



FÍSICA

com Aplicação Tecnológica

Mecânica | Volume 1

Dirceu D'Alkmin Telles
João Mongelli Netto

Organizadores

Blucher

FAT FUNDAÇÃO
DE APOIO À
TECNOLOGIA

Física com Aplicação Tecnológica

Volume 1

Blucher

DIRCEU D'ALKMIN TELLES

JOÃO MONGELLI NETTO

Organizadores

Física com Aplicação Tecnológica

Volume 1

Física com aplicação tecnológica – edição coordenada por Dirceu D'Alkmin Telles / João Mongelli Netto

© 2011 Volume I – Mecânica – Organizador: João Mongelli Netto

Direitos reservados para Editora Edgard Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-012 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
editora@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme
5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua
Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras,
março de 2009

É proibida a reprodução total ou parcial por
quaisquer meios, sem autorização escrita da
Editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard
Blücher Ltda.

Ficha Catalográfica

Física com aplicação tecnológica, volume I /
Dirceu D'Alkmin Telles, João Mongelli Netto. –
São Paulo: Blucher, 2011.

Vários autores.
Bibliografia.

ISBN 978-85-212-0587-6

1. Física I. Telles, Dirceu D'Alkmin.
II. Mongelli Neto, João

11-00420

CDD-530

Índices para catálogo sistemático:

1. Física 530

À memória do professor Tore Niels Olof Folmer Johnson

APRESENTAÇÃO

A oportunidade de contribuir para a transferência e difusão do conhecimento, por meio da publicação de obras científicas, é gratificante para nós, da FAT. Ações como esta se adequam aos princípios estabelecidos por esta Instituição - Fundação de Apoio à Tecnologia – criada em 1987, por um grupo de professores da FATEC-SP.

A obra “Física com Aplicações Tecnológicas” (Volume 1 – Mecânica), que abrange as teorias da Física e suas aplicações tecnológicas, será fundamental para o desenvolvimento acadêmico de alunos e professores dos cursos superiores de tecnologia, engenharia, bacharelado em Física e para estudiosos da área.

No processo de elaboração da obra, os autores tiveram o cuidado de incluir textos, ilustrações, orientações para solução de exercícios. Isto faz com que a obra possa ser considerada ferramenta de aprendizado bastante completa e eficiente.

A FAT, que nasceu com o objetivo básico de ser um elo entre o setor produtivo e o ambiente acadêmico, parabeniza os autores pelo excelente trabalho.

Ações como essa se unem ao conjunto de outras que oferecemos, como assessorias especializadas, cursos, treinamentos em diversos níveis, consultorias e concursos para toda a comunidade.

A cidadania é promovida visando à conscientização social, a partir do esforço das instituições em prol da difusão do conhecimento.

Professor César Silva
Presidente da FAT – Fundação de Apoio à Tecnologia

PREFÁCIO

Os docentes de Física do Departamento de Ensino Geral da FATEC-SP, sob a coordenação do Prof. João Mongelli Netto e Prof. Dr. Dirceu D'Alkmin Telles, lançam o primeiro volume 1 do livro Física com Aplicações Tecnológicas – Mecânica.

Destinado a alunos e professores dos cursos superiores de Tecnologia, Engenharia, Bacharelado em Física e estudiosos da área, o presente volume apresenta às comunidades acadêmicas a Mecânica Clássica, por meio de teorias, aplicações tecnológicas, exercícios resolvidos e propostos.

Expresso meus agradecimentos a todos os autores que contribuíram para a caracterização deste trabalho que certamente será de grande valia para as Instituições de Ensino Superior do País.

Prof^a. Dr^a. Luciana Reyes Pires Kassab

Diretora da FATEC-SP

SOBRE OS AUTORES

DIRCEU D'ALKMIN TELLES

Engenheiro, Mestre e Doutor em Engenharia Civil – Escola Politécnica – USP. Consultor nas áreas de Irrigação e de Recursos Hídricos. Professor do Programa de Pós-Graduação do Ceeteps. Coordenador de cursos de pós-graduação da FAT - Fundação de Apoio à Tecnologia. Coordenador e Professor de Curso de Especialização da FATEC-SP. Foi: Presidente da Associação Brasileira de Irrigação e Drenagem, Professor e Diretor da FATEC-SP, Coordenador de Projetos de Irrigação do Dae e Professor do Programa de Pós-Graduação da Escola Politécnica – USP.

datelles@fatecsp.br

dirceu.telles@fatgestao.org.br

JOÃO MONGELLI NETTO

Licenciado em Física pela Universidade de São Paulo. Autor de Física Básica, pela Editora Cultrix: vol. 1 Mecânica; vol.2 Hidrostática, Termologia e Óptica; coautor de Física Geral – curso superior – Mecânica da Partícula e do Sólido, sob coordenação do Professor Tore Johnson. Leciona atualmente essa disciplina na Faculdade de Tecnologia de São Paulo.

mongelli@fatecsp.br

JUAN CARLOS RAMIREZ MITTANI

Graduado em Física pela Universidade Nacional de San Agustín (Arequipa- Perú). Mestre e Doutor pela Universidade de São Paulo. Pós-doutorado na USP e na Universidade de Oklahoma (Estados Unidos). Atualmente, é professor da Faculdade de Tecnologia de São Paulo e realiza pesquisas na área de datação e dosimetria, usando técnicas de luminescência.

juan@fatecsp.br

GILBERTO MARCON FERRAZ

Graduado em Física pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Mestre em Física Aplicada à Medicina e Biologia pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, da Universidade de São Paulo. Doutor em Ciências – área Física do Estado Sólido – pelo Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Atualmente, é professor de Física da FEI, da Faculdade de Tecnologia de São Paulo e do UNIFIEO.

gmarconf@fatecsp.br.

MANUEL VENCESLAU CANTÉ

Bacharel e Mestre em Física pela Unicamp. Doutor em Engenharia de Materiais e Processos de Fabricação pela Unicamp. Tem experiência em ensino de Física, tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior. Atualmente, é professor Associado da Faculdade de Tecnologia da Zona Leste, no Curso de Polímeros.

mvcante@terra.com.br

OSVALDO DIAS VENEZUELA

Bacharel e Licenciado em Física pela Universidade de São Paulo. Mestre em Ensino de Física pela Universidade de São Paulo. Professor de Física da Faculdade de Tecnologia de São Paulo e da Escola Técnica Walter Belian.

ovenezuela@uol.com.br

ROBERTA NUNES ATILI FRANZIN

Bacharel e Licenciada em Física pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Mestre em Ciências na Área de Tecnologia Nuclear pelo Ipen/ USP. Doutora em Ciências na Área de Tecnologia Nuclear pelo Ipen/USP. Professora de Física da Faculdade de Tecnologia de São Paulo.

rnattili@gmail.com

ROBERTO VERZINI

Bacharel e Licenciado em Física pela Universidade de São Paulo. Mestre em Física pela Universidade de São Paulo, na área de Absorção Óptica e Termoluminescência em vidros. Professor de Física da Faculdade de Tecnologia de São Paulo, atuando também em Produção e Desenvolvimento de Filmes Finos para Aplicações Ópticas na empresa Engefilme Indústria e Comércio Ltda.

engefilm@terra.com.br

EDUARDO ACEDO BARBOSA

Bacharel em Física pelo Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Mestre em Física pela Unicamp. Doutor em Tecnologia Nuclear pelo Ipen. Professor e pesquisador da Faculdade de Tecnologia de São Paulo na área de lasers, holografia e metrologia óptica.

ebarbosa@fatecsp.br

FRANCISCO TADEU DEGASPERI

Bacharel em Física pelo Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Mestre e Doutor pela Feec – Unicamp. Trabalhou por 24 anos no Ifusp e trabalha em tempo integral na Faculdade de Tecnologia de São Paulo desde 2000. Montou e coordena o Laboratório de Tecnologia do Vácuo da Fatec-SP. Realiza trabalhos acadêmicos e industriais, desenvolvendo Processos, Metrologia e Instrumentação na área de Vácuo.

ftd@fatecsp.br

CONTEÚDO

Volume 1

| | | |
|------------|------------------------------------|-----|
| Introdução | FÍSICA, UM MODO DE VER O MUNDO | 15 |
| Capítulo 1 | GRANDEZAS FÍSICAS E VETORES | 27 |
| Capítulo 2 | MOVIMENTO EM UMA DIMENSÃO | 61 |
| Capítulo 3 | MOVIMENTO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES | 93 |
| Capítulo 4 | LEIS DE NEWTON | 129 |
| Capítulo 5 | EQUILÍBRIO DE UM SÓLIDO | 159 |
| Capítulo 6 | TRABALHO E ENERGIA | 193 |
| Capítulo 7 | MOMENTO LINEAR E IMPULSO | 229 |
| Capítulo 8 | ROTAÇÕES | 263 |

INTRODUÇÃO

FÍSICA, UM MODO DE VER O MUNDO

João Mongelli Netto

Esta breve introdução tem como objetivo evidenciar descobertas e avanços no campo dos fenômenos ligados à ciência denominada física, mostrando que o que hoje conhecemos é fruto de esforços na busca incessante de satisfação aos desejos de compreender os fenômenos, viver mais harmoniosamente com a Natureza e aplicar os novos conhecimentos, ou seja, desenvolver a tecnologia.

Os fenômenos naturais, que percebemos por meio dos sentidos, sempre foram objeto de investigação para compreender como a Natureza funciona:

O Universo é finito?

Qual a origem do nosso sistema solar?

Quando a vida teve início na Terra?

Por que o céu é azul?

Por que uma pedra, quando largada no ar, cai ao solo?

Por que um pedaço de ferro atrai um ímã?

Por que sentimos frio?

O litro de álcool combustível deve, mesmo, custar menos que o litro de gasolina?

Como se formam as nuvens?

O que é o trovão? E o raio?

Quando não se têm respostas a estas e a outras indagações, a superstição entra em cena, para saciar a curiosidade do ser humano. Por exemplo, na Antiguidade, os homens chegavam a temer a doença do Sol, quando ele desaparecia para dar lugar à noite.

A busca do conhecimento é tão antiga quanto a humanidade e, desde o início, o que se procurava era o *porquê* das coisas; depois de muitas observações, elaborava-se a explicação, a teoria.

Assim, a Antiguidade legou-nos diversas ideias de seus pensadores. Várias delas foram aceitas como justificativas de fenômenos naturais e prevaleceram sobre outras hipóteses durante muitos séculos.

O ANTIGO EGITO

Os egípcios constituíram uma cultura de grande e eficiente administração, que perdurou por 20 séculos (de 3000 a.C. a 1000 a.C., aproximadamente). Atestado dessa pujança de organização foi a construção de monumentais edifícios: palácios, templos, pirâmides, calendários com ano de 365 dias e registros de astronomia e matemática, principalmente a aritmética e a geometria. Eles tinham noções de geologia, reconhecendo as propriedades físicas e químicas dos materiais. Na medicina, eram cirurgiões competentes. Certamente, os egípcios muito contribuíram para o desenvolvimento da ciência em seu estado nascente.

Em 3000 a.C., os sumérios ocuparam a região onde hoje se situam o Iraque, a Síria, o Líbano e parte de Israel. Eles inventaram a escrita, de fundamental importância para o desenvolvimento da ciência e sua difusão. Não havendo moedas à época, os sumérios desenvolveram um sistema de pesos e medidas, no qual o comprimento era baseado em partes do corpo humano. Posteriormente, os fenícios (aproximadamente em 1500 a.C.) e os babilônios (aproximadamente em 1000 a.C.) lançaram os fundamentos da matemática.

OS GREGOS

A civilização grega, com sua tentativa de dar um sentido ao mundo material, afetou profundamente a nossa. Dentre os povos da Antiguidade ocidental, foram os grandes filósofos da Natureza, em busca de explicações acerca do universo, interpre-

tando os fenômenos cósmicos e terrestres. Entre seus ilustres filhos, citamos:

Tales, de Mileto (624 a.C.–547 a.C., aproximadamente) estadista, matemático, astrônomo e negociante; em suas viagens ao Egito, trouxe para a Grécia o estudo da geometria prática, a partir da qual se desenvolveu a estrutura lógica;

Pitágoras, de Samos (aproximadamente 560 a.C.–500 a.C.), líder religioso, estudioso de música, matemático e astrônomo, afirmou que a Terra era um planeta, em órbita como os outros;

Leucipo e seu discípulo Demócrito (aproximadamente 500 a.C.–404 a.C.) propuseram a teoria atômica, com os átomos em perpétuo movimento no vácuo;

Sócrates (470 a.C.–399 a.C.) e seu discípulo **Platão** (427 a.C.–347 a.C.) desenvolveram a dialética, uma técnica que, por meio de perguntas, levava os alunos a elaborar por si mesmos suas ideias. Tal método de lógica foi fundamental para a matemática. Platão estava convencido de que a Terra, esférica, estava fixa no centro do universo, com o Sol, a Lua e os planetas movendo-se em torno dela. Acreditava que os corpos eram formados pelos quatro elementos: terra, água, ar e fogo;

Hipócrates, de Quios, notável matemático contemporâneo de Sócrates, fundou uma escola de matemática em Atenas, que se tornaria importante centro no mundo grego;

Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.), maior figura da ciência grega, pregava ser necessária uma força para manter um corpo em movimento e que o comportamento dos corpos se devia à constituição deles. Afirmava: tudo tem o seu lugar natural; o dos materiais terrestres é o centro da Terra, considerada esférica e centro do universo. Quanto mais elemento terra o corpo contiver, mais fortemente ele quer chegar a esse centro. Então, corpos mais pesados caem mais rapidamente. O lugar natural da água é a superfície da Terra, enquanto o lugar do ar e do fogo é em torno da Terra, acima de nossas cabeças. Essa ideia dos quatro elementos parece ingênua, mas hoje sabemos que pouco mais de uma centena deles constituem todos os corpos imagináveis;

Euclides fundou a escola de matemática do museu de Alexandria, onde trabalhou entre 320 a.C. e 260 a.C.. Seu livro *Elementos* é a síntese da geometria grega, base do ensino dessa ciência no Ocidente; escreveu também uma série de teoremas de óptica;

Arquimedes (287 a.C.–212 a.C.), da escola de matemática de Alexandria, foi um dos primeiros a usar a experimentação para observar os fenômenos, construiu máquinas de guerra utilizando as propriedades das alavancas, contribuiu para o desenvolvimento da hidrostática;

Eratóstenes (276 a.C.–195 a.C.), notável sábio, conseguiu determinar, com razoável precisão, o raio e a circunferência da Terra, utilizando a proporcionalidade entre os lados de dois triângulos semelhantes;

Ptolomeu (aproximadamente 100 d.C.–170 d.C.) estudou em Alexandria e apresentou uma descrição matemática detalhada dos movimentos do Sol, da Lua e dos planetas em torno da Terra, apoio para toda a astronomia ocidental nos séculos seguintes. Baseava-se na teoria dos epiciclos, desenvolvida por Apolônio. De acordo com essa proposta, um planeta gira em órbita circular em torno de um ponto que, por sua vez, descreve movimento circular em torno da Terra, gerando um movimento ligeiramente elíptico. Deixou-nos um compêndio de astronomia chamado *Almagesto* e escreveu, ainda, sobre óptica e música, além de um tratado de geografia.

A física teve pequeno desenvolvimento depois dos trabalhos desses helenistas. Convém lembrar que foram feitas notáveis descobertas, em todos os campos do conhecimento, nas culturas de outros povos, mas havia grande dificuldade de comunicação entre eles e tais conhecimentos não puderam ser rapidamente compartilhados. Como exemplo, podemos citar a cultura da China. Os chineses, práticos e inventivos, foram notáveis astrônomos. Por volta do ano 723 criaram o relógio mecânico, bastante preciso, usando uma série de engrenagens; descobriram a pólvora, usada em fogos de artifício e pela primeira vez empregada em combates no século X. Deram inúmeras contribuições à física; a mais significativa foi a invenção da bússola magnética, já usada por eles na navegação, por volta do século XI, precedendo, em muito, o uso no Ocidente.

A FÍSICA DOS ÁRABES E O OCIDENTE EUROPEU

O povo árabe teve importante papel na história da matemática e da física, tornando-se uma espécie de responsável pelo desabrochar desses estudos na Europa.

O maior físico islâmico, Ibn al-Haytham, conhecido no Ocidente como Alhazen, nasceu em Basra, no Iraque, em 965 e viveu no Cairo. Seu trabalho marcou o ponto mais elevado da física árabe – *Óptica* –, usa orientação matemática e experimental e coloca como autoridade a evidência empírica. Ele tinha claro o conceito de raio de luz, e suas leis da refração da luz foram usadas no século XVII por Kepler e Descartes.

No século XII, o Ocidente recuperou o ensino grego sob forma de traduções latinas de textos islâmicos, fossem trabalhos originais árabes, como a *Álgebra* de al-Khwarizmi e a *Óptica* de al-Haytham, fossem traduções e comentários de árabes sobre textos gregos de Aristóteles. Esse recente conhecimento afetou as novas universidades de Paris e de Oxford, na Inglaterra, ambas da segunda metade do século XII.

Dois grandes cientistas, versados nas traduções das fontes árabes então disponíveis, foram Robert Grosseteste e seu aluno Roger Bacon. Grosseteste nasceu na Inglaterra por volta de 1168 e faleceu em 1253. Curioso dos fenômenos naturais, ele escreveu importantes textos sobre astronomia, som e principalmente óptica, enfatizando a natureza da pesquisa científica. Figuras centrais do importante movimento intelectual na Inglaterra, ambos tiveram significativa influência numa época em que o novo conhecimento da ciência e da filosofia gregas estava exercendo profundo efeito na filosofia cristã; divulgaram textos vindos do mundo árabe e foram precursores do método científico.

O alemão da Baviera Alberto Magno também desempenhou marcante papel na introdução da ciência grega e árabe nas universidades da Europa ocidental. Tendo nascido por volta de 1200; Alberto Magno era dominicano e foi ensinar na universidade de Paris em 1240. Desde 1210, as autoridades eclesiásticas de Paris condenaram os trabalhos científicos de Aristóteles e, por esse motivo, Alberto Magno enfrentou forte resistência. Foi um estudioso da Natureza, deixando trabalhos sobre os animais e as plantas. Diante da necessidade de uma síntese aceitável entre o pensamento pagão aristotélico e a doutrina cristã, a solução encontrada por Alberto Magno foi parafrasear a ciência contida nos ensinamentos aristotélicos. Sem recear discordar de Aristóteles, importou parte de seus pensamentos. Grande sábio, também parafraseou a lógica, a matemática, a ética, a política e a metafísica do filósofo grego.

O tardio movimento científico medieval concentrou-se na ciência física pela possibilidade de se exercer a precisão de pensamento e a liberdade de especulação. Esse trabalho teve continuidade nos séculos seguintes, na Renascença e no período da Revolução Científica.

O RENASCIMENTO

Jean Buridan foi influente estudioso da ciência natural e reitor da universidade de Paris. Seu discípulo Nicole d’Oresme (aproximadamente 1320–1382) estabelecia uma diferença entre movimentos celestes e terrestres: utilizou a matemática no movimento planetário e chegou a aplicar o conceito de “centro de gravidade” aos corpos no universo; ele propôs uma teoria para explicar o difícil movimento de um projétil e, no estudo da queda de um corpo na Terra, sugeriu que a velocidade aumentava com o tempo de queda, antecedendo portanto a determinação do valor da aceleração da gravidade, $9,81 \text{ m/s}^2$ para a queda livre.

O período histórico denominado Renascimento manifestou-se na Itália no século XIV, com seus primeiros indícios nos trabalhos dos poetas Petrarca (1304–1374) e Boccaccio (1313–1375), humanistas e defensores da crença de que sua cultura era herdeira da Antiguidade clássica. A época foi extremamente criativa e pujante, destacando-se as grandes navegações e descobertas de rotas marítimas e de novas terras, a invenção da imprensa pelo alemão Gutenberg.

O artista e inventor italiano Leonardo da Vinci (1452–1519), mesmo sem possuir educação formal, mostrou-se criativo construtor mecânico e habilidoso desenhista.

O polonês Nicolau Copérnico (1473–1543), insatisfeito com a teoria de Ptolomeu, propôs o sistema heliocêntrico, com a Terra e os planetas em órbita ao redor do Sol, ponto de vista revolucionário descrito em seu livro *Das revoluções dos corpos celestes*; a partir daí, o homem perdeu seu lugar privilegiado no centro do universo.

Simon Stevin (1548–1620) publicou três livros: *Princípios da estática*, *Aplicações da estática* e *Princípios da hidrostática*, retomando os trabalhos de Arquimedes, de 18 séculos atrás.

Gilbert (1540–1603) publicou, em 1600, o livro *De magnete*, tratado de magnetismo.

O italiano Giambattista Della Porta deu grande contribuição à óptica no século XVI.

Ticho Brahe (1546–1601), astrônomo dinamarquês, realizou medidas precisas do movimento dos astros, no observatório fundado por ele, com instrumentos de precisão jamais vista; discordou de algumas ideias de Aristóteles e também de Copérnico. Criou sua própria cosmologia, com a Terra fixa no centro do universo, a Lua e o Sol em órbitas terrestres, porém admitin-

do os planetas em órbita ao redor do Sol. Publicou *Mecânica da nova astronomia*, um tratado descritivo dos instrumentos e seus métodos de uso por ele desenvolvidos.

Johannes Kepler (1571–1630) sucedeu Ticho Brahe e chegou às três leis dos movimentos dos planetas, com a publicação, em 1609, de *A nova astronomia*. Resultou de anos de observação do movimento de Marte, que não apresentava movimento circular uniforme e sim elíptico, com velocidade crescente ao se aproximar do Sol e decrescente ao se afastar dele. Entre 1619 e 1621, depois de examinar as informações de Brahe, Kepler concluiu que todos os planetas se comportavam da mesma maneira, conforme descrito nas três partes de sua obra *Epítome da astronomia copernicana*.

Galileu Galilei (1564–1642), contemporâneo de Kepler, estudou o movimento dos corpos próximos à Terra, descobriu a lei do movimento de um pêndulo e pesquisou a queda dos corpos, provando que, ao contrário da teoria aristotélica, o tempo de queda independe de o corpo ser leve ou pesado. Estudou o movimento de esferas em planos inclinados, chegando ao princípio da inércia. Fez uso científico do telescópio (talvez invenção holandesa), notou que a Lua tinha montanhas, cuja altura podia ser medida pelos comprimentos de suas sombras, e que Júpiter era acompanhado por quatro pequenas luas em sua órbita. Eram fortes evidências a favor da teoria de Copérnico. Mudou-se de Veneza para Florença em 1610. Lá enfrentou resistências às suas concepções, pois “uma Terra em movimento feria as Sagradas Escrituras”. Por algum tempo, Galileu manteve-se em silêncio; porém, em 1623 publicou *O ensaiador*, expondo seus pontos de vista sobre a realidade científica e sobre o método científico. Seu livro *Diálogo sobre os dois principais sistemas do mundo* – o ptolomaico e o copernicano, publicado em 1632, foi aplaudido em todo o restante da Europa, causando, porém, tumulto na Itália. Galileu foi processado pela Inquisição (1633) e condenado à prisão domiciliar. Trabalhou, então, em seu último livro, *Discursos referentes a duas novas ciências*, no qual apresenta suas conclusões a respeito da mecânica.

A revisão desses conceitos por Kepler e Galileu possibilitou a Isaac Newton (1642–1727) estabelecer as leis da Mecânica Clássica, um conjunto harmonioso de princípios claramente enunciados, bem como a lei do inverso do quadrado da distância que explicava a gravitação universal. Sua obra-prima *Philosophiae naturalis principia mathematica* [Os princípios matemáticos da filosofia natural] foi publicada em 1687.

No presente livro, procuramos apresentar a Mecânica até a época newtoniana. A Física sofreu avanços posteriores, que serão objeto de estudo nos outros volumes, que tratarão de hidrodinâmica, termodinâmica, ondas e eletromagnetismo.

O MÉTODO CIENTÍFICO

Voltemos nossa atenção ao método que revolucionou todo o desenvolvimento científico, trazendo explicações confiáveis e bem elaboradas dos fenômenos.

O estágio fenomenológico da ciência física consiste na catalogação de eventos, acompanhados de sua descrição. Os eventos são agrupados de acordo com suas semelhanças; a partir daí, levantam-se as grandezas físicas comuns aos fenômenos, aquelas propriedades necessárias para sua descrição. O passo seguinte para a obtenção de uma teoria que explique aqueles fenômenos parecidos é a busca de relações entre as grandezas, o que permite, via de regra, formular hipóteses explicativas. O método experimental ou método científico, desenvolvido por Galileu, é instrumento poderoso de análise dessa questão.

Galileu percebeu que era muito mais produtiva – e ainda o é –, para o avanço da ciência, uma nova atitude: em vez de se procurar o *porquê* de um fenômeno, deve-se inicialmente buscar o *que* ocorre e *como* ocorre tal fenômeno. Quase todo o progresso científico, a partir da Renascença, é baseado no método experimental introduzido por Galileu. Tal método consiste em:

- observação;
- formulação de uma hipótese;
- experimentação;
- conclusão.

O homem procura, então, observar os fenômenos, repeti-los em laboratório, efetuar medidas, propor uma hipótese inicial, alterar as condições em que ocorreram, fazer novas medidas, observar outros fenômenos e realizar novas experimentações. Essas novas experimentações poderão confirmar ou não a hipótese inicial.

Foi assim que se desenvolveram a mecânica e a termologia, a óptica e a acústica. Ainda não há teoria consistente para os fenômenos que envolvem o olfato e o paladar, mas poderemos ainda assistir à formulação dessa teoria ou, até mesmo, parti-

cipar de sua criação. Uma vez elaborada uma teoria, ela deve passar por testes.

Se, em todos os fenômenos estudados, há concordância entre o que se levantou como hipótese e a evidência experimental, então a teoria formulada parece adequada à compreensão dos fenômenos e também à percepção de previsões embasadas. Por outro lado, se o teste da hipótese nos mostrar que, em alguma situação, não conseguimos explicar um dos eventos relacionados, por haver discordância entre a hipótese e a realidade, é hora de substituir a teoria recém-criada por outra mais vigorosa, capaz de cobrir aquele evento e todos os demais do conjunto.

A Natureza não erra; já a explicação, fruto da capacidade humana, pode falhar.

É preciso ter o espírito alerta para observar, indagar e buscar explicações mais satisfatórias à ampliação dos conhecimentos das leis da Natureza, os quais nos propiciam controlar fenômenos e tirar proveito deles. Isto é fazer Tecnologia, que consiste na aplicação dos conhecimentos científicos na solução dos problemas práticos. Alguns exemplos ajudam a ilustrar a afirmação:

- a descoberta do elétron foi consequência do desejo de se conhecer a estrutura da matéria, mas serviu de base ao desenvolvimento de muitos aparelhos eletrônicos;
- a descoberta das propriedades dos materiais semicondutores germânio e silício possibilitou melhorias profundas nos aparelhos eletrônicos e avanços notáveis na computação e na transmissão de dados;
- a descoberta do raio laser trouxe inúmeras aplicações práticas à indústria, à medicina e à instrumentação.

A QUEM SERVEM ESSAS TEORIAS?

O conhecimento de física é necessário a todas as pessoas que desenvolvem espírito crítico, independentemente de sua atuação: médico, literato, jornalista, economista. Serve especialmente a tecnólogos e engenheiros que a utilizam como apoio nas tomadas de decisão em suas atividades profissionais. O estudo da física faculta-nos um novo olhar, mais arguto, possibilitando visão mais integrada do que ocorre à nossa volta.

Sem dúvida, a compreensão dos fatos cotidianos, bem como a previsão do que poderá acontecer sob determinadas condições, nos integram à Natureza e nos permitem entendê-la, trazendo-nos

a confiança nos conhecimentos adquiridos por dedicados homens e mulheres que, ao longo dos séculos, elaboraram teorias capazes de explicá-la.

MODELO

Nos estudos de física, frequentemente para facilitar a compreensão e a análise matemática de situações complexas, lança-se mão de um “modelo”, um sistema irreal e abstrato, mas que apresenta solução simples e aproximada da realidade.

Exemplificando, analisamos a queda de um corpo supondo não haver resistência do ar e admitindo constante a aceleração da gravidade. Isto se justifica plenamente, de acordo com a precisão exigida para a resposta do problema em exame. Em certos casos, as previsões teóricas coincidem com as medidas experimentais, às vezes com pequena margem de diferença. Em outros casos, a diferença é grande e este procedimento serve apenas como referência inicial da resposta, que deve ser alterada pelas outras condições do problema. Por exemplo: como atua a resistência do ar? Sua intensidade é variável? Constatase, empiricamente, que a força de resistência oferecida pelo ar a um corpo que nele se move depende da forma do corpo e, para baixas velocidades, é proporcional à velocidade, isto é, $F = k \cdot v$; para outra faixa de velocidades, é proporcional ao quadrado da velocidade, ou seja, $F = k \cdot v^2$. O fenômeno é bastante complexo.

E a aceleração da gravidade sofre alteração com a altitude? De acordo com a lei da gravitação universal, descoberta por Newton, a aceleração gravitacional num ponto é inversamente proporcional ao quadrado da distância desse ponto ao centro da Terra.

Estes e outros elementos complicadores podem levar o profissional a aplicar leis empíricas para solução de determinados problemas ou a usar maquetes em escala reduzida ou, ainda, a servir-se de tabelas que permitem chegar mais rapidamente ao resultado esperado. Maquetes em escala reduzida podem detectar problemas reais e precedem a construção de usinas hidrelétricas, por exemplo. A utilização de tabelas para solucionar um problema real de balística, é, sem dúvida, vantajosa sob vários pontos de vista, incluindo o tempo de solução.

Observações, análises e experimentos conduzem à necessidade do uso de instrumentos, desde os mais rudimentares até os mais complexos. Desenvolvidos por cientistas e técnicos nos últimos séculos, esses instrumentos fantásticos foram capazes

de ampliar nossos sentidos, fornecendo informações e comprovações confiáveis.

Assim evolui a ciência: novos instrumentos possibilitam novas descobertas.

REFERÊNCIAS

RONAN, Colin A. *História ilustrada da ciência da Universidade de Cambridge*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1987, 4 v.

KUHN, T. S. *The struture of scientific revolutions*. 2. ed. Chicago e London: University of Chicago Press, 1970.

1

GRANDEZAS FÍSICAS E VETORES

Juan Carlos Ramirez Mittani

1.1 GRANDEZAS FÍSICAS

1.1.1 INTRODUÇÃO

Uma grandeza física é toda propriedade dos corpos que pode ser medida e à qual se pode atribuir um valor numérico. Por exemplo, volume, temperatura, velocidade, pressão etc. Porém, existem outras propriedades que ainda não podem ser medidas como o sabor, o odor e a saudade, que, por conseguinte, não têm a característica de grandeza física.

Medir é comparar quantitativamente a grandeza física com outra grandeza padrão da mesma espécie, que no caso é a unidade de medida. Assim verificamos, então, quantas vezes a unidade padrão está contida na grandeza que está sendo medida. Nas medições, as grandezas sempre devem vir acompanhadas de unidades. Por exemplo, a massa de um corpo pode ser medida em quilogramas. Suponha que a massa de um determinado corpo tenha 2 kg, se dividirmos o corpo em duas partes iguais, cada uma terá massa 1 kg, neste caso 1 kg é a unidade de medida. Entretanto, se pudéssemos dividir o corpo em 2000 pedaços iguais, cada parte teria 1 g, neste caso 1 g é a unidade de medida. Em ambos os casos, estamos medindo a mesma grandeza física, que é a massa do corpo, embora as unidades sejam distintas.

Não obstante existam dezenas de grandezas físicas, são estabelecidos padrões e unidades definidos para um número mínimo de grandezas, as quais são denominadas fundamentais.

A partir das grandezas fundamentais são definidas unidades para todas as demais grandezas denominadas grandezas derivadas.

1.1.2 SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

O Sistema Internacional de unidades, SI, foi sancionado em 1971, na 14ª Conferência Geral de Pesos e Medidas. Tomando em consideração as vantagens de se adotar um sistema único para ser utilizado mundialmente nas medições que interessam tanto ao comércio e a indústria, quanto ao ensino e ao trabalho científico, decidiu-se fundamentar o Sistema Internacional em sete unidades básicas bem definidas, consideradas independentes, sob o ponto de vista dimensional. A Tabela 1.1 mostra as grandezas fundamentais do SI e suas respectivas unidades e a Tabela 1.2 as definições das grandezas comprimento, massa e tempo.

Tabela 1.1 Grandezas fundamentais do SI

| Grandeza | Unidade | Símbolo | Representação dimensional |
|-----------------------|------------|---------|---------------------------|
| Comprimento | metro | m | L |
| Massa | quilograma | kg | M |
| Tempo | segundo | s | T |
| Corrente elétrica | ampère | A | I |
| Temperatura | kelvin | K | θ |
| Intensidade Luminosa | candela | cd | I |
| Quantidade de Matéria | mol | mol | |

Tabela 1.2 Definição das três principais grandezas físicas fundamentais da Mecânica.

| Grandeza | Unidade | Definição |
|-------------|------------|--|
| Comprimento | metro | “O metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 de um segundo” |
| Massa | quilograma | “O quilograma é a unidade de massa (e não de peso, nem força); ele é igual à massa do protótipo internacional do quilograma.” Esse protótipo internacional, em platina iridiada, é conservado no Bureau Internacional. |
| Tempo | segundo | “O segundo é a duração de 9 192 631 770 oscilações da luz correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133” |

A segunda classe de unidades do SI abrange as unidades derivadas, isto é, as unidades que podem ser formadas combinando-se unidades fundamentais segundo relações algébricas que interligam as grandezas correspondentes. Diversas dessas expressões algébricas, em razão de unidades de base, podem ser substituídas por nomes e símbolos especiais, o que permite sua utilização na formação de outras unidades derivadas.

1.1.3 MÚLTIPLOS E SUBMÚLTIPLOS DAS UNIDADES

Quando a grandeza física é muito maior ou muito menor que a unidade, é comum utilizar múltiplos e submúltiplos das unidades. Fazemos uso, então, da notação com potências de dez, também conhecida como notação científica.

A Tabela 1.3 apresenta a correspondência entre a notação científica e os múltiplos e submúltiplos. Cada conjunto de múltiplo e submúltiplo do SI tem um símbolo da unidade. Por exemplo, o símbolo k (quilo) corresponde a 10^3 . Como exemplo, se certa distância é de 80 km, então, essa distância é igual $80 \cdot 10^3$ m ou $8,0 \cdot 10^4$ m, em notação científica.

Tabela 1.3 Prefixos das unidades do SI

| Fator | Prefixo | Símbolo | Escala curta |
|------------|---------|---------|-----------------|
| 10^{18} | exa | E | Quintilhão |
| 10^{15} | peta | P | Quadrilhão |
| 10^{12} | tera | T | Trilhão |
| 10^9 | giga | G | Bilhão |
| 10^6 | mega | M | Milhão |
| 10^3 | quilo | k | Milhar |
| 10^2 | hecto | h | Centena |
| 10^1 | deca | da | Dezena |
| 10^{-1} | deci | d | Décimo |
| 10^{-2} | centi | c | Centésimo |
| 10^{-3} | mili | m | Milésimo |
| 10^{-6} | micro | μ | Milionésimo |
| 10^{-9} | nano | n | Bilionésimo |
| 10^{-12} | pico | p | Trilionésimo |
| 10^{-15} | femto | f | Quadrilionésimo |
| 10^{-18} | ato | a | Quintilionésimo |

1.1.4 TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES DE MEDIDA

A transformação ou conversão de unidades segue regras algébricas simples e pode ser feita pela regra da cadeia (ver exercícios resolvidos).

1.1.5 FÓRMULA DIMENSIONAL

Algumas vezes, podemos especificar a posição de uma partícula pelo número de coordenadas envolvidas. Assim, por exemplo, se a partícula está ao longo do eixo x , utilizamos uma coordenada (unidimensional). Se a partícula está num plano xy , utilizamos duas coordenadas (bidimensional) e, se está no espaço, utilizamos três coordenadas (tridimensional).

A dimensão de grandezas físicas segue a mesma filosofia e nos indica a natureza da grandeza com base nas unidades fundamentais. Em outras palavras, a dimensão de uma grandeza nos indica como essa grandeza se relaciona com cada uma das sete unidades básicas. Por exemplo, uma grandeza física que pode ser medida usando-se unidades de massa é dita ter a dimensão de massa e, cujo símbolo é M . Para podermos identificar uma grandeza física numa fórmula dimensional devemos colocar a grandeza entre colchetes ($[]$).

A Tabela 1.4 apresenta a fórmula dimensional de algumas grandezas físicas que usaremos neste livro, em função das três grandezas físicas fundamentais da Mecânica, comprimento (L), massa (M) e tempo (T).

Tabela 1.4 Fórmula dimensional e unidades SI de algumas grandezas físicas.

| Grandeza física | Fórmula dimensional | Unidade |
|--------------------|---------------------|---|
| Área | L^2 | 1 m^2 |
| Volume | L^3 | 1 m^3 |
| Velocidade | LT^{-1} | 1 m/s |
| Aceleração | LT^{-2} | 1 m/s^2 |
| Força | MLT^{-2} | $1 \text{ kg m/s}^2 = 1 \text{ N}$ |
| Trabalho | ML^2T^{-2} | $1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$ |
| Energia cinética | ML^2T^{-2} | $1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$ |
| Energia potencial | ML^2T^{-2} | $1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$ |
| Torque | ML^2T^{-2} | $1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ Nm}$ |
| Potência | ML^2T^{-3} | $1 \text{ kg m}^2/\text{s}^3 = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ W}$ |
| Impulso | MLT^{-1} | $1 \text{ kg m/s} = 1 \text{ N s}$ |
| Momento linear | MLT^{-1} | 1 kg m/s |
| Período | T | 1 s |
| Frequência | T^{-1} | $1/\text{s} = 1 \text{ Hz}$ |
| Velocidade angular | T^{-1} | 1 rad/s |
| Aceleração angular | T^{-2} | 1 rad/s^2 |

Para resolvermos equações dimensionais devemos tratá-las como qualquer equação algébrica comum, porém considerando os aspectos importantes a seguir:

- a) A equação dimensional tem de ser homogênea, isto é, todos os termos que compõem a equação têm de ter a mesma dimensão.

$$\text{Na equação } s = vt + \frac{1}{2}at^2$$

$$[s] = L$$

$$[v t] = LT^{-1}T = L$$

$$[a t^2] = LT^{-2}T^2 = L.$$

Podemos observar que todos os termos que compõem a equação têm a mesma dimensão, então ela é homogênea.

- b) Todos os valores puramente numéricos, ângulos, logaritmos, constantes numéricas e funções trigonométricas que figuram em algumas grandezas derivadas têm dimensão 1, ou seja, são adimensionais.

Por exemplo, a constante π :

$$[\pi] = M^0L^0T^0 = 1 \text{ adimensional.}$$

- c) Não se pode operar a soma ou subtração de duas grandezas com dimensão diferente, e todas as equações dimensionais devem ser expressas como produtos.

Por exemplo, a expressão $\frac{M}{L^2T^3}$ deverá ser expressa como $ML^{-2}T^3$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

CONVERSÃO DE UNIDADES

- 1) A quantos km/h equivale 30 m/s?

Solução:

$$\text{Como } 1000 \text{ m} = 1 \text{ km, temos que } \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} = 1$$

$$\text{Da mesma maneira } 3600 \text{ s} = 1 \text{ h e, portanto, } \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 1$$

Assim

$$30 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = \frac{30 \cdot 3600 \text{ km}}{1000 \text{ h}} = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

- 2) Uma unidade astronômica UA é a distância média da Terra ao Sol e é aproximadamente $150 \cdot 10^6$ km. Suponha que a velocidade da luz vale cerca de $3 \cdot 10^8$ m/s. Escrever a velocidade da luz em termos de unidades astronômicas por minuto.

Solução:

$$\text{Primeiramente, temos que } 1 \text{ km} = 1000 \text{ m ou } \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} = 1,$$

$$\text{e } 1\text{UA} = 150 \cdot 10^6 \text{ km ou } \frac{1\text{UA}}{150 \cdot 10^6 \text{ km}} = 1$$

$$\text{também } 60 \text{ s} = 1 \text{ min ou } \frac{60\text{s}}{1\text{min}} = 1$$

Assim

$$3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1\text{km}}{1000\text{m}} \cdot \frac{1\text{UA}}{150 \cdot 10^6 \text{ km}} \cdot \frac{60\text{s}}{1\text{min}} = 0,12 \frac{\text{UA}}{\text{min}}$$

ANÁLISE DIMENSIONAL

- 3) Determinar a fórmula dimensional da força.

Solução:

De acordo com a segunda lei de Newton,
Força = massa · aceleração ou $F = m \cdot a$

$$[F] = [m] \cdot [a]$$

$$[m] = M$$

$$[a] = [v]/[t] = L T^{-1}/T = L T^{-2}$$

Assim a dimensão da força será $[F] = L M T^{-2}$

- 4) Determinar a fórmula dimensional da pressão.

Solução:

Sabemos que *Pressão = Força/Área* ou $P = F/A$

$$[P] = [F]/[A]$$

$$[F] = L M T^{-2}$$

$$[A] = L^2$$

A dimensão da pressão é $[P] = L M T^{-2}/L^2 = L^{-1} M T^{-2}$.

- 5) A equação $m^{(-1/3)}v^2 = kg^a \rho^b$ é dimensionalmente homogênea. Determinar os valores de a e b onde:

m = massa

v = velocidade

k = constante numérica

g = aceleração da gravidade

ρ = densidade absoluta ou massa específica

Solução:

Primeiramente, determinamos a dimensão de cada componente

$$[m] = M$$

$$[v] = \text{LT}^{-1}$$

$$[k] = 1$$

$$[g] = \text{LT}^{-2}$$

$$[\rho] = \text{ML}^{-3}$$

A seguir colocamos as dimensões na equação

$$m^{-1/3}v^2 = \text{kg}^a \rho^b$$

$$\text{M}^{-1/3}\text{L}^2\text{T}^{-2} = 1\text{L}^a\text{T}^{-2a}\text{M}^b\text{L}^{-3b}$$

Ordenando os termos, temos $\text{L}^2\text{M}^{-1/3}\text{T}^{-2} = \text{L}^{a-3b}\text{M}^b\text{T}^{-2a}$

Devido à homogeneidade da equação igualamos os expoentes e obtemos os valores de a e b

Para os expoentes de T $-2a = -2$

$$a = 1$$

Para os expoentes de M $b = -1/3$

Verificação:

Para os expoentes de L $2 = a - 3b$

$$\text{De fato, } 2 = 1 - 3\left(-\frac{1}{3}\right).$$

EXERCÍCIOS COM RESPOSTAS

CONVERSÃO DE UNIDADES

- 1) Converter 235 mililitros para hectolitros.

Resposta:

$$2,35 \cdot 10^{-3} \text{ hectolitros.}$$

- 2) Converter 50 m² para mm².

Resposta:

$$50 \cdot 10^6 \text{ mm}^2.$$

- 3) Sabe-se que a aceleração normal da gravidade é 9,80665 m/s². Expressar esta aceleração em:

a) pés/min²

Resposta:

$$11,6 \cdot 10^4 \text{ pés/min}^2$$

b) milhas/hora²

Resposta:

$$7,9 \cdot 10^4 \text{ milhas/hora}^2$$

Sabe-se que 1 pé = 0,3048 m e 1 milha = 1 609 m.

4) Converter 5 newtons em dinas, sabendo que 1 newton = $1 \text{ kg} \cdot 1\text{m/s}^2$ e 1dina = $1\text{g} \cdot 1\text{cm/s}^2$.

Resposta:

$$5 \cdot 10^5 \text{ dinas.}$$

5) Na figura estão representadas três esferas, mutuamente tangentes, a maior delas oca. As duas menores são iguais, cada uma de volume V_m . Em função de V_m expressar:

O volume V_M da esfera maior

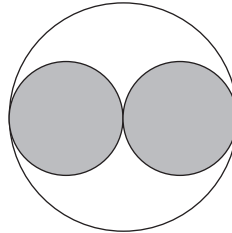
Resposta:

$$V_M = 8V_m$$

O volume V_V do espaço vazio dentro da esfera maior.

Resposta:

$$V_V = 6V_m.$$



6) O momento de inércia da Terra, em relação ao seu eixo de rotação é $I = 2,14 \cdot 10^{39} \text{ pés}^2 \text{ lb}$ (onde 1 pé = 0,3048 m e 1 lb = 0,454 kg). Expressar o momento de inércia da Terra em unidades S.I.

Resposta:

$$9,04 \cdot 10^{37} \text{ m}^2 \text{ kg.}$$

7) Sendo uma unidade $A = 100B$ e uma unidade $C = 5D$, converter

a) 5 unidades A para unidades B

Resposta:

$$500B.$$

b) 10 unidades C para unidades D

Resposta:

50D

c) 10 unidades B para unidades A

Resposta:

0,1A

d) 20 unidades D para unidades C

Resposta:

4C.

8) Com as mesmas relações do problema anterior, converter:

a) 15 A/C² para B/D²

Resposta:

60 B/D²

b) 1 620B/D² para A/C²

Resposta:

405 A/C².

9) Um cavalo-vapor (cv) equivale a 735,5 W. Qual é o consumo de energia de uma máquina de 10 cv que funciona 8 horas, em joules? (1 W = 1J/s)

Resposta:

211,8 · 10⁶ joules.

ANÁLISE DIMENSIONAL

10) Determinar a fórmula dimensional do trabalho.

Resposta:

ML²T⁻².

11) Einstein deduziu a equação $E = mc^2$ onde m é a massa e c a velocidade da luz (m/s). Determinar a fórmula dimensional de E e sua unidade no S.I.

Resposta:

ML²T⁻², kg m²/s².

12) A vazão de uma torneira é 12 litros/min.

a) Converter para unidades do S.I.

Resposta:

$$2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

b) Qual é a fórmula dimensional da vazão?

Resposta:

$$\text{L}^3\text{T}^{-1}.$$

13) Certa força segue a lei $F = 15 - 3x$, com unidades do S.I.; nesta expressão, x é a abscissa que assume os valores entre 0 e 5m. Determine a fórmula dimensional das constantes 15 e -3 , bem como suas unidades no S.I.

Resposta:

MLT^{-2} e kg m/s^2 para a constante 15 e MT^{-2} e kg/s^2 para a constante -3 .

14) Suponha duas grandezas físicas A e B ambas com diferentes dimensões. Determinar quais das operações aritméticas propostas abaixo podem ter significado físico.

a) $A + B$

b) A / B

c) $B - A$

d) $A \cdot B$

Resposta:

b) e d).

15) Nas equações abaixo, x é a distância em metros, t o tempo em segundos, e v a velocidade em metros por segundo. Quais são as fórmulas dimensionais e as unidades SI das constantes C_1 e C_2 ?

a) $x = C_1 + C_2t$

Resposta:

L, m para C_1 e LT^{-1} , m/s para C_2

b) $\frac{1}{2} = C_1 t^2$

Resposta:

LT^{-2} , m/s^2 para C_1

c) $v = 2C_1 x$

Resposta:

T^{-1} , 1/s para C_1

d) $x = C_1 \cos C_2 t$

Resposta:

L, m para C_1 e T^{-1} , 1/s para C_2

e) $v = C_1 e^{-C_2 t}$

Resposta:

LT^{-1} , m/s para C_1 e T^{-1} , 1/s para C_2 .

- 16) A equação da posição de uma partícula que se movimenta com uma aceleração constante é $x = k a^m t^n$ onde k é uma constante, a aceleração (metros/segundo²) e t o tempo. Usando a fórmula dimensional encontrar os valores de m e n para que a expressão fique correta.

Resposta:

$m = 1$ e $n = 2$.

- 17) Quais das equações abaixo são dimensionalmente corretas?

a) $v = v_0 + ax$

b) $v = v_0 + at$

c) $\Delta s = v_0 t + 2at^2$

d) $v^2 = 2a\Delta s$

Resposta:

b), c) e d).

- 18) Seja $x = A + B \sin(Ct)$ a equação do movimento oscilatório de uma partícula no eixo x . Obter as dimensões de A , B e C .

Resposta:

L para A , L para B e T^{-1} para C .

- 19) A equação $P = q^z R^{-y} S^x$ é dimensionalmente homogênea. Encontrar o valor de $x - 3y$ onde P é a pressão, q é a força, R o volume e S comprimento.

Resposta:

$x - 3y = -2$.

- 20) A velocidade de uma partícula é dada pela expressão $v = KF - \frac{Qd}{Q + v_1}$ onde F é força e v_1 velocidade. Determinar as dimensões de K , Q e d .

Resposta:

$M^{-1}T$ para K , LT^{-1} para Q e LT^{-1} para d .

1.2 VETORES

1.2.1 INTRODUÇÃO

Algumas grandezas físicas, para sua caracterização, precisam apenas do valor de sua intensidade. Por exemplo, se falamos de $36\text{ }^{\circ}\text{C}$ ou 10 segundos, ambas as grandezas ficam perfeitamente definidas quando especificadas sua intensidade e sua unidade de medida. Grandezas desse tipo são denominadas grandezas escalares e lidamos com elas simplesmente usando as regras de álgebra elementar. Exemplos de grandezas escalares são a temperatura, o tempo, a massa etc.

Por outro lado, existem grandezas físicas que, para sua caracterização, exigem além de sua intensidade (módulo), uma orientação espacial, isto é, uma direção e um sentido. Assim, quando alguém está se deslocando de uma posição para outra, não basta dizer que percorreu uma distância igual a 20 m; é preciso especificar além da distância, a direção e o sentido em que ocorreu o deslocamento. Essas grandezas recebem o nome de grandezas vetoriais. Exemplos de grandezas vetoriais são a velocidade, a aceleração, a força etc.

Uma grandeza vetorial pode ser representada matematicamente por um vetor. Graficamente, podemos representar um vetor por meio de um segmento de reta orientado que apresenta as seguintes características:

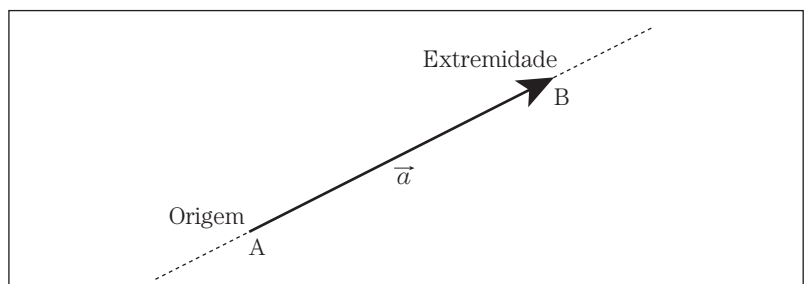
Módulo = comprimento do segmento de reta em escala adequada;

Direção = a reta que suporta o segmento;

Sentido = dado pela seta colocada na extremidade do segmento.

A Figura 1.1 representa uma grandeza vetorial qualquer onde o módulo é representado pelo comprimento do segmento AB; a direção, determinada pela reta que passa pelos pontos A e B; e o sentido, a seta localizada no ponto B que indica de A para B.

Figura 1.1



Para indicar um vetor, podemos usar qualquer um das formas seguintes:

$$\vec{a} \text{ ou } \overrightarrow{AB}$$

De igual maneira, para indicar o módulo, podemos usar qualquer uma das notações abaixo:

$$a \text{ ou } |\vec{a}|$$

1.2.2 SOMA DE VETORES

A Figura 1.2 mostra o caminho percorrido por uma bola de sinuca após sofrer vários choques. Observa-se que a bola executa vários deslocamentos desde o ponto O até chegar ao ponto P. A Figura 1.2 também mostra o deslocamento resultante, que chamaremos de soma vetorial dos vários deslocamentos.

É importante notar que o vetor Soma Vetorial é um vetor que tem o seu início no ponto de partida da bola e fim, no ponto de chegada. Observa-se que este deslocamento resultante não é simplesmente uma soma algébrica usual.

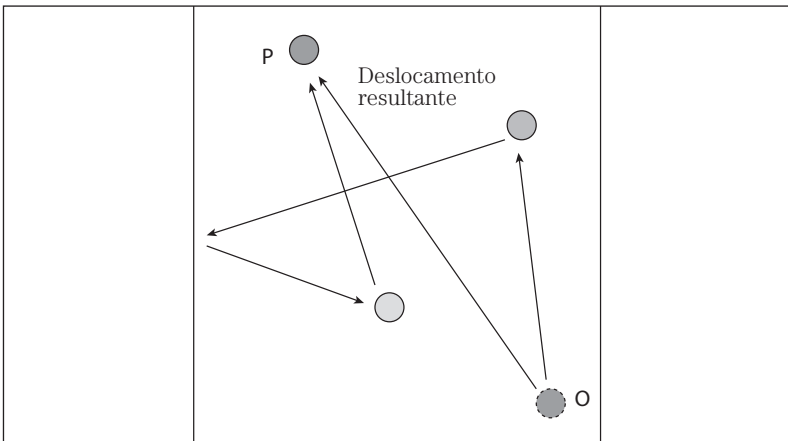
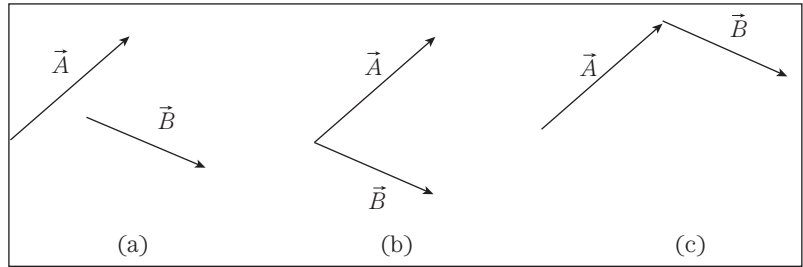


Figura 1.2

Uma propriedade importante dos vetores é que eles podem ser transladados para qualquer ponto no espaço sem sofrer nenhuma alteração no seu módulo, sentido e direção. A Figura 1.3 mostra dois vetores \vec{A} e \vec{B} (Figura 1.3a), transladados de duas maneiras (Figuras 1.3b e 1.3c):

Existem dois *métodos geométricos* para realizar a soma de dois vetores $\vec{A} + \vec{B}$. Estes dois métodos são: método da triangulação e método do paralelogramo.

Figura 1.3

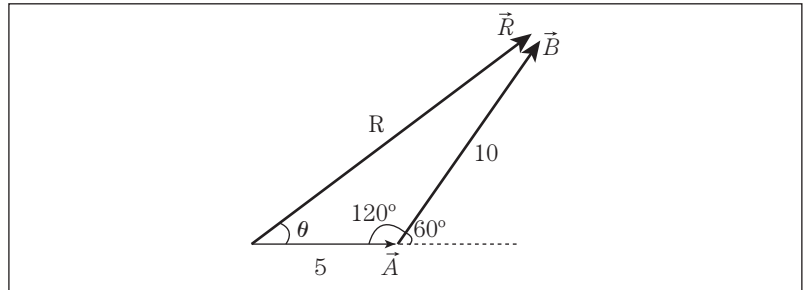


1.2.2.1 Método da triangulação

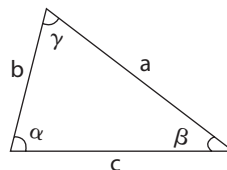
Sejam dois vetores: $\vec{A} = 5$, com o sentido e a direção do eixo x positivo; e $\vec{B} = 10$, que forma um ângulo de 60° com o vetor \vec{A} . O vetor resultante \vec{R} pode ser obtido aplicando-se o método da triangulação.

O método consiste em ligar a origem do vetor \vec{B} com a extremidade do vetor \vec{A} , sendo o vetor Resultante ou vetor Soma, aquele vetor que fecha o triângulo e que tem sua origem coincidente com a origem do vetor \vec{A} e sua extremidade coincidente com a extremidade do vetor \vec{B} , o que é representado pelo vetor \vec{R} da Figura 1.4.

Figura 1.4



Para obtermos o vetor resultante \vec{R} , devemos calcular seu módulo e sua direção, dada pelo ângulo θ . Algebricamente, podemos calcular ambos usando as leis dos senos e cossenos:



Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2bc \cos \gamma$$

Lei dos senos

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Da Figura 1.4, obtemos o valor de \vec{R} aplicando a lei dos cosenos:

$$R = \sqrt{5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cos 120^\circ} = 13,2$$

e o ângulo θ , com a lei dos senos:

$$\frac{R}{\sin 120^\circ} = \frac{10}{\sin \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{10 \cdot \sin 120^\circ}{13,2}$$

$$\sin \theta = 0,656 \quad \text{ou} \quad \theta = 41^\circ$$

1.2.2.2 Método do paralelogramo

O método do paralelogramo consiste em coincidir as origens dos dois vetores \vec{A} e \vec{B} , e construir um paralelogramo. O vetor Resultante ou vetor Soma será a diagonal do paralelogramo, cuja origem coincide com a origem dos vetores \vec{A} e \vec{B} (Figura 1.5). O módulo e o ângulo do vetor resultante \vec{R} são obtidos da mesma maneira descrita no método da triangulação, anteriormente visto. Para isto, usamos o triângulo sombreado da Figura 1.5.

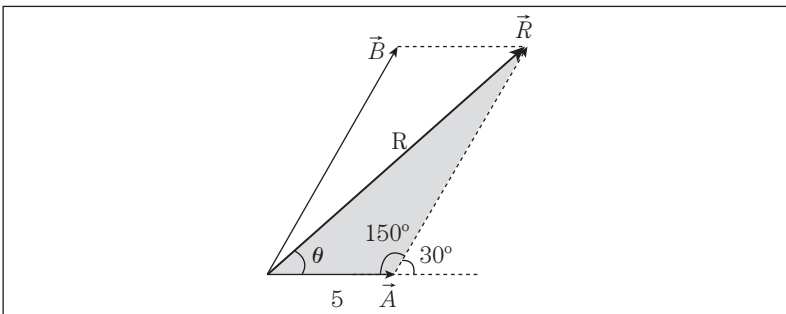


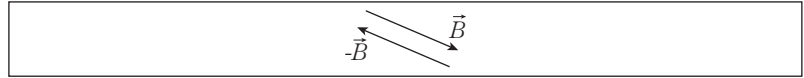
Figura 1.5

Usando uma régua e um transferidor, podemos obter a resultante graficamente, construindo as figuras com escala adequada ao tamanho do papel. A resposta é dada com a leitura do comprimento da resultante (em escala) e do ângulo que esse vetor forma com o vetor \vec{A} .

1.2.3 VETORES OPOSTOS

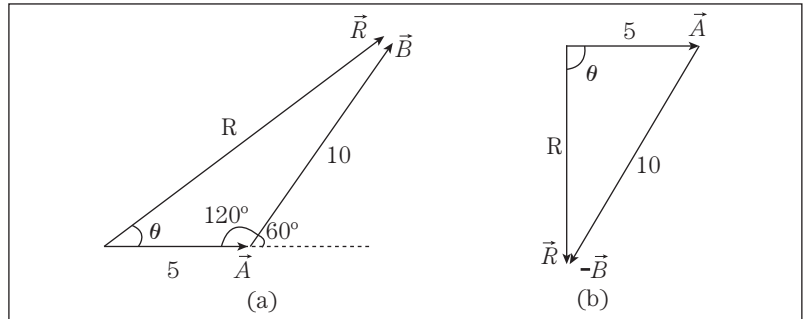
Dois vetores são opostos quando possuem o mesmo módulo e a mesma direção, porém com sentidos contrários (Figura 1.6). Assim, o vetor oposto de \vec{B} é o vetor $-\vec{B}$, tal que $\vec{B} + (-\vec{B}) = 0$.

Figura 1.6



Para efetuarmos uma subtração vetorial $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$, fazemos a soma $\vec{A} + (-\vec{B})$, como mostrado na Figura 1.7.

Figura 1.7
(a) soma de vetores $\vec{A} + \vec{B}$
(b) subtração de vetores $\vec{A} - \vec{B}$.



Assim, como no caso da soma de vetores, obtemos o valor de \vec{R} aplicando a lei dos cossenos; e o ângulo θ , mediante a aplicação da lei dos senos:

$$R = \sqrt{5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cos 60^\circ} = 8,7$$

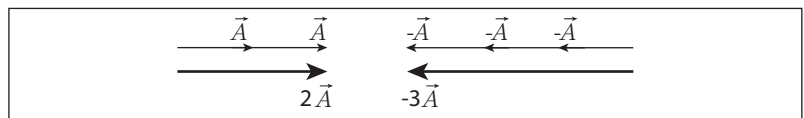
$$\frac{R}{\sin 60^\circ} = \frac{10}{\sin \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{10 \cdot \sin 60^\circ}{8,7} \quad \theta = 84,5^\circ$$

1.2.4 MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM ESCALAR

Seja o vetor $\vec{A} + \vec{A}$, como mostra a Figura 1.8. É fácil perceber que o vetor resultante será um vetor que tem a mesma direção e sentido do vetor \vec{A} , porém, um módulo duas vezes maior ($2\vec{A}$). Similarmente, se considerarmos o vetor $(-\vec{A}) + (-\vec{A}) + (-\vec{A})$, o vetor resultante será um vetor que possui a mesma direção do vetor \vec{A} , porém, com sentido oposto e um módulo três vezes maior ($3\vec{A}$).

Figura 1.8



Dos exemplos acima, podemos generalizar dizendo que: quando multiplicamos um escalar m por um vetor \vec{A} , o resultado $m\vec{A}$ é um vetor que tem a mesma direção de \vec{A} , e também o mesmo sentido se $m > 0$; ou sentido contrário, se $m < 0$. O módulo do vetor é $|m|$ vezes A (Figura 1.9).

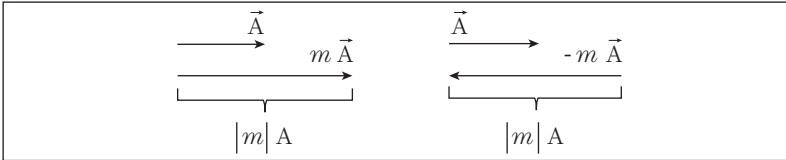


Figura 1.9

1.2.5 VETORES UNITÁRIOS E COMPONENTES DE VETORES

Um vetor unitário é aquele cujo módulo (comprimento) é igual a 1 e seu único propósito é indicar uma orientação no espaço. O vetor unitário não possui nenhuma dimensão nem unidade. Para denotá-lo, utilizamos um circunflexo na parte superior da letra que o identifica: \hat{A}, \hat{i} .

Uma maneira direta de construir um vetor unitário é tomar um vetor qualquer e dividi-lo pelo seu módulo:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$$

Assim, \hat{A} representa um vetor unitário com a mesma direção e sentido do vetor \vec{A} .

Operações com vetores ficam mais fáceis quando utilizamos as suas componentes. Contudo, é necessário definir os vetores utilizando um sistema de coordenadas. O sistema de coordenadas usual é o *sistema cartesiano* com os eixos x , y e z perpendiculares uns aos outros e com os vetores unitários \hat{i}, \hat{j} e \hat{k} , respectivamente orientados ao longo dos três eixos no sentido positivo (Figura 1.10).

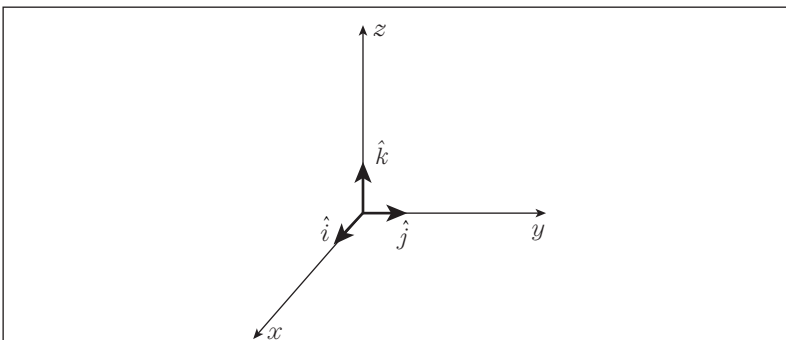
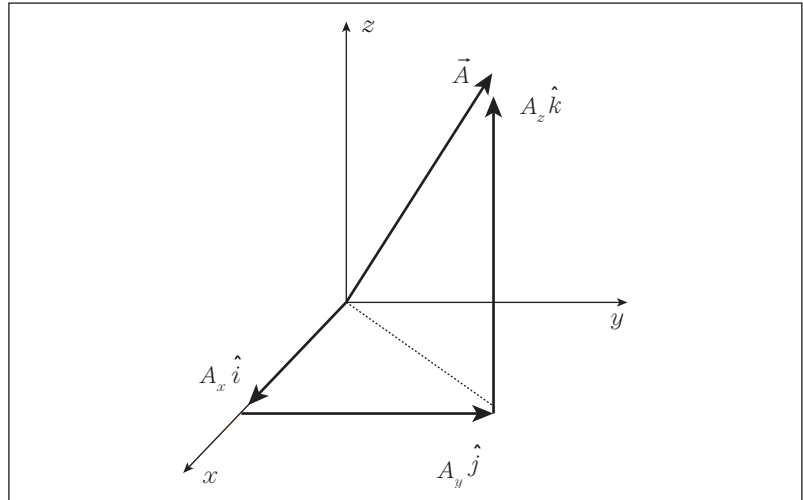


Figura 1.10

Um vetor qualquer pode ser representado como uma soma de três vetores orientados ao longo de cada um dos eixos coordenados como mostra a Figura 1.11. O vetor ao longo do eixo x tem a mesma direção que o vetor unitário \hat{i} e se pode escrevê-lo como $A_x \hat{i}$. Da mesma forma, os vetores ao longo dos eixos y e z podem ser escritos como $A_y \hat{j}$ e $A_z \hat{k}$, respectivamente.

Os valores A_x , A_y e A_z são magnitudes escalares que podem ser positivas, negativas ou nulas e recebem o nome de componentes do vetor \vec{A} .

Figura 1.11



Assim, o vetor \vec{A} em função de suas componentes cartesianas, pode ser escrito como:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

e seu módulo como:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Se um vetor forma ângulos α , β e γ com os eixos de coordenadas x , y e z respectivamente, podemos obter as componentes do vetor, fazendo a projeção do comprimento do vetor (módulo) sobre os eixos de coordenadas (Figura 1.12).

$$A_x = A \cos \alpha$$

$$A_y = A \cos \beta$$

$$A_z = A \cos \gamma$$

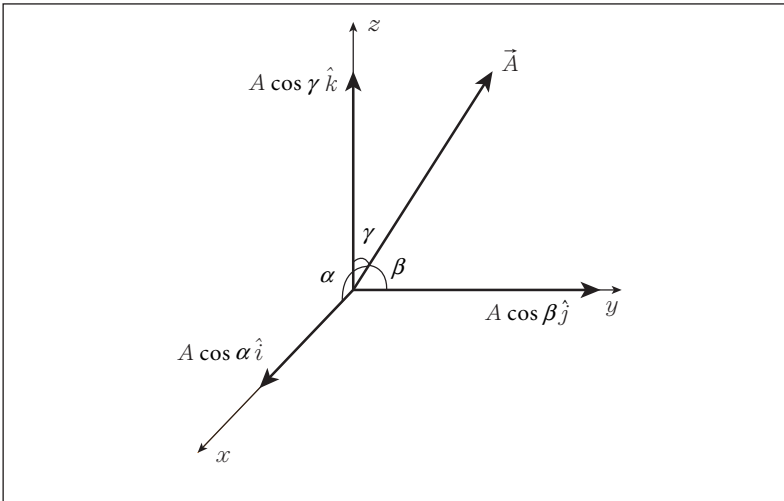


Figura 1.12

O vetor unitário de \vec{A} será:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}}{A} = \frac{A \cos \alpha \hat{i} + A \cos \beta \hat{j} + A \cos \gamma \hat{k}}{A}$$

$$\hat{A} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$$

Observa-se que o vetor unitário de \vec{A} tem, como componentes, os cossenos dos ângulos que o vetor faz com os eixos de coordenadas. Esses cossenos são chamados de cossenos diretores, já que fornecem a informação da orientação do vetor no espaço.

Assim, a expressão de um vetor, por meio de suas componentes, nos fornece toda a informação necessária, isto é, módulo, direção e sentido.

1.2.6 SOMA E SUBTRAÇÃO DE VETORES POR MEIO DE SUAS COMPONENTES

O resultado de uma soma de vetores é obtido mais facilmente com a utilização das componentes dos vetores. Por exemplo, dois vetores \vec{A} e \vec{B} ambos com suas respectivas componentes:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}$$

As componentes do vetor resultante são simplesmente a soma das componentes de cada um dos vetores em cada um dos eixos cartesianos. Isto também é válido para somas que envolvam mais do que dois vetores.

Uma análise similar pode ser feita na subtração de vetores, em que o vetor resultante será simplesmente a subtração das componentes dos vetores envolvidos na operação:

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) - (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x) \hat{i} + (A_y - B_y) \hat{j} + (A_z - B_z) \hat{k}$$

1.2.7 PRODUTO DE VETORES

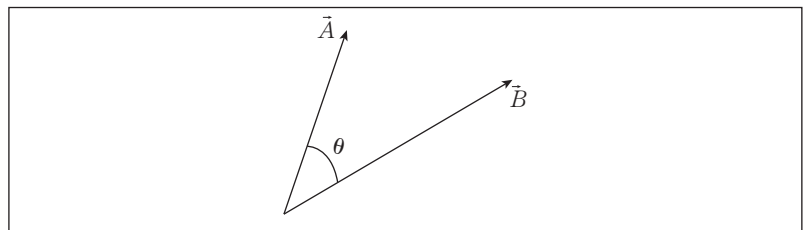
No decorrer deste livro, encontraremos muitas situações de interesse físico nas quais os resultados de grandezas físicas dependem do produto de duas grandezas vetoriais. Por exemplo, o trabalho necessário para deslocar um objeto depende do deslocamento (grandeza vetorial) e da força aplicada (grandeza vetorial). Em alguns casos, a grandeza física resultante, na qual estamos interessados, é uma grandeza escalar como o trabalho no exemplo anterior; e, outras vezes, o resultado procurado é uma grandeza vetorial.

Para descrever esses fenômenos de forma matemática correta, é necessário definir duas novas operações entre vetores. A operação entre dois vetores, que dê como resultado um escalar, chamaremos de **produto escalar**; e a operação matemática entre dois vetores, que dê como resultado outro vetor, chamaremos de **produto vetorial**.

1.2.7.1 Produto escalar

Denomina-se produto escalar de dois vetores \vec{A} e \vec{B} o valor escalar obtido do produto dos módulos dos vetores e do cosseno do ângulo que ambos formam (Figura 1.13).

Figura 1.13



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

O resultado da operação é um escalar que pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do ângulo entre os dois vetores:

$$0 \leq \theta < 90^\circ \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} > 0$$

$$90^\circ < \theta \leq 180^\circ \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} < 0$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

Aplicando o produto escalar entre os vetores unitários \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} teremos:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad \text{e} \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$

Assim, o produto escalar de dois vetores \vec{A} e \vec{B} , mediante suas componentes, se expressa como:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

O produto escalar de um vetor por ele mesmo é o módulo do vetor ao quadrado

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A A \cos(0^\circ) = A^2$$

1.2.7.2 Produto vetorial

Matematicamente, o produto vetorial de dois vetores \vec{A} e \vec{B} , se expressa como $\vec{A} \times \vec{B}$. O resultado da operação é outro vetor no qual o módulo, direção e sentido são obtidos da seguinte maneira:

Módulo: produto dos módulos dos vetores e o seno do ângulo que ambos formam:

$$A \cdot B \sin \theta$$

Direção: perpendicular ao plano que contém os dois vetores;

Sentido: Indicado pela regra da mão direita mostrado na Figura 1.14. Quando se orienta os dedos da mão direita de maneira que o primeiro vetor gire em direção ao segundo, o dedo polegar esticado mostrará o sentido do produto vetorial.

O produto vetorial é nulo se os dois vetores têm a mesma direção ($\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 180^\circ$) e não admite a propriedade comutativa. Mudar a ordem dos vetores implica a mudança do sinal do resultado $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ (Figura 1.15).

Figura 1.14

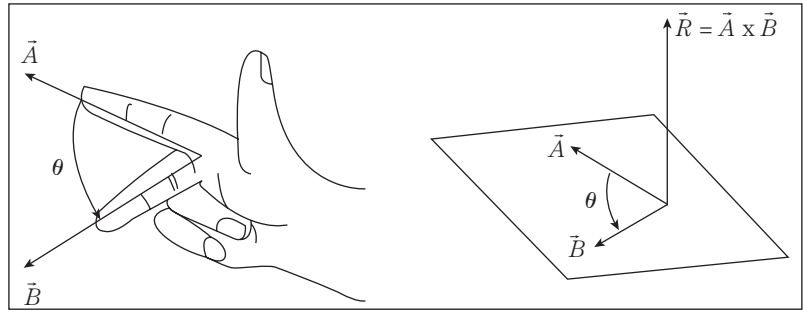
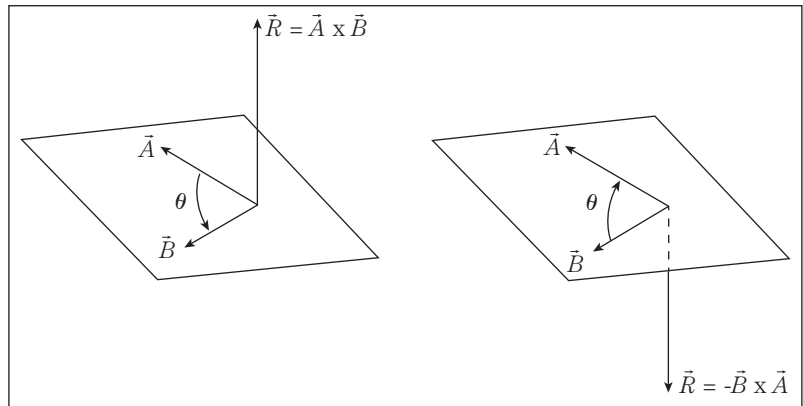


Figura 1.15



Se aplicarmos a definição do produto vetorial aos vetores unitários \hat{i} , \hat{j} e \hat{k}

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \quad \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

A expressão para o produto vetorial de dois vetores \vec{A} e \vec{B} em função de suas componentes será:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

VETORES UNITÁRIOS E COMPONENTES DE VETORES

- 1) O vetor \vec{A} da figura a seguir tem módulo igual a 60 unidades.
 - a) Encontrar a expressão do vetor em função dos vetores unitários no plano cartesiano e

b) O vetor unitário de \vec{A}

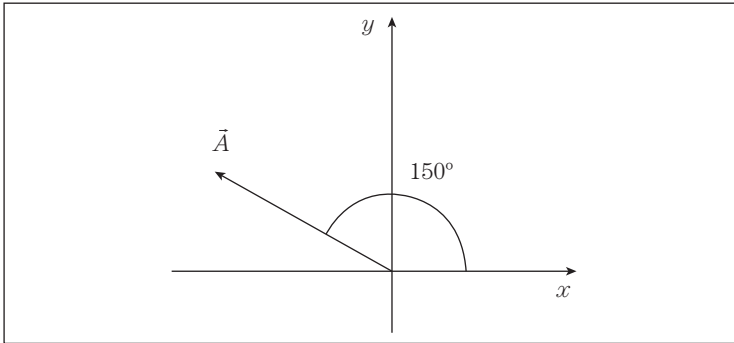


Figura 1.16

Solução:

a) Primeiramente, fazemos a projeção do vetor \vec{A} nos eixos x e y

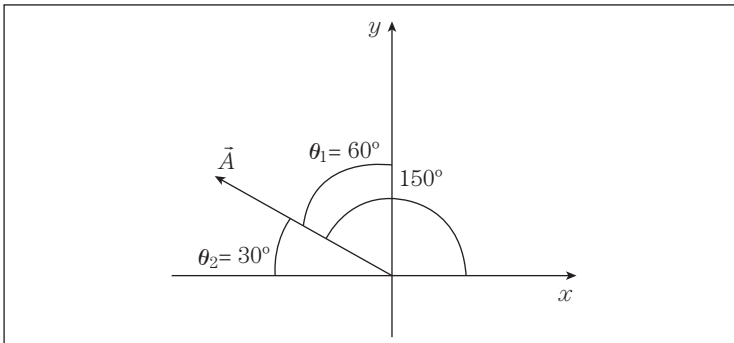


Figura 1.17

As componentes A_x e A_y podem ser obtidas usando tanto os ângulos θ_1 e θ_2 , assim como o ângulo de 150° .

Usando os ângulos θ_1 e θ_2 temos:

$$A_x = -A \cdot \cos \theta_2 = -60 \cdot \cos 30^\circ = -52$$

$$A_y = A \cdot \cos \theta_1 = 60 \cdot \cos 60^\circ = 30$$

Usando o ângulo de 150° temos:

$$A_x = A \cdot \cos 150^\circ = 60 \cdot \cos 150^\circ = -52$$

$$A_y = A \cdot \sin 150^\circ = 60 \cdot \sin 150^\circ = 30$$

A expressão do vetor \vec{A} em função dos vetores unitários é:

$$\vec{A} = -52\hat{i} + 30\hat{j}$$

b) Obtemos o vetor unitário de \vec{A} dividindo o vetor pelo seu módulo. Mostramos na continuação duas maneiras de cal-

cular o vetor unitário usando os cossenos diretores e as componentes A_x e A_y .

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{-60 \cdot \cos 30^\circ \hat{i} + 60 \cdot \cos 60^\circ \hat{j}}{60} = -\cos 30^\circ \hat{i} + \cos 60^\circ \hat{j}$$

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{-52\hat{i} + 30\hat{j}}{60} = -0,87\hat{i} + 0,5\hat{j}$$

- 2) Encontrar os cossenos diretores do vetor $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

Solução:

As componentes do vetor \vec{A} em função dos cossenos diretores são:

$$A_x = A \cos \alpha, \quad A_y = A \cos \beta, \quad A_z = A \cos \gamma$$

Então

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A}, \quad \cos \beta = \frac{A_y}{A}, \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{A}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3} = 0,67$$

$$\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3} = 0,67$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3} = 0,33.$$

- 3) Dois vetores \vec{A} e \vec{B} satisfazem as equações $2\vec{A} - \vec{B} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ e $-\vec{A} + \vec{B} = \hat{i} + \hat{j}$. Encontrar o módulo do vetor \vec{A} .

Solução:

$$\text{Seja } \vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\text{Da equação } -\vec{A} + \vec{B} = \hat{i} + \hat{j} \text{ obtemos } \vec{B} = (\hat{i} + \hat{j}) + \vec{A}$$

Substituindo esta última igualdade na equação $2\vec{A} - \vec{B} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ temos:

$$2\vec{A} - [(\hat{i} + \hat{j}) + \vec{A}] = (-\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$2\vec{A} - \vec{A} = (-\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) + (\hat{i} + \hat{j})$$

$$\vec{A} = (-1 + 1)\hat{i} + (-2 + 1)\hat{j} + (2 + 0)\hat{k}$$

$$\vec{A} = -\hat{j} + 2\hat{k}$$

Assim, $A_x = 0$, $A_y = -1$ e $A_z = 2$. Obtemos o módulo do vetor, usando o teorema de Pitágoras.

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = 2,23$$

- 4) Sabe-se que $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{R}$ está na direção vertical y .

Dados:

$$\vec{F}_1 = 24\text{N} \underline{180^\circ}, \quad \vec{F}_2 = 20\text{N} \underline{233^\circ} \quad \text{e} \quad \vec{F}_3 = 40\text{N} \underline{\varphi}$$

Determinar φ e \vec{R} .

Solução:

Primeiramente fazemos a representação gráfica das forças nos eixos xy ,

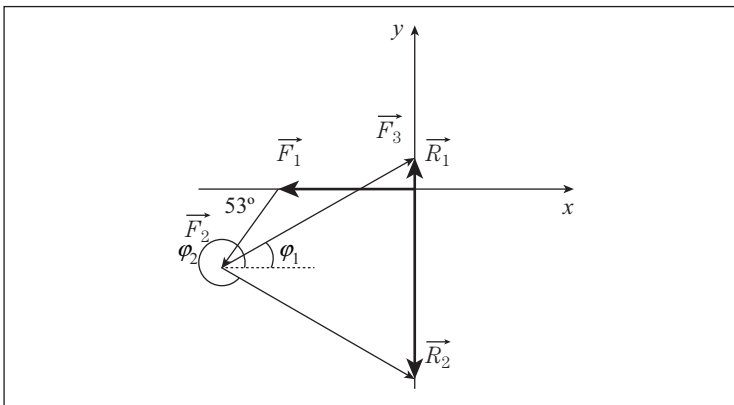


Figura 1.18

Pelo enunciado do problema, sabemos que a força resultante está no eixo y , isto é, se $\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$ então $R_x = 0$ ou $\vec{R} = R_y \hat{j}$

Decompondo as forças no eixo x temos

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$$

$$R_x = -F_1 - F_2 \cos 53^\circ + F_3 \cos \varphi = 0$$

$$-24 - 20 \cos 53^\circ - 40 \cos \varphi = 0$$

$$-24 - 12 - 40 \cos \varphi = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{36}{40}$$

Da representação gráfica das forças nos eixos de coordenadas xy , o ângulo φ pode ter valores $\varphi_1 = 25,8^\circ$ ou $\varphi_2 = 334,2^\circ$.

Para

$$\varphi_1 = 25,8^\circ$$

$$R_1 = R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

$$R_1 = 0 - F_2 \text{sen} 53^\circ + F_3 \text{sen} 25,8^\circ$$

$$R_1 = 0 - 20 \text{sen} 53^\circ + 40 \text{sen} 25,8^\circ$$

$$R_1 = 0 - 16 + 17,4$$

$$R_1 = 1,4 \text{ N}$$

Para $\varphi_2 = 334,2^\circ$

$$R_2 = 0 - F_2 \text{sen} 53^\circ + F_3 \text{sen} 334,2^\circ$$

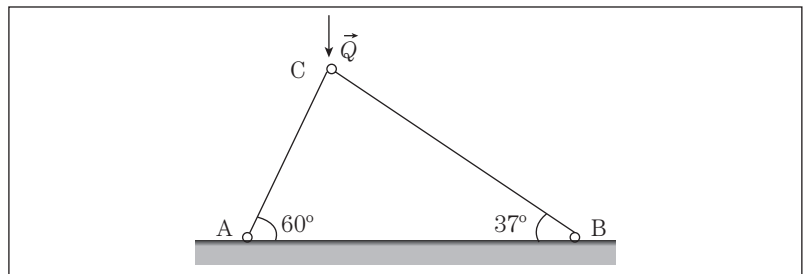
$$R_2 = 0 - 20 \text{sen} 53^\circ + 40 \text{sen} 334,2^\circ$$

$$R_2 = 0 - 16 - 17,4$$

$$R_2 = -33,4 \text{ N}$$

- 5) O esquema abaixo apresenta um sistema de barras de massas desprezíveis, articuladas nos pontos A, B e C. No ponto C age a carga \vec{Q} , de intensidade $Q = 100 \text{ N}$. Decompor \vec{Q} segundo as direções CA e CB ($\vec{Q} = \vec{a} + \vec{b}$) e:
- Calcular as intensidades das componentes, \vec{a} e \vec{b} .
 - Dar as suas expressões cartesianas.

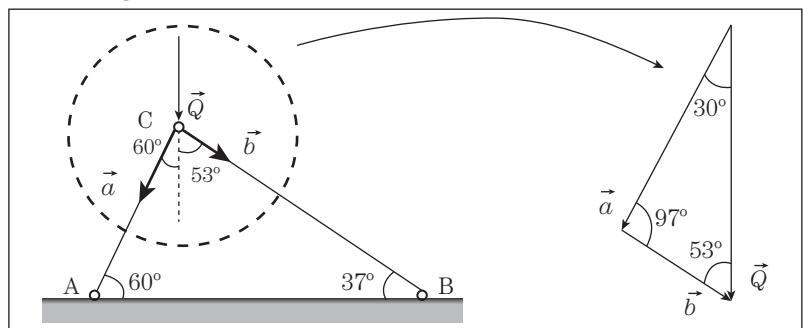
Figura 1.19



Solução:

Da figura

Figura 1.20



Aplicando a lei dos senos, calculamos as intensidades de a e b

$$\frac{a}{\text{sen}53^\circ} = \frac{b}{\text{sen}30^\circ} = \frac{Q}{\text{sen}97^\circ}$$

$$a = \frac{100\text{sen}53^\circ}{\text{sen}97^\circ} = 80,5 \text{ N} \quad \text{e} \quad b = \frac{100\text{sen}30^\circ}{\text{sen}97^\circ} = 50,4 \text{ N}$$

Decompondo os vetores \vec{a} e \vec{b} nos eixos x e y obtemos

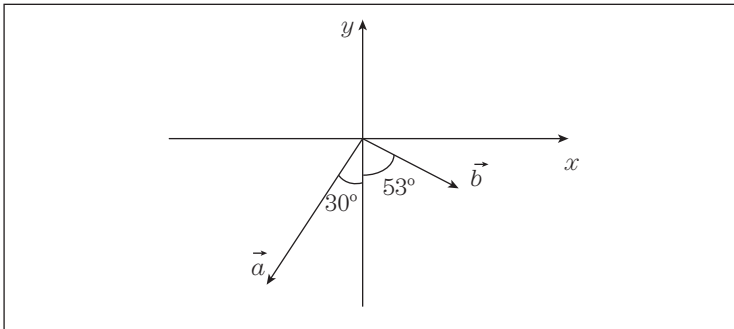


Figura 1.21

$$\vec{a} = -a\text{sen}30^\circ \hat{i} - a\text{cos}30^\circ \hat{j}$$

$$\vec{a} = -80,5\text{sen}30^\circ \hat{i} - 80,5\text{cos}30^\circ \hat{j}$$

$$\vec{a} = -40,3\hat{i} - 69,7\hat{j}$$

$$\vec{b} = b\text{sen}53^\circ \hat{i} - b\text{cos}53^\circ \hat{j}$$

$$\vec{b} = 50,4\text{sen}53^\circ \hat{i} - 50,4\text{cos}53^\circ \hat{j}$$

$$\vec{b} = 40,3\hat{i} - 30,3\hat{j}$$

O esforço a que se submete cada barra é de compressão e podemos verificar das expressões finais de \vec{a} e \vec{b} que

$$\vec{a} + \vec{b} = (-40,3\hat{i} - 69,7\hat{j}) + (40,3\hat{i} - 30,3\hat{j}) = -100\hat{j}.$$

PRODUTO ESCALAR

- 6) Encontrar o valor de r , de tal forma que os vetores $\vec{A} = 2\hat{i} + r\hat{j} + \hat{k}$ e $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ sejam perpendiculares entre si.

Solução:

Sabemos que, se o ângulo entre dois vetores é 90° , isto é, se eles são perpendiculares, o produto escalar de ambos é zero ou $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$.

Então:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} + r\hat{j} + \hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 0$$

$$(2)(4)\hat{i} \cdot \hat{i} + (r)(-2)\hat{j} \cdot \hat{j} + (1)(-2)\hat{k} \cdot \hat{k} = 0$$

$$8 - 2r - 2 = 0$$

$$2r = 6$$

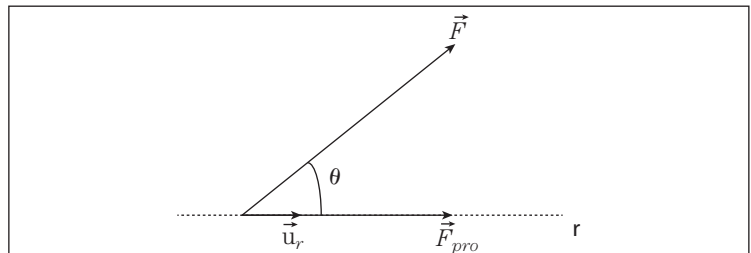
$$r = 3$$

- 7) Determinar a projeção de uma força de 10 N, cujos cossenos diretores são 0,29; 0,4 e -0,87, sobre uma linha reta com cossenos diretores -0,2; -0,6 e 0,8. Expressar o resultado na forma vetorial.

Solução:

Pela figura, observa-se que o vetor projeção \vec{F}_{pro} tem a mesma direção de r e o módulo $F \cos \theta$.

Figura 1.22



Logo

$$|\vec{F}_{pro}| = \vec{F} \cdot \vec{u}_r = |F| \cdot |1| \cos \theta$$

$$|\vec{F}_{pro}| = 10 [(0,29)(-0,2) + (0,4)(0,6) + (-0,87)(0,8)]$$

$$|\vec{F}_{pro}| = 10(-0,49225) = 4,932$$

O vetor projeção na forma vetorial é:

$$\vec{F}_{pro} = 4,923(-0,2\hat{i} + 0,6\hat{j} + 0,8\hat{k}).$$

PRODUTO VETORIAL

- 8) Sejam os vetores $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ e $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$. Encontrar o produto $\vec{A} \times \vec{B}$ e demonstrar que o vetor resultante é perpendicular a \vec{A} e a \vec{B} .

Solução:

Da expressão

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

Calculamos o vetor resultante

$$A_x = 3, A_y = -1, A_z = 1 \text{ e } B_x = 2, B_y = -3, B_z = 1$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = ((-1)(1) - (1)(-3)) \hat{i} + ((1)(2) - (3)(1)) \hat{j} + ((3)(-3) - (-1)(2)) \hat{k}$$

$$\vec{R} = \vec{A} \times \vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$$

Para comprovar se o vetor resultante é perpendicular aos vetores \vec{A} e \vec{B} , fazemos o produto escalar; e o resultado, tem de ser igual a zero.

$$\vec{A} \cdot \vec{R} = (3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}) =$$

$$(3)(2)\hat{i} \cdot \hat{i} + (-1)(-1)\hat{j} \cdot \hat{j} + (1)(-7)\hat{k} \cdot \hat{k} = 6 + 1 - 7 = 0$$

$$\vec{B} \cdot \vec{R} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}) =$$

$$(2)(2)\hat{i} \cdot \hat{i} + (-3)(-1)\hat{j} \cdot \hat{j} + (1)(-7)\hat{k} \cdot \hat{k} = 4 + 3 - 7 = 0$$

EXERCÍCIOS COM RESPOSTAS

VETORES UNITÁRIOS E COMPONENTES DE VETORES

- 1) São dados dois vetores, \vec{A} e \vec{B} , onde $|\vec{A}| = 27$ unidades orientado para leste e $|\vec{B}| = 15$ unidades orientado a 40° a norte do leste. Determinar $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$.

Resposta:

$|\vec{R}| = 18,3$ unidades; direção e sentido: 32° com a horizontal 1º Quadrante.

- 2) A resultante de duas forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 é $\vec{R} = 100\text{N}$ vertical para baixo. Se $|\vec{F}_1| = 60\text{N}$, horizontal para a direita, determinar \vec{F}_2 .

Resposta:

$|\vec{F}_2| = 117\text{N}$; direção e sentido: 59° com a horizontal 3º Quadrante.

- 3) Um bote é puxado por duas forças conforme a figura abaixo. A resultante das duas forças orienta-se segundo a reta x . Determinar:

a) o ângulo θ

Resposta:

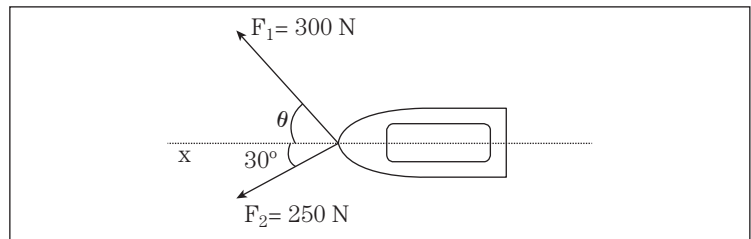
$$\theta = 25^\circ$$

b) o módulo da resultante $|\vec{R}|$

Resposta:

$$|\vec{R}| = 488 \text{ N.}$$

Figura 1.23



- 4) \vec{F} é uma força com componentes $F_x = -50 \text{ N}$ e $F_y = -80 \text{ N}$. Determinar e escrever a notação polar de \vec{F} .

Resposta:

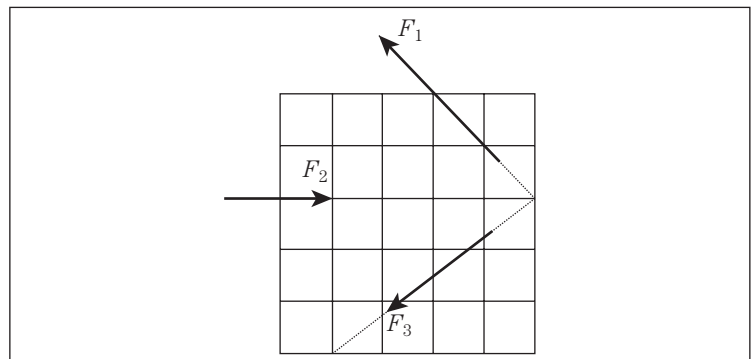
$|\vec{F}| = 94,3 \text{ N}$ direção e sentido: 58° com a horizontal 3º Quadrante.

- 5) As intensidades das forças na figura abaixo são $F_1 = 100 \text{ N}$, $F_2 = 50 \text{ N}$ e $F_3 = 60 \text{ N}$. Determinar a resultante do sistema de forças.

Resposta:

$R = 35 \text{ N}$; direção e sentido: 82° com a horizontal 2º Quadrante.

Figura 1.24



- 6) Sejam os vetores \vec{a} e \vec{b} de módulos $\sqrt{3}$ e 1 respectivamente. O vetor \vec{a} forma um ângulo de 30° com o eixo x e o vetor \vec{b} um ângulo de 30° com o eixo y , com os ângulos fornecidos no sentido anti-horário. Calcular:

- a) as componentes de ambos os vetores

Resposta:

$$\vec{a} = 1,5\hat{i} + 0,87\hat{j} \quad \text{e} \quad \vec{b} = -0,5\hat{i} + 0,87\hat{j}$$

- b) as componentes e o módulo do vetor $\vec{a} + \vec{b}$

Resposta:

$$\vec{a} + \vec{b} = \hat{i} + 1,74\hat{j} \quad \text{e} \quad |\vec{a} + \vec{b}| = 2$$

- c) as componentes e o módulo do vetor $\vec{a} - \vec{b}$

Resposta:

$$\vec{a} - \vec{b} = 2\hat{i} \quad \text{e} \quad |\vec{a} - \vec{b}| = 2$$

- 7) Considere o hexágono regular da figura. Expressar como uma combinação linear dos vetores $\overline{AB} = \vec{u}$ e $\overline{AC} = \vec{v}$ os vetores:

- a) \overline{BC}

Resposta:

$$\overline{BC} = \vec{v} - \vec{u}$$

- b) \overline{AO}

Resposta:

$$\overline{AO} = \vec{v} - \vec{u}$$

- c) \overline{AD}

Resposta:

$$\overline{AD} = 2(\vec{v} - \vec{u})$$

- d) \overline{DO}

Resposta:

$$\overline{DO} = \vec{u} - \vec{v}$$

- e) \overline{CD}

Resposta:

$$\overline{CD} = \vec{v} - 2\vec{u}$$

- f) \overline{AE}

Resposta:

$$\overline{AE} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$$

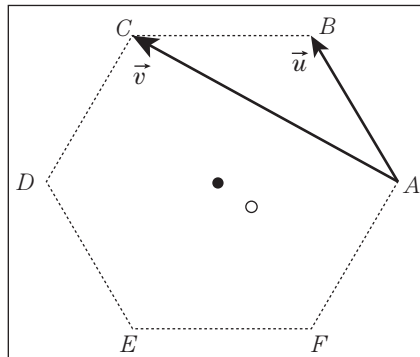


Figura 1.25

- 8) Expressar o vetor $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ como uma combinação linear dos vetores $\vec{u} = \hat{i} + \hat{k}$, $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j}$ e $\vec{w} = \hat{j} + \hat{k}$.

Resposta:

$$\vec{a} = 1\vec{u} + 0\vec{v} + 2\vec{w}$$

- 9) Sejam os vetores \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AE} e \overrightarrow{AB} , onde ABCD é um quadrado e E o ponto médio do lado BC (sendo AD = 1). Determinar:

- a) o vetor resultante \vec{R} e

Resposta:

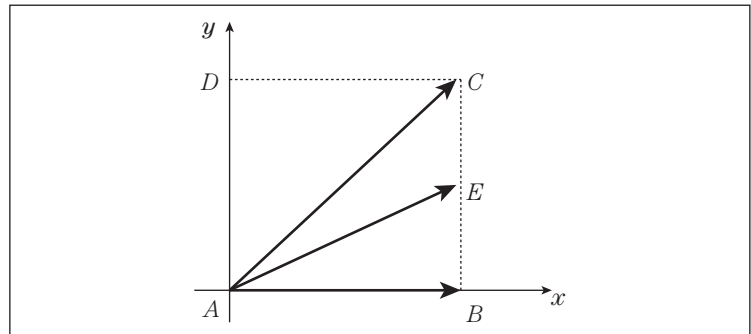
$$\vec{R} = 3\hat{i} + 1,5\hat{j}$$

- b) o módulo e o ângulo que o vetor resultante faz com o eixo x positivo.

Resposta:

$$|\vec{R}| = 3,35 \text{ e } \theta = 26,6^\circ$$

Figura 1.26



PRODUTO ESCALAR

- 10) Demonstrar que os vetores $\vec{a} = A \cos \theta \hat{i} + A \sin \theta \hat{j}$ e $\vec{b} = S \sin \theta \hat{i} - S \cos \theta \hat{j}$ são perpendiculares.

- 11) Sejam os vetores $\vec{a} = 7\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ e $\vec{b} = -3\hat{i} + \hat{k}$. Calcular:

- a) o ângulo que ambos os vetores fazem

Resposta:

$$\theta = 148,8^\circ$$

- b) os cossenos diretores dos vetores.

Resposta:

para o vetor \vec{a}

$$\left(\cos \alpha = \frac{a_x}{a} = 0,74, \cos \beta = \frac{a_y}{a} = 0,42, \cos \gamma = \frac{a_z}{a} = -0,53 \right)$$

para o vetor \vec{b} $\left(\cos \alpha = \frac{b_x}{b} = -0,94, \text{ e } \cos \gamma = \frac{b_x}{b} = 0,31 \right)$

- 12) O vetor posição de uma partícula é $\vec{r} = (A \cos \omega t)\hat{i} + (A \sin \omega t)\hat{j}$, onde A e ω são constantes e t a variável tempo. Calcular:

- a) o módulo e a derivada do módulo em relação a t

Resposta:

$$|\vec{r}| = A \text{ e } \frac{d|\vec{r}|}{dt} = 0$$

- b) $\frac{d\vec{r}}{dt}$ e $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$

Resposta:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -A\omega \sin \omega t \hat{i} + A\omega \cos \omega t \hat{j} \text{ e } \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = A\omega$$

- c) mostrar que os vetores \vec{r} e $\frac{d\vec{r}}{dt}$ são perpendiculares.

- 13) Sejam os vetores $\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ e $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j}$. Calcular as componentes do vetor unitário \vec{u} o qual está no plano determinado pelos vetores \vec{a} e \vec{b} e é perpendicular ao vetor $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$

Resposta:

$$\vec{u} = \frac{-\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{18}} \text{ ou } \vec{u} = \frac{\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{18}}$$

PRODUTO VETORIAL

- 14) Encontrar as componentes do vetor perpendicular aos vetores $\vec{A} = \hat{j} + 5\hat{k}$ e $\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{k}$

Resposta:

$$\vec{A} \times \vec{B} = 2\hat{i} - 15\hat{j} + 3\hat{k}$$

- 15) Sejam os vetores $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ e $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ Determinar:

- a) os módulos de \vec{a} e \vec{b}

Resposta:

$$|\vec{a}| = 4,2 \text{ e } |\vec{b}| = 5,4$$

b) o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$

Resposta:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 16\hat{i} - 12\hat{j} + \hat{k}$$

c) o vetor unitário perpendicular aos vetores \vec{a} e \vec{b}

Resposta:

$$\text{vetor unitário} = 0,8\hat{i} - 0,6\hat{j} + 0,05\hat{k}.$$

16) Sejam os vetores $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ e $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

a) Determinar os produtos vetoriais $(\vec{a} \times \vec{b})$ e $(\vec{b} \times \vec{a})$

Resposta:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -2\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k} \quad \text{e} \quad \vec{b} \times \vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 7\hat{k}$$

b) mostrar que os vetores resultantes são perpendiculares a \vec{a} e \vec{b} .

17) O produto vetorial de dois vetores é $\vec{a} \times \vec{b} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ sendo que $|\vec{a}| = 4$ e $|\vec{b}| = 7$ Calcular o produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Resposta:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 27,1$$

18) Achar o vetor de módulo 3 o qual é paralelo ao vetor resultante do produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$, onde $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ e $\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{k}$

Resposta:

$$2\hat{i} + 1,8\hat{j} + 1,3\hat{k}$$
