

ANÁLISE LINEAR DE SISTEMAS DINÂMICOS

Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios

JOSÉ C. GEROMEL
ALVARO G. B. PALHARES

2ª edição

Blucher

Análise Linear de Sistemas Dinâmicos

Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios

Blucher

José C. Geromel
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP

Alvaro G. B. Palhares
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP

Análise Linear de Sistemas Dinâmicos

Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios

2.^a edição



Análise linear de sistemas dinâmicos
teoria, ensaios práticos e exercícios
© 2011 José C. Geromel
Alvaro G. B. Palhares
Editora Edgard Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-012 - São Paulo - SP - Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
editora@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed.
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,
Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem
autorização escrita da editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

FICHA CATALOGRÁFICA

Geromel, José C.
Análise linear de sistemas dinâmicos: teoria, ensaios
práticos e exercícios / José C. Geromel, Alvaro G. B.
Palhares. - 2. ed. - São Paulo: Blucher, 2011

Bibliografia

ISBN 978-85-212-0589-0

1. Análise de sistemas 2. Dinâmica 3. Sistemas lineares
I. Palhares, Alvaro G. B. II. Título.

11-01734

CDD-515.352

Índices para catálogo sistemático:

1. Análise linear: Sistemas dinâmicos: Matemática 515.352
2. Sistemas dinâmicos: Análise linear: Matemática 515.352

Este livro é dedicado aos nossos pais

Hermínio e Yolanda Geromel
Geraldo e Hélia Palhares

Conteúdo

Prefácio & Agradecimentos	vii
1 Prolegômenos	1
1.1 Discussão Preliminar	1
2 Modelagem de Processos Dinâmicos	13
2.1 Introdução	13
2.2 Mecânica Translacional e Rotacional	16
2.2.1 Sistemas de Referência para Movimentos de Translação . . .	21
2.2.2 Sistemas de Referência para Movimentos de Rotação	24
2.2.3 Momento de Inércia	42
2.3 Eletricidade e Eletromagnetismo	57
2.3.1 Eletricidade	58
2.3.2 Eletromagnetismo	68
2.4 Dinâmica Econômica	76
2.5 Notas e Referências	82
2.6 Exercícios	83
3 Fundamentos de Dinâmica Contínua	95
3.1 Introdução	95
3.2 Equações Diferenciais	100
3.3 Transformada de Laplace	114
3.3.1 Propriedades da Transformada de Laplace	124
3.3.2 Inversa da Transformada de Laplace	143
3.3.3 Solução de Equações Diferenciais	151
3.4 Resposta em Frequência	168
3.5 Notas e Referências	187

3.6	Exercícios	188
4	Fundamentos de Dinâmica Discreta	195
4.1	Introdução	195
4.2	Equações a Diferenças	199
4.3	Transformada \mathcal{Z}	213
4.3.1	Propriedades da Transformada \mathcal{Z}	221
4.3.2	Inversa da Transformada \mathcal{Z}	227
4.3.3	Solução de Equações a Diferenças	233
4.4	Resposta em Frequência	247
4.5	Discretização	258
4.6	Notas e Referências	274
4.7	Exercícios	274
5	Modelagem e Ensaio Práticos	283
5.1	Introdução	283
5.2	Identificação de Parâmetros	283
5.2.1	Sistemas a Tempo Discreto	284
5.2.2	Sistemas a Tempo Contínuo	289
5.3	Motor de Corrente Contínua	296
5.3.1	Identificação dos Parâmetros do Motor	298
5.3.2	Validação do Modelo	300
5.3.3	Alimentação com Fonte Chaveada	302
5.4	Força de Atrito	304
5.5	Movimentos com Dois Graus de Liberdade	310
5.5.1	Juntas Robóticas Rotacionais	311
5.5.2	Juntas Robóticas Rotacionais com Atrito Viscoso	316
5.5.3	Juntas Robóticas Subatuadas	319
5.6	Linha de Transmissão	326
5.7	Notas e Referências	339
5.8	Exercícios	340
A	Vetores e Matrizes	345
B	Funções de Variáveis Complexas	355
	Bibliografia	369
	Índice	373

Prefácio & Agradecimentos

O material exposto neste livro é fruto da experiência dos autores, adquirida durante vários anos como professores da disciplina *Análise Linear de Sistemas*, ministrada aos alunos do terceiro ano do curso de Engenharia Elétrica da UNICAMP.

Este livro não enfoca somente os diversos temas tratados para alunos com aquele perfil. Ao contrário, pretende ser abrangente para tornar-se adequado também para outros estudantes que estão iniciando seus estudos em diversas carreiras de ciências exatas tais como licenciatura e bacharelado em Física, Química e Matemática ou nos demais campos da engenharia. Na verdade, o texto vai além daquilo que se exige dos alunos de graduação na medida em que contém material pertinente e útil para a formação básica de alunos de pós-graduação nas áreas já mencionadas.

Temos a pretensão de ter tratado os diversos tópicos de maneira matematicamente rigorosa, mas sem trazer dificuldades excessivas aos potenciais leitores. Quando necessário, informações complementares a respeito de tópicos específicos, mas não completamente dentro dos objetivos do livro, são dadas no decorrer do texto. Ademais, uma grande variedade de exemplos resolvidos são incluídos de modo a melhor ilustrar os resultados apresentados. Além dos diversos aspectos teóricos, este livro contém um número bastante significativo de exercícios propostos, bem como diversos ensaios práticos realizados em laboratório que permitem colocar em evidência, de forma bastante clara, as dificuldades para viabilizar a análise e a modelagem de sistemas dinâmicos reais. Tópicos considerados pré-requisitos importantes tais como vetores, matrizes e funções de variáveis complexas, são tratados com mais detalhes em dois apêndices. Em nossa opinião, isso deve, ao mesmo tempo, facilitar a leitura e a consulta.

É certo que a leitura completa deste livro exigirá bastante trabalho que tentamos tornar o mais agradável possível. Além disso, esperamos também ter contribuído para que, do ponto de vista do leitor, o resultado final seja efetivamente proveitoso para o aprendizado dos mais variados conceitos e técnicas que constam do currículo

mínimo das diversas carreiras profissionais anteriormente referidas.

Devemos a muitos colegas e alunos os mais sinceros agradecimentos por termos tido o benefício de muitas discussões acaloradas as quais, sem dúvida, contribuíram para aprimorar o texto final. Neste sentido, desejamos citar os colegas professores Maurício Carvalho de Oliveira e Afonso de Oliveira Alonso pela sempre pronta ajuda e pelo frequente incentivo.

Por fim, agradecemos ao CNPq - *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* e à FAPESP - *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo* pelo apoio a diversos projetos de pesquisa que desenvolvemos nas últimas duas décadas em conjunto com nossos alunos de iniciação científica, mestrado e doutorado que foram, embora de forma indireta, decisivos para que este livro pudesse ser projetado e escrito.

O texto e as figuras foram editados pelos autores, em \LaTeX , usando o estilo `livro` desenvolvido por professores do atual Instituto de Computação da UNICAMP, com o frequente e competente apoio técnico do colega Maurício Carvalho de Oliveira¹.

Campinas, São Paulo, Outubro de 2003.

José C. Geromel
Alvaro G. B. Palhares

¹A revisão do texto para corrigir algumas imprecisões e adequar-se ao Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa foi realizada em Novembro de 2010.

Capítulo 1

Prolegômenos

1.1 Discussão Preliminar

Este livro pretende oferecer ao leitor uma visão abrangente a respeito da problemática que envolve a modelagem e análise de processos dinâmicos contínuos ou discretos no tempo, cujo comportamento é descrito através de equações diferenciais ou de equações a diferenças finitas, respectivamente.

O esforço para desenvolver modelos matemáticos nas mais diversas áreas do conhecimento é notável e, certamente, tem um impacto importante na história do desenvolvimento humano. Vale aqui lembrar, por exemplo, o monumental esforço realizado por séculos para se construir um modelo matemático para a matéria o qual, ainda nos dias atuais, não está inteiramente acabado. O mesmo esforço se verificou na astronomia, culminando com a contribuição ímpar da Lei da Gravitação de Newton e da Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Em outras áreas da ciências tais como Química, Biologia, Economia etc., algo similar aconteceu e certamente continuará acontecendo tendo em vista que, como hipótese de base, aprimoramentos sempre são possíveis e desejáveis.

O modelo matemático de um determinado fenômeno abre a possibilidade para que o seu comportamento futuro possa ser previsto com certa precisão e, em consequência, o seu impacto possa ser devidamente avaliado e, até mesmo, ser alterado através de ações determinadas para tal fim. Por exemplo, existem atualmente modelos bastante precisos que permitem prever o clima em uma determinada região com grande antecedência e determinar como os poluentes emitidos por indústrias, automóveis etc. se dissolvem ou reagem na atmosfera indicando o impacto negativo

na qualidade de vida da população e a necessidade de controle das fontes primárias de poluição.

A obtenção de um modelo matemático para um determinado fenômeno normalmente tem como base um conjunto de quatro atributos que devem ser adotados, a saber : *leis básicas, simplicidade, precisão e validação*. Primeiramente, tendo em vista o ambiente lógico e físico, onde o próprio fenômeno objeto da modelagem se insere, é preciso selecionar de forma adequada as leis básicas, estabelecidas *a priori*, que devem ser aplicadas. Essas devem gerar um conjunto de equações que descrevem o fenômeno em estudo, tendo como meta sua simplicidade, ou seja, que sejam descritas por relações matemáticas as mais simples possíveis. Ao mesmo tempo e, de forma geralmente conflituosa, requer-se precisão do modelo que deve fornecer resultados bastante próximos ao fenômeno observado, objeto da modelagem. O conflito se estabelece pois uma maior simplicidade na modelagem é, via de regra, conseguida negligenciando alguns aspectos que poderiam ser relevantes e que, por conseguinte, ao não serem explicitamente considerados, redundam em menor precisão. Finalmente, obtido um determinado modelo, é preciso confrontá-lo com a realidade para que ele possa ser validado, isto é, para que ele possa ser eleito como sendo uma representação matemática adequada do fenômeno em estudo. Não é de se surpreender que esse caminho seja trilhado várias vezes, até que um modelo efetivo seja devidamente estabelecido de tal maneira a, pelo menos, resvalar no paradigma de se conseguir um modelo que, simultaneamente, apresente menor complexidade e maior precisão, quando então a engenhosidade e a dedicação para obtê-lo convertem-se em arte.

Dessa forma, para se construir e analisar um modelo matemático é importante dominar e saber aplicar corretamente as leis básicas de áreas específicas do conhecimento tais como Mecânica Translacional e Rotacional, Eletricidade e Eletromagnetismo e outras, mas é também imperativo versar sobre um conjunto de propriedades e conceitos matemáticos que são essenciais para manipular processos dinâmicos. Em tempo contínuo, é fundamental saber manipular equações diferenciais de ordem qualquer, seja no próprio domínio do tempo, como também no caso linear, no domínio da frequência definido pela sua transformada de Laplace. Em tempo discreto, o mesmo se dá, sendo necessário conhecer as equações a diferenças de ordem arbitrária e, no caso linear, sua respectiva representação através de transformada \mathcal{Z} . Além disso, é importante conhecer as limitações e as vantagens de se converter, mesmo que de forma aproximada, equações diferenciais em equações a diferenças como resultado de um processo de discretização.

Para ilustrar o que foi dito, considere como descrito na Figura 1.1, um corpo de

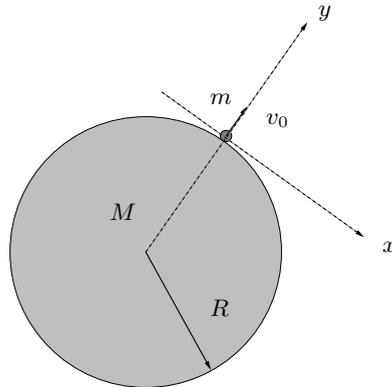


Figura 1.1: Movimento de um corpo sob ação da gravidade

massa m que parte da superfície do corpo de massa M com velocidade inicial v_0 . Sendo v_0 uma velocidade com direção radial, no instante inicial $t = 0$, o deslocamento do corpo de massa $m \ll M$, medido segundo o sistema de referências indicado, deve satisfazer as condições iniciais

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = v_0 \quad (1.1)$$

Para que possamos determinar o seu deslocamento em função do tempo $t \geq 0$, necessitamos invocar a Lei Universal da Gravitação, que estabelece que o referido corpo, quando estiver a uma distância y da superfície, estará sujeito a uma força atrativa radial, cuja intensidade é dada por

$$f(y) = \frac{GMm}{(R+y)^2} = m \frac{g}{\left(1 + \frac{y}{R}\right)^2} \quad (1.2)$$

onde $f(0) = mg$ nada mais é que o peso do corpo de massa m em repouso na superfície do corpo de massa M o qual, tratando-se do nosso planeta, faz com que a aceleração da gravidade seja $g = 9,8$ [m/s²]. Em seguida, é preciso invocar a Segunda Lei de Newton, que estabelece que a variação do momento linear do corpo é igual, em todo instante de tempo, à resultante das forças externas que nele atuam. Considerando que a massa m é constante no tempo e que ele está sujeito apenas à força gravitacional, obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{g}{\left(1 + \frac{y(t)}{R}\right)^2} = 0 \quad (1.3)$$

que, ao ser resolvida, levando-se em conta as condições iniciais (1.1), fornece o deslocamento $y(t)$ para todo $t \geq 0$. Como a força da gravidade é radial e o mesmo ocorre com a velocidade inicial v_0 , o movimento do corpo será radial para todo $t \geq 0$ indicando, neste caso particular, que $x(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Este é o modelo matemático para o deslocamento do corpo sob a ação exclusiva da força de gravidade. Porém, não se trata de um modelo simples pois é representado por uma equação diferencial de segunda ordem não linear cuja solução $y(t)$ não é imediata. Entretanto, como o raio da Terra é aproximadamente $R = 6,37 \times 10^6$ [m], para movimentos em que $y(t) \ll R$, podemos adotar a aproximação

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + g = 0 \quad (1.4)$$

que fornece um modelo matemático muito mais simples, traduzido por uma equação diferencial de segunda ordem linear cuja solução $y(t)$, sujeita às mesmas condições iniciais (1.1), é obtida de forma imediata. É claro que resta validar o modelo aproximado que acabamos de obter, o que é feito comparando-se as soluções produzidas por (1.3) e (1.4). Definindo $v(t) = dy(t)/dt$ como sendo a velocidade do corpo de massa m em qualquer instante de tempo $t \geq 0$, temos

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{d}{dt}v(t) = v \frac{dv}{dy}$$

que, levada a (1.3), permite calcular a função $v(y)$, que fornece a velocidade do corpo em função de sua posição $y(t)$ para qualquer instante de tempo $t \geq 0$, ou seja

$$\int_{v_0}^v v dv + \int_0^y \frac{g}{\left(1 + \frac{y}{R}\right)^2} dy = 0$$

e calculando as duas integrais indicadas, obtemos sem dificuldades

$$v(y)^2 = v_0^2 - 2gy \left(\frac{R}{R+y} \right) \quad (1.5)$$

De maneira totalmente análoga, podemos adotar o mesmo procedimento para a equação aproximada (1.4) para obtermos

$$v(y)^2 = v_0^2 - 2gy \quad (1.6)$$

que permite uma comparação bastante interessante. De fato, com (1.6) podemos concluir que, na posição $y_0 = v_0^2/2g$, a velocidade do corpo se anula, qualquer que

seja o valor da velocidade inicial v_0 . Por outro lado, usando (1.5) verificamos que na posição

$$y_0 = \frac{v_0^2}{2g} \frac{1}{1 - \left(\frac{v_0}{v_e}\right)^2}, \quad v_e = \sqrt{2gR}$$

a velocidade do corpo também se anula, desde que a velocidade inicial v_0 seja menor que v_e . Se essa condição não se verificar, o corpo não para e escapa da atração gravitacional a que está submetido. Por esse motivo, v_e é chamada velocidade de escape e vale $v_e \approx 11,17$ [km/s] na Terra. É importante salientar que para $v_0 \ll v_e$, as funções $v(y)$, dadas em (1.5) e (1.6), são bastante parecidas e a aproximação (1.4) é válida e deve ser adotada. Porém, se v_0 for da mesma ordem de grandeza que v_e , a aproximação torna-se bastante pobre e então é o modelo não linear (1.3) que deve ser adotado. Em conclusão, se estivermos analisando o movimento de um corpo que se mantém próximo da superfície da Terra, é possível e desejável adotar o modelo aproximado (1.4) tendo em vista que não há perda de precisão e se ganha em simplicidade. Por outro lado, se o corpo em movimento vertical atingir altitudes comparáveis ao raio da Terra, é mandatário considerar o modelo original (1.3) sob pena de introduzir imprecisões importantes que acabam comprometendo os resultados.

Considere agora que o mesmo corpo, de massa m em $t = 0$, cai de uma determinada altura h_0 , com velocidade inicial nula, sob a ação da gravidade. Sendo $h_0 \ll R$, adotamos inicialmente (1.4) que, sujeita às condições iniciais $y(0) = h_0$ e $dy(0)/dt = 0$, fornece o seu deslocamento e a sua velocidade, segundo o referencial adotado. Resolvendo essa equação diferencial linear de segunda ordem, obtemos

$$y(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2, \quad v(t) = -gt \tag{1.7}$$

com a qual determinarmos o intervalo de tempo decorrido até o impacto com o solo t_i , que satisfaz $y(t_i) = 0$, bem como a velocidade do corpo no momento do impacto $v_i = -\sqrt{2gh_0}$, que é maior quanto maior for a altura inicial da queda. Se esse modelo estivesse completo, não seria possível vermos alguém pular de para-quedas de um avião. O que de fato ocorre é que o modelo, tal como estabelecido, não está completo pois, além da força gravitacional, devemos também levar em conta a existência de uma força produzida pela resistência do ar, que contribui para inibir a ação da gravidade sobre o corpo. Em outras palavras, no ar, um corpo ao cair, não está sujeito a uma aceleração constante como preconizado por (1.4) mas sim a uma aceleração que diminui conforme sua velocidade aumenta. Devemos, então,

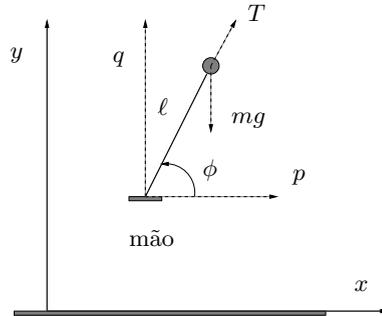


Figura 1.2: O equilibrista

considerar a equação diferencial linear de segunda ordem

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \left(\frac{b}{m}\right) \frac{d}{dt}y(t) + g = 0 \quad (1.8)$$

como sendo um modelo mais adequado, onde b é uma constante denominada coeficiente de atrito viscoso e que será objeto de estudo mais adiante. Resolvendo essa equação, obtemos a posição do corpo em função do tempo a qual, após simples derivação, fornece sua velocidade como sendo

$$v(t) = \frac{mg}{b} \left(e^{-(b/m)t} - 1 \right) \quad (1.9)$$

Comparando essa função com aquela que consta em (1.7), notamos que ambas e suas respectivas derivadas em relação ao tempo são iguais em $t = 0$. Assim sendo, no início da queda, os dois modelos se comportam de forma semelhante. Porém, à medida que o tempo passa, eles se distanciam de forma marcante tendo em vista que segundo (1.9) a velocidade não aumenta indefinidamente mas atinge o valor máximo $v_\infty = -mg/b$, o que é bastante concordante com o que podemos observar na prática. Quanto maior a massa, maior será a velocidade v_∞ mas, em contra partida, ela torna-se menor conforme o coeficiente de atrito viscoso aumenta. O projeto de um bom para-quedas deve resultar em um b suficientemente grande para oferecer maior conforto e segurança ao usuário.

Em toda modelagem, um passo importante é ser capaz de selecionar as leis básicas adequadas e aplicá-las corretamente, sobretudo observando as condições e hipóteses em que elas são válidas. Para ilustrar esse fato, vamos considerar a Segunda Lei de Newton e discutir sua validade, que é restrita a referenciais ditos inerciais.

A Figura 1.2 mostra a mão de um equilibrista que, supostamente, tenta equilibrar um bastão delgado de comprimento ℓ e massa m concentrada em sua extremidade, em um ambiente desprovido de qualquer tipo de atrito. O referencial definido pelos eixos coordenados xy pode ser considerado como sendo inercial pois está parado em relação ao solo. O referencial pq também pode ser considerado inercial, desde que a mão do equilibrista não se mova em relação ao solo. Quando ela se move, ele perde esse atributo. Supondo, inicialmente, que a mão do equilibrista encontra-se parada, podemos aplicar a Segunda Lei de Newton, relativamente ao referencial pq , multiplicando a massa m pela derivada segunda da componente do deslocamento em cada uma das duas direções e igualando o resultado à resultante das forças que atuam nessas mesmas direções. Assim procedendo, obtemos, relativamente à direção horizontal

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\ell \cos(\phi)) - T \cos(\phi) = 0$$

e relativamente à direção vertical

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\ell \sin(\phi)) - T \sin(\phi) + mg = 0$$

onde T , a intensidade da força aplicada na massa pela haste, pode ser eliminada dessas equações multiplicando a primeira delas por $-\sin(\phi)$, a segunda por $\cos(\phi)$ e somando os resultados. Efetuando as derivadas indicadas e lembrando que ϕ é uma função do tempo, resulta em

$$\ell \frac{d^2}{dt^2} \phi(t) + g \cos(\phi) = 0 \tag{1.10}$$

que é a equação clássica que rege o comportamento dinâmico de um pêndulo simples segundo o referencial inercial adotado. A partir de uma condição inicial qualquer, mesmo que ligeiramente afastada da vertical, o bastão cai. Vamos agora imaginar que o equilibrista move a sua mão. Nesse caso, como já comentamos anteriormente, o referencial que acabamos de adotar deixa de ser inercial e tem que ser abandonado, ou seja, se desejarmos aplicar corretamente a Segunda Lei de Newton, a equação (1.10) deixa de ser válida. Afinal, sabemos que um bom equilibrista, através de sua ação, acaba equilibrando o bastão. Temos então que adotar o referencial preso ao solo definido pelos eixos xy . Considerando que, relativamente a esse referencial, a mão do equilibrista ocupa uma posição genérica (x, y) , a posição da massa m , nesse mesmo referencial, passa a ser definida pela abscissa $x + \ell \cos(\phi)$ e pela ordenada $y + \ell \sin(\phi)$. Portanto, aplicando o mesmo procedimento anterior em relação à direção

horizontal, temos

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + \ell \cos(\phi)) - T \cos(\phi) = 0$$

bem como, relativamente à direção vertical, obtemos

$$m \frac{d^2}{dt^2} (y + \ell \sin(\phi)) - T \sin(\phi) + mg = 0$$

as quais, após a eliminação da tração T resultam em

$$\ell \frac{d^2}{dt^2} \phi(t) + g \cos(\phi) = \sin(\phi) \frac{d^2}{dt^2} x(t) - \cos(\phi) \frac{d^2}{dt^2} y(t) \quad (1.11)$$

que é bastante diversa da equação (1.10). A diferença ocorre quando a mão está acelerada em relação ao referencial preso no solo, que acaba afetando o movimento do bastão fazendo com que o seu equilíbrio, mesmo na posição vertical, por ação do equilibrista, possa ocorrer. Esse exemplo singelo deve ser encarado como um alerta a respeito da importância de se aplicar, com cautela e com a devida atenção, as leis básicas disponíveis para cada caso específico.

A seguir, oferecemos ao leitor uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo bem como as principais notações empregadas no decorrer de todo o texto. O objetivo é ressaltar os pontos que entendemos ser os mais importantes e que devem, portanto, ser bem compreendidos e sedimentados. Resolver os exercícios propostos no final de cada capítulo contribui de forma decisiva para que os conceitos, técnicas e manipulações introduzidas sejam absorvidas de forma sólida e definitiva.

• Cap. 2 : Modelagem de Processos Dinâmicos

Esse capítulo introduz diversos conceitos básicos que são indispensáveis para construir modelos matemáticos para diversos sistemas dinâmicos. Movimentos de translação, de rotação e compostos, no plano e no espaço são analisados com vistas a se estabelecer um procedimento lógico que permite obter modelos de forma sistemática. As duas leis básicas utilizadas para os movimentos de translação e de rotação se expressam na forma

$$m \ddot{\mathbf{r}}_c(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1.12)$$

significando que, em relação a um referencial inercial, a aceleração do centro de massa de um corpo multiplicada por sua massa total é igual à resultante das forças

que nele atuam e

$$J\ddot{\phi}(t) = \tau(t) \quad (1.13)$$

indicando que, em relação a um referencial inercial, o momento de inércia de um corpo tomado em relação a um determinado eixo de rotação multiplicado por sua aceleração angular é igual ao torque resultante. Vários aspectos importantes envolvendo a escolha de referenciais mais adequados são discutidos detalhadamente. Em seguida, os modelos dos elementos elétricos básicos, resistor, capacitor e indutor são introduzidos para que a equação de estado de qualquer circuito planar seja obtida através de decomposição em valores singulares. Alguns conceitos sobre eletromagnetismo são enunciados com vistas à modelagem de motores de corrente contínua. O capítulo termina com um estudo sucinto de um modelo a tempo discreto de dinâmica econômica, no qual coloca-se em particular evidência os preços de equilíbrio em mercados interconectados. Esse capítulo contém dezoito exemplos completos resolvidos e comentados.

- **Cap. 3 : Fundamentos de Dinâmica Contínua**

Esse capítulo inicia com um estudo detalhado de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e de ordem arbitrária, da forma

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = g(t), \quad \forall t \geq 0 \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

onde $g(t)$ é uma função conhecida e a função incógnita $y(t)$ está submetida a condições iniciais que especifica o seu valor e os valores de suas derivadas sucessivas em $t = 0$. Estuda-se a estrutura de sua solução particionando-a na soma de duas parcelas denominadas homogênea e particular, respectivamente. Verifica-se que para uma classe bastante ampla de funções de entrada $g(t)$ apenas a parcela homogênea, de uma equação modificada adequadamente, fornece a respectiva solução geral. A transformada de Laplace de uma função $f(t)$, definida para todo $t \geq 0$,

$$\hat{f}(s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.15)$$

é estudada com detalhes e algum refinamento, sendo dada particular atenção à determinação de seu domínio, o que permite obter propriedades interessantes e úteis. Em seguida, ela é aplicada para introduzir e interpretar o impulso unitário, ente

matemático que tem particular importância no estudo de sistemas dinâmicos. Como consequência natural, obtemos para as equações diferenciais dessa classe a sua representação de estado e, de forma alternativa, a sua representação através de função de transferência. A transformada de Laplace fornece um método seguro e simples para a solução de equações diferenciais lineares, sendo portanto adotada para resolver equações com coeficientes constantes no tempo, com coeficientes que variam linearmente com o tempo e para resolver equações diferenciais a derivadas parciais. Foi dada particular atenção ao cálculo de transformadas inversas de funções racionais e também irracionais, sendo que esta última classe tem um papel central na manipulação de equações convolucionais do tipo

$$f(t) * f(t) = g(t) \iff \hat{f}(s) = \sqrt{\hat{g}(s)} \quad (1.16)$$

Em seguida, a resposta em frequência de sistemas dinâmicos lineares é estudada detalhadamente incluindo sua representação gráfica através dos diagramas de Bode. Ela consiste na determinação da transformada $\hat{f}(s)$ em $s = j\omega$ com $\omega \in \mathbb{R}$ e sua importância reside, em particular, no fato de viabilizar o cálculo da resposta temporal de um sistema linear, em regime permanente, com auxílio da série de Fourier. Neste contexto, discutimos um resultado clássico conhecido como Teorema de Parseval. Esse capítulo contém trinta e dois exemplos completos resolvidos e comentados.

• Cap. 4 : Fundamentos de Dinâmica Discreta

Esse capítulo tenta trilhar, da maneira mais próxima possível, o mesmo caminho adotado no capítulo anterior, porém com o objetivo central de estudar sistemas dinâmicos que evoluem em tempo discreto. Inicialmente estudamos com detalhes a solução de uma equação a diferenças com coeficientes constantes, dada na forma

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k+i) = g(k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.17)$$

onde $g(k)$ é uma função conhecida e a incógnita $y(k)$ está submetida a condições iniciais que definem os valores de $y(k)$ para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$. Uma comparação com as técnicas desenvolvidas no capítulo anterior coloca em evidência uma semelhança notável com estas, que foram especialmente desenvolvidas para tratar equações a diferenças do tipo (1.17). Em seguida, é introduzida a transformada \mathcal{Z}

de uma função ou sequência numérica $f(k)$ definida para todo $k \in \mathbb{N}$, a saber

$$\hat{f}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \quad (1.18)$$

sendo seu domínio determinado com a devida atenção, tendo em vista que ele define todos os pontos do plano complexo para os quais a avaliação de $\hat{f}(z)$ pode ser feita. A transformada \mathcal{Z} permite definir a função impulso unitário discreto e representar uma equação a diferenças através de sua função de transferência, que resulta ser uma forma alternativa de sua respectiva representação de estado também estudada detalhadamente. De maneira similar ao que foi feito no capítulo anterior, a transformada \mathcal{Z} é adotada para se determinar a solução de equações a diferenças cujos coeficientes não são constantes mas variam linearmente com $k \in \mathbb{N}$. As transformadas \mathcal{Z} inversas de funções racionais e irracionais são determinadas sendo que, a exemplo dos sistemas a tempo contínuo, esta última classe permite a solução de equações convolucionais discretas, a saber

$$f(k) \bullet f(k) = g(k) \iff \hat{f}(z) = \sqrt{\hat{g}(z)} \quad (1.19)$$

A resposta em frequência de sistemas lineares a tempo discreto é estudada tendo como meta principal a obtenção de soluções com a aplicação da série de Fourier. Sua representação gráfica é feita com os diagramas de Bode de módulo e de fase, bem como, a partir de uma transformação de variável complexa, denominada transformação bilinear, que permite interpretar os resultados com perfeita similitude àqueles dos sistemas a tempo contínuo. A versão discreta do Teorema de Parseval é apresentada e discutida. Por fim, um importante tópico, que consiste na discretização de sistemas a tempo contínuo, com período de discretização constante, é apresentado, sendo que o sistema a tempo discreto resultante é obtido com o auxílio da transformada \mathcal{Z} e, de forma alternativa, diretamente através de sua representação de estado. Como principal produto dessa parte do capítulo, mostramos a validade de um importante resultado conhecido como Teorema da Amostragem, obtido simplesmente através da solução de um problema de mínimos quadrados. Esse capítulo contém trinta e três exemplos completos resolvidos e comentados.

• Cap. 5 : Modelagem e Ensaio Práticos

Esse capítulo é inteiramente dedicado à aplicação dos resultados expostos nos capítulos precedentes na modelagem e análise de sistemas dinâmicos reais. Inicial-

mente discutimos o problema de identificação de parâmetros para sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto. Trata-se de definir e resolver de maneira adequada um problema de mínimos quadrados o qual, inclusive, admite uma solução que pode ser calculada de forma recursiva. Realizamos seis ensaios práticos em laboratório envolvendo sistemas mecânicos e elétricos. Foram determinados seus respectivos modelos, seus parâmetros e a validação de cada um deles foi feita mediante confrontação dos comportamentos obtidos durante os ensaios práticos e aqueles preconizados pelos respectivos modelos identificados. Em particular, no estudo de linha de transmissão é importante citar a elaboração de um modelo racional aproximado que forneceu, dentro do contexto das experiências realizadas, resultados bastante precisos.

- **Notação**

Neste ponto, cabe finalmente lembrar que a notação usada no decorrer do texto é padrão. Os símbolos \mathbb{R} , \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{C} denotam respectivamente os conjuntos dos números reais, naturais, inteiros e complexos. Para funções em tempo contínuo ou discreto, são usadas letras minúsculas indicando sua variável independente $t \in \mathbb{R}$ ou $k \in \mathbb{N}$, como por exemplo $f(t)$ e $f(k)$. A transformada de Laplace e a transformada \mathcal{Z} de uma função a tempo contínuo $f(t)$ ou de uma função a tempo discreto $f(k)$ são denotadas indistintamente como $\hat{f}(s)$ ou $\hat{f}(z)$. Os seus respectivos domínios são denotados também de forma indistinta como sendo $\mathcal{D}(\hat{f})$ ficando claro, no contexto, se estamos tratando do domínio de uma transformada de Laplace ou de uma transformada \mathcal{Z} . Sempre que possível, empregamos letras minúsculas para a resposta ao impulso e a mesma letra maiúscula para denotar a função de transferência a ela associada. Da mesma forma, matrizes são denotadas com letras maiúsculas e vetores com letras minúsculas, assim $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ denota uma matriz real com n linhas e m colunas e $v \in \mathbb{R}^n$ denota um vetor real com n elementos sempre considerado um vetor coluna. O vetor linha, transposto de v , é denotado por v' . Para números complexos $z \in \mathbb{C}$, empregamos z^* para denotar o seu conjugado e para vetores ou matrizes complexas $v \in \mathbb{C}^n$ o seu conjugado transposto é denotado como v^\sim . As operações de convolução a tempo contínuo e a tempo discreto são notadas $f(t) * h(t)$ e $f(k) \bullet h(k)$, respectivamente. Finalmente, as derivadas primeira e segunda de uma função $y(t)$, exclusivamente em relação ao tempo, são denotas por $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$ ou por $y^{(1)}(t)$, $y^{(2)}(t)$ e, assim, sucessivamente.