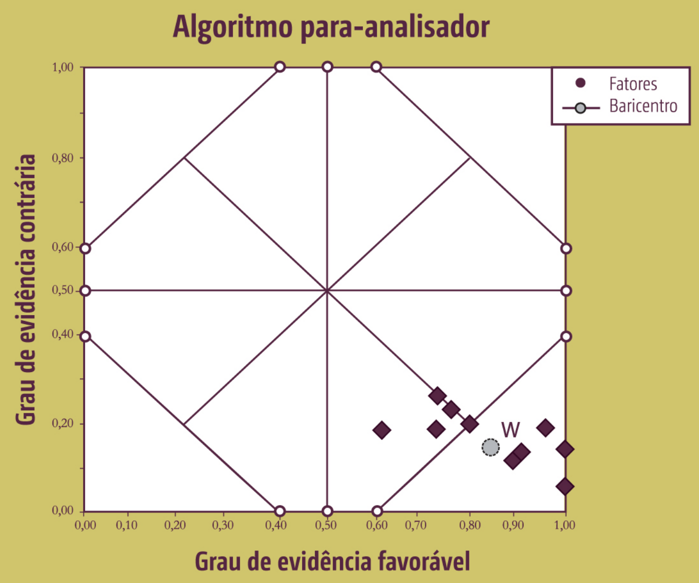

TOMADAS DE DECISÃO COM FERRAMENTAS DA LÓGICA PARACONSISTENTE ANOTADA

FÁBIO ROMEU DE CARVALHO
JAIR MINORO ABE

Blucher

TOMADAS DE DECISÃO COM FERRAMENTAS DA LÓGICA PARACONSISTENTE ANOTADA

Método Paraconsistente de Decisão – MPD

Blucher

FÁBIO ROMEU DE CARVALHO
JAIR MINORO ABE

TOMADAS DE DECISÃO COM FERRAMENTAS DA LÓGICA PARACONSISTENTE ANOTADA

Método Paraconsistente de Decisão – MPD

Tomadas de Decisão com Ferramentas da Lógica Paraconsistente Anotada – Método Paraconsistente de Decisão – MPD

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-012 – São Paulo – SP – Brasil
Tel 55 11 3078-5366
editora@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

Ficha Catalográfica

Carvalho, Fábio Romeu de

Tomadas de decisão com ferramentas da lógica paraconsistente anotada: método paraconsistente de decisão: MPD / Fábio Romeu de Carvalho, Jair Minoro Abe. – São Paulo: Blucher, 2011.

Bibliografia.
ISBN 978-85-212-0607-1

1. Decisões 2. Lógica I. Abe, Jair Minoro.
II. Título.

11-05298 CDD-511.3

Índices para catálogo sistemático:

1. Tomadas de decisão: Aplicação da lógica paraconsistente anotada: Método Paraconsistente de Decisão (MPD) 511.3

Aos meus pais, Noé e Maria José *(in memoriam)*,
dedico o esforço dispensado neste livro pelo senso de honestidade,
dedicação ao trabalho e respeito ao próximo que, com simplicidade
e maestria, souberam muito bem me transmitir.

Fábio Romeu de Carvalho

Aos meus tios (Cesário) Mikizo Hayashi (1921-2006, *in memoriam*)
e (Maria) Setsuko Hayashi (1930-), aos quais sou grato pelos muitos
ensinamentos e pelo entusiasmo que sempre me transmitiram.

Jair Minoro Abe

PREFÁCIO

No entardecer do século passado e no alvorecer deste, a Informática em geral (incluindo os Sistemas de Informação, Inteligência Artificial, Robótica e Automação, entre outros) passa por uma verdadeira revolução jamais vista. O paradigma não somente de conhecimento, mas, também, de tecnologia e de suas aplicações sofreu mudanças radicais.

A Pesquisa Operacional tem-se mostrado um assunto vastíssimo e inesgotável. Centenas de pesquisadores de todo o mundo têm-se dedicado a esse assunto, que avança diariamente. Para se ter uma ideia de sua dimensão, há um congresso mundial – *European Conference on Operational Research*, *EURO*, que se realiza anualmente e, em julho de 2010, realizou sua vigésima quarta edição, em Lisboa. Em 2009, realizou-se em Bonn, na Alemanha, onde estivemos juntos com outros 2.221 pesquisadores de 72 países.

Dentro da Pesquisa Operacional está inserido o estudo das tomadas de decisão. Muito se tem pesquisado sobre este assunto, vários métodos de tomadas de decisão têm sido desenvolvidos, mas, até hoje, nenhum conseguiu dar um ponto final ao assunto e, acreditamos, nenhum conseguirá fazê-lo. Uma rápida navegada pela *Internet* pode mostrar o quanto se pesquisa e o quanto se publica sobre os chamados *Decision Support Systems, DSS*. Estes constituem uma classe de sistemas de informação (incluindo, mas não se limitando a sistemas computacionais), que dão suporte a atividades de tomadas de decisão nas organizações e nos negócios.

E é nessa área que nos enveredamos, procurando dar mais uma contribuição ao mundo científico, ao desenvolver um novo método de decisão fundamentado em uma lógica alternativa à clássica, de recente descoberta, a lógica paraconsistente anotada evidencial. A ele demos o nome de **Método Paraconsistente de Decisão, MPD**.

Cumpre destacar que foi um brasileiro, o Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa, que desenvolveu sua carreira de professor na Universidade Federal do Paraná e na Universidade de São Paulo, o inventor da lógica paraconsistente, em 1958, tendo como precursores os poloneses J. Lukasiewicz e S. Jaśkowski e o russo N. A. Vasiliev [11].

O Prof. Da Costa desenvolveu uma família de lógicas paraconsistentes, os sistemas C_n, a teoria de conjuntos e a lógica de predicados correspondentes, ou seja, contendo todos os níveis lógicos comuns. Sobre esse tema, o Prof. Da Costa ministrou aulas e palestras em todos os países das Américas do Sul e do Norte e em alguns países da Europa.

Recebeu, entre diversas distinções, o Prêmio Moinho Santista em Ciências Exatas (1994), o Prêmio Jabuti em Ciências Exatas (1995) e a Medalha do Mérito Científico "Nicolau Copérnico" da Universidade de Torun, Polônia (1998). É membro titular do Instituto Internacional de Filosofia de Paris, o primeiro brasileiro a pertencer a essa instituição.

Cremos não existir na literatura uma referência que dê ao leitor uma compreensão adequada dos temas relacionados a essa lógica, que temos discutido nos diversos encontros científicos de que participamos. Com esta obra pretendemos dar uma contribuição neste sentido, divulgando essa nova classe de lógica, as lógicas paraconsistentes, e mostrando como elas podem ser usadas em tomadas de decisão, especialmente quando a base de dados de que se dispõe é dotada de inconsistências e imprecisões.

Portanto, o objeto desta obra é apresentar aos leitores os princípios das lógicas paraconsistentes anotadas e sua aplicação em tomadas de decisão, principalmente, na Engenharia de Produção: o Método Paraconsistente de Decisão, MPD que se baseia no algoritmo para-analisador. Além disso, é feita uma comparação do MPD com o método estatístico e com uma versão simplificada do método *fuzzy* de decisão. Exemplos de aplicações práticas são desenvolvidos e discutidos minuciosamente, com aplicações numéricas, tabelas e gráficos.

O fundamento teórico para o MPD são as regras de maximização e de minimização da lógica paraconsistente anotada evidencial Eτ. Essas regras são aplicadas aos graus de evidência favorável ou graus de crença ($\boldsymbol{a}$) e aos graus de evidência contrária ou grau de descrença ($\boldsymbol{b}$), que compõem as chamadas constantes de anotação: $\mu = (\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$. Essa aplicação é feita por meio de operadores e pode ser de duas maneiras diferentes.

1ª) Fazendo-se a *maximização dos graus de evidência* de um conjunto de anotações, de modo a buscar a melhor evidência favorável (**maior** valor do grau de evidência favorável $\boldsymbol{a}$) e a pior evidência contrária (**maior** valor do grau de evidência contrária $\boldsymbol{b}$). Essa maximização é feita por um operador da lógica Eτ, designado por **OR** (conjunção). Para o caso de um conjunto de apenas duas anotações, a aplicação deste operador fica assim:

$$\mathbf{OR}\ \{(\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{b}_1), (\boldsymbol{a}_2; \boldsymbol{b}_2)\} = (\text{máx}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}; \text{máx}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\})$$

Para a minimização, faz-se o contrário: busca-se a pior evidência favorável (**menor** valor do grau de evidência favorável $\boldsymbol{a}$) e a melhor evidência contrária (**menor** valor do grau de evidência contrária ***b***). O operador que a executa é designado por **AND** (disjunção).

$$\textbf{AND}\ \{(\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{b}_1), (\boldsymbol{a}_2; \boldsymbol{b}_2)\} = (\text{mín}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}; \text{mín}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\})$$

2ª) Fazendo-se a *maximização (ou a minimização) do grau de certeza* (H = ***a*** – ***b***) do conjunto de anotações, grau esse que, de certa forma, traduz o quanto as informações contidas nesse conjunto permitem inferir pela veracidade ou pela falsidade da premissa.

A maximização do grau de certeza (H) é obtida buscando-se a melhor evidência favorável (**maior** valor do grau de evidência favorável ***a***) e a melhor evidência contrária (**menor** valor do grau de evidência contrária ***b***). Essa maximização é feita por um operador da Lógica Eτ, designado por **MÁX** e que, neste livro, será chamado de **maximizante**.

$$\textbf{MÁX}\ \{(\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{b}_1), (\boldsymbol{a}_2; \boldsymbol{b}_2)\} = (\text{máx}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}; \text{mín}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\})$$

Analogamente, a minimização busca a pior evidência favorável (**menor** valor do grau de evidência favorável ***a***) e a pior evidência contrária (**maior** valor do grau de evidência contrária ***b***). Essa minimização é feita pelo operador **MÍN**, que será chamado de **minimizante**.

$$\textbf{MÍN}\ \{(\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{b}_1), (\boldsymbol{a}_2; \boldsymbol{b}_2)\} = (\text{mín}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}; \text{máx}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\})$$

Portanto, observa-se que há duas maneiras de se aplicarem as regras de maximização e de minimização da lógica Eτ. Em alguns aspectos, uma tem vantagens sobre a outra; em outros, desvantagens. Por exemplo, a primeira maneira permite identificar melhor as contradições existentes na base de dados, mas, em compensação, a segunda é mais intuitiva e leva a resultados mais previsíveis e coerentes.

Nesta obra, será feita a opção pela segunda maneira, ou seja, pelos operadores **MÁX** e **MÍN**. As decisões serão tomadas com base na aplicação da chamada regra do **mín/máx** ou de decisão otimista, uma vez que minimiza os melhores resultados.

Para a execução das operações exigidas pelo método, foi desenvolvido, no Capítulo 5, um programa de cálculos baseado na planilha Excel, que se chamou Programa de Cálculos para o Método Paraconsistente de Decisão, PC do MPD.

No Capítulo 9, faz-se uma discussão sobre duas maneiras de se interpretar a maximização e a minimização, permitindo uma comparação entre elas.

Além disso, há cinco apêndices que acompanham este livro, com dados e soluções para os diversos itens apresentados e analisados. Para cada apêndice, há duas versões: uma bloqueada (mas não oculta), que deixa somente as células relacionadas às entradas de dados de cada análise livres para o leitor alterar, embora mostre as demais, inclusive as fórmulas; e outra livre, que dá ao leitor a possibilidade de alterar o que bem entender. Essa preocupação decorreu da possibilidade de um usuário mais distaído alterar a planilha livre e, depois, não conseguir recompô-la. A planilha do Apêndice E está bloqueada e oculta, constituindo uma exceção. Esses apêndices são encontrados no site: www.blucher.com.br.

O Apêndice A traz a solução do que foi desenvolvido no Capítulo 5; o B traz uma solução genérica para o que se propôs no Capítulo 5; o Apêndice C contém as bases de dados utilizadas no desenvolvimento de cinco parágrafos do Capítulo 6 e nos exercícios dos Capítulos 6 e 8; o Apêndice D traz as soluções para aquilo que foi desenvolvido no texto do Capítulo 6 e dá o encaminhamento para os exercícios propostos nesse capítulo; e, finalmente, o Apêndice E apresenta a solução para um desafio (exercício) proposto no Capítulo 9.

Apesar de a linguagem da lógica ser desenvolvida com todo rigor que o assunto necessita, a exposição do livro está permeada por abusos de linguagem. O leitor atento os perceberá e será capaz de superá-los à medida que se familiarize com o texto.

Os autores

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

De acordo com a Associação Brasileira de Engenharia de Produção, ABEPRO "A Engenharia de Produção se dedica ao projeto e gerência de sistemas que envolvem pessoas, materiais, equipamentos e o ambiente."

Descreve-se como uma engenharia de métodos e processos que não define um campo específico de tecnologia. Teve suas origens na divisão, organização e racionalização de produção industrial, mas se expandiu rapidamente para cobrir qualquer sistema que integra as pessoas, materiais, equipamentos e ambiente, incluindo de indústria a agricultura, serviços para administração pública e iniciativas sociais, como também produção material e não material. Outras expressões correntes para a Engenharia de Produção são também Engenharia de Produção Industrial, Engenharia de Gestão Industrial ou Engenharia Industrial, entre muitas outras, que parece depender do ponto de vista do tema enfocado ou da motivação do usuário.

Ainda, de acordo com a ABEPRO, "o engenheiro de produção tem como área específica de conhecimento os métodos gerenciais, a implantação de sistemas informatizados para a gerência de empresas, o uso de métodos para melhoria da eficiência das empresas e a utilização de sistemas de controle dos processos da empresa". Tudo o que se refere às atividades básicas de uma empresa, tais como planejar as compras, planejar e programar a produção e planejar e programar a distribuição dos produtos, faz parte das atribuições típicas do engenheiro de produção. É por isso que o engenheiro de produção pode trabalhar, praticamente, em todo tipo de indústria. A Produção é uma área da Engenharia mais abrangente e genérica, englobando um conjunto maior de conhecimentos e habilidades. Utilizando-se desses conhecimentos especializados, principalmente em matemática, física, lógica e ciências sociais, em conjunto com análise e projeto de engenharia, ela pode especificar, prever e avaliar os resultados obtidos por tais sistemas.

Grosso modo, a Engenharia de Produção, ao enfatizar as dimensões do produto e do sistema produtivo, envolve-se naturalmente com ideias de projetar e viabilizar produtos, projetar e viabilizar sistemas produtivos, planejar a produção, produzir e distribuir produtos que a sociedade valoriza. Essas atividades, tratadas em profundidade e de forma integrada por esta engenharia, são de grande importância para a elevação da competitividade da empresa, da indústria e do país.

A Gestão do Conhecimento Organizacional é considerada uma área típica da Engenharia de Produção e uma de suas subáreas importantes é Sistemas de Apoio à de Decisão, na qual nosso projeto se insere.

Trata-se da resolução de problemas reais que envolvem situações de tomadas de decisão, usando modelos matemáticos com a ajuda de processamento por meio de computadores. Essa ciência aplica conceitos e métodos de outras disciplinas científicas na concepção, planejando ou considerando a operação de sistemas para alcançar seus objetivos. Assim, busca introduzir elementos objetivos e racionais no processo de tomada de decisão, porém, também se preocupa em incluir elementos subjetivos e as características organizacional-estruturais inerentes ou relacionados aos problemas.

Face ao seu caráter multidisciplinar, a tomada de decisão constitui tema de características horizontais com suas contribuições, estendendo-se por praticamente todos os domínios da atividade humana, da Engenharia à Medicina, passando pela Economia e a Gestão Empresarial.

Com os rápidos avanços experimentados por quase todas as ciências – a Engenharia de Produção não se exclui – o aumento significativo da complexidade dos problemas envolvidos e de organização tem levado a um processo mais sistemático de tomada de decisão, utilizando-se ferramentas e técnicas quantitativas no apoio e na justificativa explícita das decisões. Nesse contexto, a Engenharia de Produção tem-se valido de teorias clássicas como o instrumental estatístico, de simulação e de programação matemática, que se tem mostrado muito valioso para a modelagem e a análise dos processos operacionais e decisórios.

Nesse contexto, principalmente num ambiente altamente informatizado que se dispõe, as teorias disponíveis em Sistemas de Informação (ou, de modo mais abrangente, em Inteligência Artificial ou Sistemas Inteligentes) vêm a contribuir decisivamente para um melhor equacionamento de temas em Engenharia de Produção. Para isso contribuem a representação dos problemas (linguagem), a manipulação mecânica dos dados, as técnicas de Sistemas de Informação e até processos decisórios ou de prospecção (teorias clássicas, técnicas de Inteligência Artificial ou Sistemas Inteligentes).

Uma das questões centrais com que as Ciências do Real têm-se deparado ao longo desses anos de grande avanço é o conceito desafiador de incerteza. Ela provém da descrição de porções de nossa realidade, e a vaguidade de certos termos e conceitos cotidianos não possui caráter subjetivo, nem objetivo, no sentido que a realidade é intrinsecamente vaga ou imprecisa. Outra questão difícil que se enfrenta nas aplicações são as ambiguidades e conflitos, que podem ser expressos como contradições lógicas ou meramente como diferenças.

Muitos tratamentos têm sido empregados para superar o conceito de incerteza: entre eles a Estatística e Teoria da Probabilidade (incluindo o raciocínio Bayesiano), que fazem parte do rol da Lógica Indutiva. Elas têm provido satisfatoriamente a análise das diversas aplicações quando são possíveis de se efetuar, pois dependem às vezes de amostragens gigantescas, difíceis de serem obtidas ou demasiadas onerosas.

Entretanto, mais recentemente, teorias alternativas extremamente interessantes têm sido desenvolvidas para o estudo de incerteza no contexto das aplicações, sem o uso necessário da Estatística ou Probabilidade. Por exemplo, a Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* (ou Lógica *Fuzzy*) [25], edificada por L. Zadeh, mostrou-se uma teoria de extrema originalidade e de enorme alcance prático. Ela constitui uma grande lógica polivalente e se classifica como rival da Lógica Clássica, por ser mais geral e se aplicar em situações nas quais a clássica não se acomoda de modo natural – sem se recorrer a hipóteses *ad hoc*.

Outro conceito que tem chamado a atenção de especialistas é o de contradição, que está presente nas aplicações de variadas maneiras: em banco de dados gigantescos, onde se têm opiniões de vários especialistas sobre um assunto polêmico ou de grande dificuldade; em ambientes que possuem certo grau de distribuição; em automação, quando agentes necessitam partilhar recursos limitados, tarefas impossíveis, ambiguidades; no exame de certos padrões (imagens, sinais, ...) etc. Assim, para manipular um conjunto de informações contraditórias, é necessário lançar mão de sistemas lógicos distintos da clássica e de seus aparentados. A lógica paraconsistente pode, em princípio, ser empregada para essa tarefa.

A fim de situar melhor o instrumental teórico que será utilizado nas questões de tomadas de decisão e prospecção frente a dados imprecisos, conflitantes e mesmo frente à falta de informações, será apresentada, inicialmente, a lógica subjacente desse estudo, a lógica paraconsistente anotada evidencial $E\tau$. Trata-se de uma lógica distinta da tradicional (clássica) e que pode ser vista como lógica não clássica, rival da mesma. Todo o estudo estará baseado num algoritmo básico denominado **para-analisador**, que também será esquematizado nessa introdução.

Considerando que lógica é um assunto que muitos leitores não tiveram a oportunidade de estudar e que, como já se disse, é a base do conteúdo deste livro, será feito um apanhado resumido dessa ciência, sem a preocupação com o rigor que ela normalmente exige, antes de se chegar à lógica paraconsistente anotada evidencial $E\tau$.

C A P Í T U L O 1

A LÓGICA

1.1 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo será feito um apanhado da lógica, desde a clássica até paraconsistente anotada, para dar ao leitor uma visão geral dessa ciência. Entretanto, a ferramenta básica para o sistema de apoio à decisão que será analisado está no Capítulo 2, lógica paraconsistente anotada evidencial Eτ. Sendo assim, o leitor mais informado poderá, com pouco prejuízo para o entendimento do método de decisão, passar diretamente para o Capítulo 2.

Considerando que este é um trabalho de aplicação da lógica em Engenharia, permitir-se-ão alguns abusos de linguagem e algumas imprecisões que não condizem com essa ciência (lógica). Isto será feito para torná-lo mais intuitivo e assimilável pelo leitor não familiarizado com a lógica, permitindo-lhe apreender com mais facilidade alguns conceitos elementares. É evidente que o assunto não será esgotado.

Para as proposições lógicas normalmente atribui-se a qualidade de falsa ou verdadeira, associando-lhe um **valor-verdade** “falso” (F ou 0) ou “verdadeiro” (V ou 1).

Para relacionar as sentenças entre si, são usados os conectivos. Os quatro mais comuns são: negação ($\neg$), conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$), implicação ($\rightarrow$) e bi-implicação ($\leftrightarrow$).

O conectivo da **negação** ($\neg$) faz a negação de uma sentença. Por exemplo, sendo **p** a sentença “João é mortal”, sua negação $\neg$**p** significa “João não é mortal”.

Chama-se de **valoração** a função $\mathcal{V}\colon \mathcal{F} \rightarrow \{1; 0\}$, ou seja, a função definida no conjunto de sentenças $\mathcal{F}$ sobre o conjunto de valores-verdade {1; 0} ou {V; F}. Assim, se **p** $\in \mathcal{F}$ é verdadeira, $\mathcal{V}(\mathbf{p}) = 1$ e se p é falsa, $\mathcal{V}(\mathbf{p}) = 0$. Considerando o princípio clássico da negação “Se uma sentença é verdadeira, a sua negação é falsa e vice-versa”, temos:

$$\mathcal{V}(\mathbf{p}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{V}(\neg \mathbf{p}) = 0 \text{ ($\Leftrightarrow$ significa “se, e somente se,”).}$$

O conectivo da **conjunção** ($\wedge$) permite traduzir dois predicados do mesmo ser. Por exemplo, a sentença **A** $\equiv$ “João é aposentado **e** viúvo”, que tem o mesmo significado lógico das sentenças **p** ≡ "João é aposentado" **e q** ≡ "João é viúvo". Diz-se que a primeira é a **conjunção** das duas últimas e se usa a representaão $\mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$.

Conclui-se que: $\mathcal{V}(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{V}(\mathbf{p}) = 1$ e $\mathcal{V}(\mathbf{q}) = 1$.

Donde: $\mathcal{V}(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{V}(\mathbf{p}) = 0$ ou $\mathcal{V}(\mathbf{q}) = 0$.

O conectivo da **disjunção** ($\vee$) traduz, pelo menos um, entre dois predicados do mesmo ser. Por exemplo, a sentença **A** ≡ "João é aposentado **ou** viúvo", que tem o mesmo significado lógico das sentenças **p** ≡ "João é aposentado" **ou q** ≡ "João é viúvo". Diz-se que a primeira é a **disjunção** das duas últimas e se usa a representação $\mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \vee \mathbf{q}$.

Conclui-se que: $\mathcal{V}(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{V}(\mathbf{p}) = 1$ ou $\mathcal{V}(\mathbf{q}) = 1$.

Donde: $\mathcal{V}(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{V}(\mathbf{p}) = 0$ e $\mathcal{V}(\mathbf{q}) = 0$.

"Se **p**, então **q**", é o mesmo que "**p** implica **q**" e esta é uma nova sentença obtida a partir de das sentenças **p** e **q**. Será representada por $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ e o conectivo ($\rightarrow$) que a representa é chamado de **implicação**; **p** recebe o nome de antecedente e **q**, de consequente da implicação. Verifica-se que o antecedente da implicação é condição suficiente para o consequente e este é condição necessária para aquele.

Tem-se: $\mathcal{V}(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{V}(\mathbf{p}) = 0$ ou $\mathcal{V}(\mathbf{q}) = 1$.

Donde: $\mathcal{V}(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{V}(\mathbf{p}) = 1$ e $\mathcal{V}(\mathbf{q}) = 0$.

Se **p** é condição necessária e suficiente para **q**, representa-se por $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ e o conectivo $\leftrightarrow$ é chamado de **bi-implicação**.

Tem-se: $\mathcal{V}(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{V}(\mathbf{p}) = \mathcal{V}(\mathbf{q})$ (ambos iguais a 1 ou ambos iguais a 0).

Donde: $\mathcal{V}(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{V}(\mathbf{p}) \neq \mathcal{V}(\mathbf{q})$.

Os princípios apresentados podem ser resumidos pelas chamadas **tabelas-verdade**, representadas na Tabela 1.1.

TABELA 1.1 Tabelas-verdade

p	q	¬ p	p ∧ q	p ∨ q	p → q	p ↔ q
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Observe que: $\mathcal{V}(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = \text{mín}\,\{\mathcal{V}(\mathbf{p}), \mathcal{V}(\mathbf{q})\}$ e
$\mathcal{V}(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) = \text{máx}\,\{\mathcal{V}(\mathbf{p}), \mathcal{V}(\mathbf{q})\}$.

As sentenças simples do tipo **p** ou **q** são chamadas de fórmulas atômicas; as compostas do tipo $\mathbf{A} = \neg\mathbf{p}$, $\mathbf{B} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$, $\mathbf{C} = \mathbf{p} \vee \mathbf{q}$, $\mathbf{D} = \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ e $\mathbf{E} = \mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ são chamadas fórmulas da linguagem formal.

1.2 A LÓGICA CLÁSSICA

Neste parágrafo serão apresentados, sem preocupação com excesso de rigor e com riqueza de detalhes, alguns conceitos importantes relativos à parte dedutiva da lógica clássica.

I) O primeiro conceito diz respeito à regra (de inferência) de ***modus ponens***, que permite, a partir das fórmulas **A** e $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, inferir **B**, ou seja, se **A** e $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, então **B**.

Essa regra de inferência é de extrema importância no estudo da lógica e é representada da seguinte maneira: $\dfrac{\mathbf{A}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$.

Se **A** e $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ forem verdadeiras, **B** também o será.

II) Outro conceito que se destaca é o de **demonstração** (ou prova), definido como sendo uma sequência finita de fórmulas $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n)$ $(n \geq 1)$, tal que, qualquer que seja k, $1 \leq k \leq n$:

a) ou $\mathbf{A}_k$ é um axioma;

b) ou $\mathbf{A}_k$ foi obtido de $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{A}_j$, com $i < k$ e $j < k$, pela aplicação da regra de *modus ponens*.

$$\frac{\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j}{\mathbf{A}_k} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{A}_k}{\mathbf{A}_k}, \text{ onde } \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{A}_k \text{ é } \mathbf{A}_j$$

III) Diz-se que uma fórmula **A** da linguagem é um **teorema**, se existir uma demonstração $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n)$ $(n \geq 1)$, tal que $\mathbf{A}_n = \mathbf{A}$. A sequência $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n)$ chama-se demonstração de **A**. Representa-se: $\vdash \mathbf{A}$.

IV) Seja Γ um conjunto de fórmulas ($\Gamma = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, ..., \mathbf{B}_m\}$, por exemplo). Uma **dedução**, a partir de Γ, é qualquer sequência finita de fórmulas $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n)$ $(n \geq 1)$, tal que, para todo k, $1 \leq k \leq n$:

a) ou $\mathbf{A}_k$ é um axioma;

b) ou $\mathbf{A}_k$ é um elemento de Γ;

c) ou $\mathbf{A}_k$ foi obtido de $\mathbf{A}_i$ e $\mathbf{A}_j$, com $i < k$ e $j < k$, pela aplicação da regra de *modus ponens*.

$$\frac{\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j}{\mathbf{A}_k} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{A}_k}{\mathbf{A}_k}, \text{ onde, evidentemente, } \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{A}_k \text{ é } \mathbf{A}_j.$$

Os elementos de Γ são chamados de hipóteses (ou premissas).

V) Uma fórmula **A** diz-se uma **consequência sintática** de um conjunto de fórmulas Γ, se existir uma dedução ($\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$) ($n \geq 1$), a partir de Γ, tal que $\mathbf{A}_n = \mathbf{A}$.

Representa-se por $\Gamma \vdash \mathbf{A}$ ou por $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, ..., \mathbf{B}_m \vdash \mathbf{A}$ (sem as chaves de representação de conjunto), se Γ for um conjunto finito $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, ..., \mathbf{B}_m\}$.

Observe-se que, se $\Gamma = \phi$, $\Gamma \vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \phi \vdash \mathbf{A} \Leftrightarrow \vdash \mathbf{A}$, ou seja, um teorema é uma consequência sintática do conjunto vazio.

VI) Uma sentença (ou fórmula) é chamada de **tautologia** (ou sentença **logicamente válida**) quando ela é sempre verdadeira, quaisquer que sejam os valores de verdade de suas sentenças (ou fórmulas) componentes. Quando ela for sempre falsa, ela é chamada de **contradição**.

VII) **Teorema da dedução**: Sejam Γ um conjunto de fórmulas e **A** e **B** duas fórmulas.

a) Se $\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$, então $\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ (ou seja, se de Γ e **A** se deduz **B,** então de Γ se deduz $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$).

Em particular, tem-se:

b) Se $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$, então $\vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ (ou seja, se de **A** se deduz **B,** então $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ é teorema).

Uma axiomática de um cálculo é constituída pelos seus postulados (esquemas de axiomas e regras de inferência). Aqui, será apresentada a axiomática de Stephen C. Kleene [75] para o cálculo proposicional clássico.

Sejam **A**, **B** e **C** fórmulas quaisquer.

a) Esquemas de axiomas e regra de inferência da implicação:

A1) $\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$

A2) $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow ((\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}))$

A3) $\dfrac{\mathbf{A}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$ **(regra de *modus ponens*)**

b) Esquemas de axiomas da conjunção:

A4) $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A}$

A5) $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{B}$

A6) $\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$

c) Esquemas de axiomas da disjunção:

A7) $\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$

A8) $\mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$

A9) $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}) \rightarrow ((\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) \rightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{C}))$

d) Esquemas de axiomas da negação:

A10) $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$ (princípio do terceiro excluído)

A11) $(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{B}$ ou $\mathbf{A} \rightarrow (\neg\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$

A12) $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow ((\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \rightarrow \neg\mathbf{A})$ (princípio da redução ao absurdo)

Os postulados dos grupos a), b), c) e d) constituem a chamada **lógica (ou cálculo) proposicional clássica**: L [$\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$].

Observações:

1) Uma proposição do tipo $\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A}$ (que é falsa na lógica clássica) diz-se uma **contradição** ou **inconsistência.**

2) A lógica (ou cálculo) proposicional clássica é decidível por meio das tabelas-verdade (Tabela 1.1) ou matrizes .

3) O cálculo proposicional clássico L [$\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$] pode ser estendido ao **cálculo de predicados clássico**: L [$\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$] [82]. ($\forall$ é o quantificador universal e $\exists$, o existencial).

e) Esquemas de axiomas e regras de inferência da quantificação:

A14) $\forall x\ \mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{A}(c)$ A16) $\mathbf{A}(c) \rightarrow \exists x\ \mathbf{A}(x)$

A15) $\dfrac{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}(x)}{\mathbf{A} \rightarrow \forall x \mathbf{B}(x)}$ A17) $\dfrac{\mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{B}}{\exists x \mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{B}}$

com as restrições usuais.

São válidas as seguintes equivalências:

$$\exists x\ \mathbf{A}(x) \leftrightarrow \neg\forall x\ \neg\mathbf{A}(x) \quad \text{e} \quad \forall x\ \mathbf{A}(x) \leftrightarrow \neg\exists x\ \neg\mathbf{A}(x)$$

$$\neg\exists x\ \mathbf{A}(x) \leftrightarrow \forall x\ \neg\mathbf{A}(x) \quad \text{e} \quad \neg\forall x\ \mathbf{A}(x) \leftrightarrow \exists x\ \neg\mathbf{A}(x)$$

O cálculo de predicados clássico não é decidível, exceto em alguns casos particulares [66].

1.3 AS LÓGICAS NÃO CLÁSSICAS

Ainda sem muito rigor, pode-se dizer que as lógicas não clássicas compõem dois grandes grupos:

1) as que complementam o escopo da clássica; e
2) as que rivalizam a lógica clássica.

As lógicas pertencentes à primeira categoria são chamadas de complementares da clássica e, como o próprio nome diz, complementam aspectos que a lógica clássica não é capaz de expressar. Elas têm por base a lógica clássica e ampliam seu poder de expressão. Compreendem, a título de exemplificação:

- as lógicas epistêmicas (lógicas da crença, lógicas do conhecimento, lógicas da dúvida, lógicas da justificação, lógicas da preferência, lógicas da decisão, lógicas da aceitação, lógicas da confirmação, lógicas da opinião, lógicas deônticas etc.);
- a lógica modal tradicional (sistema T, sistema S4, sistema S5, sistemas multimodais etc.);

- lógicas intencionais;
- lógicas da ação (lógicas do imperativo, lógicas da decisão etc.);
- lógicas para aplicações físicas (lógica do tempo (lineares, não lineares etc.), lógicas cronológicas, lógicas do espaço, lógica de Lésniewski etc.);
- lógicas combinatórias (relacionadas com o cálculo λ);
- lógicas infinitárias;
- lógicas condicionais etc.

No segundo grupo encontram-se as lógicas que rivalizam com a clássica (também cognominadas heterodoxas). Elas restringem ou modificam certos princípios fundamentais da lógica tradicional.

Como se comentou no início, além da Lógica *Fuzzy*, inúmeros outros sistemas heterodoxos foram cultivados recentemente, grande parte motivada principalmente pelos avanços experimentados neste ramo da ciência, sobretudo pela Inteligência Artificial:

- lógicas intuicionistas (lógica intuicionista sem negação, lógica de *Griss* etc.). Tais sistemas estão bem estabelecidos (há uma matemática cultivada e possui interessantes características filosóficas);
- lógicas não monotônicas;
- lógicas lineares;
- lógicas *default*;
- lógicas *defesiable*;
- lógicas abdutivas;
- lógicas multivaloradas (ou lógicas polivalentes: lógica de *Lukasiewicz*, lógica de *Post*, lógica de *Gödel*, lógica de *Kleene*, lógica de *Bochvar* etc.). Seus estudos estão em fase adiantada. Com efeito, há uma matemática construída nesses sistemas e eles possuem importância filosófica, tratando, por exemplo, da questão dos futuros contingentes;
- teoria dos conjuntos *Rough*;
- lógicas paracompletas (que restringem o princípio do terceiro excluído);
- **lógicas paraconsistentes** (que restringem o princípio da não contradição: sistemas C_n, **lógicas anotadas**, lógicas do paradoxo, lógicas discursivas, lógicas dialéticas, lógicas relevantes, lógicas da ambiguidade inerente, lógicas imaginárias etc.);
- lógicas não aléticas (lógicas que são simultaneamente paracompletas e paraconsistentes);

- lógicas não reflexivas (lógicas que restringem o princípio da identidade);
- lógicas autorreferentes;
- lógicas rotuladas, lógicas livres, lógicas quânticas, entre outros.

Os sistemas não clássicos se mostraram de profundo significado não somente do ponto de vista prático, como, também, teórico, quebrando um paradigma do pensamento humano que vem imperando há mais de dois mil anos.

1.4 A LÓGICA PARACONSISTENTE

A Lógica Paraconsistente teve como precursores o lógico russo N. A. Vasiliev e o lógico polonês J. Lukasiewicz. Ambos, em 1910, independentemente, publicaram trabalhos nos quais tratavam da possibilidade de uma lógica que não eliminasse, *ab initio*, as contradições. Todavia, os trabalhos desses autores, no tocante a paraconsistência, se restringiram à lógica aristotélica tradicional. Somente em 1948 e 1954 que o lógico polonês S. Jaśkowski e o lógico brasileiro Newton C. A. da Costa, respectiva e independentemente, construíram a lógica paraconsistente [11].

Jaśkowski formalizou um cálculo proposicional paraconsistente denominado Cálculo Proposicional Discursivo (ou Discussivo), ao passo que *Da Costa* desenvolveu várias lógicas paraconsistentes contendo todos os níveis lógicos comuns. Também, paralelamente, *D. Nelson*, em 1959, investigou os sistemas construtivos com negação forte relacionados intimamente com as ideias de paraconsistência.

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as sentenças (ou fórmulas) da linguagem $\mathcal{L}$ de um cálculo (ou lógica) C. Seja $\mathcal{T}$ um subconjunto de $\mathcal{F}$. Diz-se que $\mathcal{T}$ é uma teoria (de C), se $\mathcal{T}$ for fechado em relação à noção de consequência sintática de C, ou seja,

$$\mathcal{T} = \{\, \mathbf{A} : \mathcal{T} \vdash_C \mathbf{A} \,\},$$

isto é, **A** é consequência sintática de $\mathcal{T}$ se e somente se $\mathbf{A} \in \mathcal{T}$. (Às vezes, diz-se que A é "teorema" de $\mathcal{T}$, dando-se um sentido mais amplo (dedutível de) à palavra teorema).

Neste caso, C é chamado de cálculo ou lógica subjacente à teoria $\mathcal{T}$.

Diz-se que uma teoria $\mathcal{T}$, cuja lógica subjacente é C e cuja linguagem é $\mathcal{L}$, é **inconsistente** se ela contém pelo menos um "teorema" **A** tal que a sua negação $\neg$**A** também é "teorema" de $\mathcal{T}$, ou seja, se existir pelo menos uma fórmula **A** de $\mathcal{F}$ tal que **A** e $\neg$**A** pertençam a $\mathcal{T}$ (são teoremas de $\mathcal{T}$). Em caso contrário, ela se diz **consistente**.

Uma teoria $\mathcal{T}$ se diz **trivial** quando todas as fórmulas de $\mathcal{F}$ são "teoremas" de $\mathcal{T}$, ou seja, $\mathcal{T}$ é trivial se, e somente se, $\mathcal{T} = \mathcal{F}$. Em caso contrário, ela se diz **não trivial**. Uma teoria $\mathcal{T}$ é **paraconsistente** se ela é **inconsistente e não trivial** [33].

Na lógica clássica, a partir de **A** e $\neg$**A** pode-se demonstrar qualquer fórmula **B.** Portanto, se uma teoria clássica tiver uma contradição, todas as fórmulas da linguagem são teoremas dessa teoria. Isto significa que uma contradição trivializa qualquer teoria clássica.

Uma lógica (ou cálculo) se diz **paraconsistente** se ele puder ser a lógica subjacente de teorias paraconsistentes (inconsistentes, porém não triviais) [32]. Portanto, nas teorias paraconsistentes existem fórmulas **A** tais que, a partir de **A** e **¬A,** não se pode demonstrar qualquer fórmula **B,** ou seja, sempre existe uma fórmula **B** de $\mathcal{F}$ tal que **B** não é teorema da teoria.

Resumindo, uma teoria $\mathcal{T}$ é inconsistente se existe uma fórmula **A** tal que **A** e **¬A**, são ambas dedutíveis de $\mathcal{T}$; em caso contrário, $\mathcal{T}$ é consistente. $\mathcal{T}$ diz-se trivial se todas as fórmulas da linguagem pertencem a $\mathcal{T}$, ou seja, se $\mathcal{T} = \mathcal{F}$; em caso contrário, $\mathcal{T}$ é não trivial. $\mathcal{T}$ diz-se **paraconsistente** se é **inconsistente** e **não trivial**.

A lógica paraconsistente (LP) foi edificada para satisfazer as seguintes condições: a) em LP, em geral, não deve ser válido o princípio da não contradição; b) de uma contradição não deve ser possível deduzir toda proposição.

Analogamente, a mesma definição aplica-se a sistemas de proposições, conjunto de informações etc. (levando-se em conta, naturalmente, o conjunto de suas consequências).

Na lógica clássica e em muitas categorias de lógica, a consistência desempenha papel importante. Como se viu anteriormente, na maioria dos sistemas lógicos usuais, se uma teoria $\mathcal{T}$ é trivial, ela é inconsistente e reciprocamente.

Uma lógica *C* chama-se **paraconsistente** se puder servir de base (se puder ser a lógica subjacente) para teorias inconsistentes, mas não triviais, ou seja, para teorias paraconsistentes.

Uma lógica *C* chama-se **paracompleta** se ela puder ser a lógica subjacente de teorias nas quais se infringe a lei do terceiro excluído na seguinte forma: de duas proposições contraditórias, uma delas é verdadeira. Portanto, como infringe, nessa lógica pode haver duas fórmulas **A** e **¬A** ambas não verdadeiras.

De modo preciso, uma lógica se diz paracompleta se nela existirem sistemas não triviais maximais aos quais não pertencem uma dada fórmula e sua negação.

Finalmente, uma lógica *C* denomina-se **não alética** se for paraconsistente e paracompleta.

Na parte positiva, a axiomática de Da Costa (1993) para a lógica paraconsistente é igual a de Kleene (1952) para a clássica. Portanto, elas diferem nos axiomas da negação. Assim, os itens a), b) e c), correspondentes aos axiomas de A1 a A9, são idênticos aos da clássica e os da negação são os seguintes:

d') Esquemas de axiomas da negação:

A'10) $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$ (princípio do terceiro excluído)

A'11) $\neg\neg\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ (propriedade da dupla negação)

A'12) $\mathbf{B}^{o} \rightarrow ((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow ((\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \rightarrow \neg\mathbf{A}))$ (princípio da redução ao absurdo)

A'13) $\mathbf{A}^{o} \wedge \mathbf{B}^{o} \rightarrow ((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^{o} \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^{o} \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^{o})$

onde $\mathbf{B}^{o} =_{def} \neg(\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{B})$ é denominada de **fórmula bem-comportada**.

Nota: Por A'13, conclui-se que o "bom comportamento" se mantém na implicação, na conjunção e na disjunção, ou seja, fórmulas formadas a partir de fórmulas bem-comportadas também são bem-comportadas.

1.5 LÓGICA PARACONSISTENTE ANOTADA (LPA)

As lógicas paraconsistentes anotadas são uma família de lógicas não clássicas inicialmente empregadas em programação lógica por Subrahmanian [31]. Devido às aplicações obtidas, tornou-se conveniente um estudo dos fundamentos da lógica subjacente das linguagens de programação investigadas. Verificou-se que se tratava de uma lógica paraconsistente e que, em alguns casos, também continham características da lógica paracompleta e não alética.

Os primeiros estudos sobre os fundamentos da LPA foram efetuados por Da Costa, Vago, Subrahmanian, Abe e Akama [1, 8, 9, 30, 31]. Em [1] estudou-se a lógica de predicados, teoria de modelos, teoria anotada de conjuntos e alguns sistemas modais, estabelecendo-se um estudo sistemático dos fundamentos das lógicas anotadas apontadas em trabalhos anteriores. Em particular, foram obtidos metateoremas de completeza forte e fraca para uma subclasse de lógica anotada de primeira ordem, e foi feito um estudo sistemático da teoria anotada de modelos, generalizando a maioria dos resultados padrões para os sistemas anotados.

Outras aplicações dos sistemas anotados foram iniciadas por Abe, por volta de 1993, que, juntamente com seus discípulos, implementou a linguagem de programação paraconsistente (*Paralog*), independentemente dos resultados de Subrahmanian. Tais ideias foram aplicadas na construção de um protótipo e na especificação de uma arquitetura baseada na LPA, que integra vários sistemas computacionais – planejadores, base de dados, sistemas de visão etc. –, na construção de uma célula de manufatura e na representação de conhecimento por *Frames*, permitindo traduzir inconsistências e exceções.

Da Silva Filho, outro discípulo de Abe, interessou-se pela aplicação da LPA em circuitos digitais, obtendo a implementação das portas lógicas *Complement*, *And* e *Or*. Tais circuitos permitem sinais "conflitantes" implementados em sua estrutura de modo não trivial. Acreditamos que a contribuição dos circuitos elétricos paraconsistentes seja pioneira na área dos circuitos elétricos, abrindo-se novas vias de investigações. Nas pesquisas ainda sobre *hardware*, foi a edificação do analisador lógico – para-analisador – que permite tratar conceitos de incerteza, inconsistência e paracompleteza. Também foram construídos controladores lógicos baseados nas lógicas anotadas – *Paracontrol*, simuladores lógicos – *Parasim*, tratamento de sinais – *Parassônico*.

Como materialização dos conceitos discutidos construiu-se o primeiro robô paraconsistente com o *hardware* paraconsistente: o robô *Emmy*. Outro robô paraconsistente, construído com o *software* baseado na LPA, denominou-se *Sofya*; e muitos outros protótipos subsequentes foram construídos: Amanda, Hephaestus etc.

Os sistemas anotados também abarcam aspectos dos conceitos envolvidos em raciocínio não monotônico, *defesiable*, *default* e deôntico.

Versões de lógicas anotadas também envolvem muitos aspectos das lógicas *fuzzy*. Isto pode ser visto sob vários ângulos. A teoria anotada de conjuntos engloba *in totum* a teoria de conjuntos *fuzzy* [1]. Versões axiomatizadas da teoria *fuzzy* foram obtidas. Foi erigido o controlador híbrido *parafuzzy* que une características das lógicas anotadas e fuzzy. Finalmente, aspectos algébricos também foram investigados por Abe e outras algebrizações interessantes têm sido estudadas por vários autores.

1.6 RETICULADO ASSOCIADO À LÓGICA PARACONSISTENTE ANOTADA

É sobejamente conhecida a importância da teoria da linguagem para a investigação de problemas em ciência. Assim, uma boa solução para uma indagação pode muitas vezes depender profundamente da escolha ou da descoberta de uma linguagem conveniente para representar os conceitos envolvidos, bem como fazer inferências sensatas até que se chegue a soluções satisfatórias.

No tocante às aplicações, observando-se atentamente um conjunto de informações obtidas sobre certo tema, pode-se notar que tal conjunto encerra informações contraditórias que geram dificuldades para descrição de conceitos vagos, como já discutimos na introdução. No caso da contradição, normalmente elas são removidas de modo artificial para não contaminar o conjunto de dados, ou sofrem um tratamento à parte, com dispositivos extralógicos.

Entretanto, a contradição, na maioria das vezes, contém informação decisiva, pois trata-se do encontro de duas vertentes de valores-verdade opostos. Logo, negligenciá-la é proceder de forma anacrônica. Por conseguinte, deve-se buscar linguagens que possam conviver com tais contradições, sem atrapalhar as demais informações. Quanto ao conceito de incerteza, deve-se pensar em uma linguagem que possa capturar e cercar o 'máximo' de 'informações' do conceito. Para se obter uma linguagem que possa ter essas características, propõe-se o procedimento descrito a seguir.

Nosso intuito é o de se acolher os conceitos de incerteza, inconsistência e paracompleteza em sua estrutura linguística e raciocinar (mecanicamente) na presença deles, com a esperança de que, com esse desenho, a linguagem permita atingir, capturar e refletir melhor as nuances da realidade de maneira diferente das tradicionais. Assim, pretende-se estar equipado com uma linguagem e uma estrutura dedutiva adequada para uma compreensão de problemas sob ângulos diferentes e, quiçá, desse modo possa gerar soluções inovadoras. Para essa tarefa, serão considerados os conceitos de inconsistência e paracompleteza. A eles juntar-se-ão as noções de verdade e de falsidade. Desse modo, serão considerados quatro objetos, que serão chamados genericamente de constantes de anotação.

$\top$ – chamado de inconsistente; $\perp$ – chamado de paracompleto;

V – chamado de verdadeiro; F – chamado de falso.

No conjunto de objetos $\tau = \{\top, V, F, \perp\}$ será definida uma estrutura matemática: um **reticulado** com operador $\tau = <|\tau|, \leq^*, \sim>$ caracterizado pelo seguinte diagrama de Hasse:

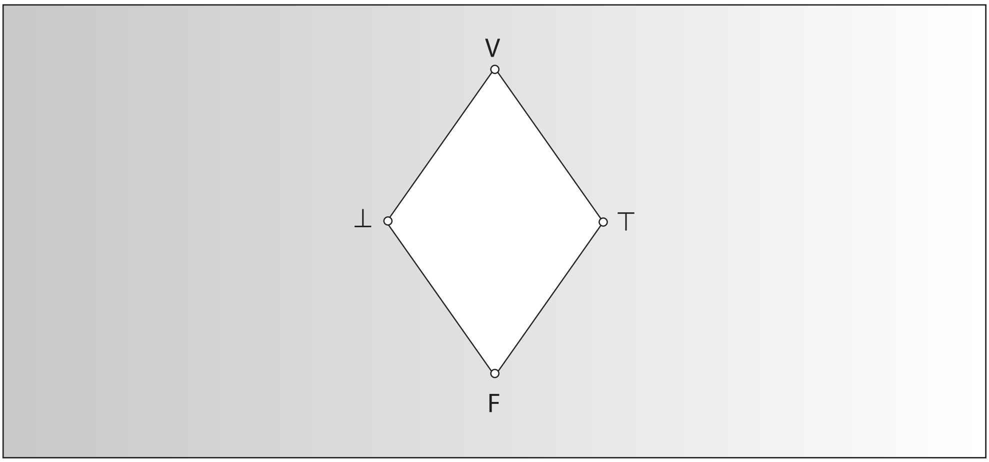

FIGURA 1.1 Reticulado 'quatro'.

O operador $\sim : |\tau| \rightarrow |\tau|$ define-se assim:

- $\sim\top = \top$ (a 'negação' de uma proposição inconsistente é inconsistente);
- $\sim V = F$ (a 'negação' de uma proposição 'verdadeira' é 'falsa');
- $\sim F = V$ (a 'negação' de uma proposição 'falsa' é 'verdadeira');
- $\sim\perp = \perp$ (a 'negação' de uma proposição 'paracompleta' é 'paracompleta').

O operador ~ fará o 'papel' do conectivo da negação da LPA, como se verá adiante.

As proposições da LPA são do tipo $\mathbf{p}_\mu$, onde **p** é uma proposição no sentido comum e μ é uma constante de anotação.

Entre várias leituras intuitivas, $\mathbf{p}_\mu$ pode ser lida: 'creio na proposição **p** com grau até μ' ou 'a evidência favorável expressa pela proposição é no máximo μ'.

Suponha-se que se tenha a proposição **p**: 'a frente do robô está livre' e que haja informações que remetem a duas situações:

1. 'a frente do robô está livre' (que pode ser expressa na LPA por $\mathbf{p}_V$);
2. 'a frente do robô não está livre'(que pode ser expressa na LPA por $\mathbf{p}_F$).

Em um sistema baseado na LPA, tal situação pode ser representada por $\mathbf{p}_{\mathrm{T}}$: 'a frente do robô está livre' constitui um estado inconsistente.

1.7 AXIOMATIZAÇÃO DA LÓGICA PARACONSISTENTE ANOTADA Qτ

Nesta seção, será apresentada uma axiomatização das lógicas anotadas, estendendo a discussão anterior, considerando-se agora um reticulado arbitrário. A referência para este texto é [1]. Tecnicamente, tal lógica se constitui no que se conhece por lógica bissortida (intuitivamente falando, trata-se de dois tipos de variáveis). Convém ressaltar que as lógicas anotadas são lógicas paraconsistentes e, em geral, paracompletas e não aléticas, como está exposto a seguir.

Seja $\tau = < |\tau|, \leq^*, \sim>$ um reticulado finito com operador de negação fixo. Tal reticulado denomina-se **reticulado de valores-verdade** e o operador ~ constitui o "significado" do símbolo de negação ¬ do sistema lógico que será considerado. Sua linguagem será simbolizada por $\mathcal{L}\tau$. Associados ao reticulado τ, tem-se, ainda, os seguintes símbolos:

- $\top$ indica o máximo de τ;
- $\perp$ indica o mínimo de τ;
- sup indica a operação de supremo – com respeito a subconjuntos de τ;
- inf indica a operação de ínfimo – com respeito a subconjuntos de τ.

A linguagem $\mathcal{L}\tau$ possui os seguintes símbolos primitivos:

1. Variáveis individuais: um conjunto enumerável de variáveis individuais;

   $\mathbf{p}, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{q}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, ..., \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, ...;$
   $\mathbf{A}, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{B}, \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, ..., \mathbf{C}, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, ...;$

2. Para cada *n*, símbolos funcionais *n*-ários; Os símbolos funcionais 0-ários chamam-se, também, constantes individuais;
3. Para cada *n*, símbolos de predicados *n*-ários;
4. O símbolo de igualdade = ;
5. Constantes de anotação (membros de τ): μ, λ, ...;
6. Os símbolos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\exists$ e $\forall$ dos conectivos e dos quantificadores;
7. Símbolos auxiliares: parênteses e vírgula:), (e ,.

Os termos da linguagem $\mathcal{L}\tau$ são definidos de maneira usual. Utiliza-se **a**, **b**, **c** e **d** – com ou sem índices – como metavariáveis para os termos.

Definição 1. [Fórmula] Uma **fórmula básica** é uma expressão do tipo $\mathbf{p}(a_1, \ldots, a_n)$, onde **p** é um símbolo predicativo *n*-ário e $a_1, \ldots, a_n$ são termos de $\mathcal{L}\tau$. Se $\mathbf{p}(a_1, \ldots, a_n)$ é uma fórmula básica e $\mu \in \tau$ é uma constante de anotação, então $\mathbf{p}_\mu(a_1, \ldots, a_n)$ e $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, onde **a** e **b** são termos, chamam-se **fórmulas atômicas**.

As fórmulas têm a seguinte definição indutiva generalizada:

1. Uma fórmula atômica é uma fórmula.
2. Se **A** é uma fórmula, então $\neg\mathbf{A}$ é uma fórmula.
3. Se **A** e **B** são fórmulas, então $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ são fórmulas.
4. Se **A** é uma fórmula e x é uma variável individual, então $(\exists x)\mathbf{A}$ e $(\forall x)\mathbf{A}$ são fórmulas.
5. Uma expressão de $\mathcal{L}\tau$ constitui uma fórmula se, e somente se, for obtida aplicando-se uma das regras de 1 a 4 anteriores (cláusula maximal).

A fórmula $\neg\mathbf{A}$ é lida "*a negação* – ou *negação fraca – de* **A**"; $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, "*a conjunção de* **A** *e* **B**"; $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, "*disjunção de* **A** *e* **B**"; $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, "*a implicação de* **B** *por* **A**"; $(\exists x)\mathbf{A}$, "*a instanciação de* **A** *por* x"; e $(\forall x)\mathbf{A}$, "*a generalização de* **A** *por x*".

A seguir são introduzidos alguns símbolos, por definição:

Definição 2. [Equivalência e Negação Forte] Sejam **A** e **B** fórmulas quaisquer de $\mathcal{L}\tau$. Define-se, então:

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B} =_{\mathrm{def}} (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) \text{ e } \neg^{*} \mathbf{A} =_{\mathrm{def}} \mathbf{A} \rightarrow ((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}) \wedge \neg(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A})).$$

O símbolo $\neg^*$ denomina-se **negação forte;** portanto, $\neg^*\mathbf{A}$ deve ser lido a negação forte de **A**. A fórmula $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ é lida, como usualmente, a *equivalência de* **A** e **B**.

Definição 3. Seja **A** uma fórmula. Então:

$\neg^0\mathbf{A}$ indica **A**; $\neg^1\mathbf{A}$ indica $\neg\mathbf{A}$ e $\neg^k\mathbf{A}$ indica $\neg(\neg^{k-1}\mathbf{A})$, $(k \in \mathrm{N}, k > 0)$.

Também, se $\mu \in |\tau|$, convenciona-se que:

$\sim^0\mu$ indica μ; $\sim^1\mu$ indica $\sim\mu$ e $\sim^k\mu$ indica $\sim(\sim^{k-1}\mu)$, $(k \in \mathrm{N}, k > 0)$.

Definição 4. [Literal] Seja $\mathbf{p}_\mu(a_1, \ldots, a_n)$, uma fórmula atômica. Qualquer fórmula do tipo $\neg^k\mathbf{p}_\mu(a_1, \ldots, a_n)$ $(k \geq 0)$ denomina-se uma **fórmula hiperliteral** ou, simplesmente, **literal**. As demais fórmulas denominam-se **fórmulas complexas**.

Descreve-se, agora, uma semântica para as linguagens $\mathcal{L}\tau$.

Definição 5. [Estrutura] Uma **estrutura** $\mathcal{E}$ para uma linguagem $\mathcal{L}\tau$ consiste dos seguintes objetos:

1. Um conjunto não vazio $|\mathcal{E}|$ denominado o **universo** de $\mathcal{E}$. Os elementos de $|\mathcal{E}|$ chamam-se **indivíduos** de $\mathcal{E}$.

2. Para cada símbolo funcional n-ário f de $\mathcal{L}\tau$, uma operação n-ária f_E de $|\mathcal{E}|$ em $|\mathcal{E}|$ – em particular, para cada constante individual e de $\mathcal{L}\tau$, e_E é um indivíduo de $\mathcal{E}$.
3. Para cada símbolo predicativo **p** de peso n de $\mathcal{L}\tau$, uma função $\mathbf{p}_E$: $|\mathcal{E}|^n \rightarrow |\tau|$.

Seja $\mathcal{E}$ uma estrutura para $\mathcal{L}\tau$. A linguagem-diagrama $\mathcal{L}\tau(\mathcal{E})$ é obtida de modo habitual. Dado um termo livre de variável **a** de $\mathcal{L}\tau(\mathcal{E})$, define-se, também, de modo comum, o indivíduo $\mathcal{E}$(**a**) de $\mathcal{E}$. Utilizam-se i e j como metavariáveis para denotar nomes.

Define-se, agora, o valor verdade $\mathcal{E}$(**A**) da fórmula fechada **A** de $\mathcal{L}\tau(\mathcal{E})$. A definição é obtida por indução sobre o comprimento de **A**. Por abuso de linguagem, utilizam-se os mesmos símbolos para metavariáveis de termos da linguagem-diagrama.

Definição 6. Seja **A** uma fórmula fechada e $\mathcal{E}$ uma interpretação para $\mathcal{L}\tau$.

1. Se **A** é atômica da forma $\mathbf{p}_\mu(a_1, \ldots, a_n)$, então:
   $\mathcal{E}(\mathbf{A}) = 1$ se, e somente se, $\mathbf{p}_E(\mathcal{E}(a_1), \ldots, \mathcal{E}(a_n)) \geq \mu$;
   $\mathcal{E}(\mathbf{A}) = 0$ se, e somente se, não é o caso que $\mathbf{p}_E(\mathcal{E}(a_1), \ldots, \mathcal{E}(a_n)) \geq \mu$.
2. Se **A** é atômica da forma $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, então:
   $\mathcal{E}(\mathbf{A}) = 1$ se, e somente se, $\mathcal{E}(\mathbf{a}) = \mathcal{E}(\mathbf{b})$;
   $\mathcal{E}(\mathbf{A}) = 0$ se, e somente se, $\mathcal{E}(\mathbf{a}) \neq \mathcal{E}(\mathbf{b})$.
3. Se **A** é da forma $\neg^k(\mathbf{p}_\mu(a_1, \ldots, a_n))$ $(k \geq 1)$, então:
   $\mathcal{E}(\mathbf{A}) = \mathcal{E}(\neg^{k-1}(\mathbf{p}_{\sim\mu}(a_1, \ldots, a_n))$.
4. Sejam **A** e **B** fórmulas fechadas quaisquer, então:
   $\mathcal{E}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathcal{E}(\mathbf{A}) = \mathcal{E}(\mathbf{B}) = 1$;
   $\mathcal{E}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathcal{E}(\mathbf{A}) = 1$ ou $\mathcal{E}(\mathbf{B}) = 1$;
   $\mathcal{E}(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = 1$ se, e somente se, $\mathcal{E}(\mathbf{A}) = 0$ ou $\mathcal{E}(\mathbf{B}) = 1$.
5. Se **A** é uma fórmula fechada complexa, então:
   $\mathcal{E}(\neg\mathbf{A}) = 1 - \mathcal{E}(\mathbf{A})$.
6. Se **A** é da forma $(\exists x)\mathbf{B}$, então:
   $\mathcal{E}(\mathbf{A}) = 1$ se, e somente se, $\mathcal{E}(\mathbf{B}_X[i]) = 1$ para algum i em $\mathcal{L}\tau(\mathcal{E})$.
7. Se **A** é da forma $(\forall x)\mathbf{B}$, então:
   $\mathcal{E}(\mathbf{A}) = 1$ se, e somente se, $\mathcal{E}(\mathbf{B}_X[i]) = 1$ para todo i em $\mathcal{L}\tau(\mathcal{E})$.

Teorema 1. Sejam **A, B, C** fórmulas quaisquer de **Q**τ. Os conectivos $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg^*$, juntos com os quantificadores $\forall$ e $\exists$, possuem todas as propriedades da implicação, disjunção, conjunção e negação clássicas, bem como dos quantificadores $\forall$ e $\exists$ clássicos, respectivamente. Por exemplo, tem-se que:

1. $\vdash \neg^*\exists x\mathbf{B} \vee \mathbf{C} \leftrightarrow \exists x\,(\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$;

2. $\vdash \neg^* \exists x\mathbf{B} \vee \exists x\, \mathbf{C} \leftrightarrow \exists x\, (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$;

3. $\vdash \neg^* \forall x\mathbf{A} \leftrightarrow \neg^* \exists x\, \neg^* \mathbf{A}$;

4. $\vdash \neg^* \exists x\mathbf{A} \leftrightarrow \neg^* \forall x\, \neg^* \mathbf{A}$.

O sistema de postulados – esquemas de axiomas e regras de inferência – para **Q**τ, que é apresentado a seguir, será denominado de **A**τ.

Na parte positiva, a axiomática da LPA é igual a da clássica (itens a), b) e c)) acrescida da Lei de Peirce (item A''13). Os axiomas da negação são A''10, A''11 e A''12, a seguir [30], [37]:

d'') Esquemas de axiomas da negação

Sendo **A, B, C** fórmulas quaisquer, **F** e **G** fórmulas complexas, **p** uma variável proposicional e μ, μ_j, $1 \leq j \leq n$, constantes de anotação, x, $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ variáveis individuais, tem-se:

A''10) $\mathbf{F} \vee \neg \mathbf{F}$

A''11) $\mathbf{F} \rightarrow (\neg\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{A})$

A''12) $(\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}) \rightarrow ((\mathbf{F} \rightarrow \neg \mathbf{G}) \rightarrow \neg \mathbf{F})$

A''13) $((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{A}$ (Lei de Peirce)

e'') Esquemas de axiomas e regras de inferência da quantificação:

A''14) $\forall x\mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{A}(c)$

A''15) $\dfrac{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}(x)}{\mathbf{A} \rightarrow \forall x\mathbf{B}(x)}$

A''16) $\mathbf{A}(c) \rightarrow \exists \mathbf{x}\mathbf{A}(x)$

A''17) $\dfrac{\mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{B}}{\exists x\mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{B}}$

f'') Esquemas de axiomas específicos da LPA:

A''18) $\mathbf{p}_{\perp}$

A''19) $(\neg^k \mathbf{p}_\mu) \leftrightarrow (\neg^{k-1} \mathbf{p}_{\sim\mu})$ $k \geq 1$

A''20) $\mathbf{p}_\mu \rightarrow \mathbf{p}_\lambda$, onde $\mu \geq \lambda$

A''21) $\mathbf{p}_{\mu_1} \wedge \mathbf{p}_{\mu_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{p}_{\mu_n} \rightarrow \mathbf{p}_\mu$,
onde $\mu = \sup \mu_j$, $j = 1, 2, \ldots , n$

A''22) $x = x$

A''23) $x_1 = y_1 \rightarrow \ldots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow \mathbf{f}(x_1,\ldots,x_n) = \mathbf{f}(y_1, \ldots, y_n)$

A''24) $x_1 = y_1 \rightarrow \ldots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow \mathbf{p}_\mu(x_1,\ldots,x_n) = p_\mu(y_1, \ldots, y_n)$
com as restrições usuais.

Teorema 2. Qτ é paraconsistente se, e somente se, $\#\tau \geq 2$[1]. ($\#\tau$ = cardinalidade de τ).

[1] O símbolo # indica o número cardinal de τ.

Teorema 3. Se **Q**τ é paracompleto, então $\#\tau \geq 2$. Se $\#\tau \geq 2$, existem sistemas **Q**τ que são paracompletos e existem **Q**τ que não são paracompletos.

Teorema 4. Se **Q**τ é não alética, então $\#\tau \geq 2$. Se $\#\tau \geq 2$, existem sistemas **Q**τ que são não aléticos e sistemas **Q**τ que não são não aléticos.

Por conseguinte, vê-se que os sistemas **Q**τ são em geral paraconsistentes, paracompletos e não aléticos.

Teorema 5. O cálculo **Q**τ é não trivial.

Em [1] foram demonstrados teoremas de correção e de completude para os cálculos **Q**τ quando o reticulado for finito[2]. Além disso, J.M. Abe mostrou como a teoria padrão de modelos pode ser estendida para as lógicas anotadas de 1ª ordem. Nesta mesma referência evidencia-se que a teoria anotada dos conjuntos é extraordinariamente forte, envolvendo, como caso particular, a teoria dos conjuntos difusos – *fuzzy sets.*

Em consequência, a Matemática Anotada, que envolve a Matemática *Fuzzy*, afigura-se da mais alta relevância; basta lembrar as aplicações feitas em Ciência da Computação e o significado do ponto de vista das aplicações das lógicas e matemáticas *fuzzy*.

A lógica paraconsistente anotada, ainda muito jovem, descoberta no entardecer do século passado, é uma das grandes conquistas no campo das lógicas não clássicas nos últimos tempos. A sua composição, como lógica bissortida, na qual uma das variáveis possui uma estrutura matemática, produziu resultados incríveis com respeito a computabilidade e implementações eletrônicas. Constitui uma nova lógica alternativa, extremamente interessante, capaz de manipular conceitos como os de incerteza, inconsistência e paracompleteza em seu interior, com implementações computacional e eletrônica bastante naturais.

Acreditamos que a LPA tenha horizontes muito amplos, com potencial enorme de aplicação e também como fundamento para elucidar o denominador comum de muitas lógicas não clássicas. Quiçá, um dia venha mesmo a rivalizar com a lógica *fuzzy* no tocante às aplicações.

---

[2] Quando o reticulado for infinito, devido ao esquema (τ_4) caímos numa lógica infinitária, que resta ainda por ser investigada.