

Márcio Rogério de Oliveira Cano
COORDENADOR

4

COLEÇÃO

A reflexão e a
prática no ensino

MATEMÁTICA

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar

Sonia Barbosa Camargo Iglioni

Blucher

A reflexão e a prática no ensino

4

Matemática

Blucher

A reflexão e a prática no ensino

4

Matemática

Márcio Rogério de Oliveira Cano
coordenador

*CELINA APARECIDA ALMEIDA PEREIRA ABAR
SONIA BARBOSA CAMARGO IGLIORI
autoras*

Coleção A reflexão e a prática no ensino - Volume 4 - Matemática

MÁRCIO ROGÉRIO DE OLIVEIRA CANO (coordenador)

©2012 CELINA APARECIDA ALMEIDA PEREIRA ABAR, SONIA BARBOSA CAMARGO IGLIORI

Editora Edgard Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar

04531-012 – São Paulo – SP – Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

editora@blucher.com.br

www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme

5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua*

Portuguesa, Academia Brasileira de Letras,
março de 2009

É proibida a reprodução total ou parcial por
quaisquer meios, sem autorização escrita da
Editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard
Blücher Ltda.

Ficha catalográfica

Abar, Celina Aparecida Almeida Pereira
Matemática / Celina Aparecida Almeida Pereira
Abar, Sonia Barbosa Camargo Iglori. -- São Paulo:
Blucher, 2012. -- (Série a reflexão e a prática
no ensino; v. 4 / coordenador Márcio Rogério
de Oliveira Cano)

Bibliografia

ISBN 978-85-212-0670-5

1. Matemática 2. Matemática - Estudo e ensino
3. Prática de ensino I. Iglori, Sonia Barbosa
Camargo. II. Cano, Márcio Rogério de Oliveira.
III. Título. IV. Série.

12-02786

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática: Estudo e ensino 510.7

Sobre os autores

MÁRCIO ROGÉRIO DE OLIVEIRA CANO (COORD.)

Mestre e doutor pelo Programa de Estudos Pós-Graduados em Língua Portuguesa da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Desenvolve pesquisas na área de Ensino de Língua Portuguesa e Análise do Discurso. Possui várias publicações e trabalhos apresentados na área, além de vasta experiência nos mais variados níveis de ensino. Também atua na formação de professores de Língua Portuguesa e de Leitura e produção de textos nas diversas áreas do conhecimento nas redes pública e particular.

CELINA APARECIDA ALMEIDA PEREIRA ABAR

Licenciada, bacharel, mestre e doutora em Matemática. Professora titular da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, atuando na graduação, no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática e em Curso de Extensão na Cogea da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP. Professora de Matemática do Fundamental II por alguns anos e no ensino superior desde a conclusão da graduação. Especialista em Tecnologias Interativas Aplicadas à Educação (PUC/SP-2000); em Design Instrucional para Educação On-Line (UFJF-2007) e em Entornos Virtuales de Aprendizaje (OEI-2010). Coordena o Instituto GeoGebra de São Paulo com sede na mesma Faculdade.

SONIA BARBOSA CAMARGO IGLIORI

Licenciada, bacharel, mestre e doutora em Matemática. Foi professora efetiva da rede estadual de ensino durante 10 anos. Desde 1990 atua na pós-graduação, inicialmente na área da Matemática, e, após 1994, na área da Educação Matemática. Durante um ano (1995 a 1996) desenvolveu estudos de pós-doutoramento, em Educação Matemática, na França. É professora titular do Departamento de Matemática da PUC/SP e professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da mesma Universidade.

Apresentação

A experiência é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca. Não o que se passa, não o que acontece, ou o que toca. A cada dia se passam muitas coisas, porém, ao mesmo tempo, quase nada nos acontece. Dir-se-ia que tudo o que se passa está organizado para que nada nos aconteça. Walter Benjamin, em um texto célebre, já observava a pobreza de experiências que caracteriza o nosso mundo. Nunca se passaram tantas coisas, mas a experiência é cada vez mais rara.

*Jorge Larrosa Bondía, 2001,
I Seminário Internacional de Educação de Campinas.*

Esse trecho de uma conferência de Larrosa é emblemático dos nossos dias, da nossa sociedade do conhecimento ou da informação. Duas terminologias que se confundem muitas vezes, mas que também podem circular com conceitos bem diferentes. Vimos, muitas vezes, a sociedade do conhecimento representada como simples sociedade da informação. E não é isso que nos interessa. Em uma sociedade do conhecimento, podemos, por um lado, crer que todos vivam o conhecimento ou, por outro, que as pessoas saibam dele por meio de e como informação. Nunca tivemos tanto conhecimento e nunca tivemos tantas pessoas informadas e informando. Mas a experiência está sendo deixada de lado.

O grande arsenal tecnológico de memorização e registro em vez de tornar as experiências do indivíduo mais plenas, tem esvaziado a experiência, já que todos vivem a experiência do outro, que vive a experiência do outro, que vive a experiência do outro... Quando não tínhamos muito acesso aos registros da história, era como se vivêssemos o acontecimento sempre pela primeira vez. Hoje, parece que tudo foi vivido e está registrado em algum lugar para que possamos seguir um roteiro. Isso é paradoxal.

No entanto, não compactuamos com uma visão pessimista de que tudo está perdido ou de que haja uma previsão extremamente desanimadora para o futuro, mas que, de posse do registro e do conhecimento, podemos formar pessoas em situações de experiências cada vez mais plenas e indivíduos cada vez mais completos. E parece-nos que a escola pode ser um lugar privilegiado para isso. Uma escola dentro de uma sociedade do conhecimento não deve passar informações, isso os alunos já adquirem em vários lugares, mas sim viver a informação, o conhecimento como experiência única, individual e coletiva.

Tendo a experiência como um dos pilares é que essa coleção foi pensada. Como conversar com o professor fazendo-o não ter acesso apenas às informações, mas às formas de experienciar essas informações juntamente com seus alunos? A proposta deste livro é partir de uma reflexão teórica sobre temas atuais nas diversas áreas do ensino, mostrando exemplos, relatos e propondo formas de tornar isso possível em sala de aula. É nesse sentido que vai nossa contribuição. Não mais um livro teórico, não mais um livro didático, mas um livro que fique no espaço intermediário dessas experiências.

Pensando nisso como base e ponto de partida, acreditamos que tal proposta só possa acontecer no espaço do pensamento interdisciplinar e transdisciplinar. Tal exercício é muito difícil, em virtude das condições históricas em que o ensino se enraizou: um modelo racionalista disciplinar em um tempo tido como produtivo. Por isso, nas páginas desta coleção, o professor encontrará uma postura interdisciplinar, em que o tema será tratado pela perspectiva de uma área do conhecimento, mas trazendo para o seu interior pressupostos, conceitos e metodologias de outras áreas. E também encontrará perspectivas transdisciplinares, em que o tema será tratado na sua essência, o que exige ir entre, por meio e além do que a disciplina permite, entendendo a complexidade inerente aos fenômenos da vida e do pensamento.

Sabemos, antes, que um trabalho inter e transdisciplinar não é um roteiro ou um treinamento possível, mas uma postura de indivíduo. Não teremos um trabalho nessa perspectiva, se não tivermos um sujeito inter ou transdisciplinar. Por isso, acima de tudo, isso é uma experiência a ser vivida.

Nossa coleção tem como foco os professores do Ensino Fundamental do Ciclo II. São nove livros das diversas áreas que normalmente concorrem no interior do espaço escolar. Os temas tratados são aqueles chave para o ensino, orientados pelos documentos ofi-

ciais dos parâmetros de educação e que estão presentes nas pesquisas de ponta feitas nas grandes universidades. Para compor o grupo de trabalho, convidamos professoras e professores de cursos de pós-graduação, juntamente com seus orientandos e orientandas de doutorado e de mestrado e com larga experiência no ensino regular. Dessa forma, acreditamos ter finalizado um trabalho que pode ser usado como um parâmetro para que o professor leia, possa se orientar, podendo retomá-lo sempre que necessário, juntamente com outros recursos utilizados no seu dia a dia.

Márcio Rogério de Oliveira Cano
Coordenador da coleção

Prefácio

O desafio de escrever um livro que trate do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, e que acrescente algo aos professores nos dias atuais, não é pequeno. Por que e como enfrentá-lo? Essa é uma questão difícil de ser respondida e que permeia toda a elaboração deste trabalho.

As contribuições apresentadas neste livro norteiam-se não só pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCN 1998), como também pelo respeito ao trabalho dos professores e dos saberes que eles trazem em sua prática; elas levam em consideração que uma classe de aula tem tantas peculiaridades que só o docente que se ocupa dela e ninguém mais tem condições de equacionar as dificuldades dos alunos e propor enfrentamento para elas.

Nosso propósito é trazer alguns elementos advindos das pesquisas em Educação Matemática para reflexão, os quais devem sempre ser filtrados pelo docente em sua prática. Sabemos que é ele que, no dia a dia, carrega a importante e árdua tarefa de ensinar algo que, a princípio está muito distante do interesse dos estudantes, especialmente dos estudantes dos dias atuais em que a ebulição tecnológica ocupa seus hábitos e modo de pensamento.

Mesmo assim, tendo aceitado o desafio, apresentamos algo que consideramos interessante e motivador ao docente e que possibilite a interlocução para outros trabalhos.

Importantes teóricos da Matemática e da Educação Matemática fundamentam os textos apresentados e as propostas de atividades que se inspiram em recursos da História da Matemática, nas possibilidades das Tecnologias e nas oferecidas pelos Jogos.

A parceria entre as autoras é enriquecedora, pois procura aproximar, de acordo com suas respectivas especialidades, as pesquisas teóricas que realizaram com os trabalhos desenvolvidos por seus orientandos em sua prática e as pesquisas defendidas pelos Mestrandos e Doutorandos do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, fechando um círculo necessário, oportuno e desejado de duas modalidades de ação frente ao ensino e aprendizagem da Matemática.

Os dez capítulos apresentados norteiam-se pelas indicações dos Parâmetros Curriculares Nacionais — PCN para o Ensino Fundamental II e presentes nos quatro blocos Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Números e Operações; Tratamento da Informação. Nessa ordem de apresentação, trazem propostas que podem ser articuladas ao projeto educacional de cada escola e que valorizam a compreensão das ideias matemáticas e o modo como podem ser desenvolvidas e trabalhadas.

As autoras



1. UM MERGULHO NA GEOMETRIA ESPACIAL	19
1.1 Introdução	19
1.2 O que dizem os PCN e as pesquisas?.....	20
1.3 Um panorama da Geometria Espacial	23
1.4 Da teoria à prática: propostas de atividades.....	24
1.5 Para finalizar	33
1.6 Referências bibliográficas	33
2. UM MERGULHO NA GEOMETRIA PLANA	37
2.1 Introdução	38
2.2 O que dizem os PCN e as pesquisas?.....	36
2.3 Um panorama da Geometria Plana	40
2.4 Da teoria à prática: propostas de atividades	41
2.5 Para finalizar.....	57
2.6 Referências bibliográficas	57
3. A MATEMÁTICA QUE INSPIRA A ARTE: AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS .	59
3.1 Introdução	59
3.2 O que dizem os PCN e as pesquisas?.....	60
3.3 Um panorama das transformações geométricas	61
3.4 Da teoria à prática: proposta de construção de um mosaico.....	63
3.5 Para finalizar.....	68
3.6 Referências bibliográficas	68

4. EXPLORANDO GRANDEZAS E MEDIDAS	71
4.1 Introdução	71
4.2 O que dizem os PCN e as pesquisas?.....	72
4.3 Um entendimento sobre grandezas e medidas	73
4.4 Da teoria à prática: propostas de atividades.....	74
4.5 Para finalizar.....	82
4.6 Referências bibliográficas	82
5. EXPLORANDO GRANDEZAS E MEDIDAS TRIDIMENSIONAIS	85
5.1 Introdução	85
5.2 O que dizem os PCN e as pesquisas?.....	85
5.3 Um entendimento sobre grandezas e medidas tridimensionais.....	87
5.4 Da teoria à prática: propostas de atividades.....	87
5.5 Para finalizar.....	92
5.6 Referências bibliográficas	92
6. JOGANDO COM OS NÚMEROS	93
6.1 Introdução	93
6.2 O Jogo de Conway	95
6.3 O jogo Hackenbush	95
6.4 Propostas de Atividades	96
6.5 Números irracionais — discussão dos exemplos	99
6.6 Para finalizar.....	100
6.7 Referências bibliográficas	101
7. NÚMEROS E REPRESENTAÇÕES	103
7.1 Introdução	103
7.2 Da teoria à prática: propostas de atividades.....	105
7.3 O uso da reta graduada como um registro de representação dos números racionais.....	107
7.4 Propostas de atividades	110
7.5 Comensurabilidade e incomensurabilidade de grandezas	112
7.6 Para finalizar.....	117
7.7 Referências bibliográficas	117

8. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES	119
8.1 Introdução	119
8.2 Escrevendo equações para resolver problemas	120
8.3 Os problemas da <i>Encyclopédie</i> : (BONNEFOND, 1994, p. 28)	124
8.4 Exercícios	130
8.5 Para finalizar.....	132
8.6 Referências bibliográficas	132
9. O TRATAMENTO DE DADOS: SEU SIGNIFICADO E SUA ORGANIZAÇÃO	135
9.1 Introdução	135
9.2 Um panorama sobre o estudo da Estatística	136
9.3 O que dizem os PCN e as pesquisas?.....	137
9.4 O entendimento de dados de uma informação	137
9.5 A exploração de gráficos. Explorando o gráfico “Box Plot” no GeoGebra.....	145
9.6 Transformando os dados em informação e conhecimento	148
9.7 Para finalizar.....	149
9.8 Referências bibliográficas	149
10. O TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO: SEU SIGNIFICADO E SUA IMPORTÂNCIA	153
10.1 Introdução	153
10.2 A exploração de gráficos	155
10.3 O que dizem as pesquisas	156
10.4 Níveis de compreensão gráfica.....	157
10.5 Explorando representações gráficas.....	159
10.6 Construindo representações gráficas.....	162
10.7 Histograma e gráfico de barras no GeoGebra	162
10.8 Gráfico de pizza	164
10.9 Explorando a Probabilidade.....	165
10.10 Para finalizar.....	167
10.11 Referências bibliográficas	168

Um mergulho na Geometria Espacial



Ramot Polin - Jerusalem, Israel. Arquiteto: Zvi Hecker

Fonte: AEWORLDMAP. Disponível em:

<<http://aesign.wordpress.com/category/built>>.

1.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas, inicialmente, algumas indicações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sobre o bloco Espaço e Forma e um breve panorama de algumas pesquisas sobre a Geometria Espacial e o ensino desse objeto matemático. Estas considerações iniciais e suas relações estarão presentes nas atividades propostas e poderão ser utilizadas e adaptadas pelos professores na sua prática docente

1.2 O QUE DIZEM OS PCN E AS PESQUISAS?

Segundo os PCN (1998, p. 51):

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente.

Em consonância com os PCNs e como proposta para reflexão do professor, a Proposta Curricular de São Paulo (SÃO PAULO, 2008, p. 45-46) prevê que:

Em Geometria, o ensino fundamental deve ocupar-se inicialmente com o reconhecimento e com a representação e classificação de formas planas e espaciais. É importante que se atente para a necessidade de incorporar o trabalho com a geometria em todos os anos da grade escolar, cabendo ao professor a escolha da distribuição mais conveniente dos conteúdos nos bimestres, assim como o viés que será dado ao tratamento dos temas da geometria.

Quanto ao bloco Espaço e Forma, Ribeiro e Brandalise (2010, p.334) observam que:

(...) é fundamental que os estudos deste bloco sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de modo a permitir ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Desse modo as orientações aqui apresentadas se referem à importância de trabalhar tais conceitos para introduzir os alunos num mundo tridimensional, relacionado diretamente com o cotidiano e problemas práticos do dia a dia.

No caso da Geometria Espacial, o foco de algumas pesquisas direciona para a visualização das figuras geométricas espaciais. Nesse aspecto, há dificuldades em transmitir tais conteúdos e em abstrair algumas propriedades dos sólidos quando apresentados em ambientes de duas dimensões (lousa, livro, apostila etc.) e há perda de informações das propriedades dos objetos (SILVA,

2006, p.61). Entre as pesquisas que apontam essas dificuldades por parte dos alunos e professores podemos citar Medalha (1997) e Possani (2002).

Alguns teóricos salientam os processos que podem estar presentes no desenvolvimento intelectual do aluno e apontam caminhos para o ensino e aprendizagem da Geometria Espacial.

Para Duval (1988), no ensino-aprendizagem da Geometria Espacial, estão envolvidos três tipos de processo que preenchem funções epistemológicas específicas, sendo os processos de visualização, de construção e de raciocínio. Esses tipos de processos cognitivos, para Duval (1988), podem ser desenvolvidos separadamente. Sendo assim, a visualização independe da construção, ou seja, o aluno consegue acessar as figuras, qualquer que seja a forma utilizada para sua construção.

Duval (1988) afirma que mesmo que a construção leve à visualização, o processo de construção depende somente da conexão entre as propriedades *matemáticas e a limitação técnica dos instrumentos utilizados*.

Raymond Duval: pesquisador francês.

Por meio de suas pesquisas, Van Hiele (1986) observou que os alunos pareciam progredir no raciocínio geométrico por meio de uma sequência, disposta em cinco níveis: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor e que o desenvolvimento intelectual do aluno se dá de forma sequencial sem a omissão de nenhuma etapa, pois a quebra na sequência do raciocínio acarretaria uma estagnação no caminhar. Em estudos mais modernos, os três últimos níveis (dedução informal, dedução formal e rigor) foram condensados em apenas um nível, a síntese.

Pierre Van Hiele: pesquisador holandês.

Van Hiele (1986) considera que a visualização é de grande importância no processo de construção do conhecimento geométrico, sendo que a representação mental dos objetos geométricos, a análise e a organização formal (síntese) das propriedades geométricas são passos necessários para o entendimento da formalização de um conceito.

Considerando que os níveis de compreensão de Van Hiele (1986) foram desenvolvidos para o ensino da Geometria em geral e que, em Geometria Espacial, o aprendizado sobre um conceito está aliado principalmente à visualização e à percepção das figuras, Medalha (1997) apresenta em seu trabalho uma adaptação desses níveis para o ensino da Geometria Espacial, como podemos observar no quadro a seguir:

Quadro 1.1 – *Classificação dos níveis para Geometria Espacial*

Visualização	Manuseio de sólidos geométricos; percepção dos sólidos geométricos por meio de sua aparência física; reconhecimento das figuras pela sua forma, como um todo, e não pelas propriedades.
Análise	Descrição das propriedades dos sólidos; análise das propriedades das figuras.
Síntese	Estabelecimento de relações entre as propriedades e de uma ordem lógica entre figuras e relações, fazendo com que acompanhem uma dedução simples. Não há a compreensão de uma prova completa.
Dedução	Dedução de propriedades e realização de demonstrações; compreensão do significado da dedução e o papel dos diferentes elementos na estrutura dedutiva.
Rigor	Desenvolvimento do trabalho em diferentes sistemas axiomáticos; capacidade de deduções abstratas; possibilidade de compreensão da Geometria não-Euclidiana.

Fonte: Medalha, 1997, p. 26.

Marie-Paule Louche-
Rommevaux: pesquisadora
francesa.

Rommevaux (1997), em suas pesquisas, aponta a importância da construção e manipulação de modelos concretos de sólidos geométricos, partindo da ideia de que na resolução de problemas de Geometria Espacial, são necessárias duas etapas que ocorrem de forma simultânea: “ver e raciocinar” (ROMMEVAUX, 1997, p.38).

Esta autora refere-se à construção de maquetes, objeto físico manipulável e que o “tocar” pode representar um papel fundamental na construção do objeto matemático, não sendo suficiente somente a visão, como acontece no estudo das formas geométricas planas de objetos espaciais.

As considerações feitas sobre os trabalhos de pesquisas apresentados aqui sugerem que propostas de atividades para o ensino e aprendizagem de conteúdos da Geometria Espacial podem ser na direção da construção de produtos que representem de forma concreta o objeto matemático foco da aprendizagem, possibilitando a esses produtos a construção do conhecimento geométrico trabalhado.

Desse modo, uma trajetória possível para se trabalhar a Geometria Espacial é por meio dos conceitos de sólidos platônicos cujos sólidos regulares são, em sua totalidade, facilmente encon-

trados no cotidiano dos alunos. Além disso, o fato de os sólidos platônicos terem sido desenvolvidos dentro de um contexto histórico, e de terem sido utilizados em vários momentos, dentro da história da ciência, possibilitará ao aluno estabelecer relações entre a Geometria Espacial e outras disciplinas, como a Física, Química e Biologia.

1.3 UM PANORAMA DA GEOMETRIA ESPACIAL

A palavra *Geometria* caracterizou-se com as antigas civilizações egípcias, sendo seu emprego originário da necessidade de medição das terras que margeavam o Rio Nilo, nos períodos intercalados de inundações e secas, objetivando a sua demarcação para a atividade agrícola.

Essa Geometria desenvolveu-se com notável componente experimental e prático, não só nas civilizações egípcias, como também nas regiões mesopotâmicas, às margens dos rios Tigre e Eufrates, junto aos rios Indo e Ganges no centro-sul da Ásia. O fato de os egípcios registrarem seus trabalhos em papiros e pedras, aliado ao clima seco de sua região e dos babilônicos utilizarem **tábulas de argila cozida, extremamente resistente ao tempo**, contribuiu para que um maior número de dados relativos às suas representações escritas fosse preservado, se comparados às culturas da Índia e da China, que produziram as suas representações em materiais perecíveis, como fibra de entrecasca de árvores e bambu (EVES, 1992).

Por volta de 300 a.C., **Euclides** escreveu o livro *Os Elementos* baseando-se em todo conhecimento adquirido pela escola grega da época. Uma maneira simplificada para descrever a geometria de Euclides e que permite conhecer algumas figuras geométricas é dizer que ela as trata como possíveis de serem construídas com régua e compasso.

O ápice de *Os Elementos* é a teoria dos **poliedros regulares** presente no Livro XIII. Somente cinco poliedros regulares existem, como veremos mais adiante, neste capítulo. Muitos acreditam que o conteúdo de *Os Elementos* foi escolhido com a teoria dos poliedros regulares em mente. Por exemplo, Euclides necessita construir o triângulo equilátero, o quadrado e o pentágono para construir os poliedros regulares.

Para sorte de Euclides, ele não precisou de **polígonos regulares** com mais lados e nenhum outro polígono regular foi construído até os tempos modernos. Em 1796 **Gauss**, então com 19 anos,

Geometria: “geo” significa terra e “metria”, medir.

Howard Whitley Eves: pesquisador americano.

Euclides de Alexandria: em grego antigo, Εὐκλείδης Eukleidēs; viveu de 360 a.C. a 295 a.C.

Poliedros regulares: o termo “poliedro” deriva de “poli”, que significa “muitos”, e “edro”, que significa “face”. Os “poliedros regulares” têm todas as faces iguais e são polígonos regulares.

Polígonos regulares: o termo “polígono” deriva de “poli”, que significa “muitos”, e “gono”, que significa “lado”. Os “polígonos regulares” têm todos os lados iguais.

Carl Friedrich Gauss:
(1777-1855) um dos mais
famosos matemáticos de
todos os tempos.

*Conhecido como "Número
de Fermat". Pierre de Fermat
viveu de 1601 a 1675.

descobriu que a chave da questão vinha da construção de triângulos equiláteros: para qual valor de n um n -ágono regular pode ser construído? Gauss mostrou que um polígono regular com um número primo p de lados pode ser construído apenas nos casos em que este número primo p pode ser escrito na forma $2^{2^m} + 1^*$ o que resulta, por exemplo, que o polígono de 17 lados pode ser construído, pois $2^4 + 1 = 17$.

Estes e outros resultados mostram que *Os Elementos* não englobam toda a Geometria ainda que seja a sua obra fundamental e que a Matemática é uma ciência sempre em desenvolvimento.

Este capítulo é desenvolvido para o estudo de uma geometria tridimensional, ou seja, dos sólidos geométricos. Muitos sólidos geométricos do mundo real, como as rochas, são irregulares, mas muitos outros são regulares e muitos deles construídos pelo próprio homem como os edifícios, livros, bolas de boliche etc.

Em outro capítulo serão apresentadas as grandezas e medidas que fazem parte desses elementos geométricos.

1.4 DA TEORIA À PRÁTICA: PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Nesta seção pretendemos orientar os docentes sobre as justificativas do ensino da Geometria, em qual concepção ela deve ser trabalhada, seus objetivos e que habilidades podem ser desenvolvidas com o seu estudo.

Observadas algumas concepções teóricas sobre os níveis de compreensão dos alunos sobre a Geometria Espacial é importante que o professor, na sua prática, reflita sobre os procedimentos, o contexto e os recursos que poderão ser utilizados em cada aula e em cada atividade.

ATIVIDADE 1: DESCOBRINDO SEUS ALUNOS

Nas atividades desenvolvidas na Geometria Espacial são introduzidas algumas palavras pouco familiares ao aluno e, assim, a primeira proposta de atividade, adaptada de Pohl (1994, p. 178), pode ser um jogo de significados.

- a) Escreva em pedaços de papel expressões como: Aresta, Pirâmide, Cubo, Tetraedro, Poliedro, Hexaedro, Octaedro, Face de um poliedro, Arestas paralelas, Arestas reversas, Faces adjacentes, Planos paralelos etc.; dobre os pedaços de papel e os acondicione em um recipiente. Separe os alunos em dois grupos, de modo que cada aluno retire um dos pedaços de papel. Acertando o significado da expressão es-

crita no papel com uma explicação ou exemplo geométrico de modo que todos entendam e com a concordância do professor, o respectivo grupo faz um ponto. Ganha o grupo com maior número de pontos.

- b) Adaptações desta atividade podem ser apresentadas como, por exemplo, o professor pode colocar sobre sua mesa vários objetos tridimensionais e cada aluno exhibe a expressão sorteada em algum objeto, sem dizer palavra alguma.
- c) Em outra adaptação o professor pode solicitar, aos alunos, que eles próprios apresentem sugestões de expressões para dificultar o jogo.

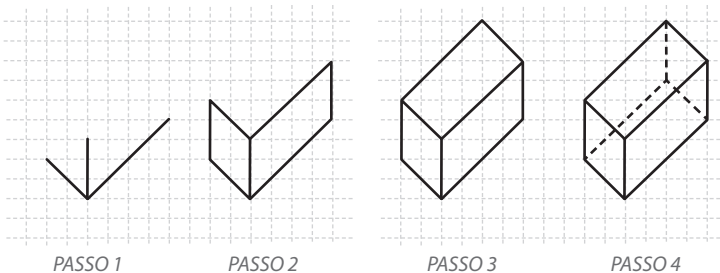
O objetivo dessa atividade é oferecer aos alunos oportunidade para aprender algum vocabulário da Geometria Espacial e algumas relações matemáticas.

ATIVIDADE 2: REPRESENTANDO FIGURAS TRIDIMENSIONAIS NO PLANO

Os resultados obtidos nas pesquisas de Parzysz (1989) salientam a necessidade de se propor, no ensino da Geometria Espacial, diferentes representações planas dos objetos espaciais. A representação de um objeto espacial por meio de figuras em folha de papel (bidimensional) se faz por uma ou mais representações, existindo, no caso de única representação, uma grande perda das informações sobre as características do sólido geométrico.

Para representar uma figura tridimensional num ambiente plano, segundo Parzysz (1989, p. 54-55), é necessário utilizar os devidos códigos de leitura e descrição dessas representações, tais como, linhas pontilhadas para indicar a profundidade e facilitar a visualização de arestas ocultas, a utilização de cores para identificar faces não visíveis etc., o que minimiza a perda das informações sobre o objeto.

Como sugestão, apresente aos alunos os passos necessários para representar um paralelepípedo em um papel quadriculado, como na figura a seguir, e os desafie a representar outros objetos tridimensionais.



M. Bernard Parzysz:
pesquisador francês.

Representação: a representação de um objeto por uma figura plana poderá ter fins bem distintos: colocar em evidência as dimensões, cujo conhecimento é necessário para a construção desse objeto ou, então, reproduzir o aspecto que tem o objeto na realidade. O desenho que satisfaz o primeiro intuito denomina-se projetivo e o segundo perspectivo. Fonte: Rodrigues (1948, p. 3).

ATIVIDADE 3: DESCOBRINDO OS SÓLIDOS POR SUAS PLANIFICAÇÕES

O objetivo da atividade apresentada a seguir pode ser descrito como identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com suas planificações.

Face: cada superfície plana que forma um poliedro.

Aresta: encontros entre duas faces do poliedro.

Vértice: encontro de duas arestas.

Poliedro: todo sólido fechado formado somente por superfícies planas.

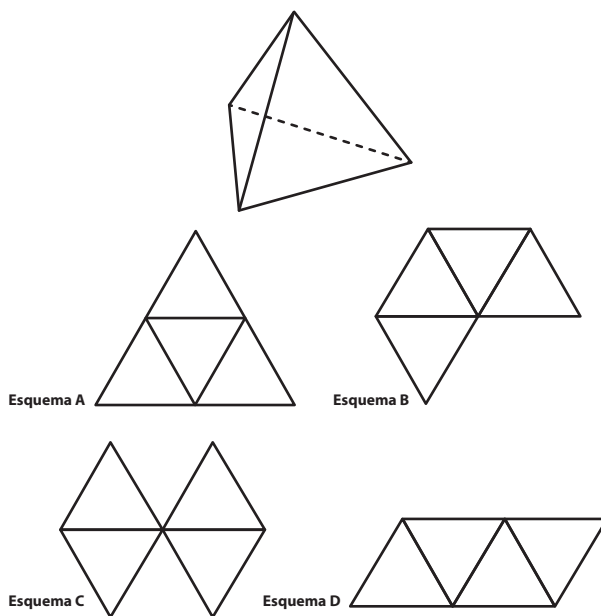
Essa descrição permite verificar as habilidades do aluno em quantificar as **faces**, as **arestas** e os **vértices** dos **poliedros** e em reconhecer planificações dos sólidos geométricos.

Essas habilidades podem ser avaliadas em situações-problema contextualizadas, que envolvam a composição e decomposição de figuras espaciais identificando suas semelhanças e diferenças.

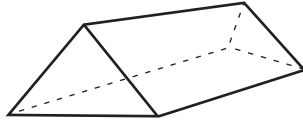
- a) Uma sugestão de atividade consiste em apresentar aos alunos diferentes sólidos e planificações de cada um deles. Depois, solicitar que decidam qual planificação se relaciona ao sólido escolhido. Eles têm ainda de elaborar critérios de escolha, listando o que consideraram e descartaram na escolha da alternativa. A atividade pretende evidenciar que um mesmo sólido pode apresentar diferentes planificações e que o número de faces e seu posicionamento no plano estão relacionados.

- b) (Prova Brasil, Tema I) Quais dos esquemas a seguir podem representar planificações de um **tetraedro**.

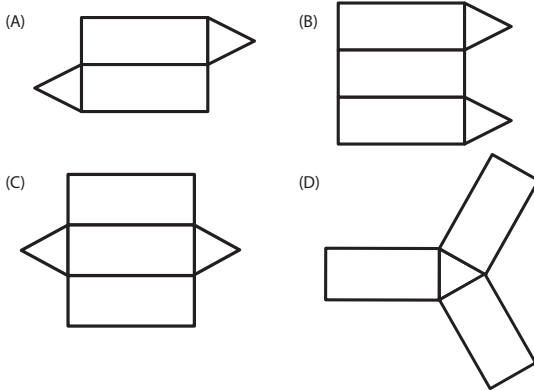
Tetraedro: o termo “tetra” significa “quatro” e “edro” significa “face”. Assim, um tetraedro tem quatro faces.



- c) (Prova Brasil, Tema I) É comum encontrar em acampamentos barracas com fundo e que têm a forma apresentada na figura a seguir.



Qual dos desenhos a seguir representa a planificação dessa barraca?



- d) O professor pode propor a construção de alguns sólidos, principalmente prismas e pirâmides, utilizando linha ou barbante, passando por dentro de canudos, os mesmos que usamos para tomar sucos ou refrigerantes. Cada canudo representará uma aresta e os alunos, na escolha do sólido geométrico que construirão, devem informar sobre o número de canudos necessários. Esta atividade pode ser explorada com outras possibilidades para que o aluno possa verificar* a validade do Teorema de Euler.
- e) Solicitar que os alunos investiguem qual o número mínimo de canudos necessários para se obter um poliedro.
- f) A construção de uma tabela com estas informações: número de faces, arestas e vértices, serão úteis para a próxima atividade.
- g) Solicitar aos alunos que identifiquem as arestas paralelas ou reversas de cada sólido construído.

*A verificação é um importante passo para a demonstração formal de um teorema ou propriedade.

Leonhard Euler: importante matemático que viveu de 1707 a 1783.

Teorema de Euler: em todo poliedro convexo, o número de faces somado ao número de vértices é igual ao número de arestas, acrescido de duas unidades.

Arestas paralelas: assim chamadas quando há um plano comum que as contém.

Arestas reversas: assim chamadas quando não há um plano comum que as contém.

Platão: seu verdadeiro nome era Plato. Ele nasceu e morreu em Atenas (427aC.-347 aC). O nome Platão derivou do seu vigor físico e da largura dos seus ombros (platos significa largueza).

Cinco poliedros regulares:

Platão designou cada poliedro regular a um dos cinco elementos da natureza: tetraedro ao fogo, hexaedro à terra, octaedro ao ar, dodecaedro ao universo e o icosaedro à água.

ATIVIDADE 4: DESCOBRINDO OS SÓLIDOS PLATÔNICOS COM O USO DO COMPUTADOR

Um poliedro que tenha como faces apenas polígonos regulares congruentes e que também apresente todos os ângulos poliédricos congruentes recebe o nome de poliedro regular.

Platão estudou certa classe de poliedros, por volta do século VI a.C., que vieram a ser conhecidos como Poliedros ou Sólidos de Platão, entre os quais, incluem-se os poliedros regulares.

De um poliedro de Platão exige-se que:

- Todas as faces sejam polígonos, regulares ou não, mas com o mesmo número de lados;
- Todos os ângulos poliédricos sejam formados com o mesmo número de arestas.

Para esta atividade serão utilizados somente os Poliedros de Platão que apresentam todas as faces formadas por polígonos regulares. Somente cinco poliedros regulares* existem, chamados de Sólidos Platônicos e são os mostrados na figura a seguir.



Tetraedro

Hexaedro

Octaedro

Dodecaedro

Icosaedro

Figuras extraídas do site: <<http://avrinc05.no.sapo.pt/>> Acesso em: 11 fev. 2011.

A atividade pode ser proposta, inicialmente, como uma Exposição na Escola e que envolve uma tarefa com várias etapas para grupos de dois alunos:

- a) Expor um sólido platônico montado em cartolina.
- b) Elaborar um cartaz com as informações sobre o respectivo sólido.
- c) Apresentar um objeto com o formato do respectivo sólido.
- d) Preparar um material como desafio aos visitantes da exposição.

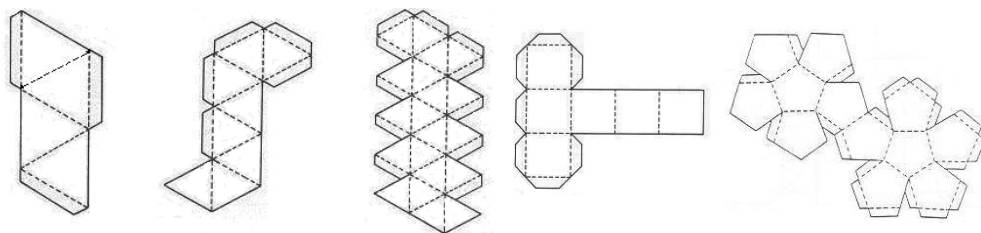
O sólido deverá ser montado a partir de sua planificação e pintado, em cada face, com uma cor diferente. Uma planificação

do mesmo sólido, sem que esteja pintada, também deve ser obtida para desafiar os visitantes da exposição. O desafio está em colocar quadrados coloridos (no caso do cubo) em cima da planificação em branco, para tentar acertar as cores de cada face do sólido montado.

Nesta atividade, adaptada de Silva (2006), utiliza-se de um software POLY, que não é gratuito, mas há versão disponível na Internet em <<http://www.peda.com/poly>>. O professor ou os próprios alunos podem baixar e instalar o software, sem dificuldades, para os computadores que são utilizados pelos alunos. A tecnologia não será o foco da aprendizagem, mas o recurso que tornará a atividade possível de ser realizada.

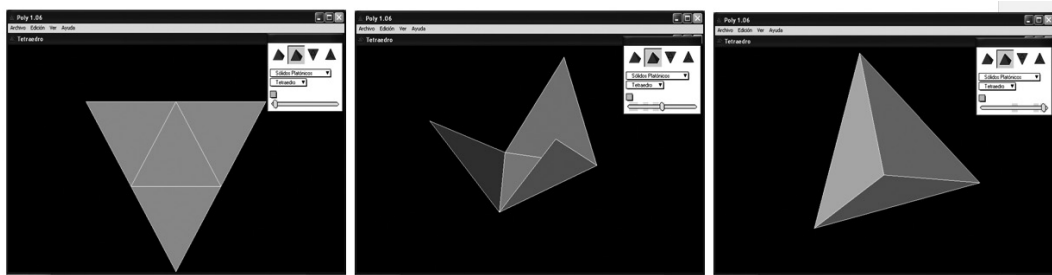
A tela do computador, apesar de bidimensional, possibilita a visualização da animação dos sólidos geométricos e o software POLY possibilita certo dinamismo das figuras, e o aluno pode, num clicar de botão, visualizar qualquer sólido geométrico e sua planificação.

Os alunos podem verificar que algumas planificações obtidas são diferentes das planificações presentes em algumas referências, como as apresentadas a seguir, o que não impede a realização da tarefa.

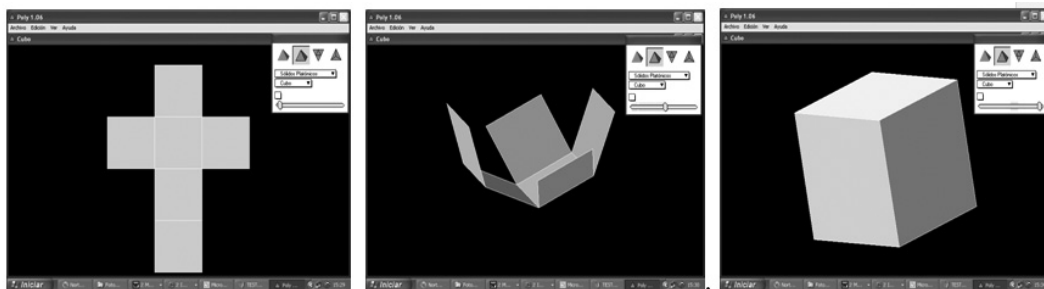


Para orientar no uso do software POLY é importante permitir que os alunos o explorem livremente por um tempo e o professor pode colocar algumas orientações e questões preliminares como solicitar que os alunos cliquem no botão que permite visualizar o sólido montado com as arestas realçadas e em sólidos platônicos para determinar o número de faces, arestas e vértices. A relação de Euler, já apresentada neste texto, pode então ser verificada.

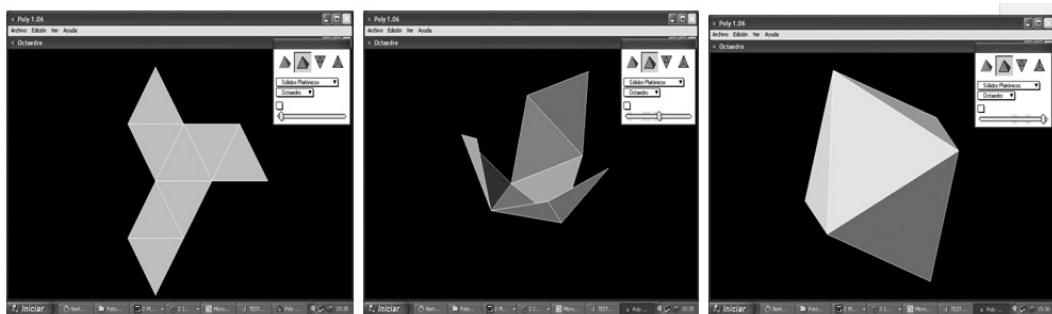
Para orientar na visualização das planificações de cada sólido no software POLY, apresentamos a seguir três momentos das planificações de cada um.



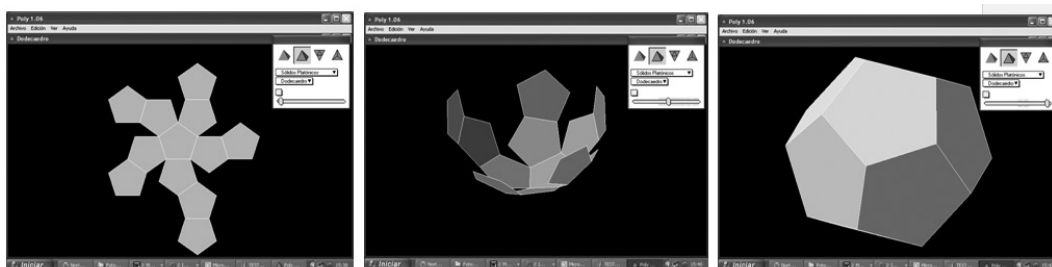
Planificação do tetraedro (4 faces: triângulo equilátero).



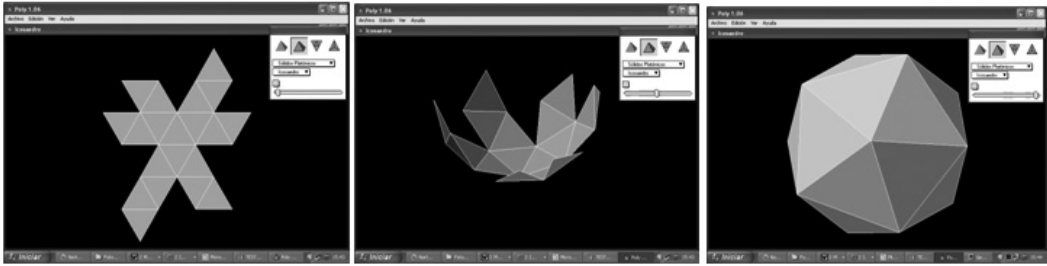
Planificação do hexaedro (6 faces: quadrados).



Planificação do octaedro (8 faces: triângulo equilátero).

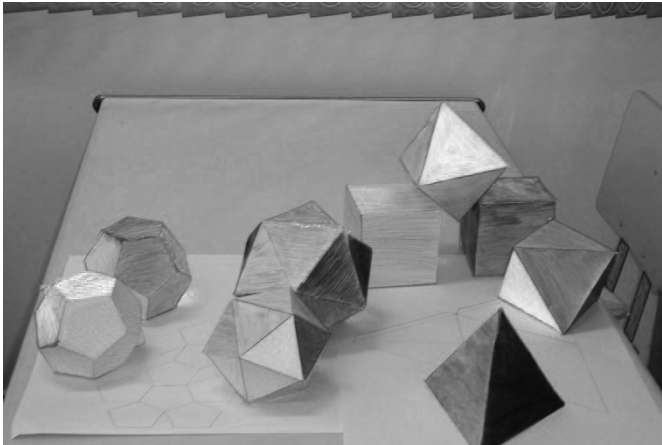


Planificação do dodecaedro (12 faces: pentágono).



Planificação do icosaedro (20 faces: triângulo equilátero).

Em Silva (2006), com a proposta desta tarefa, foram obtidas as produções a seguir:



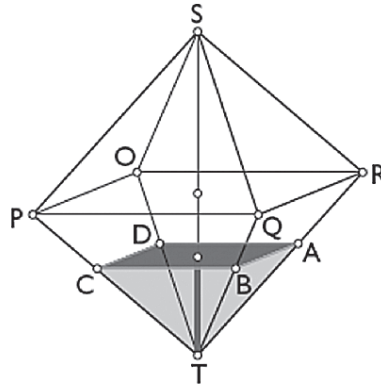
Sólidos platônicos construídos.



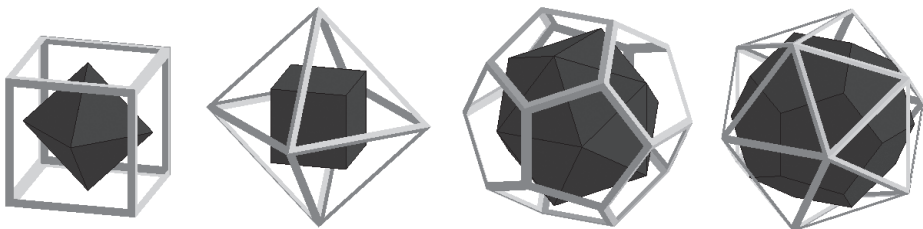
Cartazes com as informações dos sólidos platônicos.

ATIVIDADE 5: DESCOBRINDO OUTROS PONTOS DE VISTA DAS FIGURAS TRIDIMENSIONAIS

Esta atividade, adaptada da revista da Associação de Professores de Matemática de Portugal, *Educação e Matemática* (n. 110, 2010) tem como proposta a exploração de outros pontos de vista dos sólidos geométricos.



- Qual o polígono formado pelos vértices do octaedro O, P, Q e R? Indique outros polígonos definidos pelos vértices deste octaedro.
- Que tipo de polígono se forma na superfície do líquido à medida que se vai enchendo o octaedro?
- Uma atividade interessante é apresentar a afirmação: “O poliedro dual de um sólido platônico é outro sólido platônico” e pedir aos alunos que pesquisem na internet para encontrar uma explicação para esta afirmação e façam as respectivas correspondências do sólido platônico e seu dual. As figuras a seguir poderão ser encontradas com facilidade. Onde está o tetraedro?



Fonte: Wikipedia. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3lido_plat%C3%B3nico>.

d) Voltando ao software POLY solicitar que os alunos cliquem em Sólidos de Arquimedes, que permitem visualizar o sólido montado com as arestas realçadas, para determinar o número de faces, arestas e vértices. A relação de Euler, já apresentada nesse texto, é válida para esses sólidos?

1.5 PARA FINALIZAR

Neste capítulo foram apresentadas as considerações dos PCN sobre o bloco Espaço e Forma e algumas pesquisas que permitem um percurso na exploração deste tema. Foram recuperadas algumas características dos sólidos tridimensionais e estão disponíveis propostas de atividades para serem aplicadas ou adaptadas pelo professor, de acordo com seus alunos e respectivas séries.

Em outro capítulo, as grandezas e medidas destes objetos geométricos serão exploradas.

1.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais (PCN)*. Brasília: Ministério da Educação, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acessado em 13/08/2011

DUVAL, Raymond. Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. v. 1, Strasbourg: IREM, 1988. p 57-74.

EVES, Howard Whitley. *História da geometria*. São Paulo: Atual, 1992.

VAN HIELE, Pierre. *Structure and Insight: a Theory of Mathematics Education*, Academic Press. 1986.

MEDALHA, Vera Lúcia Lopes. *A Visualização no estudo da geometria espacial*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1997.

PARZYSZ, Bernard. *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée*. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir. 1989. Tese (Terceiro ciclo), Université Paris 7, Paris, 1989.

POHL, V. Visualizando o espaço tridimensional pela construção de poliedros. In: *Aprendendo e ensinando geometria*, tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Ed. Atual, 1994.

POSSANI Rosemary Aparecida Romagnoli. *Apreensões de representações planas de objetos espaciais em um ambiente de geometria dinâmica*. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

RIBEIRO, Isabel Cristina; BRANDALISE, Mary Ângela Teixeira. *Prova Brasil: Descritores de Avaliação Matemática* In: XVI ENCONTRO REGIONAL DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. 2010.

RODRIGUES, A. J. *Perspectiva paralela: classificação das projeções e projeções axonométricas*. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, 1948.

ROMMEVAUX Marie-Paule Louche. *Le discernement des plans: un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*. Strausbourg, France: Université de Soutenance, 1997.

SILVA, Maurício Barbosa da. *A geometria espacial no ensino médio a partir da atividade webquest: análise de experiência*. Dissertação (Mestrado), São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

VAN HIELE, Pierre. *Structure and Insight: a Theory of Mathematics Education*, Academic Press. 1986.

NOTA DAS AUTORAS PARA O PROFESSOR:

Neste capítulo procuramos abarcar os seguintes tópicos do bloco Espaço e Forma segundo os PCN (BRASIL, 1998):

- figuras bidimensionais e tridimensionais, análise e reconhecimento;
- composição e decomposição de figuras planas;
- planificações de alguns poliedros.
- figuras bidimensionais e tridimensionais, análise e reconhecimento;
- relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides;
- análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares);

- secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas;
- representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais.