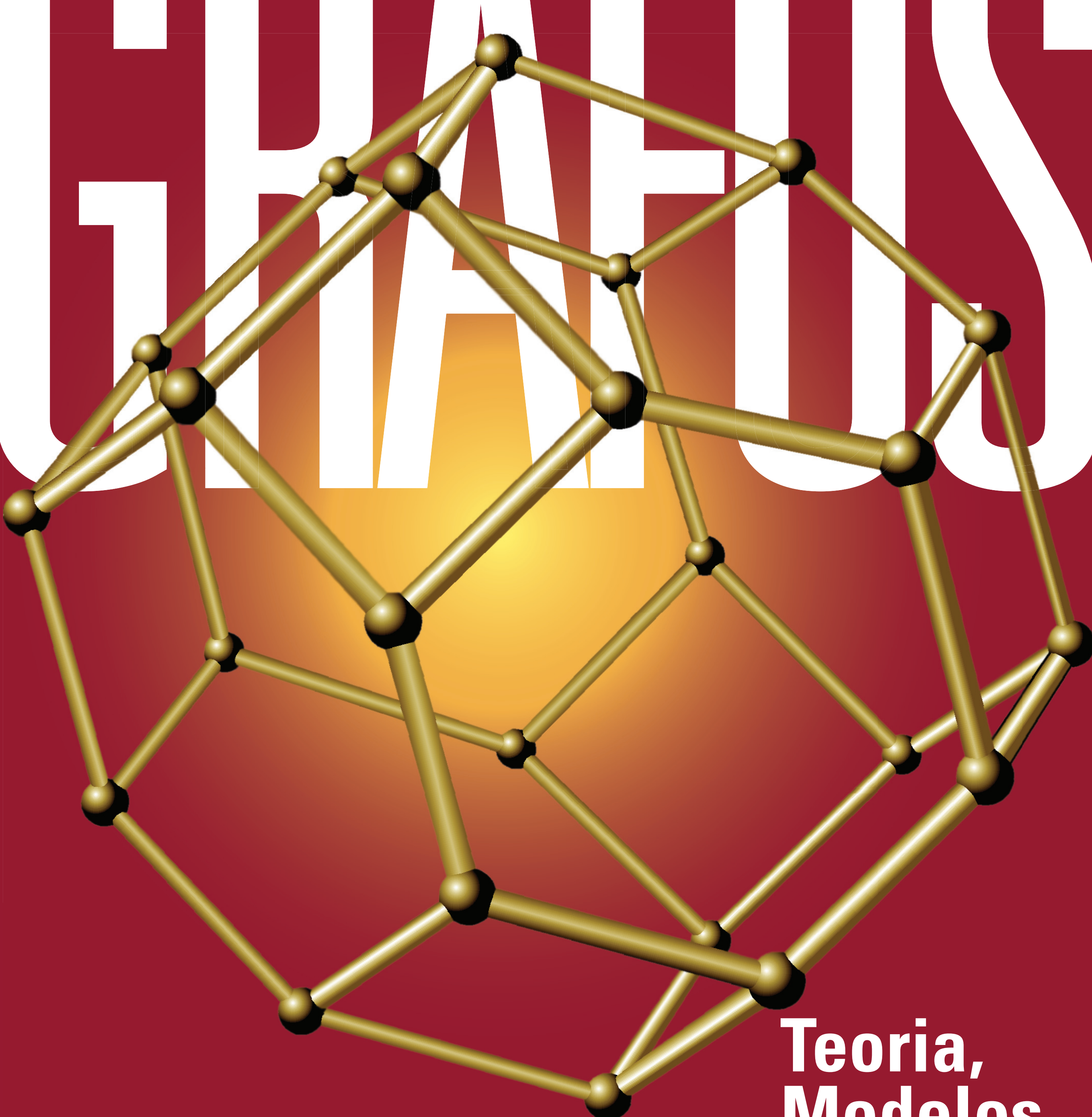
Paulo Oswaldo Boaventura Netto

GRAFOS



Teoria, Modelos, Algoritmos

Blucher

5ª Edição revista e ampliada

Grafos:
Teoria, Modelos, Algoritmos

Blucher

Paulo Oswaldo Boaventura Netto
Professor da Área de Pesquisa Operacional
Programa de Engenharia de Produção
COPPE/UFRJ
Pesquisador do CNPq

Grafos:
Teoria, Modelos, Algoritmos

5ª edição
revista e ampliada

Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos

Editora Edgard Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-012 – São Paulo – SP – Brasil
Tel 55 11 3078-5366
editora@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed.
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,
Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

Ficha catalográfica estabelecida pelo SDD/CT/UFRJ

Boaventura Netto, Paulo Oswaldo
Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos /
Paulo Oswaldo Boaventura Netto. – São Paulo:
Blucher, 2011.

XIV + 326 p. ilust. 21x28 cm
ISBN 978-85-212-0680-4
Inclui índices, bibliografia.

1. Grafos – Teoria. 2. Modelos matemáticos.
3. Algoritmos. 4. Pesquisa Operacional. I. Título.

19.CDD-001.424
19.CDD-511.5

Este livro continua sendo dedicado

a Monteiro Lobato

um homem do seu tempo,
que viu o futuro nas crianças que o leram
com a clareza que falta aos seus detratores de hoje,
que mal conseguem entender o presente.

e a Sandra,

colega e educadora, e
companheira da minha vida,
pela inspiração, afeto, sensibilidade,
lucidez e apoio diário ao longo dos anos.

e, agora, também, à memória do Professor

Roberto Diéguez Galvão

colega e amigo,
e um profissional da maior competência e seriedade,
que nos deixou em 2008.

Tudo seria muito fácil, se não fossem as dificuldades.
Barão de Itararé

A imaginação é mais importante que o conhecimento.
Albert Einstein

(1996) Em nossa primeira edição, dissemos que...

Muitas pessoas colaboraram com este livro: alunos de graduação e pós-graduação de muitas turmas, em particular os que comigo realizaram trabalhos de pesquisa; colegas de linha de pesquisa e os que trouxeram críticas e sugestões a este texto; discussões sobre pesqusa operacional e grafos, parcerias em trabalhos; e o pessoal de apoio que, no exercício de suas funções, foi de extrema valia para a consecução deste objetivo.

Não há como citar a todos; quero, então, particularizar os colegas Nair Maia de Abreu, Samuel Jurkiewicz, Roberto Diéguez Galvão, Lilian Markenzon e Nelson Maculan. Devo ainda lembrar as pessoas que me auxiliaram na revisão que procurou eliminar os "diabos vermelhos" - os erros que, no dizer de Monteiro Lobato, saem correndo e pulando da lombada e de entre as páginas, assim que a obra é publicada. Sou, evidentemente, o único responsável pelos que ainda assombrarem os leitores.

Em relação às instituições, a COPPE/UFRJ vem evidentemente em primeiro lugar: nela tenho passado todos os anos durante os quais fui irremediavelmente seduzido pela teoria dos grafos. O CNPq e a CAPES tiveram grande importância pelo apoio conferido a este livro. Ele é, neste sentido, mais uma prova da importância do apoio institucional para a pesquisa e, em geral, para o aperfeiçoamento da qualidade e para o aumento da produtividade, nesse ambiente de trabalho cuja existência, continuidade e produção em todas as áreas da arte, da ciência e da cultura são da maior importância para o país, que é o da universidade pública e gratuita.

(2001) Na segunda, foi importante acrescentar...

Que quero agradecer às mesmas pessoas, e a mais algumas, que de alguma forma contribuíram para que esta segunda edição viesse à luz: Samuel Jurkiewicz, que a revisou, Nair Abreu, que a prefacia, além de nossos alunos de mestrado e de doutorado, que contribuíram tanto com as correções e sugestões quanto com as citações de material de suas teses.

Quanto às instituições, cabe registrar a queda incessante nos recursos para pesquisa: elas fazem o que podem, sabedoras da importância de seu trabalho, para que o Brasil não seja eternamente um "país do futuro". A profissão de fé, que transcrevo acima, continua no entanto válida. No atual momento, acredito que o que nos move possa ser expresso pela voz livre de Nara Leão, viva embora desaparecida:

E no entanto é preciso cantar
Mais que nunca é preciso cantar...

(2003) Na terceira, dissemos que...

Entramos em um tempo de esperanças: se elas se tornarão em realidades ou não, isso depende de uma trajetória complexa, em um mundo difícil. Neste contexto, vejo este trabalho, em uma imagem um tanto sovada pelo uso, como uma pequena pedra em uma parede que vai sendo construída de geração em geração. Há quem possa colocar nela pedras maiores, e esperamos que essas pessoas, organizações e instituições o façam de forma que a parede não tombe sobre nossas cabeças, receio permanente nos tempos que passaram. Há muito o que fazer, até que deixemos para trás a posição de país subdesenvolvido e exportador de matérias-primas; mas isso exige conhecimento e criatividade, para que se evitem as receitas prontas e importadas tão do gosto de muitos de nossos empresários. Vale dizer, exige a prática do raciocínio abstrato ao lado da visão aplicada. E, nesse momento, nossa pequena pedrinha faz algum sentido.

Esta edição conta com o apoio de Valdir Agustinho de Melo, cuja proficiência informática foi muito importante para a correção e a clareza dos algoritmos aqui contidos. Agradeço a gentileza e a paciência de Samuel Jurkiewicz, companheiro de muitas discussões frutíferas, em prefaciá-la.

(2006) Na quarta, dissemos que...

O livro entra na fase do contato direto com a Internet, através do sistema ***Algo_De_Grafos*** *e de seus algoritmos, obra competente e dedicada de Denis Silveira e Valdir Melo. Graças a esse sistema, muitos problemas de caráter didático de porte acima da resolução manual poderão ser modelados e processados, o que deverá facilitar bastante a vida de professores e alunos usuários deste livro. Ao mesmo tempo, como dito adiante em vários lugares, importantes mudanças foram feitas na nomenclatura e na notação, para torná-las mais próximas das ainda não completamente consolidadas tendências da literatura internacional de grafos. Mais uma atualização parcial e mais uma revisão devem contribuir para formulações mais exatas e para a exposição de novas ideias.*

(2012) E, agora, chegando à quinta...

A quarta edição teve três reimpressões. Os seis anos decorridos trouxeram a necessidade da revisão do conteúdo nela divulgado, sem a pretensão da completude: o número de livros e de artigos publicados sobre a teoria e as aplicações de grafos continua a crescer. Procuramos, com prioridade, o aperfeiçoamento – inclusive com a retirada de algum material que passa a ser apenas referenciado. Aperfeiçoar é importante – e não apenas no texto dos livros – em um momento no qual deixamos de ser o eterno "país do futuro", ao concluirmos que o futuro é hoje.

Algumas considerações

Ao criar a matemática, o ser humano não teve como imprimir-lhe o senso de humor característico da espécie. O riso é próprio do homem, apesar do arquétipo do Padre Jorge, de "O nome da rosa"; por essa razão, achei importante temperar a eventual aridez da obra, bem como o possível cansaço de quem empreenda estudá-la, com o sensível acacianismo de um dos maiores humoristas brasileiros e com as citações do início dos capítulos, relacionadas sempre de algum modo com o respectivo conteúdo.

Escrevo estas palavras iniciais na primeira pessoa do singular: antes de expor o material que reuni sobre a teoria dos grafos, desejei aqui comparecer em caráter pessoal e não, apenas, com a roupagem do "autor". Procuro mostrar algo do que sou, resumidamente, para não chegar ao narcisismo.

Entendo que o leitor deva entrar alegremente nestas páginas; isto não envolve apenas uma diversão momentânea, mas ainda a importância do apelo à imaginação - também própria do ser humano e que, neste trabalho, vem a ser exigida ao se abordar a questão fundamental da construção de modelos. Neste momento o presente livro, como o anterior, é uma obra aberta - com o que volto a citar Umberto Eco – no sentido em que o seu aproveitamento exigirá uma contribuição significativa por parte da imaginação do leitor, para um aspecto da construção do conhecimento em relação ao qual pouco mais se pode fazer, do que discutir premissas e apresentar exemplos: afasto-me bastante, assim, da clássica obra de matemática na qual toda a verdade se encontra nos teoremas e nas definições. O modelo exige mais do que isso: ele exige uma visão que a matemática não pode dar. Sendo ela uma linguagem e um instrumento de investigação e de resolução, não faz contato com o mundo isoladamente.

Este texto aproveita algo da experiência com o ensino de grafos que reuni, ao longo de três décadas, em particular na pós-graduação, onde utilizei um método interativo de avaliação no qual se faz apelo à criatividade dos alunos através de exercícios a serem resolvidos em grupo, de forma abrangente e investigativa e não puramente formal. O uso da imaginação, assim estimulado, procura atender a uma questão fundamental: que o diga Einstein, citado acima.

Por esse motivo, não são fornecidas as respostas dos exercícios, boa parte dos quais foi formulada para uso neste esquema; sugiro aos leitores que assim os considerem e abordem. Deixei as questões técnicas de organização para o primeiro capítulo, por querer neste texto, apenas, os temas conceituais.

Ao contrário da imaginação, o conhecimento pode ser detalhado em livros. A pesquisa operacional e os algoritmos já foram beneficiados pelo trabalho de autores nacionais, que deicaram parte do seu tempo a esse trabalho. Este autor gostaria que a teoria e as aplicações de grafos recebessem atenção semelhante, de modo a que se colocassem no mercado um maior número de obras.

A possível estreiteza da especialização, essa consequência inevitável da expansão do conhecimento, é uma deficiência inevitável. A generalidade pode ter sido o apanágio de um Leonardo da Vinci, mas nem mesmo Oppenheimer, ou Russell, gênios polivalentes da atualidade, teriam tido qualquer possibilidade de alcançá-la. A abrangência possível, diante da infinitude do Universo e, portanto, do conhecimento, é a da interdisciplinaridade: meta que jamais alcançamos individualmente, mas que se torna acessível através dos usuários de cada parte finita desse conhecimento.

Apesar disso, olhar essa infinitude é essencial para quem pensa em criar, contribuir, com o mínimo que seja, para explorá-la. Assim o fez Newton, com quem deixo o leitor por instantes: sua tradicional visão filosófica da verdade não nos faz esquecer do seu gênio e da sua capacidade de inovação. Para ressaltar a importância de sua figura e de sua atitude diante do mundo, nada melhor do que o extremo oposto, a do parlamentar norte-americano de meados do século XIX – cujo nome deixei de registrar, por falta de interesse – que solicitava em um discurso o fechamento do registro de patentes, por não haver, em sua visão, nada mais a ser inventado. Citar o fato, porém, é importante: continuam existindo pessoas como ele: por exemplo, os arautos do "fim da História".

I know not what I appear to the world, but to myself I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell, whilest the great ocean of truth lay all undiscovered before me.

Parece-me ter sido apenas uma criança brincando à beira do mar e encontrando, ora uma pedra mais polida, ora uma concha mais bonita que as outras, enquanto o vasto oceano da Verdade se estendia inexplorado diante de mim.

Isaac Newton

A beleza da frase de Newton não nos deve fazer esquecer que o conhecimento é uma criação humana: não há, no mundo, uma verdade *a priori* esperando para ser descoberta. Em nossa conclusão, falamos do processo infinito e maravilhoso da construção do conhecimento. Esta construção se dá, de fato, dentro de nós mesmos, quando traçamos nosso próprio caminho de pesquisa, a cada momento em que uma novidade aparece: encontro extraordinário que compensa todas as dúvidas, esforços e dificuldades.

Prefácio da primeira edição

Esta obra extensa e de forte conteúdo teórico é fruto do trabalho sério de um professor-pesquisador que se dedica à busca de novos resultados e novas formulações para os problemas de natureza combinatória. *Grafos:Teoria,Modelos, Algoritmos* nos fornece um estudo moderno e rigoroso dos grafos, lançando mão de muitas ilustrações visando à compreensão dos conceitos e fundamentos introduzidos.

Paulo O. Boaventura Netto é profundo conhecedor das sutilezas de nossa língua: este livro é uma expedição discreta pelos caminhos das florestas outonais coloridas (quatro cores: verde, amarelo, vermelho e o azul do céu), onde mesmo os casamentos perfeitos são realizados em grafos não perfeitos. Apresenta percursos de ida e volta mais curtos ou mais longos, oferece também ao leitor ou à leitora a oportunidade de percorrer o mesmo circuito infinitas vezes. Os carteiros e os viajantes têm conhecimento dos tópicos arduamente solúveis quando trilham as rotas em seu trabalho quotidiano, mas os especialistas de pesquisa operacional terão sempre dificuldades de passar uma só vez em cada ponte, retornando ao ponto inicial, claro, sem entrar na água.

Já era tempo da comunidade brasileira de pesquisa operacional, matemática discreta, ciência da computação, transportes, telecomunicações etc., poder contar com um excelente texto sobre a teoria dos grafos, escrito por um colega de extrema competência. Temos uma referência precisa que é um manual para cursos de graduação e pós-graduação, assim como para os profissionais do setor em suas atribuições de modelar os problemas altamente combinatórios de tomada de decisão.

Nelson Maculan
Professor Titular, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE/UFRJ

Prefácio da segunda edição

O autor deste livro dispensa apresentação. Foi, sem dúvida, um dos pioneiros em divulgar a Teoria dos Grafos no Brasil, introduzindo grafos como modelos para problemas aplicados nas áreas de engenharia. Há mais de 20 anos vem trabalhando como professor, pesquisador e orientador de teses, divulgando e ensinando, desde os mais simples aos mais complicados segredos desta bonita estrutura algébrica capaz de se transformar em desenhos intuitivos que muito nos auxiliam na interpretação da realidade.

O livro "Grafos, Teoria, Modelos e Algoritmos" foi muito bem apresentado pelo professor Nelson Maculan na sua primeira edição. Em continuação, quero acrescentar o seguinte:

i) os dez primeiros capítulos contêm tópicos essenciais para uma introdução aos grafos. Podem ser ministrados em disciplinas de graduação ou pós-graduação, para cursos de Engenharia, Economia, Administração, Biologia, Química e de outras áreas em ciências aplicadas;

ii) os dois últimos capítulos se destinam aqueles que mais se motivaram pela teoria dos grafos e que certamente ali haverão de encontrar as primeiras orientações para continuar seus estudos neste assunto tão absorvente.

Nair Maria Maia de Abreu
Pesquisadora do CNPq e Colaboradora da Área de Pesquisa Operacional
Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ

Prefácio da terceira edição

A primeira vez que travei conhecimento com a Teoria dos Grafos foi no curso de mestrado do Professor Paulo Oswaldo Boaventura Netto, em 1988, no Programa de Engenharia de Produção da COPPE/UFRJ. O livro-texto – de sua autoria – era o embrião deste que hoje sou chamado a prefaciar. Já naquele volume havia bem mais do que cabe num curso de introdução, tal a abundância de temas, exemplos, aplicações e exercícios ali expostos.

Desde então o “professor Boaventura” passou a ser para mim, primeiro “Boaventura” – o orientador de mestrado e hoje o colega e amigo que respeitosamente chamamos de “Boa”. Ao mesmo tempo pude testemunhar de perto a aparição de mais versões e edições, cada vez mais aprimoradas, do texto que para mim já tinha sido um convite, um guia e continua a ser sempre uma obra de referência.

Na versão atual, e nesta edição, encontraremos as definições básicas e os temas centrais da Teoria dos Grafos; encontraremos a mesma abundância de exemplos e aplicações; mas o autor não poupou esforços em colocar o que de mais atual tem acontecido neste ramo ainda um pouco “clandestino” da Matemática. Trechos foram acrescentados aos capítulos e as referências abrangem o próprio ano da edição do livro, incluindo sítios da Internet. À já alentada coleção de exercícios vêm juntar-se outros, alguns sugeridos por alunos em suas teses de doutorado ou mesmo utilizados em provas do curso de Grafos, ainda no mesmo Programa de Engenharia de Produção da COPPE/UFRJ.

Enfim, uma obra sempre em movimento (como o próprio Boa...). A versão que temos em mãos, eu e o leitor, é fruto do entusiasmo com que Boaventura se dedica à Teoria dos Grafos há já mais de 20 anos e da minúcia, conhecimento e esforço de um profissional da educação consciencioso como tenho visto poucos. É um livro único na língua portuguesa por sua abrangência e profundidade.

Tive a boa sorte de há 15 anos encontrá-los, ao Boa, e ao livro. Tem sorte agora o leitor de encontrar esta versão do livro, cada vez melhor. E acredito que, como eu, a sempre crescente "comunidade dos Grafos" no Brasil saberá compreender a importância desta obra.

Samuel Jurkiewicz , D.Sc.
Professor Colaborador do Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ
Professor do Departamento de Engenharia Industrial – Escola Politécnica da UFRJ

Prefácio da quarta edição

Não é incomum que um autor prefacie uma obra sua. Até o momento presente, isto não foi feito aqui: esta edição, no entanto, exige algumas explicações que consideramos justificarem a presença deste texto.

Para começar, foi feita uma profunda revisão na nomenclatura e na notação. Na edição anterior, já havíamos adotado a notação atual $\chi(\mathbf{G})$ para o número cromático de um grafo **G**, abandonando a antiga notação $\gamma(\mathbf{G})$ de Berge: atualmente, esta letra é utilizada para indicar diversos números de dominância. Agora, começamos por chamar a um grafo $\mathbf{G} = (\mathbf{V},\mathbf{E})$, em acordo com a notação mais usada internacionalmente. A letra **A** foi reservada para a matriz de adjacência, o que julgamos preferível a designar por ela o conjunto de ***arestas***, ou de ***arcos***. Seguimos, ao longo da obra, com a troca das designações e dos nomes, onde isso se tenha mostrado conveniente. Naturalmente, tudo isso está indicado no início de cada capítulo, a começar pelo primeiro.

Em seguida, pela primeira vez este livro dispõe de um suporte computacional: o editor ***Algo_De_Grafos***, de Denis Silveira, dá apoio a um conjunto de rotinas da autoria de Valdir Melo, que correspondem a boa parte dos principais algoritmos que constam do texto. ***Esta programação é de cópia livre e não tem qualquer valor comercial,*** destinando-se à resolução de exercícios que exijam o seu uso. Na seção "Endereços Internet" estão indicadas as formas de acesso a esses recursos. Resta-me agradecer penhoradamente aos dois autores, pelo trabalho despendido e reafirmar a minha responsabilidade pelos erros que restarem no texto.

Finalmente, agradeço ao público brasileiro interessado em grafos, que tem utilizado esta obra de forma consistente, levando o autor à conclusão que ela, de fato, tem atingido o seu objetivo de colocar algum conhecimento sobre a teoria e as aplicações de grafos à disposição de quem dele tenha necessidade.

Paulo Oswaldo Boaventura Netto
Professor Titular (aposentado) e Colaborador Pleno
Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ

Prefácio da quinta edição

Volto a prefaciar, porque este livro – dedicado à pós-graduação e à pesquisa – tem, desde 2009, um companheiro elaborado para uso de disciplinas de grafos ao nível de graduação. Trata-se de *Grafos: introdução e prática*, no qual tive o prazer e a honra de dividir a autoria com Samuel Jurkiewicz, um colega que dedicou sua vida profissional ao ensino da matemática e à pesquisa em grafos.

Portanto, este prefácio traz a peculiaridade de ser dedicado a outro livro: no entanto, a presença de uma nova obra esteve na base de muitas das modificações aqui feitas. Aqui, introduzimos algumas das novidades que julgamos mais interessantes, bem como um razoável número de novas referências. As 722 que coletamos nesta edição não passam de uma gota de água no oceano. Cabe ao leitor interessado encontrar na Internet aquilo do que precisar, que aqui não se encontre.

Esta edição segue a ortografia determinada pelo novo Acordo. Desejo, no entanto, manifestar minha opinião contrária às diversas tentativas de unificar o português do Brasil e o de Portugal. Considero-as inúteis, seu único resultado sendo, em minha opinião, dificultar o conhecimento da língua por milhões de pessoas que ainda precisam desenvolvê-lo.

Paulo Oswaldo Boaventura Netto
Professor Titular (aposentado) e Colaborador Pleno
Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ

Conteúdo

Capítulo 1
Introdução

Though this be madness, yet there is method ín it.

Shakespeare, Hamlet.

1.1 Prólogo

O desenvolvimento de uma teoria matemática das relações entre elementos de conjuntos discretos é uma conquista bastante recente, se comparado aos sucessos da "matemática do contínuo", em particular após a contribuição decisiva de **Newton** e de **Leibniz,** com a invenção do cálculo infinitesimal. Esta contribuição forneceu, logo de início, um enorme impulso à física, em particular à mecânica celeste, na qual permitiu a descrição de fenômenos conhecidos e acompanhados empiricamente desde a antiguidade. A geometria analítica havia sido inventada por **Descartes** e o uso do cálculo no seu contexto veio permitir a fácil resolução de problemas considerados difíceis ou insolúveis. Como exemplos de problemas tradicionais, podemos citar o do "teorema da parábola" que teria exigido, segundo a tradição, sete anos de trabalho de **Arquimedes;** as periodiocidades dos eclipses do sol – conhecidas ainda antes do modelo geocêntrico – e as trajetórias balísticas (as do fogo grego eram objeto de prática de artilharia na época em que o mesmo **Arquimedes** concentrava o sol com espelhos para incendiar navios inimigos à distância). Tudo isso se tornou simples ao se utilizar o instrumental do cálculo.

Dos problemas tradicionais se passou à novidade, ao se aplicar o novo instrumental a um sem-número de questões físicas, até que **Einstein** formulou sua teoria restrita usando os recursos da análise tensorial (hoje mais conhecida como geometria diferencial), levando a um notável triunfo o poder do conhecimento matemático acumulado em dois séculos.

Uma motivação semelhante parece ter faltado ao estudo dos conjuntos discretos, limitado de início a uma visão combinatória possivelmente relacionada aos jogos divinatórios (na China, com o **I Ching**) e que começou a ter aplicação apenas com **Pascal** no cálculo de probabilidades; as propriedades do conjunto dos números naturais suscitaram a curiosidade de muitos matemáticos – na maioria dos casos, sem motivação aplicada — desde o tempo de **Eratóstenes** e, talvez como ponto máximo em sua crônica, tiveram a contribuição do enigmático gênio que foi **Fermat**, cujo "grande teorema" esperou 4 séculos por uma prova formal.

Nada disso, no entanto, nos aproxima da topologia, já chamada por **Leibniz** de "geometria de posição": seu objetivo, o estudo das propriedades geométricas não afetadas por mudanças de forma, pareceria abstruso a um geômetra clássico. O estudo dos nós e das superfícies oferece, certamente, questões as mais difíceis e mesmo sua abordagem elementar pode exigir um elevado nível de abstração. A topologia das redes, em comparação, é mais simples, ao menos na compreensão de suas estruturas: e um matemático e geômetra como **Euler,** em pleno século XVIII, formulou e resolveu o primeiro dos seus problemas, caso isolado e sem maior importância em meio à sua fantástica produção científica. Talvez essa pouca importância tenha desestimulado outros a seguir-lhe os passos, apesar da clareza da abordagem por ele utilizada; ficou assim isolado, em meio aquele século, o primeiro problema do que hoje chamamos a teoria dos grafos. Parece razoável que tal desinteresse estivesse relacionado à falta de aplicações práticas; o problema de **Euler** não passava de uma charada matemática e as primeiras incursões futuras no campo, mais de um século depois, foram vinculadas a aplicações em áreas bastante disjuntas entre si, o que não contribuiu para que os resultados obtidos fossem facilmente reunidos.

O desenvolvimento da teoria dos grafos veio se dar, finalmente, sob o impulso das aplicações a problemas de otimização organizacional, dentro do conjunto de técnicas que forma hoje a pesquisa operacional, já na segunda metade do século XX. Evidentemente, tal desenvolvimento não se teria dado sem a invenção do computador, sem o qual a imensa maioria das aplicações de grafos seria totalmente impossível. É interessante observar que, uma vez "descoberta" a teoria, diversas aplicações a muitos outros campos de conhecimento, tanto nas ciências físicas como nas humanas, foram rapidamente desenvolvidas. Vale a pena registrar que o primeiro livro dedicado à teoria dos grafos – a *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, de König – um dos pioneiros da forte escola húngara – data de 1936 e que a imensa maioria das publicações – livros e periódicos – apareceu a partir de 1970. Uma importante fonte histórica é o livro de Biggs, Lloyd e Wilson, [BLW86] e, para um primeiro contato com a teoria, uma apresentação informal de leitura agradável é Hartsfield e Ringel [HR94].

1.2 Um pequeno histórico da teoria

Podemos dizer, como **Harary**, que a teoria dos grafos foi redescoberta muitas vezes; ou, então, que problemas do interesse de diversas áreas foram estudados separadamente e mostraram características semelhantes. Importante, de qualquer modo, é observar que o período transcorrido entre a demonstração de **Euler** e a última década do século XIX – mais de 150 anos - viu, apenas, o surgimento de alguns poucos trabalhos. Assim é que, em 1847, **Kirchhoff** utilizou modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos e, ao fazê-lo, criou a teoria das árvores – uma classe de grafos – para caracterizar conjuntos de ciclos independentes. Dez anos mais tarde, **Cayley** seguiria a mesma trilha, embora tendo em mente outras aplicações, dentre as quais se destacava a enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados (que têm estrutura de árvore, na nomenclatura de grafos), em química orgânica. Enfim, **Jordan** (1869) se ocupou também das árvores, de um ponto de vista estritamente matemático.

Muitos eventos que provaram ser importantes são relacionados com problemas sem aplicação prática. **Hamilton** (1859) inventou um jogo que consistia na busca de um percurso fechado envolvendo todos os vértices de um dodecaedro regular, de tal modo que cada um deles fosse visitado uma única vez. Excelentes exemplos da imprevisibilidade da aplicação de temas originalmente teóricos, os problemas de **Hamilton** e de **Euler** encontraram aplicação, respectivamente um e dois séculos mais tarde, no campo da pesquisa operacional. **Kempe** (1879) procurou, sem sucesso, demonstrar a "conjetura das 4 cores", apresentada por **Guthrie** a **De Morgan,** provavelmente em 1850. Este problema, um dos mais importantes já abordados pela teoria dos grafos, oferece interesse apenas teórico: trata-se de provar que todo mapa desenhado no plano e dividido em um número qualquer de regiões pode ser colorido com um máximo de 4 cores, sem que duas regiões fronteiriças recebam a mesma cor. **Tait** (1880) divulgou também uma "prova", infelizmente baseada em uma conjetura falsa e **Heawood** (1890) mostrou que a prova de **Kempe** estava errada, obtendo no processo uma prova válida para 5 cores; a prova para 4 cores somente foi obtida em 1976. A importância do problema reside nos desenvolvimentos teóricos trazidos pelas tentativas de resolvê-lo, as quais enriqueceram a teoria dos grafos em numerosos recursos ao longo da primeira metade do século XX: exemplificando, **Birkhoff** (1912) definiu os *polinômios cromáticos;* **Whitney** (1931) criou a noção de *grafo* dual e **Brooks** (1941) enunciou um teorema fornecendo um limite para o número cromático de um grafo [SK76]. E a teoria da coloração em grafos tem atualmente enorme importância na abordagem dos problemas de horários (*timetabling*, em inglês).

Outros eventos importantes podem ser citados: **Menger** (1926) demonstrou um importante teorema sobre o problema da desconexão de itinerários em grafos e **Kuratowski** (1930) encontrou uma condição necessária e suficiente para a planaridade de um grafo. **Turán** (1941) foi o pioneiro do ramo conhecido como *teoria extremal de grafos* e **Tutte** (1947) resolveu o problema da existência de uma cobertura minimal em um grafo [Ha73]. Vale a pena registrar que o termo *grafo* (ou o seu equivalente *graph* em inglês) foi utilizado pela primeira vez por **Sylvester** em 1878, bem antes do livro de **König** em 1936, uma época na qual, conforme **Wilder** [Ha69], o assunto era considerado "um campo morto".

A partir de 1956, com a publicação dos trabalhos de **Ford** e **Fulkerson**, **Berge** (1957) e **Ore** (1962), o interesse pela teoria dos grafos começou a aumentar [Be58], crescendo rapidamente em todo o mundo: conforme cita **Harary**, **ainda** em 1969 foi publicada por **J. Turner** uma bibliografia atualizada até o ano anterior; a versão preliminar dessa bibliografia, datada de 15 meses antes, teve que ser atualizada para publicação, com a inclusão de mais de 500 artigos, totalizando cerca de 2200 referências. Uma publicação de referência, o ***Reviews on Graph Theory,*** conta com 4 volumes de resumos de trabalhos publicados até 1980. Por outro lado, a imensa maioria dos livros sobre grafos foi publicada depois de 1970, em grande parte sob a influência das obras de **Berge** e **Harary**. O desenvolvimento dos computadores levou à publicação de várias obras dedicadas aos algoritmos de grafos, abrindo assim possibilidades crescentes de utilização aplicada da teoria.

1.3 As diferentes escolas e os grupos aplicados

Os primeiros resultados foram europeus e também o foi a primeira escola: a húngara, originada em **König** e desenvolvida por **Erdös**, **Hajnál**, **Turán, Lovász** e outros. Seu interesse derivou da combinatória e alguns de seus autores se dedicaram à teoria extremal, frequentemente utilizada na obtenção de limites de fácil cálculo para parâmetros de difícil determinação. Habitualmente, essa escola trabalha com grafos não orientados. **Erdös** foi, inclusive, considerado o maior matemático do século XX, dentre os que se dedicaram à matemática discreta. Uma visão da sua importância para a teoria dos grafos pode ser dada pelo "survey" de Chung [Ch97], um artigo de 34 páginas dedicado aos problemas em aberto por ele deixados. Para maiores informações sobre ele, ver Hoffman [Ho98].

A escola francesa, seguindo **Berge**, tende a considerar que "todo grafo é orientado, podendo-se eventualmente desconsiderar a orientação"; é, talvez, a que mais se tem dedicado às aplicações no campo da pesquisa operacional. Além dele, nomes de destaque em pesquisa e divulgação da teoria e de suas aplicações são **Roy**, **Ghouila-Houri**, **Kaufmann**, **Roucairol**, **Fournier**, **Faure** e **Minoux**. O próprio Berge, falecido em 2001, teve enorme importância para a teoria dos grafos, tanto por suas contribuições quanto pelo papel que representou seu livro, [Be73], para a divulgação da teoria. Quanto a Roy, uma visão mais próxima da sua contribuição para a teoria é dada por Hansen e de Werra [HW00].

A escola americana sofreu grande influência de **Harary**, também falecido: há preferência pelo estudo de grafos não orientados, embora os orientados recebam atenção. Pesquisadores importantes dessa escola são **Chartrand**, **Ore**, **Hu**, **Fulkerson e Whitney,** entre outros.

A Inglaterra, o Canadá e a ex-União Soviética, com diversos nomes de relevo, contribuem de forma significativa para a literatura mundial no assunto. A teoria dos grafos se insere em um esforço mais geral que vem sendo empreendido por diversos pesquisadores do Ocidente, procurando traduzir para o inglês trabalhos de matemática publicados nas antigas repúblicas soviéticas. Os pesquisadores chineses, nos últimos anos, têm aberto frentes cada vez maiores na pesquisa de grafos; talvez o nome mais importante seja **Fan**.

Há ainda a considerar os pesquisadores especificamente aplicados, em particular os dedicados às aplicações em eletricidade: **Chen**, **Seshu**, **Reed**, **Johnson** e outros. O seu trabalho se caracteriza pelo uso de um subconjunto bastante característico dos recursos da teoria, de particular interesse para essas aplicações (as origens, evidentemente, estão no trabalho de **Kirchhoff**). O campo da telecomunicações tem se destacado pela sofisticação dos recursos utilizados. O uso de recursos bem delimitados é característico de muitas áreas aplicadas: a chamada "teoria do equilíbrio estrutural" nas aplicações à psicossociologia, baseada nas ideias de **Moreno**; diversos aspectos da teoria das árvores nas aplicações à computação; o uso da teoria dos fluxos em redes nas aplicações de pesquisa operacional em transportes e comunicações; e, enfim, as recentes aplicações à síntese orgânica ("engenharia molecular"), às estruturas dos hidrocarbonetos (índices topológicos) e à interpretação da estrutura do DNA. A segunda metade do século XX viu, ainda, o desenvolvimento da teoria espectral de grafos, iniciada por **Gutman** e **Cvetković**.

Um ponto importante a observar, em relação ao exposto acima, está na ***atenção constante*** a ser dedicada à **nomenclatura** e à **notação** utilizadas; o crescimento explosivo do número de trabalhos sobre grafos resultou em uma grande variedade de formas de expressão, que permanece até hoje, havendo frequentemente grandes diferenças entre autores de escolas diferentes e entre autores de diferentes grupos aplicados. Não contribuiu para melhorar essa situação a atitude da maioria dos autores, que se comporta como se essa diversidade não existisse. O estudo da teoria dos grafos requer, por essa razão, um especial cuidado na verificação do exato significado de cada noção, conforme definida pelo autor que se consulta. Curiosamente, uma importante referência de nomenclatura e notação provém de autores dedicados a aplicações em física [EF70].

1.4 A teoria dos grafos no Brasil

Desde o ***I Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*** (1968) têm sido apresentados trabalhos envolvendo aplicações de grafos a essa área; a referência histórica básica é dada por Lóss [Lo81]. A UFRJ, a UFF, a USP, a Unesp e a Unicamp, entre outras, possuem em seus quadros pesquisadores em teoria e em aplicações de grafos. Até o momento em que aqui escrevemos, temos conhecimento de sete livros de autores brasileiros envolvendo teoria e aplicações, Barbosa [Ba75], Lucchesi [Lu79], Boaventura [Bo79]), algoritmos de grafos (Furtado [Fu73] e Szwarcfiter [Sz84]), aplicações à eletricidade (Savulescu [Sa80]) e uma obra de divulgação (Andrade [An80]). Uma obra centrada na programação matemática e combinatória, Campello e Maculan [CM94]), dedica uma parte importante de seu texto à discussão de problemas de grafos. A primeira edição da presente obra data de 1996, a segunda, de 2001, a terceira de 2003 e a quarta de 2006. Após a terceira reimpressão desta última, a presente edição é levada ao prelo.

O pesquisador que utiliza grafos pode se beneficiar de obras dedicadas a algoritmos, como Cormen *et al* [CLRS02] (traduzida para o português), Swarcfiter e Markenzon [SM94], Salvetti e L. Barbosa [SB98] e Goldbarg e Luna [GL00].

Enfim, muitas dissertações de mestrado e teses de doutorado nas áreas de pesquisa operacional, computação, planejamento, produção, administração e economia discutem e utilizam técnicas de grafos. Algumas delas são aqui citadas, como referência para os capítulos da teoria aqui discutidos.

1.5 Esta obra

Na disciplina de pós-graduação lecionada pelo autor, os trabalhos propostos aos alunos envolvem principalmente a busca da compreensão das estruturas de grafo e da integração destas com os recursos topológicos, algébricos e combinatórios disponíveis. A resolução é feita em grupo e os exercícios são propostos de forma investigativa. A avaliação se faz por uma entrevista – que não é uma prova oral, mas um momento de encontro no qual o professor também se avalia – e na qual cada um deve mostrar conhecimento sobre tudo o que foi feito e sobre a teoria utilizada. Tal esquema provoca intensas discussões no grupo durante o trabalho de resolução, o que acelera de forma significativa – segundo a avaliação dos próprios alunos – o processo de compreensão e aprendizagem, envolvendo muito do que ele possui de não lógico. A experiência reunida desde a época da publicação anterior envolve, é claro, a influência deste esquema de trabalho e orientou a seleção do material e a forma de organização aqui envolvidos, tendo-se procurado esclarecer, de modo mais acessível, diversos pontos em relação aos quais a literatura se apresenta menos clara.

No trânsito do problema para o modelo e deste para a solução, com o apoio teórico das definições e dos teoremas e com o apoio funcional dos algoritmos, sente-se a necessidade de um texto abrangente, ainda mais pelo rápido desenvolvimento da teoria e das suas aplicações. Em vista disso, o presente texto não é, como também não o foi o seu antecessor, exclusivamente dedicado às aplicações em pesquisa operacional, apesar de ser esta a área de interesse do autor. De início, não se pode hoje prever o que será aplicado amanhã em determinada área e, por outro lado, deseja-se evitar aqui induzir o leitor a pontos de vista demasiado estreitos. Deseja-se uma visão abrangente, que possa levar ao leitor uma visão ampla da teoria e de suas possibilidades de aplicação. Foi levada em consideração uma certa "hierarquia" de resultados. Os mais importantes estão expressos como lemas e teoremas e, nesse caso, são acompanhados das respectivas demonstrações. As exceções (adotadas por conveniência, no caso de material de volume elevado) são supridas pela citação da fonte bibliográfica. Resultados citados em meio ao texto não são acompanhados de demonstração.

Este livro prevê, ou procura prever, uma diversidade na sua clientela. A sua motivação inicial se prende ao uso em cursos de pós-graduação, nos níveis de mestrado e doutorado. Um professor que o utilize poderá, no entanto, sem maiores dificuldades, indicar a seus alunos de graduação o material mais conveniente a ser selecionado para estudo, bem como muitos dos exercícios apresentados – tendo a alternativa de utilizar nossa obra introdutória, [BJ09]. Enfim, ele se destina também aos usuários dos resultados da teoria – e, em vista disso, procura facultar amplo acesso à bibliografia, no que tange tais resultados. Para facilitar o uso da obra, foram usados no texto marcadores (✹) que indicam o início e o fim de trechos, ou itens, relacionados a temas mais especializados ou de pesquisa. (Os **Capítulos 11** e **12** devem ser assim considerados). O ***conteúdo*** recebeu também esta marcação: quando a marca aparece ***antes do título*** de um item, é válida para todo ele, mas quando aparece ***após o título***, indica que o ítem ***contém*** algum material especializado. Nesta edição se procurou atualizar a bibliografia teórica de modo a abrir um leque de possibilidades, ou seja, a partir das referências mais recentes o interessado poderá varrer uma ampla gama de citações sobre os assuntos assim tratados.

Este trabalho ***contém*** algoritmos, mas não é uma obra dedicada a eles; em vista disso, o autor não quis se comprometer com a formalização ao nível da pseudo-linguagem em todos os casos, embora a maioria dos algoritmos esteja assim expressa. Além disso, em muitos casos mais de um algoritmo é apresentado com vistas à resolução de um dado problema, mas o autor não se comprometeu, ainda aqui, com a máxima eficiência. Isto significa que um leitor a braços com um problema de grande porte ou de elevada complexidade poderá ter que ir buscar na literatura uma técnica mais eficiente que as aqui apresentadas (como as ***metaheurísticas*:** "simulated annealing", busca tabu, GRASP, algoritmos genéticos etc., extensamente discutidas na literatura, ou então a programação matemática) e, talvez, procurar o auxilio de um especialista – ou de uma obra especializada – para obter uma implementação eficiente. Na maioria dos casos, porém, acreditamos que os algoritmos aqui discutidos sejam satisfatórios; para facilitar o seu uso, o trabalho apresenta, em cada caso, um exemplo ilustrativo da aplicação da cada algoritmo.

Limitamo-nos aqui à discussão das estruturas de grafo e de suas propriedades, com vistas à seleção de técnicas de resolução baseadas em temas da teoria dos grafos, de modo a permitir a busca de soluções em problemas modeláveis por grafos. Ficou excluído da discussão o uso de técnicas de programação matemática, embora seu uso seja referenciado em diversos capítulos: a base teórica peculiar a essas técnicas e a abrangência da sua utilização em problemas de otimização (em grafos, ou em outros contextos) exigiria outro livro, possivelmente do mesmo porte deste.

Em todo o texto que se segue, cada termo é escrito em *itálico* no momento de sua definição. Os enunciados dos teoremas são igualmente impressos em *itálico*. Os trechos que se deseja ressaltar são escritos em ***negrito itálico*** ou em <u>sublinhado</u> e os nomes próprios não contidos em citações bibliográficas, em **negrito.** As citações, como neste capítulo, seguem o modelo <u>[abreviatura do(s) autor(es) dezena do ano]</u> Em alguns casos, foi consultada mais de uma edição da mesma obra; a menos que tenha havido mudança de conteúdo, ou de título, as citações feitas a partir do **Capítulo 2** serão sempre relativas à edição mais recente. A notação somente pode ser explicada ao longo do texto, mas se pode adiantar, de início, que os símbolos representando <u>conjuntos</u>, <u>vetores</u> e <u>matrizes</u> são escritos em **negrito**, assim como os que indicam <u>grafos</u> e <u>vértices</u> ou <u>ligações</u> de grafos. As funções e correspondências relativas a elementos de grafos são representadas por letras normais, mesmo quando indicam conjuntos: os elementos de grafo incluídos trazem a notação de conjunto.

Uma última observação: as línguas portuguesa e espanhola distinguem entre ***grafo*** e ***gráfico*,** o que não acontece com o inglês e o francês. Em algumas partes do livro são encontrados outros comentários sobre questões de nomenclatura de grafos em alguma dessas línguas: isto foi feito quando se julgou conveniente antecipar possíveis dúvidas.

1.6 A Internet e os grafos

Em todo o mundo, editoras e pesquisadores utilizam a Internet para divulgação de trabalhos e de agendas de congressos, para difusão do ***software*** especializado, como meio de reunião de problemas-tipo utilizados em testes de algoritmos e também para discussão. Os periódicos científicos e os pesquisadores possuem suas páginas, através das qual se pode conseguir acesso a resumos e até mesmo a textos integrais de trabalhos. Há grandes bases de dados acessíveis institucionalmente por assinatura, como a MathSciNet (matemática em geral). No Brasil, o *site* da CAPES permite o acesso, no âmbito de muitas instituições de ensino e pesquisa, ao conteúdo integral de grande número de revistas científicas, em particular de publicações sobre grafos: esta edição se beneficiou deste recurso em sua atualização. O movimento pela divulgação de software livre e de revistas científicas de conteúdo aberto vem crescendo, como uma forma de contornar o peso da inflência das grandes editoras internacionais, o que beneficia também o trabalho com grafos.

Alguns endereços de páginas foram incluídos na seção de referências bibliográficas, com alguns comentários sobre o seu conteúdo. É conveniente lembrar que não há qualquer garantia sobre a sua permanência na rede, que é um ambiente em evolução extremamente rápida e que, depois de quase 30 anos, apresenta ainda perspectivas de crescimento e de mudança difíceis de poderem ser devidamente avaliadas. É possível, mesmo, que algumas páginas já estejam desatualizados quando este livro for publicado: é o melhor que se pode fazer em uma obra impressa.

A Internet, como toda rede, pode ser estudada com o auxílio da teoria dos grafos: diversos trabalhos têm sido dedicados a ela e, certamente, muito mais terá de ser feito, na medida em que a demanda pelos seus serviços cresce de forma extraordinária em todo o mundo.

1.7 Teoria dos grafos, computação e complexidade

A invenção do computador foi certamente essencial para abrir caminho às aplicações da teoria dos grafos, permitindo o trabalho com algoritmos, mas aqui queremos dar relevo às contribuições que o computador trouxe para a própria teoria. Os exemplos mais significativos que nos ocorrem são o da prova computacional do teorema das quatro cores por **Appel** e **Haken**, a possibilidade do uso de programas de álgebra em computador em problemas combinatórios e, finalmente, o uso de programas "inteligentes", para os quais o protótipo se chama ***Graffiti***.

Graffiti é um *software* que procura relações entre invariantes de grafos, através do exame de uma base de dados contendo um grande número de exemplos. Ele foi desenvolvido em 1986 e, até meados de 2004, havia produzido cerca de 900 conjeturas envolvendo tais relações [Faj04]. O trabalho prossegue, [DeL06]. Brewster, Dinneen e Faber [BDF95] fizeram uma análise computacional de um subconjunto dessas conjeturas, invalidando cerca de 40, com o auxílio de uma base de dados contendo todos os grafos até 10 vértices. O trabalho cita um número significativo de conjeturas.

Caporossi e Hansen [CH00] apresentam uma discussão sucinta sobre os diversos programas existentes, dedicados à investigação das propriedades das estruturas de grafo. Apresentam, também, um novo programa (***Autographix, AGX***) que utiliza uma metaheurística para investigar o conjunto de todos os grafos, procurando responder a questões sobre invariantes de grafos, sugerindo ou refutando conjeturas, procurando melhores valores etc.. Um *review* sobre o seu uso é [ACHL05]. Ver também [DT07]

Um ponto importante nas relações entre grafos e computação está na questão da complexidade, cujos detalhes deixamos para obras especializadas. Limitamo-nos a falar da classificação dos problemas combinatórios em P e NP. Este tema é abordado aqui em vista de sua generalidade, mas recomendamos que o leitor retorne a ele depois de encontrar no livro as noções aqui usadas sem definição. A discussão que se segue é de Abreu [Ab03].

Um problema é *não-determinístico polinomial (NP)* quando, colocado em sua versão de decisão (ou seja, em forma de uma pergunta cuja resposta pode ser "sim" ou "não") ***a resposta afirmativa o resolve em tempo polinomial***, mas a resposta ***negativa***, também dada ***em tempo polinomial, pode não resolver o problema***. (Para acompanhar a discussão abaixo, ver de início o **Capítulo 2**). Por exemplo, podemos querer saber se um dado grafo é hamiltoniano (detalhes no **Capítulo 9**). Para que este problema pertença à classe NP (como é o caso), é preciso que exista um algoritmo de reconhecimento em tempo polinomial para ciclos hamiltonianos em grafos. Escolhe-se aleatoriamente um ciclo do grafo como entrada para o algoritmo. Se a resposta é "sim", o grafo é hamiltoniano. Se é "não", o ciclo dado não é hamiltoniano, mas nada se decidiu a respeito do grafo. Enquanto a resposta for negativa, teremos que ir testando um ciclo do grafo a cada vez para tentar determinar se o grafo é hamiltoniano. Quando o problema está em NP e ainda podemos provar que o número de testes negativos para as entradas do algoritmo de reconhecimento é uma função polinomial dos dados do problema, dizemos que o problema é *polinomial*, isto é, *pertence à classe P*. Ou seja, um problema é *polinomial (P)* quando existir um algoritmo que o resolva em tempo de computação descrito por uma função polinomial da sua ordem de grandeza; por exemplo, quadrática ou cúbica. Diz-se, para este exemplo, que o algoritmo é *da ordem de* n^2 ou n^3, ($O(n^2)$ ou $O(n^3)$).

Retornando ao caso do problema de decidir se um grafo é hamiltoniano, no caso da resposta negativa: nada se pode afirmar com relação ao número de ciclos de um grafo qualquer (que no pior caso deveriam ser todos testados). Seria este número determinado por uma função polinomial da ordem do grafo? A resposta para esta pergunta ainda está em aberto. Ela está relacionada a uma das questões mais famosas deste início de milênio: Será verdade que P = NP, ou que P $\neq$ NP? Conjetura-se a segunda alternativa. Desta forma, com relação ao problema de determinar se um grafo qualquer é hamiltoniano, o que podemos afirmar, por enquanto, é que ele pertence à classe NP – P (o que estará errado, se P = NP).

Finalmente, se um dado problema for NP e todo problema em NP puder ser reduzido a ele por uma transformação que exija tempo polinomial, então ele é dito ser *NP-completo (NPC)*. (É o caso do problema de determinar se um grafo é hamiltoniano). Se essa redução for possível, mas não se tiver certeza se o problema está em NP, ele é dito ser *NP-árduo* ou *NP-difícil* (*NP-hard* na literatura em inglês). A classe NP, além de conter P, contém a classe NPC (constituída pelos problemas NP-completos). Além disso, as subclasses P e NPC são disjuntas, com sua união contida (não se sabe se no sentido estrito) em NP. A classe dos problemas NP-árduo contém a classe NPC e, portanto, o que se sabe é que ela intercepta a classe NP.

1.8 Nomenclatura e nosso *software*

Após a publicação da terceira edição, veio a público o *Handbook of Graph Theory*, de Gross e Yellen (indicado no texto por [HGT04]). Passamos a ter, então, boas possibilidades de convergir para uma nomenclatura e uma notação mais consolidadas na teoria dos grafos, o que vinha sendo um problema complicado em todo o mundo. Procuramos, em vista disso, atualizar a nomenclatura e a notação usadas neste livro, não necessariamente nos vinculando ao *Handbook*, mas adotando opções mais consagradas pelo uso na atualidade. Estas modificações estão indicadas em cada capítulo mas, de início, apontamos a substituição da notação de **Berge** para um grafo (**G** = (**X**,**U**)), passando-se a utilizar a notação de maior uso **G** = (**V**,**E**). Ver o **Prefácio** e o **Capítulo 2**.

Outro ponto importante é a disponibilidade de *software* para boa parte dos algorítmos aqui apresentados: as rotinas respectivas podem ser acessadas através do sistema ***Algo_De_Grafos***. Para maiores informações, o leitor deve procurar a seção **Endereços Internet**, que se encontra no final do livro.