GERALDO ÁVILA

# VÁRIAS FACES DA MATEMÁTICA

## TÓPICOS PARA LICENCIATURA E LEITURA GERAL

2ª edição
revista e ampliada

Blucher

# VÁRIAS FACES DA MATEMÁTICA

## TÓPICOS PARA LICENCIATURA E LEITURA GERAL

Blucher

# GERALDO ÁVILA

# VÁRIAS FACES DA MATEMÁTICA

## TÓPICOS PARA LICENCIATURA E LEITURA GERAL

2ª edição revista e ampliada

*Várias faces da matemática*

1ª reimpressão – 2012
Editora Edgard Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-012 – São Paulo – SP – Brasil
Tel 55 11 3078-5366
**editora@blucher.com.br**
**www.blucher.com.br**

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009.



FICHA CATALOGRÁFICA

Ávila, Geraldo Severo de Souza,
Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral / Geraldo Severo de Souza Ávila. – 2. ed. – São Paulo: Blucher, 2010.

Bibliografia.
ISBN 978-85-212-0510-4

1. Matemática 2. Matemática – História
I. Título.

10-01431 CDD-510

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática 510

*Este livro é dedicado à minha cunhada*
*Nadia,*
*que desejava um livro de Matemática com muitas*
*amenidades...;*

*e também à minha estimada amiga e colega*
*Maria Zoraide,*
*que um dia deu-me um conselho decisivo para que*
*eu cuidasse de fazer o livro vir a lume.*

Eu quase que nada não sei, mas desconfio de muita coisa
Grande Sertão: Veredas

# Sumário

# Prefácio

Este livro, agora em sua segunda edição, reúne grande parte dos tópicos tratados em artigos que publicamos na RPM[1] desde seu início em 1982. Mas não se trata apenas de uma reprodução do que apareceu na Revista, pois houve acréscimos, correções e adaptações; e, na presente edição, acrescentamos os dois capítulos finais e aumentamos os Capítulos 8 e 11.

O livro reúne matéria variada, que é de interesse de professores do ensino fundamental e médio, e de alunos de licenciatura que se preparam para o magistério. Por isso mesmo, em muitas partes do texto há comentários sobre ensino que são de interesse direto desse público.

Mas o livro não se destina somente a essas pessoas. Ele é também dirigido àqueles que, embora não sejam profissionais da Matemática, nutrem gosto e admiração especiais por esse belo ramo do conhecimento humano. A esses e aos que, em geral, só desejam algum conhecimento de Matemática, ou apenas querem entender melhor a importância e o significado dessa ciência, temos uma palavra de encorajamento: a essência da Matemática não está nas fórmulas, mas nas ideias que impulsionam a criatividade de suas teorias. Portanto, nosso conselho a nossos leitores mais leigos é que não se deixem intimidar por fórmulas e equações. Não permitam que elas interrompam sua caminhada, e sempre que elas estiverem sendo um obstáculo difícil, melhor será abandoná-las à margem do caminho.

Os diferentes capítulos do livro são quase todos independentes uns dos outros, ou se interdependem muito pouco, a ponto de poderem ser lidos isoladamente. Isso até torna o livro "mais leve", já que pode ser aberto e lido a partir de qualquer capítulo, com muito poucas exceções. Mesmo que o leitor comece a ler uma página qualquer, ele poderá encontrar motivação para voltar ao início do capítulo correspondente ou mesmo a outra parte do livro.

Espero não ter fracassado em meu empenho de atender ao desejo de pessoas como minha cunhada Nadia, para quem o livro deve conter "muitas amenidades"... É certo que algumas partes do texto se tornam mais técnicas e podem

[1] Para os que ainda não sabem, RPM significa *Revista do Professor de Matemática*, uma publicação da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática).

ser uma barreira para alguns leitores, mas é certo também que qualquer leitor encontrará o que ler em várias partes do livro, pois muitos dos assuntos tratados são amenidades de puro deleite intelectual: episódios narrados num contexto histórico, fatos matemáticos relacionados com outras áreas do conhecimento, como a Astronomia e a Física. Mas também episódios de profunda influência no desenvolvimento da Matemática, como os Elementos de Euclides, as obras de Arquimedes, a demonstração da infinidade dos números primos, da existência de números irracionais, o surgimento das geometrias não euclidianas; e o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos, dos números transfinitos e dos Fundamentos da Matemática em tempos mais recentes.

Depois de quase 50 anos de magistério, com muitos erros, acertos e esforços de aprimoramento profissional, acreditamos ter adquirido uma experiência que nos autoriza não só a "dar conselhos" aos mais jovens, mas que também nos faz crer que isso é até uma obrigação de quem encerra sua carreira, não por vontade própria, mas pelo peso dos anos que se acumularam.

Um esclarecimento sobre notação: de acordo com uma norma que vem lá do final do século XVIII, quando foi criado o sistema métrico, um número de muitos algarismos deve ter suas classes divididas por um pequeno intervalo, como em 8 465 234 291. Essa norma não é seguida nos países de língua inglesa, onde se prefere escrever $8,465,234,291$. Entre nós, aqui no Brasil, é frequente a notação 8.465.234.291, que é a que preferimos e adotamos. Alguns alegam que ela é confusa, que o ponto é usado para indicar multiplicação; mas isto não é verdade, pois o ponto da multiplicação deve ficar no meio da linha, assim: $8 \cdot 465 \cdot 234 \cdot 291$.

Ficaremos muito gratos aos nossos leitores que se derem ao trabalho de nos alertar sobre erros de qualquer natureza que venham a encontrar no livro. Para isso, podem contactar-nos por intermédio da Editora ou diretamente em nosso endereço eletrônico: geraldoavila.df@gmail.com.

Renovamos aqui nossos agradecimentos a Luís Cláudio Lopes de Araújo, que preparou todas as ilustrações e desenhos do texto, tanto da primeira como os adicionais desta segunda edição, e nos prestou valiosa ajuda com o sistema LaTeX; e também ao Dr. Edgard Blücher pelo continuado interesse e acolhida ao nosso trabalho.

*Geraldo Ávila*
*Brasília, outubro de 2009*

# Capítulo 1

# Por que a Matemática?

## 1.1 Introdução

Todo professor de Matemática já deve ter tido a experiência de ser questionado por seus alunos sobre a importância da Matemática e sua utilidade. Eles costumam fazer perguntas deste tipo:

— Professor, para que serve toda essa Matemática que estamos estudando?

— Por que a gente tem de aprender todas essas coisas sobre triângulos, casos de congruência, semelhança etc. Afinal, de que vai me adiantar tudo isso na vida?

E o professor, frequentemente, se vê em dificuldades para dar respostas satisfatórias. Na verdade, perguntas desse tipo nem sempre têm respostas fáceis ou breves. Então, como responder-lhes?

Neste capítulo inicial vamos abordar esse tema, procurando ajudar o professor, primeiro, a bem entender toda a riqueza da Matemática e seu verdadeiro papel na formação do aluno; e, depois, a lidar com essas perguntas sobre o porquê da Matemática.

## 1.2 Primeiras justificativas

As razões mais frequentemente mencionadas para justificar o ensino da Matemática são as seguintes:

*A Matemática é necessária em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade.*

*A Matemática é importante porque desenvolve o raciocínio lógico.*

Essas razões, embora legítimas, não são as mais importantes, nem são tudo o que justifica o papel da Matemática no ensino. A primeira delas, por exemplo, é praticamente irrelevante para uma pessoa interessada em estudos na área de humanidades. De fato, basta um conhecimento elementar de operações com números para atender razoavelmente bem as diversas necessidades do dia a dia. Aliás, até ironicamente, o avanço tecnológico criou uma situação curiosa: hoje em dia o cidadão necessita de menos Matemática — pelo menos, no que diz respeito a cálculos com números — do que décadas atrás, quando não dispúnhamos, como hoje, desses instrumentos tão eficazes, que são as calculadoras de bolso.

Como se vê, as técnicas matemáticas de que necessitamos em nosso cotidiano são tão modestas que podem ser plenamente atendidas no ensino das primeiras cinco ou seis séries do ensino fundamental. Por que, então, ensinar Matemática até a última série do ensino médio? Será que a segunda das razões citadas justifica esse ensino? A nosso ver, ela também é insuficiente como explicaremos a seguir.

## 1.3 Além do raciocínio dedutivo

A idéia de que o pensamento matemático se reduz a seus aspectos lógico-dedutivos — uma ideia muito difundida, mesmo entre professores de Matemática — é incompleta e exclui o que há de mais rico nos processos de invenção e descoberta. O pensamento matemático vai muito além do raciocínio dedutivo. Em seus aspectos mais criativos, a Matemática depende da intuição e da imaginação, às vezes até mais que da dedução. Vamos explicar isso a seguir.

A intuição é a faculdade mental que permite obter o conhecimento de maneira direta, sem a intervenção do raciocínio. Os matemáticos frequentemente se referem a algum fato como "intuitivo", querendo com isso dizer que se trata de algo cuja veracidade é facilmente reconhecível. Mas é bom lembrar que "intuitivo" não é sinônimo de "fácil". Há muitas verdades profundas e difíceis que são apreendidas pela intuição.

## 1.4 Intuições e conjecturas famosas

A intuição é, na verdade, uma faculdade mental mais poderosa que o próprio raciocínio. É por meio dela que ocorrem as grandes criações do ser humano, nas artes, na filosofia e nas ciências. Henri Poincaré (1854–1912), o mais eminente dos matemáticos de sua época, testemunhou bem isso, num artigo que escreveu sobre "criação matemática", em que ele conta várias de suas experiências como pesquisador. Uma dessas experiências ocorreu em suas tentativas de demonstrar certo teorema no estudo das chamadas "funções automorfas". Depois de vários dias de trabalho sem sucesso, ele interrompeu suas pesquisas para fazer uma excursão geológica com várias outras pessoas. Foi como se estivesse tirando umas férias da Matemática, passando dias distraído com outras coisas. Num dos momentos da viagem, segundo ele conta, veio-lhe à mente, assim de súbito, a ideia de utilizar, na demonstração de seu teorema, certos recursos matemáticos que já havia empregado tempos antes numa outra situação. E, ao voltar para casa, examinando detidamente essa ideia, pôde verificar que ela era realmente a chave da solução que procurava. A "ideia", de fato, tinha seu "mérito".

Ideias são coisas que nos vêm por intuição. Uma ideia não se deduz, "se intui". Albert Einstein (1879–1955) concebeu a ideia de que a velocidade da luz no vazio seria independente da velocidade da fonte luminosa; e também a ideia de que o tempo não seria uma grandeza física absoluta, mas deveria ser entendido como ligado ao sistema de referência, do mesmo modo que o espaço. A partir desses dois postulados, ele construiu sua Teoria da Relatividade Restrita por deduções sucessivas, do mesmo modo como fazemos em Geometria, provando teoremas a partir de outros mais simples. Essas ideias de Einstein lhe vieram à mente por intuição, não por dedução. Outro exemplo mais conhecido e mais antigo de formulação axiomática em Física encontra-se na mecânica newtoniana, alicerçada nas chamadas três leis do movimento de Newton (1642–1727). Exemplos como esses existem em abundância na História da Ciência, não apenas em Matemática e nas ciências exatas.

Em Matemática, particularmente, é muito comum um pesquisador, em conversa com colegas, tecer comentário sobre algum resultado novo que acredita ser verdadeiro, embora não disponha ainda de uma demonstração. O pesquisador, com sua experiência e familiaridade em determinada área de investigação, valendo-se das várias modalidades do raciocínio (indução, analogia de uma situação com outra, argumentos de plausibilidade) e da intuição, é levado a suspeitar da validade de um novo resultado ou teorema. A demonstração, em geral, é a etapa final, que completa o trabalho de investigação. E muitas vezes, por não conseguir encontrar uma demonstração, o teorema, tendo já adquirido credibilidade na comunidade matemática, impõe-se com o nome de "conjectura", "hipótese" ou mesmo "teorema". Há assim várias conjecturas na literatura matemática, ou seja, resultados ainda não demonstrados, mas que os matemáticos acreditam serem verdadeiros. De vez em quando uma dessas conjecturas é demonstrada, geralmente por algum matemático jovem, que se torna, então, famoso e bastante conhecido entre seus pares. Dentre as muitas dezenas de tais resultados, alguns já demonstrados, outros não, vamos falar, a seguir, de apenas quatro deles.

A conjectura mais famosa, não resolvida até hoje, é a chamada "Hipótese de Riemann", formulada pelo matemático alemão Bernard Riemann (1826–1866) em meados do século XIX. Seu enunciado envolve conceitos avançados, difíceis de serem explicados aqui.

O chamado "Último Teorema de Fermat" diz que não existem inteiros positivos $a$, $b$, $c$ e $n$, com $n > 2$, tais que $a^n + b^n = c^n$. Esse teorema foi uma conjectura que desafiou os matemáticos por cerca de três séculos e meio, até ser resolvida em 1995 pelo matemático Andrew Wiles (1953–). Sua prova aparece no contexto de uma ampla teoria pertencente a duas importantes e difíceis disciplinas matemáticas, a Teoria dos Números e a Geometria Algébrica.

Outra conjectura ainda não resolvida, e que pertence ao domínio da teoria dos números é a chamada "Conjectura dos primos gêmeos". Primos gêmeos são números primos que diferem por duas unidades, como 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19, 29 e 31 etc. Pois bem, suspeita-se que haja uma infinidade de tais pares de primos, mas até hoje não se conseguiu demonstrar isto.

Uma outra importante conjectura é devida a Poincaré, já que foi formulada pelo ilustre matemático francês em 1904, por isso mesmo é chamada "Conjectura de Poincaré". Ela foi demonstrada verdadeira em 2006 por um matemático russo. Como a Hipótese de Riemann, ela também envolve conceitos avançados de Matemática.

Essas breves considerações mostram o quanto de riqueza existe no pensamento matemático para além de seus aspectos lógico dedutivos. Imaginação e intuição são instrumentos tão importantes na invenção matemática como o são para o pintor que concebe um quadro, para o escritor que planeja uma obra literária ou para o músico em suas composições.

## 1.5 As razões maiores para o ensino da Matemática

O ensino da Matemática é justificado, em larga medida, pela riqueza dos diferentes processos de criatividade que ele exibe, proporcionando ao educando excelentes oportunidades de exercitar e desenvolver suas faculdades intelectuais.

Mas a razão mais importante para justificar o ensino da Matemática é o relevante papel que esta disciplina desempenha na construção de todo o edifício do conhecimento humano. Desde os primórdios da civilização, o homem, como "ser pensante", sempre quis entender o mundo em que vive. Será que a Terra é plana? Como se suporta? Como são seus limites últimos? A abóbada celeste é uma fronteira última, com as estrelas nela incrustadas? E o que são essas estrelas? Por que e como alguns corpos celestes — os planetas — se deslocam erraticamente? O que existe para além dessa abóbada? Como explicar os movimentos do Sol e da Lua? A matéria é indefinidamente divisível ou constituída de "átomos" indivisíveis? Ou cada tipo de matéria é formada de alguns elementos básicos, como terra, água, fogo e ar?

Perguntas como essas certamente atormentaram o espírito humano por muitos milênios, até que, a partir do século VI a.C., começaram a ser respondidas, e com muito sucesso. Foram ideias matemáticas simples de semelhança de figuras geométricas e proporcionalidade que permitiram aos astrônomos, já no século III a.C., calcular o tamanho da Terra (Capítulo 3), os tamanhos do Sol e da Lua e as distâncias a que se encontram esses astros da Terra (Capítulo 4). E a solução desses problemas mudou radicalmente a ideia do homem a respeito do mundo em que vivia.

As ideias de Copérnico (1473–1543), Galileu (1564–1642) e Kepler (1571–1630) sobre o sistema solar, bem como os dados de observação de Tycho Brahe (1546–1601), culminaram, no século XVII, com a teoria da gravitação de Newton, que dava ao homem um novo e poderoso instrumento de compreensão do sistema solar. Os desenvolvimentos que se seguiram, sobretudo com os trabalhos de Laplace (1749–1827), iriam resgatar a antiga ideia de Pitágoras (séc. VI a.C.) de que "o número é a chave para a compreensão dos fenômenos", pois ficava agora evidente que os movimentos dos planetas obedeciam a leis matemáticas precisas. Isso teve influência decisiva no pensamento racionalista do século XVIII, portanto, nas próprias concepções filosóficas dessa época. Voltaire (1694–1778), por exemplo, que passou alguns anos de sua vida na Inglaterra, de lá voltou entusiasmado com muito do que viu, em particular com a obra de Newton, da qual foi um grande divulgador entre os franceses.

Ideias sobre a constituição da matéria ocorreram na antiguidade, sendo bem conhecidas as de Leucipo e Demócrito, cuja eficácia só pode ser comprovada com o desenvolvimento da Química no século XIX. E novamente aqui o instrumental matemático está na base da solução dos problemas.

Já no século XX, e graças a eficazes ideias matemáticas, novamente o homem alargou as fronteiras do mundo em que vive, calculando distâncias astronômicas fantásticas e formulando teorias cosmológicas que indicam que o universo em que vivemos teve origem há uns 14 bilhões de anos.

Mais recentemente, os avanços da Biologia Molecular, alicerçados em ideias matemáticas, abrem perspectivas de progressos até há algumas décadas sequer sonhados sobre os mistérios da vida, sobre a diversidade das espécies e sobre a engenharia genética.

Até mesmo em vários domínios da Arte a Matemática tem tido uma influência substancial e direta, como na Arquitetura, na Escultura, na Pintura e na Música.

Na Pintura, particularmente, foi graças a ideias matemáticas de paralelismo e projeção que os pintores da Renascença criaram a ciência da Perspectiva, que lhes tornou possível retratar em suas telas uma realidade marcada por intenso humanismo.

A descoberta de que Matemática e Música estão intimamente relacionadas remonta a Pitágoras. Mas foi só no século XVIII que a teoria musical encontrou bases seguras para se estruturar cientificamente; e aqui, novamente, foram ideias matemáticas que permitiram uma interpretação científica dos fenômenos sonoros.

Há um importante campo de estudos, que é domínio próprio da Matemática, conhecido como *Lógica e Fundamentos*, no qual foram realizadas, por volta de 1930, notáveis descobertas,[1] que estabelecem ser inalcançável o objetivo de organizar logicamente a Matemática, de forma a garantir que todas as suas proposições possam ser testadas como verdadeiras ou falsas. Em outras palavras, o edifício matemático, como resultado do trabalho humano, não tem nem pode ter garantida sua consistência. Isso se reflete em todo o conhecimento humano, já que a Matemática é, direta ou indiretamente, instrumento do qual dependem, para sua organização, as demais ciências, como a Física, a Química, a Biologia, a Astronomia etc. Em consequência, todo o conhecimento construído pelo homem está necessariamente marcado pelas limitações de sua própria intelectualidade. E é esse mesmo conhecimento que revela essas limitações; vale dizer, o homem descobre as limitações de seu intelecto, graças ao exercício desse mesmo intelecto!

Esses vários exemplos mostram o quanto as "ideias matemáticas" têm estado presentes na construção de todo o edifício do conhecimento, influindo também, de maneira profunda e marcante, nas próprias concepções filosóficas do homem diante de sua existência e do mundo em que vive. Por isso mesmo, o ensino da Matemática tem justificativas mais amplas e abrangentes que apenas aquelas duas citadas no início deste capítulo. Podemos assim enunciá-las:

*A Matemática deve ser ensinada nas escolas porque é parte substancial de todo o patrimônio cognitivo da Humanidade. Se o currículo escolar deve levar a uma boa formação humanística, então o ensino da Matemática é indispensável para que essa formação seja completa.*

*O ensino da Matemática se justifica ainda pelos elementos enriquecedores do pensamento matemático na formação intelectual do aluno, seja pela exatidão do pensamento demonstrativo que ela exibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios por indução e analogia.*

*O ensino da Matemática é também importante para dotar o aluno do instrumental necessário no estudo das outras ciências e capacitá-lo no trato das atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade.*

É claro que uma pessoa pode prescindir de conhecimento matemático e mesmo assim ser um grande ator, escritor, estadista, enfim, um profissional realizado em muitos domínios do conhecimento. Mas certamente seus horizontes culturais serão mais restritos. A situação é análoga à de uma pessoa que, mesmo possuindo competência matemática, tenha pouco ou quase nada de conhecimentos

[1] Das quais voltaremos a falar no Capítulo 11.

humanísticos; seus horizontes culturais também serão mais limitados.

## 1.6 Ensino orgânico e integrado

Para atingir plenamente seus objetivos, o ensino da Matemática deve ser feito de maneira a atender a certos requisitos básicos, que enunciamos a seguir:

*O ensino deve sempre enfatizar as ideias da Matemática e sua importância no desenvolvimento da própria Matemática.*

*Os diferentes tópicos da Matemática devem ser tratados de maneira a exibir sua interdependência e organicidade.*

*O ensino da Matemática deve ser feito de maneira bem articulada com o ensino de outras ciências, sobretudo a Física.*

## 1.7 Em classe

Neste ponto, voltamos à questão inicial das dificuldades do professor em satisfazer o desejo de seus alunos que perguntam para que serve o que estão aprendendo, ou por que têm de estudar este ou aquele tópico. Nem sempre o professor tem uma explicação satisfatória, e às vezes até encerra o assunto com uma resposta nada convincente: "Você precisa aprender isso agora como embasamento para o que vai aprender mais tarde".

Em situações como essa quem tem razão é o aluno: sua curiosidade por uma justificativa adequada das coisas que lhe são ensinadas é mais do que natural. Ele precisa de respostas claras que satisfaçam sua curiosidade e estimulem sua mente inquisitiva. Só assim o professor poderá transformar o desinteresse do aluno pela Matemática em sua ativa participação no aprendizado.

Como dissemos no início do capítulo, essas perguntas não têm respostas fáceis nem breves. O ideal seria que o ensino pudesse se desenvolver de maneira a justificar, a cada passo, a relevância daquilo que se ensina. Cada novo tópico a ser tratado seria devidamente motivado. Embora isso não possa ser feito sempre, o professor certamente pode, com frequência, formular problemas práticos interessantes e trazer à aula pequenas histórias que ajudem a despertar a curiosidade dos alunos. Nos capítulos seguintes apresentamos vários desses problemas e histórias.

Trazendo frequentemente a suas aulas histórias, problemas e questões interessantes, o professor desperta no aluno uma crescente admiração pelo largo alcance da Matemática, estimulando seu interesse pela disciplina. E assim procedendo, ele se antecipa às perguntas dos alunos sobre a relevância da Matemática, a ponto de eles nem terem tanta necessidade de fazê-las. Aliás, se fazem tais perguntas — ou as fazem com muita frequêcia —, isto já é, em si, um sintoma de que algo deve ser feito para motivá-los. Talvez o ensino esteja se desenvolvendo muito abstratamente, sem exibir a relevância dos conceitos introduzidos. É o que acontece, por exemplo, com o ensino de funções a partir do produto cartesiano de conjuntos, seguido de relações, a função sendo definida como um tipo particular de relação; depois funções injetivas, bijetivas, sobrejetivas, função composta etc. Diante de uma tal "enxurrada" de novos conceitos, cuja utilidade não é imediatamente visível, é natural que o aluno pergunte: mas para que tudo isso? E ele tem razão. Aqui o professor não pode pôr a culpa no aluno; antes, ele deve voltar-se para si mesmo e questionar seu próprio ensino, procurar ver o que está fazendo de deficiente e em que pode ser melhorado. Mas nunca deve deixar essas perguntas sem respostas ou descartá-las como impertinentes ou extemporâneas. E se não estiver preparado para uma resposta satisfatória — o que acontece até mesmo com os professores mais experientes — o certo é dar alguma resposta parcial ou provisória, sem rodeios ou evasivas. E procurar se informar para, numa aula posterior, voltar ao assunto e esclarecer seus alunos.

## 1.8 Ensino equilibrado

Esse exemplo que acabamos de dar, do ensino "abstrato" de funções, ilustra muito bem esse péssimo hábito de introduzir conceitos novos sem nenhuma necessidade imediata. Em nosso entender, a introdução de conceitos novos, de preferência, só deve ser feita quando esses conceitos forem necessários ao próprio desenvolvimento do ensino. Por exemplo, só faz sentido falar de função injetiva quando tal conceito estiver sendo necessitado numa situação concreta, como no caso de se falar também de função inversa. Mesmo aqui, somente se tivermos algo importante a fazer com a inversa, como é o caso no estudo de exponenciais e logaritmos.

Não queira também o professor apresentar todas as justificativas e motivações do ensino da Matemática de uma só vez, nem despejar sobre os alunos todas as histórias sobre a relação da Matemática com outras ciências. Tudo deve ser feito aos poucos, em pequenas doses. O ideal é que o professor esteja sempre preparado com algumas historinhas e exemplos de aplicações para serem apresentados nos momentos mais oportunos.

E é importante que as aplicações ou contextualizações sejam interessantes e sem artificialismos. Assim, calcular o tamanho da Terra, como fez Eratóstenes na Antiguidade (Capítulo 3), certamente é uma aplicação de grande relevância que, devidamente apresentada, há de motivar os alunos e estimular seu interesse e admiração pela Matemática. Indo a outro extremo, seria contraproducente propor o problema de calcular a quantidade de tecido necessário para fazer uma toalha na forma de um trapézio de bases 180 e 240 centímetros e altura 120, pois não se costumam fazer toalhas assim... Melhor seria calcular a área de um terreno com a mesma forma trapezoidal (trocando convenientemente as dimensões); ou, simplesmente, calcular a área do trapézio.

Embora motivação e aplicações sejam importantes, não se pode ir a extremos, querendo que toda a Matemática seja sempre ensinada com aplicações. A apresentação frequente de aplicações leva o estudante a adquirir entusiasmo e admiração pela Matemática, a ponto de se interessar por questões puramente teóricas, que exibam ideias ou fatos interessantes em si mesmos, independentemente de aplicações práticas.

## 1.9 Teoremas e demonstrações

Sim, teoremas e demonstrações também são uma parte importante no ensino. É deplorável constatar que esses recursos tenham sido abandonados já há tantos anos! Como se pode falar de Matemática sem teoremas e demonstrações?! Isso é essencial no ensino, não pode faltar! Como sabemos que existe uma infinidade de números primos? Por causa de uma demonstração! (feita na p. 111.) Como sabemos que não existe fração cujo quadrado seja 2? Por causa de uma demonstração! (feita na p. 71.) Como sabemos que a série harmônica diverge? Por causa de uma demonstração! aliás, bem simples e inteligível a qualquer jovem de 12 ou 13 anos de idade (a qual está feita na p. 159). É um absurdo, um verdadeiro insulto à inteligência dos jovens apresentar-lhes resultados como esses, "dogmaticamente", sem justificativa nenhuma, isso é inaceitável. Melhor, então, não ensinar.

É claro que aqui também não se deseja ir a extremos. Uma aula inteira com pesadas demonstrações é contraproducente; ou mesmo semanas a fio só com teoremas e mais teoremas. Tudo tem de ser devidamente dosado e judiciosamente entremeado com a parte prática, para que o aluno possa compreender bem a necessidade e o mérito das demonstrações. E seja, enfim, levado a entender que não se faz uma autêntica Matemática sem teoremas e demonstrações. E é importante também que o professor saiba escolher certos teoremas bem interessantes, como os dos três exemplos citados há pouco, e faça uma boa apresentação deles, motivando a necessidade das demonstrações.

Um outro bom exemplo está na matéria tratada logo a seguir, no próximo capítulo. Fazemos ali a apresentação de um problema interessante, cercado de uma história curiosa e até engraçada, para, no final, chegarmos a uma demonstração. Mas, veja bem: nesse caso o teorema foi devidamente motivado, e sua veracidade foi até verificada, antes mesmo de sua demonstração. Algo parecido acontece nas matérias tratadas nos Capítulos 3 e 4, e em vários outros capítulos do livro. Quando situações como essas são apresentadas, o aluno fica bem preparado para compreender a necessidade de apresentações mais teóricas de teoremas e demonstrações.

É importante ter sempre presente que em todos os tópicos tratados no ensino, inclusive nas demonstrações, é de suma importância ressaltar as *ideias* envolvidas, pois são elas que respondem pela criatividade das teorias matemáticas; e são elas também que podem despertar o interesse do aluno, se é que o ensino esteja sendo bem conduzido.