 8.

---

- 16) Depois de pousar em um planeta desconhecido, um astronauta constrói um pêndulo simples de 50 cm de comprimento. Ele verifica que o pêndulo simples executa 100 oscilações em um tempo de 136 s. Qual é o valor da aceleração da gravidade nesse planeta?

*Resposta:*  $10,8 \text{ m/s}^2$ .

---

- 17) Calcular o período de oscilação de um pêndulo simples de 100 cm de comprimento localizado em um planeta desco-

nhecido. O peso dos objetos nesse planeta é 0,6 vezes o peso da Terra.

*Resposta:* 2,59 s.

---

- 18) Supondo que a aceleração da gravidade na superfície da Lua seja  $1,67 \text{ m/s}^2$ , e que um relógio de pêndulo, ajustado para trabalhar na Terra, seja transportado até a Lua, que porcentagem de seu comprimento na Terra deverá ter o novo pêndulo na Lua para que o relógio mantenha seu funcionamento?

*Resposta:* 17%.

---

- 19) Para medir o tempo, construímos um relógio de pêndulo que é formado por uma bola metálica e uma corda. Fazemos o pêndulo oscilar de maneira que a bola metálica golpeie lâminas metálicas nos extremos de suas oscilações. Supondo que o pêndulo seja ideal,

- a) Qual deve ser o comprimento da corda para que o intervalo entre os golpes nas lâminas metálicas seja de 1 s?
- b) Com o passar do tempo é muito provável que a corda fique esticada. O relógio se movimenta mais lenta ou mais rapidamente?

*Respostas:* a) 0,993 m; b) lento.

---

- 20) Um pêndulo físico consiste em uma régua que oscila em torno de um eixo, que passa por uma de suas extremidades e é perpendicular ao plano de oscilação. A régua oscila com um período  $T = 0,898 \text{ s}$ . Qual é o comprimento da régua?

*Resposta:* 0,3 m.

---

- 21) Uma haste de comprimento  $L = 1 \text{ m}$  oscila em torno de um eixo que se encontra a uma distância  $L/4$  da metade da haste. Qual é o período de oscilação desse pêndulo físico?

*Resposta:* 1,53 s.

---

- 22) Um pêndulo físico consiste de uma esfera sólida, com raio de  $r_e = 5 \text{ cm}$  e massa

$M_e = 200$  g, presa a uma haste uniforme, com comprimento  $L_h = 50$  cm e massa

$m_h = 50$  g, como mostrado na Figura 1.43.

- Calcular o momento de inércia em torno da articulação (pivô);
- calcular a distância entre o ponto de pivô e o centro de massa do pêndulo físico e
- determinar o período de oscilação do pêndulo.

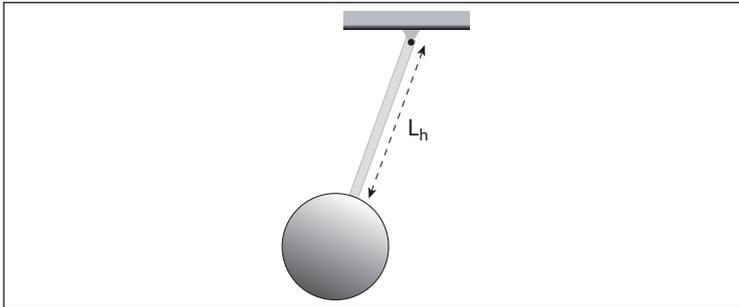


Figura 1.43

Respostas: a)  $0,065 \text{ kg/m}^2$ ; b)  $0,49$  m; c)  $1,46$  s.

- 23) Uma placa retangular possui lados de comprimento  $a = 30$  cm e  $b = 40$  cm. A placa é suspensa por um pivô que passa por um pequeno furo, a uma distância  $d = 15$  cm do seu centro de massa, como mostrado na Figura 1.44. Se colocarmos a placa para oscilar em pequenos ângulos, qual será o período de oscilação?

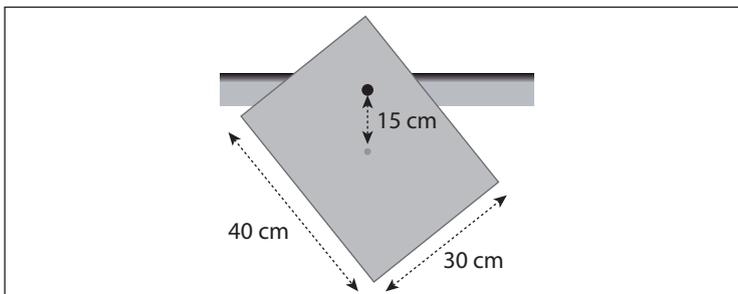
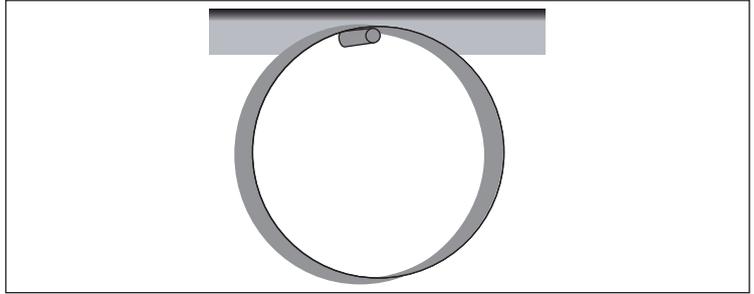


Figura 1.44

Resposta:  $1,75$  s.

- 24) Um aro suspenso numa haste, como ilustrado na Figura 1.45, oscila como um pêndulo em MHS de pequenos ângulos com um período  $T = 1,55$  s. Calcular o raio do aro.

**Figura 1.45**



*Resposta:* 0,3 m.

---

- 25) Um pêndulo simples, ajustado para ter um período de 2,0 s, é colocado em movimento. Após 20 minutos, a amplitude do pêndulo diminui para  $\frac{1}{4}$  do valor inicial. Se o movimento do pêndulo pode ser representado pela equação  $\theta = \theta_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(2\pi ft)$ , qual é o valor de  $1/2\tau$ ? (considere  $e^{-1,386} = 1/4$ ).

*Resposta:*  $1,2 \cdot 10^{-3}$  kg/s.

---

- 26) Um corpo de 50 g está preso na extremidade de uma mola de constante elástica 25 N/m. O deslocamento inicial é igual a 0,3 m. Uma força de amortecimento da forma  $-bv$  atua sobre o corpo, e a amplitude do movimento diminui de 0,1 m em 5 s. Calcule o módulo da constante de amortecimento  $b$ .

*Resposta:* 0,022 kg/s.

---

- 27) Um oscilador harmônico amortecido consiste de um bloco de massa 1 kg, uma mola de constante elástica 5 N/m e uma força de amortecimento da forma  $-bv$ , em que  $b = 200$  g/s. O bloco é puxado para baixo 5 cm da sua posição de equilíbrio, e depois liberado.

a) Qual é o tempo necessário para que a amplitude da oscilação diminua à metade do seu valor inicial?

- b) Qual é o número de oscilações efetuadas pelo bloco nesse tempo?

*Respostas:* a) 6,93 s; b) 2,46 oscilações.

---

