

História da Matemática

TRADUÇÃO DA TERCEIRA EDIÇÃO AMERICANA

Carl B. Boyer
Uta C. Merzbach


Tradução de
HELENA CASTRO

Prefácio de
ISAAC ASIMOV

Blucher

HISTÓRIA
DA
MATEMÁTICA

Blucher

Carl B. Boyer
Uta C. Merzbach

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

História da Matemática
Editora Edgard Blücher Ltda.
Tradução da 3.ª edição americana 2012
1ª reimpressão – 2013

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-012 – São Paulo – SP – Brasil
Tel 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed.
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,
Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

FICHA CATALOGRÁFICA

B. Boyer, Carl
História da matemática / Carl B. Boyer,
Uta C. Merzbach; [tradução de Helena Castro].
São Paulo: Blucher, 2012.

Título original: A history of mathematics.
3. ed. norte-americana.
Bibliografia
ISBN 978-85-212-0641-5

1. Matemática – História I. Boyer, Carl. B.
II. Título.

11-11882 CDD-510.9

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: História 510.9

Em memória de Carl B. Boyer
(1906-1976)
– U.C.M.

Em memória de meus pais,
Howard Franklin Boyer e
Rebecca Catherine (Eisenhart) Boyer
– C.B.B.

PREFÁCIO DA TERCEIRA EDIÇÃO

Durante as duas décadas desde o aparecimento da segunda edição desta obra, ocorreram mudanças substanciais no curso da matemática e do tratamento de sua história. Dentro da matemática, resultados notáveis foram alcançados por uma mistura de técnicas e conceitos de áreas de especialização anteriormente distintas. História da matemática continuou a crescer quantitativamente, como observado no prefácio da segunda edição; mas aqui, também, houve estudos substanciais que superaram a polêmica da história "interna" versus "externa" e combinaram uma abordagem nova da matemática dos textos originais com as ferramentas linguísticas, sociológicas e econômicas adequadas do historiador.

Nesta terceira edição eu tentei novamente aderir à abordagem de Boyer da história da matemática. Embora desta vez a revisão tenha incluído toda a obra, as mudanças tem a ver mais com ênfase do que com conteúdo original, as exceções obvias sendo a inclusão de novas descobertas desde o aparecimento da primeira edição. Por exemplo, o leitor encontrará maior ênfase no fato de que lidamos com um número tão pequeno de fontes da antiguidade; esta é uma das razões para condensar três capítulos prévios tratando do período helênico em um. Por outro lado, o capítulo tratando da ìndia e da China foram divididos, como o conteúdo pede. Há uma ênfase maior na recorrente influência mútua entre a matemática pura e aplicada, como exemplificado no capítulo 14. Alguma reorganização é devida à tentativa de salientar o impacto da transmissão institucional e pessoal de idéias; isto afetou a maior parte dos capítulos referentes a épocas anteriores ao século dezenove. Os capítulos que tratam do século dezenove foram os que menos foram alterados, já que eu tinha feito mudanças substanciais em parte deste material na segunda edição. O material do século vinte foi dobrado, e um novo capítulo final trata das tendências recentes, inclusive soluções de problemas de longa data e o efeito dos computadores na natureza das demonstrações.

É sempre um prazer reconhecer aqueles que sabemos ter tido impacto em nosso trabalho. Estou muito agradecida a Shirley Surrete Duffy por ter respondido judiciosamente a diversos pedidos de conselhos referentes a estilo, mesmo nas vezes em que existiam prioridades mais imediatas. Peggy Aldrich Kidwell respondeu com precisão infalível minhas questões referentes a certas fotografias no National Museum of American History. Jeanne LaDuke imediatamente e de maneira animada atendeu meus pedidos de auxílio, especialmente na confirmação de fontes. Judy e Paul Green podem não perceber que uma conversação casual no ano passado me levou a reavaliar algum do material recente. Eu obtive prazer e conhecimento especiais de diversas publicações recentes, entre elas Klopfer 2009 e, de maneira mais relaxada, Szpiro 2007. Muitos agradecimentos são devidos aos editores e à equipe de produção da Jhon Wiley & Sons que trabalharam comigo para tornar esta edição possível: Stephan Power, o editor chefe, foi infalivelmente generoso e diplomático em seus conselhos; o editor assistente, Ellen Wright, facilitou meu progresso pelos principais degraus da criação do manuscrito; a gerente de produção chefe, Marcia Samuels, me deu instruções claras e concisas, advertências e exemplos; Os editores chefes de produção Kimberly Monroe-Hill e John Simko e a editora de texto, Patricia Waldygo, sub-

meteram o manuscrito a um exame detalhado meticuloso. O profissionalismo de todo os envolvidos forneceu um tipo especial de encorajamento em tempos de crise.

Eu gostaria de fazer uma homenagem a dois acadêmicos cuja influência em outros não deveria ser esquecida. A historiadora do renascimento Marjorie N. Boyer (Mrs. Carl B. Boyer) com bondade e sabedoria cumprimentou uma jovem pesquisadora no início de sua carreira por uma palestra proferida em uma conferência sobre Leibniz em 1966. A breve conversa com uma completa estranha teve muita influência sobre mim ao ponderar a escolha entre matemática e sua história.

Mais recentemente, o falecido historiador de matemática, Wilbor Knorr, deu um exemplo significativo a uma geração de acadêmicos mais novos ao se recusar a aceitar a noção de que os autores antigos já foram definitivamente estudados por outros. Deixando de lado o “magister dixit”, ele nos mostrou a riqueza de conhecimento ao se procurar os textos.

Uta C. Merzbach, Março de 2010

PREFÁCIO DA SEGUNDA EDIÇÃO

Esta edição trás a uma nova geração e a um espectro mais amplo de leitores um livro que se tornou um padrão em seu assunto, após seu aparecimento inicial em 1968. Os anos desde então têm sido anos de interesse renovado e atividade vigorosa na história da matemática. Isto tem sido demonstrado pelo aparecimento de numerosas publicações novas tratando de tópicos na área, por um aumento no número de cursos sobre história da matemática, e por um crescimento constante, em todos estes anos, do número de livros populares dedicados ao tema. Ultimamente, o interesse crescente na história da matemática se refletiu em outros ramos da imprensa popular e nos meios eletrônicos. A contribuição de Boyer à história da matemática deixou marcas em todas essas atividades.

Quando um dos editores da John Wiley & Sons me procurou, propondo uma revisão desta obra padrão, concordamos logo que as modificações do texto deveriam ser as menores possíveis e que as alterações e adições a serem feitas deveriam, tanto quanto possível, acompanhar a orientação original de Boyer. Assim, os vinte e dois primeiros capítulos foram deixados praticamente sem alteração. Os capítulos relativos ao século XIX foram revistos; o último capítulo foi aumentado e dividido em dois. Em toda parte tentou-se manter uma abordagem consistente dentro do volume e que estivesse de acordo com o objetivo declarado de Boyer de dar ênfase maior a elementos históricos do que é usual em obras similares.

As referências e a bibliografia geral foram substancialmente revistas. Como esta obra foi destinada a leitores da língua inglesa, muitos dos quais eram incapazes de usar as referências de Boyer a obras em outras línguas, estas foram substituídas por obras recentes em inglês. Recomenda-se porém aos leitores que consultem também a Bibliografia Geral. Vindo imediatamente após as referências por capítulo no fim do livro, contém obras adicionais e outras referências bibliográficas, com menos restrições à língua. A introdução à bibliografia fornece orientação geral para outras leituras agradáveis e para a resolução de problemas.

A revisão inicial, que apareceu dois anos atrás, foi destinada a uso em classe. Os exercícios encontrados lá e na edição original foram abandonados nesta edição, dirigida a leitores fora de salas de aula. Os usuários deste livro interessados em exercícios suplementares podem consultar as sugestões na Bibliografia Geral.

Exprimo minha gratidão a Judith V. Grabiner e Albert Lewis por numerosas críticas e sugestões úteis. Tenho o prazer de reconhecer a excelente cooperação e ajuda de vários profissionais da Wiley. Devo agradecimentos sem medida a Virginia Berts por emprestar sua visão num momento crítico da preparação deste texto. Finalmente, devo agradecer a numerosos colegas e estudantes que me comunicaram suas opiniões sobre a primeira edição. Espero que encontrem resultados benéficos nesta revisão.

Uta C. Merzbach
Georgetown, Texas
Março de 1991

PREFÁCIO DA PRIMEIRA EDIÇÃO

Numerosas histórias da Matemática apareceram durante este século, muitas delas em inglês. Algumas são muito recentes como *A History of Mathematics,* de J.F.Scott[1] ; uma nova produção neste campo deveria, portanto, ter características não existentes nos livros disponíveis. Na verdade, poucas das histórias publicadas são livros didáticos, ao menos não no sentido que tem essa expressão nos Estados Unidos, e a *History* de Scott não é um desses. Pareceu-me, pois, que havia lugar para um livro novo, um que satisfizesse melhor às minhas preferências e talvez às de outros.

A *History of Mathematics,* em dois volumes, de David Eugene Smith[2] , foi de fato escrita "a fim de fornecer um texto de história da matemática elementar que pudesse ser usado por professores e estudantes", mas cobre uma área ampla demais em um nível matemático demasiado elementar para a maior parte dos cursos superiores modernos, e faltam-lhe problemas de tipos variados. *A History of Mathematics,* de Florian Cajori [3] , é até hoje um livro de referência muito útil, mas que não se adapta a uso em aulas, nem tampouco o admirável *The Development of Mathematics* de E.T. Bell[4] . Atualmente o mais bem-sucedido e apropriado livro didático parece ser *An Introduction to Mathematics* de Howard Eves[5] , que utilizei, com grande satisfação, com pelo menos uma dúzia de cursos desde que apareceu, em 1953. Ocasionalmente eu modifiquei a ordem dos tópicos no livro, procurando alcançar uma maior intensidade de sentimento histórico, e suplementei o material com mais referências às contribuições dos séculos XVIII e XIX, usando para isso principalmente *A Concise History of Mathematics* de D.J. Struik[6] .

O leitor deste livro, seja ele leigo, estudante ou professor de um curso de história da matemática, verificará que o nível de conhecimento matemático pressuposto é aproximadamente o de um estudante de curso superior de segundo ou terceiro ano, mas o material pode também ser visto com proveito por leitores que tenham preparo matemático superior ou inferior a esse. Cada capítulo termina com um conjunto de exercícios que podem ser classificados em linhas gerais em três categorias. Questões de redação, cuja intenção é indicar a habilidade do leitor em organizar e por em suas próprias palavras o material discutido no capítulo, são listados primeiro. Então, seguem exercícios relativamente fáceis que pedem as demonstrações de alguns dos teoremas mencionados no capítulo ou sua aplicação a situações variadas. Finalmente, há alguns exercícios marcados com estrela, que ou são mais difíceis ou exigem métodos especializados que podem não ser familiares a todos os estudantes ou todos os leitores. Os exercícios não formam, de modo algum, parte da exposição geral e podem ser desconsiderados pelo leitor sem perda de continuidade.

Aqui e ali no texto há referências a notas de rodapé, em geral de natureza bibliográfica, e no fim de cada capítulo há uma lista de leituras sugeridas. Incluídas aí, há algumas referências à vasta literatura em periódicos do campo, pois não é

1 Londres: Taylor and Francis, 1958
2 Boston: Ginn and Company, 1923-1925
3 Nova York: Macmillan, 1931, 2ª ediçãO
4 Nova York: MacGraw-Hill, 1945, 2ª edição
5 Nova York: Holt, Rinehart and Winston, 1964, edição revisada

6 Nova York: Dover Publications, 1967, 3ª edição

cedo demais para que estudantes desse nível comecem a conhecer o rico material que se encontra em boas bibliotecas. Bibliotecas menores podem não dispor de todas essas fontes de referências, mas convém que um estudante saiba da existência de domínios mais amplos de conhecimento fora de sua universidade. Há também referências a obras em outras línguas que não o inglês, apesar do fato de que alguns estudantes, esperamos que não muitos, possam não ser capazes de ler nenhuma delas. Além de fornecer importantes fontes adicionais para os que conhecem tais línguas, essas referências podem ajudar a pôr fim ao provincianismo linguístico que, como um avestruz, se refugia na falsa impressão de que tudo que merece ser lido apareceu ou foi traduzido em inglês.

Esta obra difere do texto mais bem-sucedido disponível até agora por aderir mais estritamente a um arranjo cronológico e por dar mais ênfase a elementos históricos. Há sempre a tentação, numa aula de história da matemática, de supor que a finalidade principal do curso é ensinar matemática. Uma quebra dos padrões de rigor matemático é então um pecado mortal, ao passo que um erro histórico é venial. Tentei evitar essa atitude, e o objetivo do livro é apresentar História da Matemática com fidelidade não só para com a estrutura e exatidão matemáticas, mas também para com a perspectiva e o detalhe histórico. Seria absurdo, em um livro deste escopo, esperar que todas as datas, bem como todas as casas decimais, estejam corretas. Espera-se, porém, que as inadvertências que possam ter restado depois do estágio de correção de provas não farão violência ao senso histórico, entendido de modo amplo, ou a uma visão correta dos conceitos matemáticos. É preciso dar forte ênfase ao fato de que esta obra, em um único volume, de modo algum pretende apresentar o assunto completamente. Tal empreendimento exigiria o esforço coordenado de uma equipe, como a que produziu, em 1908, o quarto volume da *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* de Cantor, e levou a história até 1799. Em uma obra de proporções modestas, o autor deve usar critério na seleção do material a ser incluído, controlando relutantemente a tentação de citar a obra de todo matemático produtivo; raros leitores deixarão de notar aqui algo que considerarão como injustificável omissão. Em particular, o último capítulo busca apenas indicar algumas poucas das características salientes do século XX. No campo da história da matemática, talvez o que mais se deva desejar é que apareça um novo Felix Klein para completar, para o nosso século, o tipo de projeto que Klein tentou para o século XIX, mas não viveu o suficiente para concluir.

Uma obra publicada é até certo ponto como um *iceberg,* pois o que se vê é apenas uma pequena fração do todo. Nenhum livro aparece sem que o autor nele esbanje tempo e sem que receba encorajamento e apoio de outros, demasiado numerosos para serem citados individualmente. No meu caso, o débito começa com os muitos estudantes interessados a quem ensinei história da matemática, principalmente no Brooklyn College, mas também na Yeshiva University, Universidade de Michigan, Universidade da Califórnia (Berkeley) e Universidade do Kansas. Na Universidade de Michigan, principalmente graças ao estímulo do Professor Phillips S.Jones, e no Brooklyn College com o auxílio do Diretor Walter H. Mais e dos Professores Samuel Borofsky e James Singer, eu às vezes tive minha carga didática reduzida para poder trabalhar nos manuscritos deste livro. Amigos e colegas no campo da história da matemática, tais como o Professor Dirk J. Struik do Massachusetts Institute of Technology, Professor Kenneth O. May da Universidade de Toronto, Professor Howard Eves da Universidade do Maine e Professor Morris Kline da New York University, fizeram muitas sugestões valiosas para a preparação do livro, e essas foram grandemente apreciadas. Material em livros e artigos de outros foi livremente usado, com insuficiente reconhecimento, além de uma fria referência bibliográfica, e aproveito esta oportunidade para exprimir a esses autores minha calorosa gratidão. Bibliotecas e editores ajudaram muito, fornecendo informações e ilustrações necessárias ao texto; em particular, foi um prazer trabalhar com a John Wiley and Sons. A datilografia da cópia final, bem como de grande parte do difícil manuscrito preliminar, foi feita, com entusiasmo e cuidado meticuloso, por Mrs. Hazel Stanley de Lawrence, no Kansas. Finalmente, devo exprimir profunda gratidão a uma esposa muito compreensiva, Dra. Marjorie N. Boyer, por sua paciência em tolerar os problemas ocasionados pelo desenvolvimento de mais um livro dentro da família.

Carl B. Boyer
Brooklyn, Nova York
Janeiro de 1968

PREFÁCIO

Isaac Asimov

A matemática é um aspecto único do pensamento humano, e sua história difere na essência de todas as outras histórias.

Com o passar do tempo, quase todo campo de esforço humano é marcado por mudanças que podem ser consideradas como correção e/ou extensão. Assim, as mudanças na história de acontecimentos políticos e militares são sempre caóticas; não há como prever o surgimento de um Gêngis Khan, por exemplo, ou as consequências do pouco duradouro Império Mongol. Outras mudanças são questão de moda e opinião subjetiva. As pinturas nas cavernas de 25.000 anos atrás são geralmente consideradas como grande arte, e, embora a arte tenha mudado continuamente – até caoticamente – nos milênios subsequentes, há elementos de grandeza em todas as modas. De maneira semelhante, cada sociedade considera seus próprios costumes naturais e racionais, e acha os de outras sociedades estranhos, ridículos ou repulsivos.

Mas somente entre as ciências existe verdadeiro progresso; só aí existe o registro de contínuos avanços a alturas sempre maiores.

E, no entanto, em quase todos os ramos da ciência o processo de avanço é tanto de correção quanto de extensão. Aristóteles, uma das maiores mentes que já contemplaram as leis físicas, estava completamente errado em suas ideias sobre corpos em queda e teve que ser corrigido por Galileu por volta de 1590. Galeno, o maior dos médicos da antiguidade, não foi autorizado a estudar cadáveres humanos e estava completamente errado em suas conclusões anatômicas e fisiológicas. Teve que ser corrigido por Vesalius em 1543 e Harvey em 1628. Até Newton, o maior de todos os cientistas, estava errado em sua visão sobre a natureza da luz, a acromaticidade das lentes, e não percebeu a existência de linhas espectrais. Sua obra máxima as leis de movimento e a teoria da gravitação universal, tiveram que ser modificadas por Einstein em 1916.

Agora vemos o que torna a matemática única. Apenas na matemática não há correção significativa, só extensão. Uma vez que os gregos desenvolveram o método dedutivo, o que fizeram estava correto, correto para todo o sempre. Euclides foi incompleto e sua obra foi enormemente estendida, mas não teve que ser corrigida. Seus teoremas, todos eles, são válidos até hoje. Ptolomeu pode ter desenvolvido uma representação errônea do sistema planetário, mas o sistema de trigonometria que ele criou para ajudá-lo em seus cálculos permanece correto para sempre.

Cada grande matemático acrescenta algo ao que veio antes, mas nada tem que ser removido. Consequentemente, quando lemos um livro como *História da Matemática* temos a figura de uma estrutura crescente, sempre mais alta e mais larga e mais bela e magnífica e com uma base que é tão sem mancha e tão funcional agora como era quando Tales elaborou os primeiros teoremas geométricos, há quase 26 séculos.

Nada que se refere à humanidade nos cai tão bem quanto a matemática. Aí, e só aí, tocamos a mente humana em seu ápice.

APRESENTAÇÃO

Uma boa *História da Matemática* é sempre importante. São muitas as Histórias, não muitas as que são boas. A de Boyer já provou seus méritos. Alguns comuns a todas as boas histórias, outros que não o são, como a abrangência e a adaptabilidade ao ensino.

Cabe ressaltar a importância que este texto já teve e deverá continuar a ter entre nós. Critica-se frequentemente a cultura limitada de muitos matemáticos e estudantes de matemática, restrita a aspectos da disciplina e de alguma aplicação. Uma primeira extensão cultural a recomendar seria certamente pela via da História. A história das dificuldades, esforço, tempo envolvidos em toda a evolução da matemática dá a medida da grandeza desta realização humana. Não deixa persistir a impressão, que o ensino pode dar, de algo que caiu do céu pronto e perfeito. Tudo, inclusive o que já nos parece trivial, agora que sabemos alguma coisa, tudo custou esforço, erros, tentativas até que um resultado fosse construído. E é a história desse esforço permanente que se procura retratar.

Elza F. Gomide
São Paulo, 1996

CONTEÚDO

1 VESTÍGIOS

Trouxeste-me um homem que não sabe contar seus dedos?
Do Livro dos Mortos Egípcio

Conceitos e relações

Os matemáticos contemporâneos formulam afirmações sobre conceitos abstratos que podem ser verificadas por meio de demonstrações. Por séculos, a matemática foi considerada a ciência dos números, grandeza e forma. Por esta razão, aqueles que procuram os primeiros exemplos de atividade matemática apontarão para resquícios arqueológicos que refletem a consciência humana das operações numéricas, contagem ou padrões e formas "geométricos". Mesmo quando estes vestígios refletem atividade matemática, eles raramente evidenciam muito significado histórico. Eles podem ser interessantes quando mostram que pessoas em diferentes partes do mundo realizavam certas ações que envolviam conceitos que têm sido considerados matemáticos. Para que uma destas ações assuma significado histórico, entretanto, procuramos por relações que indiquem que esta ação era conhecida por outro indivíduo ou grupo engajado em uma ação relacionada. Uma vez que uma destas conexões tenha sido estabelecida, a porta se abre para estudos históricos mais específicos, como os que tratam da transmissão, tradição e mudança conceitual.

Em geral, os vestígios matemáticos são encontrados no domínio das culturas primitivas, o que torna a avaliação de seu significado ainda mais complexa. Regras de operação podem existir como parte de uma tradição oral, muitas vezes na forma musical ou de versos, ou eles podem estar encobertos na linguagem da mágica ou em rituais. Algumas vezes, eles são encontrados em observações do comportamento animal, removendo-os para ainda mais longe do domínio do historiador. Enquanto os estudos da aritmética canina ou da geometria das aves pertencem aos zoologistas, os do impacto das lesões cerebrais na consciência numéricam pertencem aos neurologistas, e os de encantamentos numéricos que curam, aos antropologistas, todos estes estudos podem se mostrar úteis aos historiadores da matemática sem ser uma parte clara desta história.

A princípio, as noções de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças — a diferença entre um lobo e muitos, a desigualdade de tamanho entre uma sardinha e uma baleia, a dessemelhança entre a forma redonda da Lua e a retilínea de um pinheiro. Gradualmente deve ter surgido, da massa de experiências caóticas, a percepção de que há analogias: e dessa percepção de semelhanças em números e formas nasceram a ciência e a matemática. As próprias diferenças parecem indicar semelhanças, pois o contraste entre um lobo e muitos, entre um carneiro e um rebanho, entre uma árvore e uma floresta sugerem que um lobo, um carneiro e uma árvore têm algo em comum — sua unicidade. Do mesmo modo, se observaria que certos grupos, como os pares, podem ser postos em correspondência biunívoca. As mãos podem ser emparelhadas com os pés, os olhos e as orelhas ou as narinas. Essa percepção de uma propriedade abstrata que certos grupos têm em comum e que nós chamamos "número" representa um grande passo no caminho para a matemática moderna. É improvável que isso tenha sido descoberta de um indivíduo ou de uma dada tribo; é mais provável que a percepção tenha sido gradual, desenvolvida tão cedo no desenvolvimento cultural do homem quanto o uso do fogo, talvez há 300.000 anos.

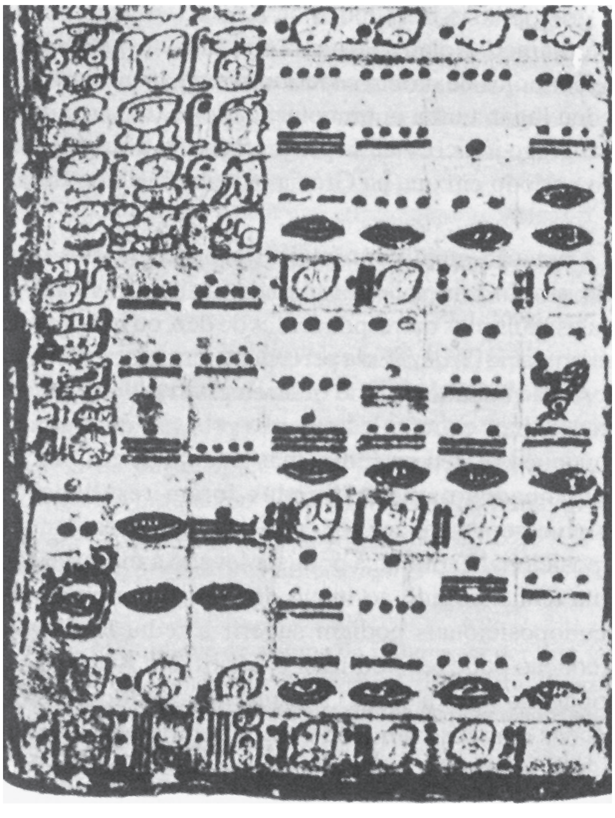
Que o desenvolvimento do conceito de número foi um processo longo e gradual é sugerido pelo fato de que certas línguas, o grego inclusive, conservaram na sua gramática uma distinção tripartite entre um, dois e mais de dois, ao passo que a maior parte das línguas atuais só faz a distinção em "número" entre singular e plural. Evidentemente, nossos antepassados mais antigos, inicialmente, contavam só até dois, e qualquer conjunto além desse nível era designado por "muitos". Mesmo hoje, muitas pessoas ainda contam objetos dispondo-os em grupos de dois.

A ideia de número finalmente tornou-se suficientemente ampla e vívida para que fosse sentida a necessidade de exprimir a propriedade de algum modo, presumivelmente, a princípio, somente na linguagem de sinais. Os dedos de uma mão podem facilmente ser usados para indicar um conjunto de dois, três, quatro ou cinco objetos, sendo que, inicialmente, o número 1, em geral, não era reconhecido como um verdadeiro "número". Usando os dedos das duas mãos podem ser representadas coleções contendo até dez elementos; combinando dedos das mãos e dos pés pode-se ir até vinte. Quando os dedos humanos eram inadequados, podiam ser usados montes de pedras para representar uma correspondência com elementos de outro conjunto. Quando o homem primitivo usava tal método de representação, ele frequentemente amontoava as pedras em grupos de cinco, pois os quíntuplos lhe eram familiares por observação da mão e pé humanos. Como Aristóteles observou há muito tempo, o uso hoje difundido do sistema decimal é apenas o resultado do acidente anatômico de que quase todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e nos pés.

Grupos de pedras são demasiado efêmeros para conservar informação: por isso o homem pré-histórico às vezes registrava um número fazendo entalhes em um bastão ou pedaço de osso. Poucos destes registros existem hoje, mas na Morávia foi achado um osso de lobo jovem com profundas incisões, em número de cinquenta e cinco; estavam dispostos em duas séries, com vinte e cinco numa e trinta na outra, com os entalhes em cada série dispostos em grupos de cinco. Foi determinado que ele tem aproximadamente 30.000 anos. Dois outros artefatos numéricos pré-históricos foram encontrados na África: uma fíbula de babuíno com vinte e nove entalhes, que é de cerca de 35.000 anos atrás, e o osso de Ishango, com exemplos do que parecem ser entradas multiplicativas, datado inicialmente como tendo 8.000 anos, mas atualmente com a idade estimada também em até 30.000 anos. Estas descobertas arqueológicas fornecem evidências de que a ideia de número é muito mais velha do que se admitia anteriormente.

Primeiras bases numéricas

Historicamente, contar com os dedos, ou a prática de contar por grupos de cinco e dez, parece ter surgido mais tarde que a contagem por grupos de dois e três; entretanto, os sistemas quinário e decimal quase invariavelmente substituíram o binário e o ternário. Um estudo de várias centenas de tribos de índios americanos, por exemplo, mostrou que quase um terço usava a base decimal e aproximadamente outro terço usava um sistema quinário ou quinário-decimal; menos de um terço tinha um esquema binário, e os que usavam um sistema ternário formavam menos de um por cento do grupo. O sistema vigesimal, com base 20, ocorria em cerca de 10 por cento das tribos.



Do Códex de Dresden, dos maias, exibindo números. A segunda coluna da esquerda, de cima para baixo, contém os números 9, 9, 16, 0, 0, que indicam 9 × 144.000 + 9 × 7.200 + 16 × 360 + 0 + 0 = 1.366.560. Na terceira coluna estão os números 9, 9, 9, 16, 0 representando 1.364.360. O original é nas cores preta e vermelha. (*Tirado de Morley,* 1915, p. 266).

Um exemplo interessante de sistema vigesinal é o usado pelos Maias de Yucatan e da América Central. Este foi decifrado algum tempo antes que o resto das línguas maias pudesse ser traduzido. Em sua representação de intervalos de tempo entre datas em seu calendário, os maias usavam uma numeração com valor na posição, geralmente com 20 como base primária e 5 como auxiliar. (Veja a ilustração ao lado.) Unidades eram representadas por pontos e cincos por barras horizontais, de modo que o número 17, por exemplo, teria a aparência $\overset{\cdot\cdot}{\equiv}$ (ou seja, 3(5) + 2). Era usado um arranjo vertical de posição, com as unidades de tempo maior acima; Portanto, a notação $\overset{\cdot\cdot}{\equiv}$ denotava 352 (ou seja, 17(20) + 12). Como o sistema era principalmente para a contagem de dias em um calendário que tinha 360 dias em um ano, a terceira posição em geral não representava múltiplos de (20)(20), como em um sistema vigesimal puro, mas (18)(20). Entretanto, além deste ponto, prevalecia novamente a base 20. Nesta notação posicional, os maias indicavam as posições ausentes pelo uso de um símbolo, que aparece em várias fontes, e lembra um pouco um olho semiaberto. Assim, no esquema deles, a notação $\overset{\cdot\cdot}{\equiv}$ denotava $17(20 \cdot 18 \cdot 20) + 0(18 \cdot 20) + 13(20) + 0$.

Linguagem Numérica e Contagem

Acredita-se, em geral, que o desenvolvimento da linguagem foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato; no entanto, palavras que exprimem ideias numéricas apareceram lentamente. *Sinais* para números provavelmente precederam as *palavras* para números, pois é mais fácil fazer incisões em um bastão do que estabelecer uma frase bem modulada para identificar um número. Se o problema da linguagem não fosse tão difícil, talvez sistemas rivais do decimal tivessem feito maiores progressos. A base 5, por exemplo, foi uma das que deixaram a mais antiga evidência escrita palpável; mas quando a linguagem se tornou formalizada, a base dez já predominava. As línguas modernas são construídas quase sem exceção em torno da base 10, de modo que o número treze, por exemplo, não é descrito como três e cinco e cinco, mas como três e dez. A demora no desenvolvimento da linguagem para exprimir abstrações como o número também pode ser percebida no fato de que as expressões verbais numéricas primitivas invariavelmente se referem a coleções concretas específicas – como "dois peixes" ou "dois bastões" – e, mais tarde, uma destas frases seria adotada convencionalmente para indicar todos os conjuntos de dois objetos. A tendência da linguagem de se desenvolver do concreto para o abstrato pode ser percebida em muitas das medidas de comprimento em uso atualmente. A altura de um cavalo é medida em "palmos" e as palavras "pé" e "*ell*" (ou elbow, cotovelo) também derivaram de partes do corpo.

Os milhares de anos que foram necessários para que o homem fizesse a distinção entre os conceitos abstratos e repetidas situações concretas mostram as dificuldades que devem ter sido experimentadas para se estabelecer um fundamento, ainda que muito primitivo, para a matemática. Além disso, há um grande número de perguntas não respondidas com relação à origem da matemática. Supõe-se usualmente que o assunto surgiu em resposta a necessidades práticas, mas estudos antropológicos sugerem a possibilidade de uma outra origem. Foi sugerido que a arte de contar surgiu em conexão com rituais religiosos primitivos e que o aspecto ordinal precedeu o conceito quantitativo. Em ritos cerimoniais representando mitos da criação era necessário chamar os participantes à cena segundo uma ordem específica, e talvez a contagem tenha sido inventada para resolver esse problema. Se forem corretas as teorias que dão origem ritual à contagem, o conceito de número ordinal pode ter precedido o de número cardinal. Além disso, tal origem indicaria a possibilidade de que o contar tenha uma origem única, espalhando-se subsequentemente a outras partes do mundo. Esse ponto de vista, embora esteja longe de ser estabelecido, estaria em harmonia com a divisão ritual dos inteiros em ímpares e pares, os primeiros considerados como masculinos e os últimos, como femininos. Tais distinções eram conhecidas em civilizações em todos os cantos da Terra, e mitos relativos a números masculinos e femininos se mostraram notavelmente persistentes.

O conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica. A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros. Entre as tribos primitivas, parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações. Para necessidades quantitativas, o homem prático pode escolher unidades suficientemente pequenas para eliminar a necessidade de usar frações. Portanto, não houve um progresso ordenado de frações binárias para quinarias para decimais, e o domínio das frações decimais é essencialmente um produto da idade moderna.

Relações Espaciais

Afirmações sobre a origem da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, em uma carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos em forma escrita. Para informações sobre a Pré-história, dependemos de interpretações baseadas nos poucos artefatos que restaram, de evidência fornecida pela moderna antropologia, e de extrapolação retroativa, conjetural, a partir dos documentos que sobreviveram. O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que, em essência, são partes da geometria elementar e aparecem em todos os continentes. Além disso, sequências simples em desenhos como os da Fig. 1.1 sugerem uma espécie de teoria dos grupos aplicada, bem como proposições geométricas e aritméticas. O esquema torna evidente que as áreas dos triângulos estão entre si como os quadrados dos lados, ou, por contagem, que a soma dos números ímpares consecutivos, começando com a unidade, são quadrados perfeitos. Para o período pré-histórico não há documen-

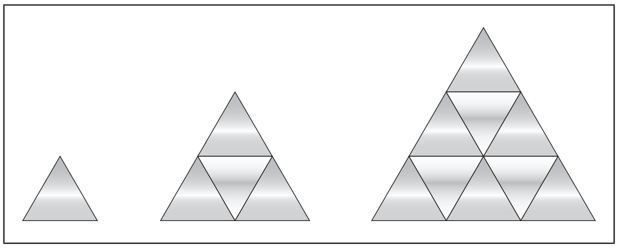


Figura 1.1

tos, portanto é impossível acompanhar a evolução da matemática desde um desenho específico até um teorema familiar. Mas, ideias são como sementes resistentes, e às vezes a origem presumida de um conceito pode ser apenas a reaparição de uma ideia muito mais antiga que ficara esquecida.

A preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações espaciais pode ter origem no seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas, motivos que muitas vezes propelem a matemática de hoje. Gostaríamos de pensar que ao menos alguns dos antigos geômetras trabalharam pela pura satisfação de fazer matemática, não como auxílio prático à mensuração; mas há teorias alternativas. Uma é que a geometria, como a contagem, tivesse origem na prática de rituais primitivos. Entretanto, a teoria da origem da geometria na secularização de práticas ritualísticas não está de modo algum estabelecida. O desenvolvimento da geometria pode muito bem ter sido estimulado pela necessidade prática de construção e de demarcação de terras, ou pelo sentimento estético por *design* e ordem.

Podemos fazer conjeturas sobre o que levou os homens da Idade da Pedra a contar, medir e desenhar. Que os começos da matemática são mais antigos que as mais antigas civilizações é claro. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo, no entanto, é confundir conjetura com história. É melhor suspender o julgamento nessa questão e ir adiante ao terreno mais firme da história da matemática encontrada em documentos escritos que chegaram até nós.