

Modelos Matemáticos nas Ciências não-exatas.

Rene Brenzikofer

Eduardo Arantes Nogueira

Luiz Eduardo Barreto Martins

ORGANIZADORES

MODELOS MATEMÁTICOS NAS CIÊNCIAS NÃO EXATAS

VOLUME 2

HOMENAGEM A

**Euclides Custódio
de Lima Filho**

Blucher

Modelos Matemáticos nas Ciências Não-exatas



Doutor Euclides Custódio de Lima Filho

Eduardo Arantes Nogueira
Luiz Eduardo Barreto Martins
René Brenzikofer

Coordenadores

Modelos Matemáticos nas Ciências Não-exatas

© 2008 Eduardo Arantes Nogueira,
Luiz Eduardo Barreto Martins
René Brenzikofer

1ª edição – 2008

*É proibida a reprodução total ou parcial
por quaisquer meios
sem autorização escrita da editora*

EDITORA BLUCHER

Rua Pedroso Alvarenga, 1245 – 4º andar

04531-012 – São Paulo, SP – Brasil

Fax: (11) 3079-2707

Tel.: (11) 3078-5366

e-mail: editora@blucher.com.br

site: www.blucher.com.br

ISBN 978-85-212-0419-0

Ana Basaglia – capa e projeto gráfico

Flávia Portellada – revisão

FICHA CATALOGRÁFICA

Modelos matemáticos nas ciências não-exatas / Eduardo Arantes
Nogueira, Luiz Eduardo Barreto Martins, René Brenzikofer, coordenadores.
-- São Paulo: Blucher, 2008.

“Um volume em homenagem a Euclides Custódio de Lima Filho”

Vários autores.

Bibliografia.

ISBN 978-85-212-0419-0

1. Lima Filho, Euclides Custódio de 2. Modelos matemáticos
I. Nogueira, Eduardo Arantes. II. Martins, Luiz Eduardo Barreto.
III. Brenzikofer, René.

08-7894

CDD-511.8

Índices para catálogo sistemático:

1. Modelos matemáticos : Ciências não-exatas 511.8

AGRADECIMENTOS

Muitos colaboraram para a edição deste livro. Destacamos aqui os créditos mais importantes. Agradecemos ao Prof. Dr. Fernando Ferreira Costa, Vice-Reitor da Unicamp o apoio que desencadeou todo o processo editorial; ao Prof. Dr. José Antonio Rocha Gontijo pela crítica construtiva e boas sugestões; ao Prof. Dr. Roberto Paes pelo apoio dado à organização das homenagens em memória do Prof. Euclides Custódio de Lima Filho e também o apoio dado à edição deste livro.

Somos também gratos ao Sr. Eduardo Blücher e à sua equipe pelo cuidado na elaboração do volume. O trabalho inicial de edição de Ana Basaglia é aqui também creditado.

Finalmente, agradecemos ao Sr. Elias Messer, à Sra. Patrícia Messer e ao Sr. Paulo Sergio Oliveira, diretores da firma Line Life Cardiovascular, o apoio decisivo para o projeto. Também, nossos agradecimentos ao Laboratório Americano de Farmacoterapia, FARMASA, pelo importante apoio.

Este projeto recebeu auxílio da FAEP, processo 1192/05.

AUTORES

Antonio S. Cardoso Jr. — Mestre em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

Djalma de Carvalho Moreira Filho — Professor Titular de Epidemiologia, Departamento de Medicina Preventiva e Social, Faculdade de Ciências Médicas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

Eduardo Arantes Nogueira — Professor Associado de Clínica Médica, Departamento de Clínica Médica, Faculdade de Ciências Médicas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

Euclides Custódio de Lima Filho — Foi Professor Colaborador da Faculdade de Educação Física e Professor Associado do Instituto de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP. Foi Professor Associado da Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, São Paulo/SP.

Fábio A. Dorini — Doutorando em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

Irene Lorand-Metze — Professora Titular de Clínica Médica, Departamento de Clínica Médica, Faculdade de Ciências Médicas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

Jocelyn Freitas Bennaton — Professor Titular de Engenharia Elétrica, Departamento de Engenharia Elétrica, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo/SP.

Konradin Metzke — Professor Doutor em Anatomia Patológica, Departamento de Anatomia Patológica, Faculdade de Ciências

Médicas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP. Pesquisador 1A do CNPq. Líder do grupo Interdisciplinar “Patologia Analítica Celular”.

Laurenço Gallo Jr. — Professor Titular de Clínica Médica, Departamento de Clínica Médica, Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto/SP.

Luiz Eduardo Barreto Martins — Professor Doutor em Fisiologia de Exercício, Departamento de Estudos de Atividade Física Adaptada, Faculdade de Educação Física, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

M. Cristina C. Cunha — Professora Titular de Matemática Aplicada, Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

Neucimar Jerônimo Leite — Professor Livre-Docente Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

Paulo R. P. Santiago — Mestre em Educação Física, Departamento de Educação Física, Instituto de Biociências, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/SP.

Randall Luis Adam — Departamento de Anatomia Patológica, Faculdade de Ciências Médicas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

René Brenzikofer — Físico, Professor Colaborador da Faculdade de Educação Física, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

Sergio A. Cunha — Professor Associado de Ciências do Esporte, Departamento de Ciências do Esporte, Faculdade de Educação Física, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

Wanderley de Souza Filho — Mestre em Ciências da Computação, Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

SUMÁRIO

Prefácio.....	13
Trecho da Ata da 675ª Sessão Ordinária da Congregação, realizada no dia 24 de maio de 2002, aprovada na 676ª Sessão Ordinária da Congregação.....	14
1 Modelos matemáticos nas ciências não-exatas	15
<i>Euclides Custódio de Lima Filho</i>	
2 A inferência em epidemiologia	23
<i>Djalma de Carvalho Moreira Filho</i>	
3 Transporte linear com dados aleatórios.....	41
<i>M. Cristina C. Cunha, Fábio A. Dorini</i>	
4 Rotações em biomecânica usando quatérnios: formulação teórica e exemplo de aplicação	55
<i>Sergio A. Cunha, Paulo R. P. Santiago, Antonio S. Cardoso Jr., M. Cristina C. Cunha</i>	
5 Aplicação de ferramentas matemáticas em análises de imagens histológicas e citológicas.....	65
<i>Konradin Metze, Randall Luis Adam, Wanderley de Souza Filho, Irene Lorand-Metze, Neucimar Jerônimo Leite</i>	
6 Um modelo matemático da disposição das fibras miocárdicas do ventrículo esquerdo	83
<i>Eduardo Arantes Nogueira</i>	
7 Arritmia sinusal respiratória: aplicação de modelos matemáticos em humanos	113
<i>Luiz Eduardo Barreto Martins, Jocelyn Freitas Bennaton, Lourenço Gallo Jr.</i>	

PREFÁCIO

Este livro de Modelos Matemáticos nas Ciências Não-Exatas foi idealizado em homenagem ao professor Euclýdes Custódio de Lima Filho, médico, matemático e estatístico, cuja brilhante atuação acadêmica deixou marcas importantes em várias instituições de ensino superior e percutiu em tantos projetos científicos de colegas docentes, investigadores fora da universidade, alunos de pós-graduação e alunos de graduação. Sua jornada iniciou-se em Ribeirão Preto, passando por São Paulo, São Carlos, Rio de Janeiro e Campinas. Em Campinas, foi professor do Instituto de Matemática e Estatística e da Faculdade de Educação Física, tendo também uma atuação importante, apesar de não oficial, como orientador de projetos de investigação no Instituto de Biologia e na Faculdade de Ciências Médicas.

Foi um dos pioneiros no Brasil ao aliar disciplinas tão diferentes como Medicina e Matemática Estatística, tendo planejado e analisado inúmeros trabalhos científicos, teses de mestrado e doutorado. Em suas consultorias, sabia como ninguém associar os aspectos práticos com profunda erudição teórica, assim, plantando em seus colegas e alunos a semente de uma visão mais abrangente da ciência.

Sem dúvida, foi um espírito renascentista, não só pela multidisciplinaridade, mas também pela aguda sensibilidade e elegância com que enfocava os mais complexos problemas metodológicos. Seu passamento deixou a todos nós — seus amigos, alunos e admiradores — com profunda tristeza. Dentre várias manifestações de pesar, salientamos as palavras dos professores Lourenço Gallo Junior e Denizard Rivail Gomes, proferidas na 675^a Sessão Ordinária da Congregação da Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, reproduzidas adiante. Neste livro, estão descritas as apresentações do Seminário de Biomatemática a ser realizado em sua homenagem.

*Eduardo Arantes Nogueira,
Luiz Eduardo Barreto Martins,
René Brenzikofer*

TRECHO DA ATA DA 675ª SESSÃO ORDINÁRIA
DA CONGREGAÇÃO, REALIZADA NO DIA
24 DE MAIO DE 2002, APROVADA NA
676ª SESSÃO ORDINÁRIA DA CONGREGAÇÃO

Congregado **Lourenço Gallo Júnior**: “É com um sentimento de tristeza e pesar, pela perda do professor Euclides Custódio de Lima Filho, que me cabe destacar algumas das muitas e marcantes contribuições acadêmicas e científicas do referido professor, em nossa instituição e em muitas outras em que atuou como docente e assessor. Nascido em Araraquara, São Paulo, no dia 22 de agosto de 1937, foi admitido na Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto — USP, no ano seguinte à conclusão do seu curso colegial, ou seja, em 1956. Como aluno de nossa Faculdade, logo mostrou interesse pela vida acadêmica, ao ser diretor do Departamento Científico do Centro Acadêmico Rocha Lima — FMRP-USP, nos anos de 1958 e 1959. Também participou ativamente, como conferencista, da Liga Brasileira de Combate à Moléstia de Chagas, nos anos de 1957 e 1958. Em razão de seus pendores pela área de ciências exatas, findo o curso médico, em 1961, iniciou em 1962 especialização em Estatística Aplicada às Ciências Médicas, freqüentando vários cursos promovidos pela Organização Panamericana de Saúde e pela Organização Mundial de Saúde, realizados junto ao Departamento de Bioestatística da Faculdade de Higiene e Saúde Pública — USP. No mesmo local, continuou sua especialização, freqüentando o curso de Introdução à Teoria das Probabilidades. Nos anos de 1965 e 1967 especializou-se em subáreas da estatística, freqüentando cursos no recém-criado Departamento de Matemática Aplicada à Biologia, da Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto — USP, a saber: Aplicação de métodos não-paramétricos em Biologia e Ensaio biológicos, cursos estes ministrados pelo professor doutor John Fertig, da Universidade de Columbia, Nova York — EUA. Além da Estatística, o professor Euclides cuidou de se aprofundar nos conhecimentos de Matemática (cálculo, geometria analítica, geometria projetiva, álgebra linear e teoria das séries), freqüen-

tando vários cursos de Matemática oferecidos pela Faculdade de Ciências e Letras de São Paulo — USP, nos anos de 1962 e 1963. Na pós-graduação, também realizada no Departamento de Matemática Aplicada à Biologia da FMRP-USP, participou de cursos de Matemática Aplicada à Biologia, Programação Linear e Topologia Diferencial. Em 1967, sob orientação do professor doutor Geraldo Garcia Duarte, defendeu e teve sua tese de doutorado aprovada. Ela intitulava-se 'Limites de Tolerância. Aplicações em Biologia'. Como instrutor do Departamento de Higiene e Medicina Preventiva da FMRP-USP (de 1962 a 1965) e, a seguir (1965-1984), como professor doutor, junto ao Departamento de Matemática Aplicada à Biologia da mesma Faculdade, o professor Euclides desenvolveu profícua atividade acadêmica relacionada ao ensino de graduação e pós-graduação, à pesquisa e à prestação de serviços (Assessoria Estatística aos Pós-Graduandos e Docentes da FMRP-USP). Inteligência brilhante, arguta e provocativa, o professor Euclides foi um atrator de docentes que, por ele estimulados, se empoçaram com as aplicações da Matemática e Estatística nas áreas de Biologia e Medicina. Foram seus alunos de pós-graduação vários docentes que tiveram e têm destacada atuação acadêmica no câmpus de Ribeirão Preto — USP e em outras instituições universitárias. Para citar alguns deles, nos reportaremos aos nomes dos professores Gerson Muccillo (FFCLRP-USP), Gabriela Stangenhau (IME-USP), Geraldo Garcia Duarte Júnior (FMRP-USP), Antonio Ruffino Netto (FMRPUSP) e Léo Degrève (FFCLRP-USP). Não menos importantes foram as atividades extracurriculares por ele conduzidas, no que se refere às aplicações das ciências exatas na Medicina. Eu, juntamente com muitos outros colegas, durante o curso de graduação em Medicina, tivemos oportunidade de nos iniciarmos no aprendizado de cálculo integral e diferencial, em cursos ministrados, informalmente, pelo professor Euclides, nas salas do HC 'velho', em período noturno. A determinação do professor Euclides com o controle de qualidade a ser obedecido na experimentação animal e humana, a fim de que o método quantitativo pudesse expressar a plenitude de seu potencial, permitiu que várias linhas de pesquisa pudessem ser consolidadas em diferentes grupos de pesquisa da FMRP-USP. A partir de 1984,

o professor Euclides se transferiu para a UNICAMP. Naquela instituição, foi docente junto ao Departamento de Estatística do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (IMECC). Continuando sua trajetória acadêmica, exerceu papel de liderança naquela instituição, que culminou com sua eleição para chefia do Departamento de Estatística do IMECC e, a seguir, com a titulação de professor adjunto. Paralelamente às atividades no IMECC, o professor Euclides fomentou, intensamente, projetos de pesquisa multi e interdisciplinares entre aquela instituição e outras da UNICAMP, como a Faculdade de Medicina, o Instituto de Biologia e a Faculdade de Educação Física. Desta iniciativa muitos trabalhos foram publicados em periódicos nacionais e do exterior. Após a sua aposentadoria em 1995, continuou a exercer atividades acadêmicas no Laboratório de Biomecânica da Faculdade de Educação Física da UNICAMP. Naquele local, mais uma vez se destacou por desenvolver pesquisa quantitativa de alto nível científico e por se dedicar à formação de recursos humanos no nível de pós-graduação. Nos últimos cinco anos, o professor Euclides teve participação decisiva na criação da Sociedade Brasileira de Biomecânica e na publicação de seu periódico oficial, *Brazilian Journal of Biomechanics*. O exemplo de desprendimento e dedicação que norteou a brilhante carreira acadêmica do professor Euclides é motivo de orgulho para a FMRP-USP e as demais instituições, onde ele teve oportunidade de atuar.”

Congregado Denizard Rivail Gomes: “... Conheci-o como nosso aluno no cursinho preparatório para vestibular de Medicina. Assim como o professor Ulisses Meneghelli e o dr. Guido Hellem, era aluno brilhante. Foi depois nosso aluno quando passou pelo estágio de cirurgia e mais tarde fui seu aluno, no primeiro curso de pós-graduação (Curso de Preparação Básica do Pessoal Docente) ministrado nessa faculdade. Naquela época, o doutoramento era feito diretamente (sem mestrado). Um dos professores foi também o professor Carlos Laure, que está aqui conosco. Curso excelente, especialmente porque nos ensinava o preparo, o planejamento, antes de iniciarmos qualquer trabalho ou pesquisa. Tivemos aí mais uma oportunidade de constatar as qualidades que o professor Gallo já referiu e, graças a essas orientações recebidas no referido curso, obti-

vemos todos uma ótima formação. Gostaria, portanto, de falar agora sobre o Euclides — pessoa que foi excelente e muito amigo. Trabalhamos juntos vinte e poucos anos em um ambulatório médico na periferia (o dr. Luis Carlos Raya também compartilhou conosco esse trabalho). Atendíamos aí pessoas necessitadas e sem recursos sequer para ir a um hospital. O Euclides exercia a função de médico clínico e não matemático, desempenhando-se muito bem nessa atividade. Foi uma das inteligências mais brilhantes que conheci. Era impressionante seu raciocínio e precisava, por isso, ser muito tolerante, porque as pessoas assim vão muito além e, antes de concluirmos a fala, já chegaram lá, há muito tempo. Excelente médico, eu dizia, e tratava os doentes não só em sua parte física, mas ia além, tratava-os como um todo, e não vendo só a doença, que é o estágio final do processo. Aos poucos, vamos aprendendo que em cada ser a doença pode se manifestar com múltiplas e diferentes facetas, pois cada individualidade é como um general, que tem sob suas ordens cerca de 100 trilhões de soldados, que são as células, e dele depende o trabalho harmônico desse exército. Se o general se desequilibra, desorganiza-se todo o conjunto; essa desarmonia se transfere ao corpo e essa situação persistindo, instala-se a doença. Chegamos aos poucos a essa conclusão, à qual o Euclides já havia chegado, e por isso conversava muito com o doente, cuidando do indivíduo como um todo. Por outro lado, o Euclides era também uma espécie de conselheiro, e tive a oportunidade de vê-lo, muitas vezes, interferir e orientar casais em desentendimento, fazendo que, por intermédio da argumentação, eles repensassem a situação e retomassem o caminho da concórdia para detectar os problemas. Ele tinha muita facilidade para argumentar, conseguindo assim o seu objetivo. Voltando ao médico, ele sempre tratava os doentes com muita humanidade, o que precisamos ter sempre em mente, como exemplo a seguir, pois a Medicina não é só laboratório, pesquisa, pedir exames e fazer receitas; o médico precisa utilizar-se da terapêutica maior, que é o Amor, seguir o exemplo de Cristo, que curava com o olhar ou com uma palavra, ou apenas tocando o doente. Não temos ainda essa capacidade, mas uma potencialidade que precisamos desenvolver, e aproximando-nos dos nossos doentes, sentindo as suas dificuldades, pode-

remos depois tratá-los como um todo. O Euclides agia assim, sentindo os doentes, tendo base para orientá-los e, por isso, era tão querido e admirado por eles. Nada mais pretendo dizer, mesmo porque nosso tempo é exíguo. Quero deixar aqui minha homenagem e meus sentimentos por essa perda irreparável, mas nós, que acreditamos que a morte é só do corpo, continuamos sentindo o Euclides como sempre, vivo e atuante.”

1 MODELOS MATEMÁTICOS NAS CIÊNCIAS NÃO-EXATAS¹

Euclides Custódio de Lima Filho

1 Introdução

A expressão *modelo matemático* não é nova. Ela vem sendo amplamente usada por engenheiros, físicos, estatísticos e economistas desde a década de 1940, pelo menos.

Só para dar uma primeira idéia, um modelo matemático é o resultado de tentativas no sentido de *matematizar* uma situação dada. Essa situação pode ser algo como um fenômeno em ciências físicas, químicas, biológicas, humanas ou sociais; um processo tecnológico, uma obra literária ou musical; uma tarefa com etapas bem definidas. E *matematizar* não significa apenas traduzir a situação em linguagem matemática. É muito mais que isso, pois consiste em desvelar possíveis estruturas matemáticas contidas na situação – “desentranhar estruturas”.

Após identificar essas estruturas, poderemos aplicar as teorias matemáticas correspondentes para obter:

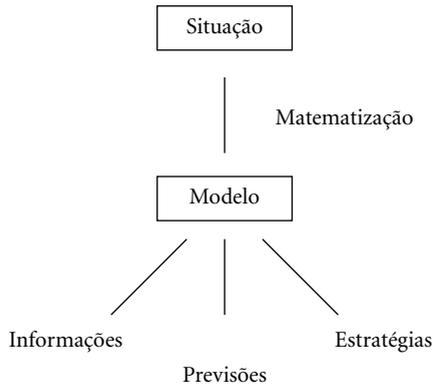
- 1 - Informações novas sobre a situação.
- 2 - Previsões e projeções.
- 3 - Estratégias.

Outra vantagem do uso de modelos é a economia: *situações diferentes* podem admitir um *mesmo modelo*. Em tais casos, as várias situações podem ser estudadas englobadamente, de uma vez só. E as conclusões obtidas serão válidas para cada situação em particular.

Por causa dessa ânsia por estruturas, a construção de modelos se enquadra na corrente de pensamento conhecida como *estruturalismo*.

¹ Este é um texto inédito da lavra do prof. Euclides Custódio de Lima Filho, apresentado quando estava na Escola Nacional de Saúde Pública. Os editores escolheram este texto, levemente editorado, como primeiro capítulo deste livro – em sua homenagem.

Exemplo:



2 O conceito de modelo matemático

“Afinal, o que é exatamente um modelo e para que serve?.

Aventuro-me a sugerir que dez construtores de modelos darão à pergunta cinco respostas, ao menos na aparência”.

(Brodbeck, M. *Models, meaning and theories*. In: M. Brodbeck (Ed.). *Readings in the Philosophy of the Social Sciences*, p.579-600. Nova York: MacMillan Pub. Co., 1968.)

Pretendo apresentar uma formalização de modelo matemático. Isto pressupõe uma metalinguagem (linguagem para falar de outra linguagem).

Como guia, aproveitei a idéia seguinte, que encontrei em Chorley-Kaggett:

Um modelo (matemático) é uma representação aproximada e seletiva (respectivamente, em termos matemáticos) de uma dada situação. (Chorley, R. e Kaggett P. *Socio-economic models in geography*. Londres: Methuen, 1968.)

Seja S_0 uma situação dada, que pode ser real ou simulada. Como tal, ela é constituída de componentes e de interdependências.

Na etapa inicial, selecionamos em S_0 as componentes e as interdependências que considerarmos as mais relevantes, descartando o restante; obteremos assim, uma situação simplificada: S .

A passagem da situação S_0 de partida à situação simplificada S constitui uma *seleção*.

Por outro lado, seja M uma estrutura matemática. Por definição, M é um conjunto não-vazio munido de pelo menos uma relação. A idéia é que M seja uma teoria matemática.

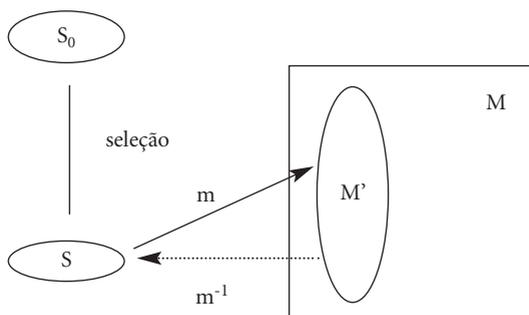
Em seguida, considere uma dada interdependência, em S , uma dada relação R em M e uma aplicação (função) $f: S \rightarrow M, x \rightarrow x'$. Diremos que f preserva essa interdependência, se cada vez que for y interdependente de x em S resultar $x' R y'$ em M .

Agora, sim, já podemos definir quando é que a estrutura matemática M é um *modelo matemático* ($m.m$) de S , e automaticamente de S_0 .

Definição: Dizemos que M é um *modelo matemático* ($m.m$) de S e de S_0 , se existe uma aplicação injetiva $m: S \rightarrow M$ que leve injetivamente cada componente de S num elemento de M e cada interdependência de S numa relação de M , preservando todas.

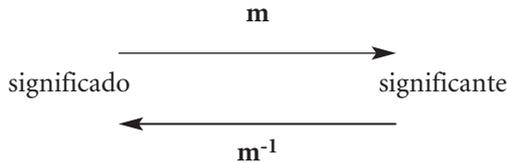
Esta aplicação $m: S \rightarrow M$ é então dita uma *representação* (matemática), uma *modelagem* (matemática) ou uma *matematização* de S e de S_0 .

Se $M' = m(S)$ é a imagem de S por m , podemos tomar a inversa, $m^{-1}: M' \rightarrow S$, dita uma *interpretação* de M . Por isso, m consiste em abstrair a situação e m^{-1} consiste em situar a abstração.



Elas são duais e fazem a tradução respectivamente de S em M' e de M' em S , sem qualquer ambigüidade. Enquanto M é um $m.m$ de

S, a situação **S** é um *modelo concreto* de **M**. Em termos de lingüística, **M** é uma *sintaxe* e **S** é uma *semântica*, isto é:



O mais familiar exemplo de **m.m** é dado por uma equação

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

de um fenômeno. Neste caso, o modelo é, formalmente, $\mathbf{M} = \mathbf{R}^n$ com a relação dada por **f**. As componentes relevantes são as **n** variáveis selecionadas no fenômeno; e interdependência relevante só foi destacada uma, representada por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$.

Se forem selecionadas **p** interdependências, haverá **p** relações \mathbf{f}_i , e assim o fenômeno será representado por um sistema de **p** equações:

$$\mathbf{f}_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Na prática, tanto **n** quanto **p** costumam ser muito grandes – às vezes, milhares. E as equações podem ser não-lineares. Com a difusão dos computadores, de todos os tipos e capacidades, a arte-ciência de modelagem quase virou rotina. Já disse, a propósito, o matemático francês J.J. Lions que a história dos modelos tem duas fases – a.C. e d.C., quer dizer, antes e depois do computador...

Qualquer aplicação prática da Matemática, por mais trivial que seja, envolve a construção de um **m.m**, construção muitas vezes puramente mental:

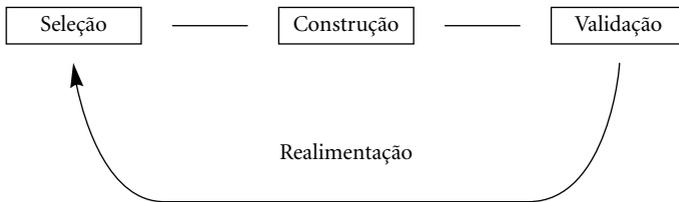
“Seria a Matemática um modelo da vida ou a vida uma realização concreta da Matemática?” (Euclides Roxo)

Em cada momento histórico, nem sempre a Matemática já tem disponível a estrutura **M** adequada à construção de um determina-

do modelo. Pode ser que a estrutura tenha de ser formulada, por exigência da situação. Por exemplo, foram os modelos de catástrofe, no final da década de 1960, que motivaram o renascimento e, conseqüentemente, o progresso da teoria das singularidades das aplicações diferenciáveis. Vice-versa, a teoria dos grupos – atribuída ao matemático francês Evariste Galois (1811-1832), um dos primeiros estruturalistas – permaneceu um século como disciplina de Matemática Pura até a década de 1930, quando passou a interessar os físicos teóricos.

3 Validação

Etapa indispensável na formulação de qualquer **m.m** é a validação ou teste. Isto consiste em comparar dados já disponíveis, sobre o comportamento da situação, *versus* resultados fornecidos diretamente pelo modelo, através da Matemática.



Se a concordância não for considerada razoável pelo construtor, pelo avaliador ou pelo cliente, o modelo terá de ser aperfeiçoado (*reciclagem*). E, num caso extremo, será definitivamente rejeitado e substituído. Tudo num processo dinâmico de realimentação (*feedback*). Por isso, a modelagem é uma *dialética* no sentido empregado pelo filósofo Hegel (1770-1831): “É tudo que é móvel, progressivo ou que está em evolução”; a dialética constitui o principal pressuposto da filosofia de Marx.

4 Previsão a partir de modelos

Vimos em 1 que uma das utilidades potenciais de um modelo é permitir *previsões* de itens novos (componentes ou interdependências)

dentro da situação S_0 de partida. Nesta seção, analisaremos como isto ocorre, com base na formalização $m: S \rightarrow M$.

O requisito essencial é que a aplicação de modelagem não seja sobrejetiva. Então, tome um elemento $y \in M$ na estrutura matemática e tal que $y \notin M' = m(S)$. Portanto, não existe $x \in S$ tal que $m(x) = y$.

Mas, quem sabe, não existe um tal x numa situação simplificada mais ampla, $S' \supset S$. No caso positivo, x provém de algum $x_0 \in S_0$, um dos elementos componentes da situação original. É claro que x_0 , ou era desconhecido antes, ou foi desconsiderado como irrelevante em nossa etapa de seleção $S_0 \rightarrow S$. Este é o capítulo de previsão, de um objeto novo, em S_0 .

Considerações análogas valem para previsões de interdependências. É este, essencialmente, o programa que tem sido seguido em predições teóricas na ciência moderna. E o passo seguinte é a comparação experimental, que pode tardar muito.

Exemplos marcantes:

1 - O quadro periódico dos elementos químicos (1869)

Pode ser considerado como um **m.m.** da Química. Seu inventor – o químico russo D. I. Mendeleev (1834-1907) – dispôs os elementos químicos em ordem crescente de número atômico (= nº de prótons no átomo). As lacunas resultantes o levaram a prever a existência de elementos até então desconhecidos. Suas previsões foram e ainda continuam a ser confirmadas pela descoberta experimental de elementos com as mesmas propriedades antecipadas pelo modelo. Em março de 1984, anunciou-se em Darmstadt, na Alemanha, a descoberta do elemento 108, cuja vida só dura 0.002 s.

2 - Os modelos do sistema planetário

Modelo geocêntrico (Ptolomeu, século II).

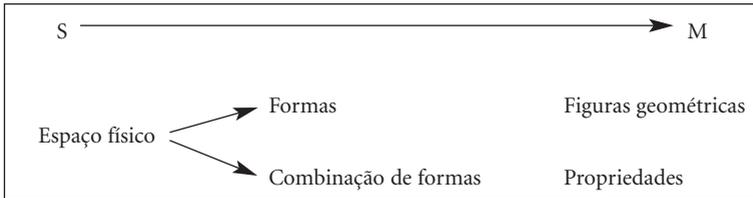
Modelo Heliocêntrico (Copérnico, século XV).

3 - O modelo do átomo (Niels Bohr, 1913)

Inspirado no modelo heliocêntrico.

4 - Modelos do espaço físico

O primeiro foi a Geometria Euclidiana (sec. III a.C.), ainda hoje vigente.



Na teoria da relatividade geral (1916), Einstein usou uma geometria não-euclidiana (a de Riemann) para formular um novo modelo do universo.

A Geometria Euclidiana segue sendo uma excelente aproximação, para distâncias na Terra.

5 - Modelos do Universo

Modelo	Época	Tipo	Disciplina em que se baseia
Babilônios	2000 a.C.	Aritmético (estático)	Aritmética
Ptolomeu	Séc. II	Geométrico	Geometria Euclidiana
Newton	Séc. XVII	Analítico	Cálculo
Einstein	Séc. XX	Geometria-diferencial	Geometria-diferencial

Adaptado de Resnikoff, H. L. e Wells, R. O. *Models of the Universe*. In: H. L. Resnikoff e R. O. Wells (Ed.). *Mathematics in civilization*. Nova York: Dover Publications, 1984.

O modelo de Newton, dito Mecânica Clássica, teve dois desdobramentos: a Mecânica Relativista (Einstein), no domínio do muito rápido, e a Mecânica Quântica, no domínio do muito pequeno.

6 - Modelos de estruturas mentais

Conforme o epistemólogo suíço Jean Piaget (1896-1980), as estruturas mentais entram em correspondência biunívoca com as três estruturas fundamentais, ou “estruturas-mães”, da Matemática, que são:

- as estruturas algébricas ou operatórias;

- as estruturas de ordem;
- as estruturas topológicas ou de proximidade.

Outro modelo concebido por Piaget é o dos estágios de desenvolvimento cognitivo do indivíduo, isto é, formas de organização da atividade mental.

Estágio	Faixa etária aproximada
I - do sensório-motor	antes dos 2 anos
II - das operações concretas	
a) pré-operatório	2 a 7 anos
b) operatório	7 anos até adolescência
III- do lógico-formal	a partir da adolescência

As faixas etárias não são rígidas, podendo inclusive variar com o ambiente cultural. Mas a ordem – esta sim é invariável em todos os indivíduos. Embora Piaget não tenha sido um educador profissional, esses resultados são a base de estratégias pedagógicas. E a construção de modelos é o ponto fundamental de toda a sua teoria.

5 Modelos e ética

Muitas vezes, a construção de um **m.m** tem como objetivo final uma tomada de decisão. Uma interpretação tendenciosa dos resultados do modelo, uma inescrupulosa manipulação destes resultados, uma escolha inadequada de estratégia, entre os fornecidos pelo modelo ou mesmo a sonegação dos critérios usados na etapa da seleção, tudo isto suscita sérios problemas éticos. Mas nunca se poderá atribuir culpa à Matemática, uma vez que a tomada de decisão é ato subjetivo. Os modelos são “potencialmente enganosos e corruptores” – diz M. B. Turner. Tal afirmação deve ser entendida como um sinal de alerta para os usuários.