

CONTROLE LINEAR DE SISTEMAS DINÂMICOS

Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios

JOSÉ C. GEROMEL
RUBENS H. KOROGUI

Blucher

Controle Linear de Sistemas Dinâmicos

Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios

Blucher

José C. Geromel
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP

Rubens H. Korogui
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP

Controle Linear de Sistemas Dinâmicos

Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios



Controle linear de sistemas dinâmicos

teoria, ensaios práticos e exercícios

© 2011 José C. Geromel

Rubens H. Korogui

Editora Edgard Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar

04531-012 - São Paulo - SP - Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

editora@blucher.com.br

www.blucher.com.br

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed.
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,
Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem
autorização escrita da editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

FICHA CATALOGRÁFICA

Geromel, José C.

Controle linear de sistemas dinâmicos: teoria, ensaios
práticos e exercícios / José C. Geromel, Rubens H. Korogui.

-- São Paulo: Blucher, 2011

Bibliografia

ISBN 978-85-212-0590-6

1. Análise de sistemas 2. Dinâmica 3. Sistemas lineares
I. Korogui, Rubens H. II. Título.

11-01289

CDD-515.352

Índices para catálogo sistemático:

1. Análise linear: Sistemas dinâmicos: Matemática 515.352

2. Sistemas dinâmicos: Análise linear: Matemática 515.352

Este livro é dedicado aos professores

Celso Bottura

Hermano Tavares

Plínio Castrucci

por terem iniciado toda uma geração
nos temas que serão aqui tratados.

Conteúdo

Prefácio & Agradecimentos	ix
1 Considerações Preliminares	1
1.1 Introdução	1
1.2 Requisitos Básicos	9
1.3 Descrição dos Capítulos	13
1.4 Notação	17
1.5 Notas Bibliográficas	18
2 Fundamentos de Sistemas de Controle	19
2.1 Introdução	19
2.2 Modelagem Matemática e Perspectivas	21
2.2.1 Perspectivas	22
2.2.2 Motor de Corrente Contínua	24
2.2.3 Pêndulo Invertido	28
2.3 Sistemas de Controle com Realimentação	31
2.3.1 Estrutura Básica	31
2.3.2 Função de Transferência em Malha Fechada	33
2.3.3 Sensibilidade	34
2.3.4 Critérios de Desempenho	37
2.4 Classes de Controladores e Discretização	43
2.4.1 Classes de Controladores	43
2.4.2 Discretização	44
2.5 Notas Bibliográficas	49
2.6 Exercícios	50

3	Fundamentos Matemáticos	65
3.1	Introdução	65
3.2	Princípio da Variação do Argumento	65
3.3	Matrizes e Determinantes	75
3.4	Critérios de Estabilidade	81
3.4.1	Caracterização	81
3.4.2	Critério de Routh-Hurwitz	84
3.4.3	Critério de Nyquist	89
3.4.4	Critério de Lyapunov	96
3.5	Lugar das Raízes	103
3.6	Redução de Modelos via Polos Dominantes	111
3.7	Notas Bibliográficas	115
3.8	Exercícios	116
4	Fundamentos de Projeto	123
4.1	Introdução	123
4.2	Critérios de Desempenho	123
4.3	Alocação de Polos	134
4.4	Controladores Clássicos	139
4.4.1	Atraso e Avanço	140
4.4.2	PID	140
4.4.3	Regra de Ziegler-Nichols	142
4.5	Projeto via Lugar das Raízes	143
4.6	Projeto via Resposta em Frequência	148
4.7	Notas Bibliográficas	156
4.8	Exercícios	157
5	Projeto via Representação de Estado	169
5.1	Introdução	169
5.2	Realimentação de Estado	170
5.2.1	Controlabilidade	179
5.3	Regulador Linear Quadrático	183
5.4	Observador de Estado	190
5.4.1	Observabilidade	200
5.5	Projeto de Servomecanismos	202
5.6	Projeto Final	213
5.7	Notas Bibliográficas	217
5.8	Exercícios	218

6	Sistemas Não Lineares	225
6.1	Introdução	225
6.2	Equações Diferenciais Não Lineares	225
6.2.1	Linearização	232
6.2.2	Classes Especiais de Sistemas Não Lineares	234
6.3	Sistemas de Segunda Ordem	235
6.3.1	Soluções Periódicas	244
6.4	Estabilidade	251
6.4.1	Linearização Harmônica	252
6.4.2	CrITÉRIO de Popov	265
6.4.3	CrITÉRIO de Persidiskii	276
6.5	Notas Bibliográficas	278
6.6	Exercícios	279
7	Robustez	285
7.1	Introdução	285
7.2	Normas	285
7.2.1	Classe \mathcal{H}_2	288
7.2.2	Classe \mathcal{H}_∞	292
7.3	Estabilidade Robusta	296
7.4	Desempenho Robusto	306
7.5	Notas Bibliográficas	308
7.6	Exercícios	309
8	Modelagem e Ensaio Práticos	313
8.1	Introdução	313
8.2	Sistema Torcional	313
8.3	Amplificador Eletrônico Realimentado	326
8.4	Notas Bibliográficas	333
8.5	Exercícios	334
A	Desigualdades Matriciais Lineares	337
	Bibliografia	343
	Índice	347

Prefácio & Agradecimentos

Este livro tem como objetivo principal o estudo da síntese de sistemas de controle automático. De forma natural, surgiu a partir da necessidade de complementar a análise de sistemas dinâmicos já tratada no texto

- J. C. Geromel e A. G. B. Palhares, *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos : Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios*, Editora Edgard Blücher Ltda, 2004.

e cujo conteúdo tomamos como base para elaborar e desenvolver aquele que será, em seguida, apresentado. As estruturas dos dois livros são idênticas.

Este texto não é um mero amontoado de resultados teóricos já conhecidos há muito tempo, de exemplos e exercícios que acabaram sendo colocados juntos. É muito mais. Pretendemos dar ao leitor a nossa visão e a nossa opinião crítica a respeito dos temas tratados. Como apareceram, como são usados e, sobretudo, quais são os mais relevantes e úteis. Para que isto possa ser realizado é necessário, em alguns pontos, aprofundar a discussão e chegar a detalhes para tornar possível entender as nuances, porventura existentes, dentro dos seus respectivos contextos.

Com este objetivo em vista, procuramos primeiramente desenvolver os resultados teóricos de forma rigorosa e sempre dentro de um nível de dificuldade que julgamos ser perfeitamente adequado aos potenciais leitores. Em segundo lugar, procuramos ilustrar os resultados teóricos com vários exemplos e propor diversos exercícios para serem resolvidos como forma de consolidar o aprendizado. Embora a bibliografia contenha um bom número de obras correlatas para consulta, este livro pode ser lido sem que se tenha que recorrer a elas com regularidade. Pretendemos ter feito um texto de leitura fácil e agradável mas reconhecemos que ele requer trabalho e dispêndio de energia para ser vencido. Alguns tópicos vão além do que se espera ensinar em disciplinas da graduação. Eles foram incluídos para dar ao conteúdo uma certa completude e colocar em evidência a temática atual da área como é o caso de

controle robusto e das desigualdades matriciais lineares¹. A leitura e o aprendizado certamente ficam mais fáceis se algum tipo de apoio computacional estiver disponível para que o leitor possa reproduzir os exemplos resolvidos.

Agradecemos ao nosso colega Prof. Dr. Carlos Alberto dos Reis Filho, da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp, por sempre nos ter dado prontamente e com particular competência, informações que foram úteis e essenciais para desenvolvermos o projeto e os ensaios práticos com amplificadores operacionais.

Agradecemos também, de forma particularmente especial, a dois outros colegas pelas contribuições e sugestões que permitiram diversos aprimoramentos no texto. Dr. Alim P. C. Gonçalves e Dra. Grace S. Deaecto que, ainda enquanto doutorandos, nos ajudaram a ministrar esta disciplina aos alunos de graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp e, também, pela leitura cuidadosa e crítica do texto final.

Por fim, agradecemos ao CNPq - *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* e à FAPESP - *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo* - pelo apoio que nos tem dado ao longo dos anos, inclusive, por aquele que tornou possível a execução deste projeto de longa duração.

O texto e as figuras foram editados pelos autores, em L^AT_EX.

Campinas, São Paulo, Setembro de 2010.

José C. Geromel
Rubens H. Korogui

¹Tradução do termo original em Inglês, *linear matrix inequalities (LMIs)*

Capítulo 1

Considerações Preliminares

1.1 Introdução

Place Wilson, centro de Toulouse, França, ao descer por uma escada rolante chega-se a uma estação de metrô completamente cercada por vidros. Ao contrário de muitas outras, o passageiro apenas percebe, através deles, a existência de uma linha férrea. O trem chega, um pequeno silvo avisa a abertura das portas, duas, a da estação e a do trem, entra-se e a composição se põe em marcha. Um trem pequeno, apenas dois vagões modernos, amplos e absolutamente idênticos. Nota-se os passageiros e mais ninguém. O trem não tem condutor! É completamente *automático*. Um sistema centralizado *controla* a operação de todos os trens do metrô de Toulouse.

O objetivo central deste livro é estudar os chamados sistemas de controle automáticos. Em síntese, deseja-se fazer com que um determinado objeto ou dispositivo se comporte de maneira previamente estabelecida, sem que seja necessária a intervenção de algum agente externo. Como no mundo real, incertezas e imprecisões estão sempre presentes. A dificuldade maior está em desenvolver um mecanismo de controle que mesmo diante de circunstâncias adversas ou desconhecidas, seja capaz de atuar de maneira satisfatória. Isto é, levando em conta diversos aspectos relevantes como por exemplo custos reduzidos de operação, simplicidade de implementação, desempenho, conforto, segurança etc..

Vamos ilustrar o que acabamos de afirmar através de um *piloto automático*, dispositivo já bastante comum nos automóveis atuais. Enquanto o piloto automático estiver em operação, para que o automóvel percorra uma certa distância, deseja-

se manter a sua velocidade $v_a(t)$ constante e igual à velocidade v_c definida pelo condutor. Com este fim, podemos conceber duas estratégias que proporcionam resultados diversos, a saber:

- No início do percurso, em $t = 0$, o condutor coloca o automóvel na velocidade desejada $v_a(0) = v_c$ e liga o piloto automático. Este, através de uma simples leitura determina e mantém para todo $t \geq 0$ o mesmo fluxo de combustível $u(t) = u_0$ injetado no motor em $t = 0$. Esta estratégia que poderíamos classificar como ingênua não corresponderá às nossas expectativas. De fato, o perfil da estrada, o atrito dos pneus com a pista, o atrito viscoso com o ar, e demais variáveis que influenciam a marcha do automóvel no decorrer do percurso faz com que sua velocidade não permaneça constante como desejado. Essa estratégia que depende apenas de informações colhidas em $t = 0$, ou seja, antes do início do evento é denominada *estratégia de controle em malha aberta*.
- Em qualquer instante de tempo $t \geq 0$ o velocímetro do automóvel mede a sua velocidade $v_a(t)$ e determina o erro $e(t) = v_a(t) - v_c$. O fluxo de combustível injetado no motor é imposto pela relação $\dot{u}(t) = -k_c e(t)$, sendo $k_c > 0$ um escalar adequado. Em qualquer instante de tempo $t \geq 0$, se $e(t) > 0$ a velocidade do automóvel excede v_c e o fluxo de combustível é reduzido (pois $\dot{u}(t) < 0$), fazendo com que a sua velocidade diminua. Ao contrário, se $e(t) < 0$ a velocidade do automóvel é menor que v_c e o fluxo de combustível é aumentado (pois $\dot{u}(t) > 0$) fazendo com que a sua velocidade também aumente. Se algum fator externo influenciar a marcha do automóvel, o mesmo mecanismo entra em ação para eliminar o erro de velocidade $e(t) \neq 0$ que vier a ser produzido. Essa estratégia que depende de informações colhidas para todo $t \geq 0$, ou seja, durante toda a duração do evento é denominada *estratégia de controle em malha fechada*.

Este exemplo retirado do nosso cotidiano, coloca em evidência que a estratégia de controle em malha fechada é a mais adequada e, portanto, deve ser adotada como estrutura fundamental para o projeto de sistemas de controle. O propósito deste livro é estudar os seus mais variados aspectos dentre os quais ressaltamos as suas bases teóricas e suas limitações práticas. De forma esquematizada, uma estrutura de controle em malha fechada pode ser representada através do diagrama mostrado na Figura 1.1. No caso do exemplo que acabamos de discutir, o bloco “Sistema Dinâmico” deve explicitar um modelo matemático que permita determinar a velocidade do automóvel $v_a(t)$ a partir de um fluxo de combustível $u(t)$ dado. Considerando m a massa do automóvel, b o coeficiente de atrito viscoso entre ele e

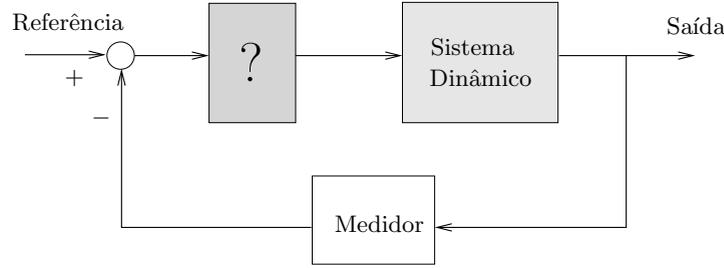


Figura 1.1: Estrutura de controle em malha fechada

o ar, μ o coeficiente de atrito seco entre a estrada e os seus pneus e $f_a(t)$ a força produzida pelo seu motor, adotamos o modelo simplificado

$$m\ddot{x}_a + b\dot{x}_a + mg(\sin(\theta) + \mu\cos(\theta)) = f_a \quad (1.1)$$

que descreve o comportamento dinâmico do automóvel quando transita em uma estrada com inclinação constante θ em relação à horizontal, sendo $x_a(t)$ a sua posição medida em relação a um referencial inercial acoplado à estrada. Finalmente, supondo que a força produzida pelo motor seja proporcional ao fluxo de combustível $f_a(t) = k_a u(t)$, lembrando que $v_a(t) = \dot{x}_a(t)$, obtemos o modelo descrito pela equação diferencial de primeira ordem com coeficientes constantes

$$m\dot{v}_a + bv_a + mg(\sin(\theta) + \mu\cos(\theta)) = k_a u \quad (1.2)$$

O bloco “Medidor” representa o modelo do medidor utilizado. Idealmente o seu modelo é um simples ganho unitário indicando que ele fornece, sem erro ou distorção, o valor exato da variável medida. No exemplo que estamos tratando, consideramos que dispomos de um velocímetro ideal. O bloco indicado por “?” representa o “Controlador” a ser projetado. No exemplo em estudo, para todo $t \geq 0$, a sua saída fornece o fluxo de combustível $u(t)$ a ser injetado no motor do automóvel, em função do erro de velocidade $e(t) = v_a(t) - v_c$, sendo $v_a(t)$ a grandeza medida e v_c a “Referência” que explicita o paradigma estabelecido no projeto.

Derivando a equação (1.2) em relação ao tempo e lembrando que $\dot{u} = -k_c e$, obtemos a equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes

$$m\ddot{e} + b\dot{e} + k_a k_c e = 0 \quad (1.3)$$

que rege o comportamento do erro de velocidade do piloto automático, segundo o diagrama de blocos da Figura 1.1. Podemos verificar, e este será um tema importante

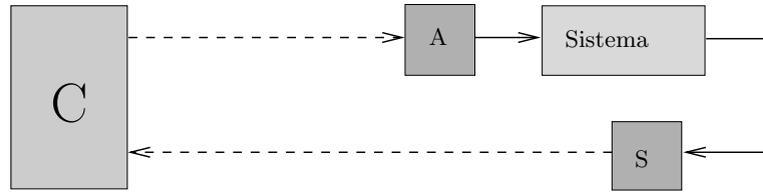


Figura 1.2: Estrutura de controle em rede

a ser tratado em seguida, que ao resolvermos esta equação diferencial teremos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (1.4)$$

quaisquer que sejam suas condições iniciais $e(0)$ e $\dot{e}(0)$. Ou seja, após um período de transitório o qual desejamos seja bastante breve, a velocidade do automóvel torna-se aquela estabelecida pelo condutor. É claro que as raízes da equação característica do erro de velocidade dependem do coeficiente $k_c > 0$ que faz parte do projeto do sistema de controle. Portanto, devemos determiná-lo de tal forma a atender algum critério de desempenho. Se o critério for fazer com que o erro reduza-se o mais rapidamente possível, a escolha adequada é $k_c = b^2/(4mk_a)$. Estas considerações, inclusive em relação a sistemas de controle mais complexos, serão objeto de análise nos capítulos seguintes.

No futuro próximo, e já, em alguma medida, nos tempos atuais, a estrutura de controle em malha fechada, que acabamos de discutir, deverá ser modificada para acolher a possibilidade de que o sistema dinâmico que se quer controlar não esteja próximo do controlador. De fato, devemos supor que com o uso mais intenso de tecnologia digital e da internet, o objeto que se quer controlar e o controlador podem ter distâncias expressivas entre si. Neste contexto, a estrutura de controle passa a ser aquela descrita na Figura 1.2.

O bloco “Sistema” corresponde ao objeto que se deseja controlar, em cuja entrada está situado o bloco “A”, que representa um atuador, dispositivo responsável pela geração do sinal de controle adequado. O bloco “S” representa um sensor, que nada mais é que um dispositivo responsável pela medida da saída de interesse. Estes dois dispositivos estão ligados ao bloco “C” que indica o controlador, isto é, um micro-processador que tem no seu interior as regras necessárias para definir, em cada instante de tempo, a entrada de controle a ser sintetizada pelo atuador, tendo em vista as medidas colhidas pelo sensor. As linhas tracejadas indicam que as informações entre os blocos “C \rightarrow A” e “C \leftarrow S” são enviadas através de uma rede

de comunicação. Sob determinadas condições, devido à ocorrência de atrasos ou de erros de transmissão e de roteamento significativos, é imperativo que um modelo matemático da própria rede seja incorporado ao projeto do controlador.

Como ilustração, consideramos o seguinte exemplo: Um braço mecânico com massa m e momento de inércia J relativo ao seu centro de massa situado a uma distância ℓ da sua base, tem um ponto de rotação fixo em um plano horizontal. Sendo ϕ o ângulo entre o braço e o plano horizontal, o objetivo é deslocá-lo de uma posição inicial qualquer até uma posição pré-determinada $\phi_{pd} \in [0, \pi/2]$ através da aplicação de um torque externo G na sua base. Assumimos que o braço se desloca em um ambiente desprovido de qualquer tipo de atrito. Utilizando o Teorema dos Eixos Paralelos para calcular o momento de inércia do braço em relação ao ponto de rotação, os momentos angulares em relação a este mesmo ponto permitem escrever a equação diferencial não linear de segunda ordem

$$(J + m\ell^2)\ddot{\phi}(t) + mg\ell\cos(\phi(t)) = G(t) \quad (1.5)$$

sujeita às condições iniciais $\phi(0)$ e $\dot{\phi}(0)$. Para impormos que após um certo tempo, o denominado período transitório, possamos ter $\phi(t) = \phi_{pd}$, é imperativo que o torque aplicado se torne constante $G(t) = G_{pd}$ e igual a

$$G_{pd} = mg\ell\cos(\phi_{pd}) \quad (1.6)$$

Por outro lado, introduzindo as novas variáveis $e(t) = \phi(t) - \phi_{pd}$ e $u(t) = G(t) - G_{pd}$, a aproximação linear fornecida pela série de Taylor permite obter a equação diferencial linear de segunda ordem

$$(J + m\ell^2)\ddot{e}(t) - mg\ell\sin(\phi_{pd})e(t) = u(t) \quad (1.7)$$

com condições iniciais $e(0)$ e $\dot{e}(0)$, válida em uma vizinhança da solução em que estamos interessados, ou seja, $\phi(t) = \phi_{pd}$. Instalando sensores que são capazes de medir a posição e a velocidade angulares do braço, a lei de controle bastante simples

$$u(t) = -k_p e(t) - k_v \dot{e}(t) \quad (1.8)$$

faz com que o sistema em malha fechada, sob sua ação, se comporte segundo a equação diferencial linear homogênea obtida substituindo-se (1.8) em (1.7), cuja equação característica pode ser escrita na forma

$$(J + m\ell^2)\lambda^2 + k_v\lambda + (k_p - mg\ell\sin(\phi_{pd})) = 0 \quad (1.9)$$

Assim sendo, se escolhermos $k_p > mgl \geq mgl\text{sen}(\phi_{pd})$ e $k_v > 0$, as suas duas raízes estarão localizadas no semiplano complexo esquerdo, fazendo com que $e(t) \rightarrow 0$ e, por conseguinte, $\phi(t) \rightarrow \phi_{pd}$ quando $t \rightarrow \infty$. É claro que esta afirmação é válida para o sistema aproximado descrito pela equação diferencial (1.7) mas pode não ser válida (note que as condições iniciais são consideradas arbitrárias) quando ele é substituído pelo sistema original não linear (1.5). Este aspecto será validado por meio de simulações dadas em seguida.

Por outro lado, ainda não levamos em conta a existência da rede de comunicação. Vamos assumir que ela transmite os dados sem introduzir (idealmente) nenhum erro mas que a ação de controle só se efetiva após um tempo τ , que corresponde ao atraso total devido a transmissão das medidas do sensor para o controlador, seu tempo de processamento e a transmissão do sinal de controle para o atuador. Dessa forma, a mesma lei de controle (1.8) se torna

$$u(t) = -k_p e(t - \tau) - k_v \dot{e}(t - \tau) \quad (1.10)$$

a qual, substituída em (1.7), faz com que a equação característica do sistema em malha fechada seja dada por

$$(J + m\ell^2)\lambda^2 + k_v e^{-\tau\lambda} \lambda + (k_p e^{-\tau\lambda} - mgl\text{sen}(\phi_{pd})) = 0 \quad (1.11)$$

A comparação de (1.9) e (1.11) revela alguns aspectos importantes. Enquanto a primeira é algébrica e admite duas e somente duas soluções que são facilmente determinadas, a segunda é transcendental e admite infinitas soluções que geralmente são muito difíceis de serem determinadas, mesmo numericamente. Assim sendo, não é surpresa que estudar a estabilidade de um sistema com atraso seja uma tarefa mais complicada que estudar a estabilidade de um sistema sem ele. Porém, por continuidade, se as duas raízes de (1.11) para $\tau = 0$ estiverem situadas no interior da região $\text{Re}(\lambda) < 0$ do plano complexo, então existirá um valor máximo $\tau_{max} > 0$ de tal forma que todas as raízes da equação (1.11) estejam localizadas na mesma região para todo $\tau \in [0, \tau_{max})$. Como no caso em que adotamos uma aproximação linear para simplificar o modelo matemático de um sistema dinâmico, a implementação de uma lei de controle projetada idealmente para $\tau = 0$ através de uma rede de comunicação, requer a sua validação para verificar se o desempenho final não será comprometido pela presença inevitável de atrasos. Para melhor ilustrar o que acabamos de dizer, adotamos os valores numéricos $J = 0,5$ [kgm²], $m = 6,0$ [kg], $\ell = 0,5$ [m], $g = 9,8$ [m/s²] e $\phi_{pd} = \pi/3$ [rad]. Com (1.6) determinamos o torque de equilíbrio como sendo $G_{pd} = 14,7$ [Nm] e os ganhos $k_p = 27,46$ e $k_v = 4$, de tal forma que as raízes da equação característica sejam duplas e iguais a -1 .

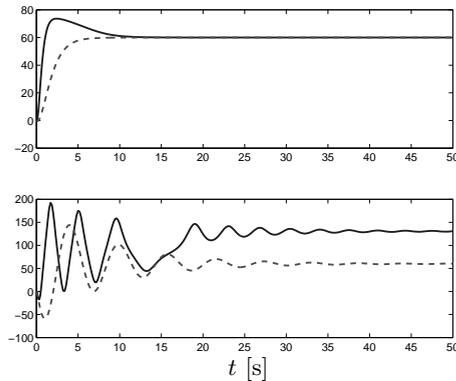


Figura 1.3: Simulação do braço mecânico com controle via rede

A Figura 1.3 mostra a simulação temporal de duas situações que permitem colocar em evidência os efeitos da não linearidade do sistema e da presença da rede de comunicação que é usada para enviar os sinais de comando. Em $t = 0$ o braço mecânico encontra-se em repouso na posição horizontal, isto é $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$, e deve se deslocar até a posição final correspondente a $\phi_{pd} = 60^\circ$.

A parte superior daquela figura foi obtida com $\tau = 0$, ou seja, com uma rede de comunicação ideal. Em linha contínua, vemos o deslocamento angular do braço segundo o modelo não linear (1.5). Em linha tracejada, vemos o mesmo deslocamento angular mas segundo o modelo linear (1.7). Em ambos os casos, a mesma lei de controle (1.8) foi adotada. Nota-se uma diferença acentuada entre as duas trajetórias no início mas, após um certo intervalo de tempo, ambas coincidem. Nos dois casos, o braço atinge a posição previamente estabelecida.

A parte inferior da mesma figura foi obtida com $\tau = 130$ [ms]. Notamos que, devido ao atraso introduzido pela rede de comunicação, ambos os modelos predizem oscilações significativas para o braço durante o seu deslocamento. A linha tracejada correspondente ao modelo linear mostra que o braço atinge a posição desejada. Ao contrário, a linha contínua mostra que o mesmo controlador não é capaz de fazer com que o braço tenha o mesmo desempenho. Ele atinge a posição de equilíbrio $\phi_{eq} \approx 131^\circ$, distante daquela previamente especificada e, portanto, inaceitável. Podemos determinar que todos os pontos de equilíbrio do sistema (1.5) sob a ação do controle (1.8) satisfazem a equação

$$mgl (\cos(\phi_{eq}) - \cos(\phi_{pd})) + k_p(\phi_{eq} - \phi_{pd}) = 0 \quad (1.12)$$

Como não poderia deixar de ser, uma das soluções é $\phi_{eq} = \phi_{pd}$, mas existem outras. Em sistemas não lineares a ocorrência de situações semelhantes é bastante comum. Sempre via simulação numérica, determinamos que ambos os modelos tornam-se instáveis para $\tau > \tau_{max} \approx 140$ [ms]. É importante ressaltar que ilustramos apenas um aspecto de uma rede de comunicação presente em um sistema de controle, qual seja, a introdução de atrasos que podem deteriorar o seu desempenho final e cujo efeito deve ser cuidadosamente avaliado. Devido à ocorrência de atrasos variantes no tempo e de perdas, modelos mais sofisticados baseados em processos estocásticos são mais adequados e devem, quando possível, ser adotados. Nos próximos capítulos, eventuais atrasos presentes em sistemas de controle serão objeto de nossa preocupação e estudo.

Uma outra situação bastante relevante em sistemas de controle diz respeito à implementação física de um controlador projetado. É claro que se deve lançar mão das facilidades tecnológicas existentes para ganhar em precisão e reduzir custos. Neste sentido, a adoção de tecnologia digital que permita implantar controladores programáveis ou micro-processadores dedicados parece ser a mais natural. Novamente, consideramos o exemplo do braço mecânico, sem atraso, para ilustrar nossas afirmações. Para implementar a regra (1.8) através de um dispositivo digital de controle, as quantidades medidas $e(t)$ e $\dot{e}(t)$ são amostradas com um determinado período de amostragem T o que fornece, para todo $k = 0, 1, \dots$ os valores de $e(kT)$ e $\dot{e}(kT)$. Desta forma podemos sem dificuldade calcular

$$u(kT) = -k_p e(kT) - k_v \dot{e}(kT) \quad (1.13)$$

nos diversos instantes de amostragem $t = kT$. É imperativo ficar bastante claro que com esse procedimento podemos dispor dos valores de controle $\{u(kT)\}_{k=0}^{\infty}$ e com eles determinar os valores da função $u(t)$ para todo $t \geq 0$. É claro que essa tarefa só pode ser realizada adotando-se alguma aproximação. A mais simples é certamente aquela que define o chamado *segurador de ordem zero* e pode ser assim descrita: Em um instante genérico $t = kT$, medimos $e(kT)$, $\dot{e}(kT)$ e calculamos com (1.13) o valor do controle $u(kT)$ que é aplicado na entrada do sistema, permanecendo constante até o instante de amostragem seguinte $t = (k + 1)T$ e assim sucessivamente.

A Figura 1.4 mostra a simulação numérica do braço mecânico sob a ação do controle digital que acabamos de descrever. A parte superior, idêntica àquela da figura anterior, mostra o sistema sendo controlado com o controlador (1.8). Em linha contínua vemos a evolução do modelo não linear enquanto que em linha tracejada mostramos a do sistema linear. Em ambos os casos, em regime permanente, a posição final desejada é atingida. A parte inferior da mesma figura foi obtida adotando-se $T = 300$ [ms]. Em linha contínua, vemos a evolução do braço para a posição

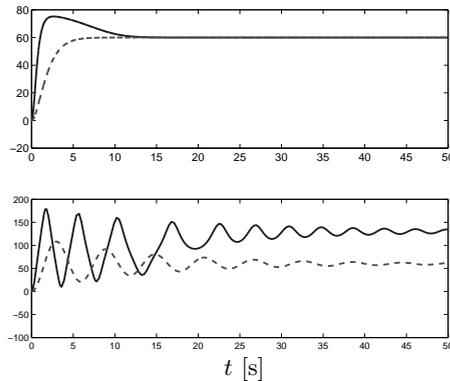


Figura 1.4: Simulação do braço mecânico com controle digital

$\phi_{eq} \approx 131^\circ$ que não é a desejada. Em linha tracejada, o modelo linear atinge a posição desejada mas somente após fortes oscilações. Estes dois aspectos indesejados resultam da implementação digital da lei de controle projetada com um período de amostragem que se mostrou excessivamente grande. Neste sentido, é importante ressaltar que para $T > T_{max} \approx 310$ [ms], ambos os modelos tornam-se instáveis sob a ação da mesma lei de controle (1.13). Comparando as Figuras 1.3 e 1.4 nota-se uma semelhança importante, qual seja, os atrasos introduzidos pela rede de comunicação e o período de amostragem necessário para a digitalização do controle, atuam no sentido de deteriorar o desempenho final do sistema de controle projetado.

Esses aspectos que acabamos de ilustrar e muitos outros serão objeto de estudo deste livro. Os resultados teóricos serão estudados com o rigor matemático que o tema exige mas com a preocupação de não ir além do ponto necessário. Questões de ordem prática serão discutidas e, sempre que possível, serão colocadas no atual contexto tecnológico. Diversos exemplos ilustrativos serão resolvidos e analisados como forma de facilitar a compreensão do texto.

1.2 Requisitos Básicos

O tema central a ser abordado neste livro requer do leitor alguns requisitos para que os conceitos sejam entendidos de maneira adequada. Na verdade, não é requerido que o leitor detenha algo além de conceitos básicos em matemática, cálculo opera-

cional, mecânica e eletricidade. Na medida do possível, informações suplementares a respeito dos tópicos tratados são fornecidas na forma de notas bibliográficas introduzidas no final de cada capítulo. A possibilidade de o leitor se dedicar à eventual atualização de alguns conceitos básicos nas áreas citadas, certamente fará com que a leitura se torne mais agradável e seja mais eficiente. Os exercícios propostos no final de cada capítulo devem ser resolvidos pois são importantes para consolidar o aprendizado. A seguir, discutimos um conjunto de requisitos necessários de forma um pouco mais detalhada:

- **Funções de Variáveis Complexas**

Trata-se de ferramenta importante para o tratamento de sistemas dinâmicos, tanto em tempo contínuo como em tempo discreto. Dominar o cálculo operacional envolvendo números complexos é essencial. Uma função de variável complexa associa elementos do plano complexo \mathbb{C} a elementos pertencentes a este mesmo conjunto. É definida na forma $f(z) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, onde \mathcal{D} é um domínio situado em \mathbb{C} . Estaremos particularmente interessados nas chamadas funções racionais, isto é, aquelas que são obtidas pela razão entre dois polinômios com coeficientes reais e de mapeamentos de curvas fechadas C inteiramente contidas no seu domínio, ou seja

$$C_f = \{f(z) : z \in C\} \quad (1.14)$$

Em particular, o estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos a partir do método de Nyquist é inteiramente dependente deste tipo de mapeamento. Os conceitos mais utilizados são tratados com mais vagar e detalhes em um dos capítulos seguintes.

- **Modelagem Matemática**

Construir modelos matemáticos simples e precisos é uma das mais importantes tarefas em ciência. A modelagem matemática resulta da aplicação de leis básicas existentes para descrever comportamentos mais complexos. Por exemplo, as leis de Newton são essenciais para se obter modelos matemáticos de sistemas mecânicos assim como as leis de Kirchhoff desempenham o mesmo papel para a modelagem de circuitos elétricos. No presente contexto, em que se deseja projetar um dispositivo para controlar um determinado sistema dinâmico, a sua modelagem é absolutamente essencial, pois viabiliza que o projeto se realize tendo em mãos apenas o modelo e não o sistema físico propriamente dito. Ademais, o resultado final pode ser validado e o desempenho pode ser medido, submetendo-se o modelo a situações de operação, incluindo eventuais falhas, mais prováveis de serem encontradas na prática. Dessa

forma, a modelagem matemática constitui etapa estratégica e, portanto, importante em todo projeto de sistemas de controle. Neste livro procuramos dar ênfase à obtenção de alguns modelos matemáticos de interesse bem como verificar as suas respectivas validades em um ambiente de laboratório.

• Equações Diferenciais e Transformada de Laplace

Em tempo contínuo, os modelos matemáticos a serem manipulados são descritos por equações diferenciais e, na maioria das vezes, equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, ou seja,

$$D[y(t)] = N[u(t)] \quad (1.15)$$

onde $D[\cdot]$ e $N[\cdot]$ são operadores diferenciais de ordem n e $m \leq n$, respectivamente, que definem uma combinação linear da função e de suas derivadas sucessivas. A função $y(t)$ para todo $t \geq 0$ é a incógnita que deve ser determinada dada a função de excitação $u(t)$ para todo $t \geq 0$ e as condições iniciais que fixam os valores de $y(t)$ e de suas derivadas sucessivas até a ordem $n - 1$ em $t = 0$. Sob a condição de que a função de excitação seja contínua, a solução de (1.15) existe, é única e pode ser expressa na forma padrão

$$y(t) = y_u(t) + \sum_{i=1}^n c_i h_i(t) \quad (1.16)$$

onde $y_u(t)$, denominada solução particular depende exclusivamente da entrada $u(t)$ em consideração e as funções $h_i(t)$ para todo $i = 1, \dots, n$, soluções da equação homogênea $D[h_i(t)] = 0$, formam um conjunto linearmente independente que asseguram a existência de constantes c_i , $i = 1, \dots, n$, capazes de impor as condições iniciais desejadas. Lembrando que a função exponencial $e^{\lambda t}$ com $\lambda \in \mathbb{C}$ exibe a propriedade

$$D[e^{\lambda t}] = \Delta(\lambda)e^{\lambda t} \quad (1.17)$$

onde $\Delta(\lambda)$ é o polinômio característico (de grau n) do operador diferencial $D[\cdot]$, ela é denominada auto-função, pois à semelhança dos autovetores de uma matriz, o resultado da aplicação do operador $D[\cdot]$ é uma função proporcional a ela própria. Ao impormos que o fator de proporcionalidade seja nulo, isto é $\Delta(\lambda) = 0$ obtemos uma equação algébrica de grau n com coeficientes reais que admite n e somente n raízes em \mathbb{C} . Com estas raízes λ_i , para todo $i = 1, \dots, n$, podemos construir o conjunto de funções $\{h_i(t)\}_{i=1}^n$ mesmo no caso em que as raízes da equação característica

$\Delta(\lambda) = 0$ não sejam simples, isto é, quando tenham multiplicidade maior do que um. Este é um tema importante que precisa ser dominado com desenvoltura.

Uma maneira alternativa para descrever os modelos matemáticos que serão manipulados é através do cálculo da sua função de transferência, que é obtida pela aplicação da transformada de Laplace. Sendo $f(t)$ uma função de variável real, definida para todo $t \geq 0$, a sua transformada de Laplace é a função de variável complexa $\hat{f}(s) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.18)$$

onde o domínio \mathcal{D} contém todos os pontos do plano complexo para os quais a integral (1.18) pode ser calculada, isto é, converge. É importante salientar que \mathcal{D} tem a forma particular

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \sigma\} \quad (1.19)$$

sendo $\sigma \in \mathbb{R}$ o menor escalar de tal forma que $\hat{f}(s)$ seja analítica em todos os pontos do seu domínio. É imperativo observar que, por definição, a igualdade (1.18) só é verdadeira para os pontos $s \in \mathcal{D}$. Por exemplo, podemos determinar a integral de uma função através da sua transformada de Laplace com a relação

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \hat{f}(0) \quad (1.20)$$

mas apenas se $s = 0 \in \mathcal{D}$, caso contrário o valor obtido não será correto. Um dos aspectos mais importantes da transformada de Laplace é que a transformação inversa sempre existe. Em outras palavras, a partir de $\hat{f}(s)$ e do seu domínio, podemos extrair a função original através de

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \hat{f}(s)e^{st} ds, \quad t > 0 \quad (1.21)$$

onde γ é uma linha vertical inteiramente contida em \mathcal{D} . Geralmente, essa integral pode ser calculada pelo método dos resíduos. No contexto de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo, é de particular importância a classe de funções racionais

$$\hat{f}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1.22)$$

onde $D(s)$ e $N(s)$ são polinômios com coeficientes reais de grau n e $m \leq n$, respectivamente. As n raízes de $D(s) = 0$ são os polos e as m raízes de $N(s) = 0$ são os zeros

de $\hat{f}(s)$. Como ela deixa de ser analítica apenas nos pontos singulares isolados tais que $D(s) = 0$, o seu domínio é inteiramente caracterizado por seus polos. Ademais, a sua transformada inversa pode ser calculada sem grandes dificuldades através do seu desenvolvimento em frações parciais.

Muito embora os sistemas físicos sejam geralmente descritos por modelos matemáticos a tempo contínuo, a necessidade de implementar controles com tecnologia digital faz com que tenhamos que manipular equações a diferenças e suas respectivas transformadas \mathcal{Z} . Felizmente, o estudo desse tipo de equações lineares a tempo discreto segue de perto aquele que acabamos de comentar para as equações diferenciais e a transformada de Laplace.

- **Simulação e Cálculo Numérico**

A análise e a síntese de sistemas de controle necessita cada vez mais da disponibilidade de um suporte computacional que permita manipular de forma amigável relações algébricas e diferenciais de grande complexidade. Ou seja, de ordem elevada e que eventualmente contenham não linearidades e misturem estruturas definidas em tempo contínuo e em tempo discreto. Nos dias atuais, os simuladores numéricos de sistemas dinâmicos são absolutamente essenciais na etapa de análise para validar os modelos adotados e na etapa de síntese para validar o desempenho dos controladores projetados. O uso deste suporte computacional será ilustrado ao longo de todo este livro como forma de colocar em evidência a sua importância, inclusive, para o aprendizado dos conceitos introduzidos.

1.3 Descrição dos Capítulos

Em seguida passamos a descrever cada capítulo para que o leitor possa ter algumas informações preliminares a respeito dos seus respectivos conteúdos. O objetivo central é dar ênfase a pontos que julgamos importantes e que necessitam, desde logo, de particular atenção.

- **Cap. 2 : Fundamentos de Sistemas de Controle**

Neste capítulo introdutório, discutimos a estrutura básica de controle a ser adotada nos demais capítulos. O objetivo inicial é apresentar as estruturas de controle em malha aberta e em malha fechada e optar pela segunda, que permite obter melhores resultados, tendo em vista o desempenho do sistema de controle a ser

projetado. Entender esse ponto central dentro dos seus aspectos mais abrangentes é essencial para estabelecer uma base sólida a ser usada até o final. Em seguida, discute-se alguns critérios de desempenho e classes de controladores. Finalmente a implementação digital de controladores dinâmicos é abordada com detalhes. Os efeitos da discretização e a introdução de aproximações necessárias para viabilizar esta proposta são avaliados e discutidos.

• Cap. 3 : Fundamentos Matemáticos

Os resultados matemáticos mais expressivos a serem utilizados nos capítulos seguintes são analisados e discutidos com bastantes detalhes. De certa forma, direcionamos a apresentação para as necessidades principais do leitor no sentido de minimizar a consulta de outros textos. As funções de variáveis complexas permitem explicitar o princípio da variação do argumento que progride naturalmente para o critério de estabilidade de Nyquist, talvez a mais interessante construção lógica dessa área. Além dele, nesse capítulo estudamos os critérios de estabilidade de Routh-Hurwitz e de Lyapunov. No caso de sistemas lineares invariantes no tempo, com função de transferência $H(s) = N(s)/D(s)$, a estabilidade depende exclusivamente da localização dos seus polos, raízes da equação característica $D(s) = 0$, na parte esquerda aberta do plano complexo. Os critérios de estabilidade permitem verificar a localização das raízes de $D(s) = 0$ sem ter que resolvê-la. Ademais, permitem o estudo de estabilidade em um contexto mais geral. Por exemplo, determinar os valores do escalar $\kappa > 0$ de tal forma que as raízes $s(\kappa)$ da equação algébrica $D(s) + \kappa N(s) = 0$ estejam localizadas em uma determinada região do plano complexo. O lugar geométrico de todas as raízes da forma $s(\kappa), \forall \kappa > 0$ é determinado de forma aproximada.

• Cap. 4 : Fundamentos de Projeto

Após a introdução de critérios de desempenho para os sistemas de controle em malha fechada traduzidos pela localização dos seus polos, eles são alocados nas posições desejadas através da solução de uma equação denominada *equação Diofantina*. É de particular importância a solução aproximada proposta que viabiliza o projeto de controladores com estrutura simples, de baixa ordem. Os controladores clássicos que derivam da família PID (Proporcional + Integral + Derivativo) são descritos e projetados com o auxílio da regra de Ziegler-Nichols. Dois projetos completos, envolvendo problemas práticos de reconhecida importância, são resolvidos e analisados em detalhes.

- **Cap. 5 : Projeto via Representação de Estado**

A representação de estado de equações diferenciais, com particular ênfase ao caso linear, é um dos resultados mais notáveis para análise e síntese de sistemas de controle. O ponto central é que uma equação linear de ordem n pode ser convertida em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Em outras palavras, troca-se a ordem pela dimensão como forma de viabilizar a adoção de métodos numéricos para tratar sistemas dinâmicos de qualquer ordem, exigindo eficiência e generalidade. Esse capítulo trata inicialmente do projeto que controladores via realimentação de todas as variáveis de estado. Em seguida, analisa o projeto de observadores levando em conta a existência de ruídos de medida e, finalmente, trata do projeto de controladores via realimentação de saída, que tem maior importância do ponto de vista prático.

Todos os resultados se baseiam em uma equação matricial não linear denominada equação de Riccati a qual, na sua forma mais geral, é expressa por

$$A'P + PA - PRP + Q = 0 \quad (1.23)$$

com A , Q e R matrizes reais quadradas e Q , R matrizes simétricas semidefinidas positivas. Procura-se uma solução simétrica definida positiva $P > 0$ tal que a matriz $A - RP$ tenha todos os seus autovalores localizados no semiplano esquerdo complexo. Trata-se de uma equação matricial não linear que só pode ser resolvida numericamente com o auxílio de rotinas computacionais bem conhecidas. Entretanto, neste capítulo, daremos particular ênfase a um procedimento alternativo que, sem ter que passar pela solução da equação de Riccati, permite determinar o ganho associado à sua solução através da técnica de alocação de polos estudada anteriormente.

- **Cap. 6 : Sistemas Não Lineares**

Em geral, os modelos de sistemas dinâmicos são não lineares. Os movimentos de rotação, por naturalmente serem descritos com funções trigonométricas, são não lineares. Inicialmente, esse capítulo trata da aproximação linear de sistemas não lineares válida em uma vizinhança dos pontos de equilíbrio. Sistemas lineares de segunda ordem são estudados em detalhes através da determinação de trajetórias no plano de fase e da caracterização de soluções periódicas. O estudo da existência de trajetórias fechadas no plano de fase baseia-se em linearização harmônica cujo embasamento teórico é feito com o auxílio do critério de Nyquist. Passividade e Positividade Real, dois conceitos equivalentes, são usados como base para estabelecer os critérios de estabilidade que se aplicam a duas classes importantes de sistemas

não lineares, a saber o critério de Popov e o de Persidiskii. Uma função de variável complexa $F(s) : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é positiva real se todos os seus polos estiverem localizados no semiplano esquerdo complexo e se

$$\operatorname{Re}(F(j\omega)) \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (1.24)$$

Neste capítulo, como forma de caracterizar a positividade real através de uma função de Lyapunov, verificamos a importância das chamadas desigualdades matriciais lineares que são estudadas com maior rigor no Apêndice A.

• Cap. 7 : Robustez

Os sistemas dinâmicos são normalmente sujeitos a incertezas, em particular, incertezas paramétricas. Este capítulo trata desta temática no âmbito da chamada Teoria \mathcal{H}_∞ . Inicialmente, o conceito de norma de vetores e de matrizes é introduzido para ser, em seguida, generalizado para funções de variáveis complexas que são analíticas no semiplano complexo esquerdo. Pertence a essa classe as funções de transferência racionais assintoticamente estáveis, para as quais definimos e tornamos operacional o cálculo das chamadas normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Vários exemplos ilustrativos são resolvidos. Em seguida, dois aspectos centrais são considerados, a saber: *estabilidade e desempenho robustos*, em um contexto geral que resulta da aplicação do célebre teorema do pequeno ganho, responsável pela desigualdade

$$\|H\|_\infty \|\Delta\|_\infty < 1 \quad (1.25)$$

a qual se satisfeita assegura a estabilidade assintótica global onde $H(s)$ é uma função de transferência nominal e $\Delta(s)$ é a sua incerteza. Particular atenção é dada às incertezas paramétricas e aos sistemas de controle com atraso. Embora tenhamos tido a preocupação de fazer com que as relações matemáticas não tornassem a leitura exageradamente difícil, este capítulo requer do leitor maior disponibilidade. A resolução dos exercícios propostos no seu final permite aumentar o aprendizado de forma sensível.

• Cap. 8 : Modelagem e Ensaio Práticos

Dar ao leitor uma visão completa de como elaborar e desenvolver um projeto de controle é essencial para sedimentar o aprendizado do conteúdo dos capítulos precedentes. Assim sendo, este é o objetivo central deste último capítulo. Ele contém o desenvolvimento de dois projetos por inteiro, isto é, cada um deles se inicia com a modelagem matemática do sistema dinâmico em estudo, projeta-se o controlador

e, em seguida, verifica-se a sua validade e o seu desempenho frente aos critérios inicialmente estabelecidos. O primeiro trata de um sistema mecânico torcional constituído por três discos rígidos conectados entre si por meio de duas hastes flexíveis. Deseja-se controlar a posição angular do terceiro disco através de um motor que está conectado ao primeiro. A dificuldade do projeto de controle reside na existência de uma estrutura flexível (as hastes e o segundo disco) entre ambos. O segundo projeto trata de um sistema elétrico constituído por dois amplificadores operacionais conectados em série. O ganho do conjunto é definido por um elo de realimentação que deve ser convenientemente projetado. A dificuldade de projeto concentra-se em operar o conjunto no seu limiar de estabilidade que deve ser melhorado através da introdução de um compensador. Em ambos os casos, as soluções propostas foram validadas em laboratório e os resultados experimentais são apresentados em detalhes.

• Apêndice A : Desigualdades Matriciais Lineares

Nesse apêndice, procuramos dar uma pequena ideia a respeito da importância atual, na área de sistemas de controle, das desigualdades matriciais lineares. Trata-se de uma restrição do tipo

$$A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i < 0 \quad (1.26)$$

onde as matrizes quadradas A_0, A_1, \dots, A_n são reais, simétricas e de mesmas dimensões. Os vetores $x = [x_1 \dots x_n]' \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem esta restrição formam um conjunto convexo. O Complemento de Schur, que permite converter muitas restrições não lineares em desigualdades matriciais lineares, é provado e analisado de forma rigorosa. Neste contexto, problemas relacionados ao cálculo de normas \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e com o cálculo de atraso máximo sem perda de estabilidade são abordados.

1.4 Notação

Neste ponto, cabe finalmente lembrar que a notação usada no decorrer do texto é padrão. Os símbolos \mathbb{R} , \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{C} denotam respectivamente os conjuntos dos números reais, naturais, inteiros e complexos. Para funções em tempo contínuo ou discreto são usadas letras minúsculas indicando sua variável independente $t \in \mathbb{R}$ ou $k \in \mathbb{N}$, como por exemplo $f(t)$ e $f(k)$. A transformada de Laplace e a transformada \mathcal{Z} de uma função a tempo contínuo $f(t)$ ou de uma função a tempo discreto $f(k)$ são denotadas indistintamente como $\hat{f}(s)$ ou $\hat{f}(z)$. Os seus respectivos domínios são de-

notados também de forma indistinta como $\mathcal{D}(\hat{f})$ ou apenas \mathcal{D} , ficando claro, no contexto, se estamos tratando do domínio de uma transformada de Laplace ou de uma transformada \mathcal{Z} . Sempre que possível, empregamos letras minúsculas para a resposta ao impulso e a mesma letra maiúscula para denotar a função de transferência a ela associada. Da mesma forma, matrizes são denotadas com letras maiúsculas e vetores com letras minúsculas, assim $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ denota uma matriz real com n linhas e m colunas e $v \in \mathbb{R}^n$ denota um vetor real com n elementos, sempre considerado um vetor coluna. O vetor linha, transposto de v , é denotado por v' . Para números complexos $z \in \mathbb{C}$, empregamos z^* para denotar o seu conjugado e para vetores ou matrizes complexas $v \in \mathbb{C}^n$ o seu conjugado transposto é denotado como v^\sim . As operações de convolução em tempo contínuo e em tempo discreto são notadas $f(t) * h(t)$ e $f(k) \bullet h(k)$, respectivamente. Finalmente, as derivadas primeira e segunda de uma função $y(t)$, exclusivamente em relação ao tempo, são denotadas por $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$ ou por $y^{(1)}(t)$, $y^{(2)}(t)$ e, assim, sucessivamente.

1.5 Notas Bibliográficas

No final de cada seção, incluímos uma discussão a respeito da bibliografia disponível sobre o tema tratado. Ela tenta dar ao leitor maiores informações quanto aos aspectos considerados importantes mas que foram tratados de forma subsidiária por fugirem do escopo central do livro. Um deles é, sem dúvida, a implementação numérica dos algoritmos de síntese de sistemas de controle.

A bibliografia que se encontra no final deste livro contém as referências que julgamos bastante relevantes sob dois aspectos distintos. O primeiro diz respeito a resultados bem consolidados que são apresentados de maneira ou com propósito diversos e que devem ser conhecidos através de uma fonte de informação alternativa. Acreditamos que, dessa forma, o leitor possa ter uma visão mais abrangente do assunto. O segundo está ligado a resultados mais recentes, cuja fonte primária procuramos fornecer. Como toda bibliografia, a deste livro não é exaustiva nem completa mas deve ser tomada como um conjunto inicial de referências que precisa ser aprimorado segundo a opinião e o interesse específico do leitor.