FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA GEOFÍSICA I

Funções de uma Variável

RODRIGO S. PORTUGAL

Blucher

Fundamentos Matemáticos para Geofísica I
Funções de uma Variável

Blucher

Rodrigo S. Portugal

Pesquisador Sênior

Schlumberger

Fundamentos Matemáticos para Geofísica I
Funções de uma Variável

Fundamentos matemáticos para geofísica I: funções de uma variável

Editora Edgard Blücher Ltda.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-012 – São Paulo, SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
editora@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

Ficha catalográfica

Fundamentos matemáticos para geofísica / Rodrigo S. Portugal. – São Paulo: Blucher, 2012.
Bibliografia

ISBN 978-85-212-0484-8

1. Geografia física 2. Matemática I. Título.

08-10656 CDD-515

Índices para catálogo sistemático: 1. Geofísica: Fundamentos matemáticos 515

Nota do Autor

Podemos chamar de Geofísica a ciência aplicada que tem como base o conjunto das teorias que tratam quantidades físicas e os fenômenos que as relacionam, tais como campos gravitacionais, campos elétricos, perturbações mecânicas, ondas elásticas e acústicas, entre outros, com o objetivo final de obter informações qualitativas e quantitativas sobre a Terra.

As teorias e técnicas geofísicas são derivadas das próprias teorias físicas, usualmente lecionadas nas universidades, as quais, em geral, são descritas por meio de leis e equações matemáticas. O objetivo deste livro é, portanto, prover fundamentação matemática aos estudantes de geofísica, geoengenharia, geologia, entre outros, para que construam uma base teórica minimamente suficiente para a compreensão de tais teorias e técnicas geofísicas.

Como o objetivo principal é atingir uma grande variedade de tópicos e não a profundidade de cada um, infelizmente o leitor ávido por demonstrações e rigor matemático vai encontrar somente uma boa variedade de tópicos, os quais possuem aprofundamento em referências citadas ao longo do texto. Um material mais completo e aprofundado das teorias descritas neste texto pode ser encontrado nas referências listadas ao final desta edição.

Neste livro, é adotada a postura preconizada pelo matemático George Pólya, de que a base para o aprendizado de matemática é a resolução de exercícios. Por isso mesmo este volume contém 380 exercícios, dentre os quais podem ser encontrados alguns mais aplicados, outros mais técnicos e também mais teóricos. Alguns exercícios, considerados mais difíceis pelo autor, são marcados com o símbolo (↯), para alertar ao leitor que a tarefa será trabalhosa.

O material abordado neste trabalho, incluindo a teoria, exemplos, aplicações e exercícios, está relacionado essencialmente ao conceito de função de uma variável. Em geral, os dez capítulos possuem grau crescente de dependência dos anteriores, de modo que eles devem ser lidos ou apreciados de maneira sequencial. Com a finalidade de dar um sabor mais palatável a todo o ferramental matemático apresentado, ao longo de todo o texto foram inseridas seções especiais de aplicação em Geofísica, marcadas com asterisco ($*$), sempre após a apresentação da teoria minimamente necessária para o seu desenvolvimento.

Os oito primeiros capítulos formam a base do se chama curso de cálculo, e o seu objetivo é trazer uma revisão de cálculo diferencial e integral. Para um material mais detalhado, o leitor deve procurar outras obras mais completas, tais como, por exemplo, Apostol (1967b) e Guidorizzi (2002) e obras com caráter mais abrangente, tal como Spiegel (1972) e Wrede & Spiegel (2002).

No Capítulo 1, é apresentado o conceito de função, que, em geral, é uma regra que estabelece uma conexão entre dois conjuntos, fazendo com que o comportamento da variável de um conjunto seja vinculado ao comportamento da variável do outro conjunto. No começo, são fornecidas definições básicas e intuitivas para, em seguida, apresentar as funções elementares, que são os tipos de funções mais comuns que aparecem na modelagem de fenômenos naturais, em particular nas geociências. Por fim, introduzimos o conceito de limite para, em seguida, definirmos uma classe de função largamente utilizada, chamada função contínua.

No Capítulo 2, são apresentadas as técnicas mais básicas de se construir novas funções a partir de funções previamente definidas, fazendo uso de operações tais como combinação e composição de funções. Em princípio, tais operações podem ser aplicadas a quaisquer funções, incluindo as próprias funções recém-construídas, de modo que este processo de montagem de funções pode ser realizado indefinidamente, criando-se uma grande variedade de funções. Um caso particular de composição de funções que dá origem à definição de função inversa. Além disso, apresentaremos as operações morfológicas sobre funções, que basicamente são a composição de uma função qualquer com funções afim. Por fim, é apresentado o conceito da periodicidade de funções, como também o da simetria de funções em relação aos eixos coordenados, por meio da definição de funções pares e ímpares. A partir de ambos conceitos, mais duas maneiras de se construir novas funções são apresentadas, chamadas, respectivamente, de extensões periódicas e extensões par e ímpar.

No Capítulo 3, apresentamos alguns exemplos de funções utilizadas em geofísica e geociências. Certamente não é uma coleção vasta de exemplos, porém o principal intuito é ilustrar a utilização de funções elementares em problemas aplicados, familiarizando o leitor com algumas aplicações do ramo de geociências. Mais especificamente são tratados os seguintes temas: a função gaussiana, as ondaletas de Ricker e Gabor, a função seno-cardinal sinc, a curva de Hubbert para o pico da produção de petróleo, a lei de Faust para velocidades sísmicas, a relação de Gardner para a porosidade, a lei do decaimento radioativo, o modelo de gravidade normal para o globo terrestre e o tempo de trânsito para o raio sísmico refletido. Ao longo do capítulo são apresentadas referências para tais aplicações, caso haja o interesse para um maior aprofundamento.

No Capítulo 4 é apresentada uma outra maneira de criar novas funções a partir de outras já existentes, por meio de uma operação matemática bem definida chamada *diferenciação*, também conhecida por *derivação*. Apresentaremos, portanto, a definição da função derivada, bem como suas propriedades geométricas e algébricas, tais como as regras de derivação para somas, produtos e quocientes de funções e a regra da cadeia, utilizada para a derivação de funções compostas.

No Capítulo 5 é apresentado o estudo de funções, em que se realiza análise dos intervalos de crescimento e decrescimento de funções, bem como se determina e se classifica seus pontos críticos. Por meio deste estudo, obtemos um conhecimento mais profundo e completo da função, o que, claramente, é importante para quaisquer tipos de aplicações que se servem de funções de uma variável. Para exemplificar o estudo de funções, mostramos o princípio de Fermat e a lei de Snell-Descartes, ambos aplicados em problema de geofísica.

No Capítulo 6, são apresentados os polinômios de Taylor, que visam aproximar uma função segundo o critério bem estabelecido de que os valores das derivadas até certa ordem do polinômio e da função dada sejam iguais em um ponto dado. Certamente, o maior impacto do uso de polinômios de Taylor reside no fato de que podemos aproximar funções complicadas, que sejam composições e combinações complexas de funções elementares, por funções bem mais simples, no caso os polinômios de Taylor. Ao longo deste capítulo apresentamos aplicações do estudo de funções e dos polinômios de Taylor a problemas geofísicos, tais como as aproximações para o tempo de trânsito de ondas sísmicas refletidas em meios multicamadas e as aproximações para coeficientes de reflexão acústicos, entre outros.

No Capítulo 7 a motivação é gerada pelo desejo de se de responder à seguinte questão: qual é a função original cuja derivada é uma função qualquer dada? A resposta a essa pergunta é regulamentada pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o qual surpreendentemente também trata de outra questão: como calcular a área sob uma curva definida por uma função em um intervalo. São apresentados também algumas das técnicas elementares de integração, especialmente os método da substituição e integração por partes.

No Capítulo 8 são mostradas algumas simples aplicações da operação da integral. É discutido como a integral definida pode ser utilizada para se definir uma nova função e como o grau de suavidade pode ser aumentado, constituindo-se como uma espécie de efeito colateral qualitativo da integração. Ao fim do capítulo é apresentado um exemplo da integração aplicada em um problema da geofísica, especialmente de sísmica e sismologia, em que a trajetória de um raio de onda sísmica é computada.

No Capítulo 9 são abordadas as integrais impróprias, bem como alguns desdobramentos teóricos e aplicações. Tais impróprias aparecem no estudo de problemas cujos intervalos de integração são ilimitados ou quando o integrando possui algum tipo de singularidade, ou ambos os casos. Apresentamos a operação da convolução que se serve da integração imprópria, como também algumas aplicações, notadamente as transformadas convolucionais que são amplamente utilizadas em vários campos da matemática aplicada, tais como equações diferenciais, problemas inversos e análise matemática. Ao longo do capítulo, apresentamos algumas aplicações de tais integrais, tais como o estudo de funções ondaletas, largamente utilizadas em processamento de sinais e imagens, transformadas convolucionais. Em particular, são introduzidas noções de uma teoria peculiar denominada cálculo fracionário, cuja fórmula básica pode ser definida com auxílio da operação da convolução e da diferenciação convencional. Especialmente, são tratados os casos da derivada e integral de meia ordem, chamados semiderivada e semi-integral.

No Capítulo 10 é abordado o assunto das equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira ordem, que genericamente trata do problema da existência, unicidade e construção da função (ou funções) que seja solução de uma equação que envolve a própria função e sua derivada. É apresentado um teorema que, sob determinadas condições, garante a existência e unicidade de solução de problemas de valor inicial, compostos por uma EDO e uma condição inicial. São apresentados os principais métodos algébricos para sua obtenção de soluções de EDO, os quais são baseados nas seguintes classificações de equações: separáveis, homogêneas, lineares, de Bernoulli e de Riccati. Por fim apresentamos alguns exemplos de aplicação clássicos, tais como, a lei de Malthus, a lei do resfriamento de Newton, a lei do decaimento radioativo e modelo logístico. Além disso, apresentamos uma equação diferencial que rege a evolução da curvatura de frente de onda para um meio verticalmente estratificado como um exemplo de equação de Bernoulli.

No Capítulo 11, são mostrados resultados básicos sobre séries de potências, bem como algumas de suas aplicações. Em geral, sua maior utilização é a capacidade de construir novas funções que não possuem forma analítica expressa em termos de funções elementares. Além disso, tal ferramenta é capaz de proporcionar representações alternativas para funções já conhecidas. São apresentados conceitos básicos sobre sequências e séries numéricas, levando em conta principalmente os critérios de convergência. Por fim, são descritos três exemplos de aplicações distintas de séries de potências. Em primeiro lugar é mostrado como podem ser aplicadas diretamente para o cálculo de integrais definidas, cujos integrandos não possuem antiderivadas. Em seguida, as séries são utilizadas para se buscar soluções de equações diferenciais, especialmente para equações que não possuem solução em termos de funções usuais. Finalmente, é apresentado um simples exemplo de como uma série de potência pode auxiliar na modelagem de um problema geofísico.

No Capítulo 12, é apresentada a teoria elementar sobre séries de Fourier, que são um tipo de série trigonométrica, que constitui uma forma alternativa de representar funções periódicas. Há uma associação entre sequências numéricas e funções periódicas que cumprem condições específicas, de modo que tais funções passem a ser representadas alternativamente por tais sequências. A transformação das sequências numéricas em funções periódicas e vice-versa são operações intimamente ligadas e são denominadas síntese e análise harmônica, respectivamente. Mostraremos também quais condições específicas uma função periódica deve satisfazer para ter uma representação em série de Fourier. Além disso, apresentaremos exemplos de séries de Fourier, em que avaliamos empiricamente a relação entre o grau de continuidade de uma função e o decaimento da sequência numérica associada. Por fim, apresentaremos um exemplo de aplicação das séries de Fourier no problema genericamente denominado descritores de Fourier, em que se usa os coeficientes de uma série de Fourier para classificar o formato do contorno de um grão.

No Capítulo 13, são abordados resultados que mostram como uma função que cumpre determinadas condições pode ser representada por uma integral imprópria, conhecida por integral de Fourier. Embora seja muito similar a uma série trigonométrica, suas propriedades e resultados enquadram-se em uma teoria que possui escopo mais geral, chamada de transformada de Fourier. Ao longo do capítulo são apresentados algumas das principais propriedades da transformada de Fourier e as condições para a sua existência, bem como alguns exemplos básicos. Por fim, são mostradas algumas aplicações, especialmente para o cálculo de convoluções, incluindo as transformadas convolucionais, tais como transformada de Hilbert e a integral/derivada fracionária.

Agradecimentos

Este trabalho, assim como qualquer um que lida com um tema altamente multidisciplinar, não seria realizado sem o apoio e a ajuda de várias pessoas das mais variadas formações e especialidades. Neste pequeno espaço, quero prestar o meu agradecimento a todos que estiveram envolvidos direta ou indiretamente com o desenvolvimento deste trabalho.

Em primeiro lugar quero agradecer não somente à minha esposa e filhas, Denise, Juliana, Juliene e Jessica, como também a todos familiares, que sempre me motivaram, apoiaram e, principalmente, tiveram paciência quando estive ausente no seu convívios para produzir esta obra.

Pelo apoio e ajuda na correção do texto, quero agradecer aos meus alunos de pós-graduação José Nayro, Ariathemis Moreno, Daniel Macedo, Luis Fernando Cypriano e Maria Cecília Sodero Vinhas. Aos professores Luiz Antonio Ribeiro de Santana, Maria Amélia Novais Schleicher e Ricardo Biloti e aos geofísicos Armando Vicentini e Marcelo Bianchi presto um grande agradecimento por terem ajudado a corrigir o texto e pelas valiosas sugestões.

Pelo incentivo, apoio em geral e exemplo de dedicação ao ensino agradeço às professoras Margarida Pinheiro Melo, Sandra Augusta dos Santos e Vera Lúcia Lopes, que serviu de inspiração e motivação para a criação deste texto, cuja gênese deu-se nas épocas do tutoria pelo projeto PROEX durante os anos 1999 e 2000.

Presto um agradecimento com mesma intensidade aos professores Martin Tygel, Lúcio Tunes dos Santos e Jörg Schleicher por terem gentilmente aberto as portas do mundo da geofísica matemática e computacional. Aos geofísicos da Petrobras Alcides Aggio, Álvaro Gomes, Eduardo Ferreira Filpo da Silva, Neiva Zago, Paulo Carvalho, Ricardo Rosa e Ronaldo Jaegher e aos professores Alexandre Vidal e Armando Zaupa Remacre vai um grande agradecimento pelas discussões e sugestões relacionadas ao mundo da Geofísica/Geologia de Exploração.

Por fim, pelo apoio e suporte em geral durante o período de elaboração deste trabalho, gostaria de agradecer à Schlumberger, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e à Sociedade Brasileira de Geofísica (SBGf).

Dedicado à memória de

Antonio Carlos Buginga Ramos e Saul Barisnik Suslick;

o primeiro, geofísico; o segundo, geólogo;
ambos grandes entusiastas pela matemática.

Notação

$\in$	Pertence ao conjunto
$\notin$	Não pertence ao conjunto
$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\nexists$	Não existe
$\varnothing$	Conjunto vazio
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números Naturais $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números Inteiros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números Racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números Reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números Complexos
A^n	Conjunto das n-uplas $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \| a_k \in A\}$
(a, b)	Intervalo finito aberto $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$[a, b]$	Intervalo finito fechado $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$	Intervalo finito semiaberto $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
$[a, b)$	Intervalo finito semiaberto $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$(a, +\infty)$	Intervalo infinito aberto $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
$(-\infty, a]$	Intervalo infinito fechado $\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
(a_n)	Sequência numérica $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n, \ldots$
$\lightning$	Símbolo para indicar exercício mais difícil
$*$	Convolução
$'$	Símbolo para indicar função derivada
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$	Somatório de n números $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$
$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$	Produtório de n números $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n$
$\displaystyle\int$	Símbolo de integral, usado em variados contextos
$\displaystyle⨍$	Valor Principal de Cauchy

Conteúdo

Capítulo 1

Funções

Função é indubitavelmente o objeto matemático mais importante dentre todos abordados neste texto. Em geral, uma função é uma regra que estabelece uma conexão entre dois conjuntos, fazendo com que o comportamento da variável de um conjunto seja vinculado ao comportamento da variável do outro conjunto.

Este tipo de conexão, muito similar com o paradigma de causa e efeito, pode nos ajudar a compreender o comportamento de certas variáveis difíceis de serem medidas por meio de variáveis mais fáceis de serem medidas. Sem sombra de dúvida, esta é a motivação básica dos estudos geofísicos, que procuram inferir propriedades importantes, porém inacessíveis, da Terra, que estejam associadas por meio de funções a propriedades mais facilmente medidas. Um exemplo emblemático dessa metodologia é a descoberta de que o núcleo externo da Terra é fluido, por meio de registros sismológicos realizados na superfície.

Começaremos fornecendo definições básicas e intuitivas para, em seguida, apresentar as funções elementares, que são os tipos de funções mais comuns que aparecem na modelagem de fenômenos naturais, em particular nas geociências. Por fim, introduzimos o conceito de limite para, em seguida, definirmos uma classe de função largamente utilizada, chamada função contínua.

1.1 Definições e propriedades

Dados dois conjuntos, chamados de *domínio* e *contradomínio*, uma função é a própria associação de todos os elementos do domínio a alguns elementos do contradomínio. Esta associação deve respeitar a seguinte *regra*: cada elemento do domínio pode ser usado somente uma única vez. A notação para uma função f é

$$f : A \to B\,,$$

significando que a função f relaciona os pontos do domínio A aos pontos do contradomínio B. Além disso, a notação

$$y = f(x)$$

nos diz que um elemento x do domínio está associado ao elemento y do contradomínio, por meio da função f.

Observe que a regra nada diz se todos os pontos do contradomínio devem ser utilizados ou não. O subconjunto do contradomínio que contém todos os pontos associados a pontos do domínio é chamado de *imagem* da função e denotado por $\mathrm{Im}(f)$. Além disso, a regra permite que mais de um ponto do domínio esteja associado a um ponto do contradomínio. A Figura 1.1 ilustra um exemplo de função definida graficamente, que mostra as situações permitidas pela regra da definição de função.

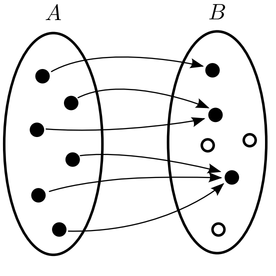

Figura 1.1: Esquema ilustrativo de uma função. Observe que os pontos do contradomínio B podem ser utilizados uma, nenhuma ou até mais de uma vez. A imagem de f é o subconjunto de B que contém todos os pontos utilizados (círculos cheios).

Observamos, portanto, que uma função é definida por três elementos: a regra de associação, o domínio e o contradomínio. Mesmo que a regra de associação seja a mesma, o fato de considerarmos dois domínios distintos faz com que tenhamos duas funções distintas. Por exemplo, se a regra é “elevar ao quadrado”, mas um domínio é composto por números positivos e o outro domínio por números negativos, temos em mãos duas funções distintas.

Em geral, a regra de associação da função pode estar descrita verbalmente, numericamente, visualmente ou algebricamente. Esse último caso é o objeto de estudo mais intenso do curso de Cálculo e também do presente livro. Observe os exemplos contidos na Tabela 1.1.

Tabela 1.1: Alguns exemplos de associações, descritas algebricamente, com seus domínios e imagens.

Associação	$\mathrm{Dom}(f)$	$\mathrm{Im}(f)$
$y = x^2$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = x^2$	$(-\infty, 0)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
$y = \mathrm{arcsen}(x)$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$

Porém, não devemos esquecer que basta que uma associação exista, mesmo aleatória, e respeite a regra, para que exista uma função.

Vale salientar que as funções utilizadas para modelar fenômenos observados pela Geofísica são tais que as seguintes regras são usualmente válidas:

(i) Em geral, o domínio e o contradomínio são intervalos que podem ser abertos, fechados, limitados e ilimitados. Além disso, pode acontecer de o domínio ser a união de intervalos.

(ii) Em geral, a relação que define a função é descrita por meio de fórmulas, contendo termos trigonométricos, logarítmicos, exponenciais, polinomiais e quocientes, entre outros.

Exercícios

1.1 Considere as funções: $f(x) = x$, para $x \in [-1, 1]$; $g(x) = x$, para $x \in (-1, 1)$; $h(x) = x$, para $x \in [0, 1]$; e responda às seguintes questões: (a) f e g são iguais? Por quê? (b) g e h são iguais? Por quê? (c) f e h são iguais? Por quê?

1.2 Encontre o domínio máximo e o contradomínio para as seguintes relações:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (c) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x)}$ (e) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

1.2 Funções elementares

Apesar de a definição de função ser extremamente genérica, existem tipos ou famílias de funções que se apresentam com muita frequência nas modelagens de fenômenos da natureza, incluindo os geofísicos. Nesta seção veremos as funções mais comuns do cálculo, como funções polinomiais, potência, racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

1.2.1 Função polinomial

A função polinomial é a mais simples de todas e, de fato, é a única que pode ser verdadeiramente calculada numericamente, pois é composta pelas duas operações mais elementares: adição e multiplicação (subtração e divisão são casos particulares).

Existem várias maneiras equivalentes de representar uma mesma função polinomial, cada qual apresentando vantagens dependendo do tipo de estudo ou aplicação. No que se segue, apresentaremos as quatro mais comuns:

Forma canônica

A forma canônica é a forma mais comum de se representar uma função polinomial e é dada pela expressão

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \tag{1.1}$$

onde os coeficientes a_k, para $k = 1, \ldots, n$, são todos constantes. A partir da forma canônica existe outra forma interessante que vale a pena ser mencionada, a chamada *forma dos parênteses encaixantes*:

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \cdots + x(a_{n-1} + a_n x) \cdots))), \tag{1.2}$$

que pode ser convertida em um método de avaliação de função polinomial, chamado *método de Horner* (Figura 1.2). Aqui, `s` é o resultado da avaliação, `x` é o valor da abscissa em que se deseja avaliar a função e `a(n)` são os coeficientes (supostamente dados) da função polinomial.

```
entrada(x, a)
s = a(n)
faça k = 1 até n
     s = a(n-k) + s × x
fim
saída(s)
```

Figura 1.2: Método de Horner para a avaliação de uma função polinomial.

Para exemplificar o uso do método de Horner, vamos avaliar $f(x) = 2 + 3x + x^2 - 4x^3$ em $x = -2$. Neste caso, os dados de entrada são `a = (2,3,1,-4)` e `x = -2`, e, após a aplicação do algoritmo (Figura 1.3), obtemos `s = 32`, isto é $f(-2) = 32$.

```
Entrada: x = -2; a = (2,3,1,-4)
 s = a(3) = -4
 k = 1
         s = a(2) + s × x = 1 + (-4) × (-2) = 9
 k = 2
         s = a(1) + s × x = 3 + 9 × (-2) = -15
 k = 3
         s = a(0) + s × x = 2 + (-15) × (-2) = 32
Saída: s = 32
```

Figura 1.3: Exemplo de aplicação do algoritmo dos parênteses encaixantes para a avaliação de $f(x) = 2 + 3x + x^2 - 4x^3$ em $x = -2$. O resultado é $f(-2) = 32$.

Forma canônica "centrada em um ponto"

A forma canônica centrada em um ponto, que é uma generalização da forma canônica em que se introduz um deslocamento na variável x, é dada pela expressão

$$p(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \cdots + a_n(x - c)^n, \tag{1.3}$$

onde c é um ponto qualquer da reta e os coeficientes a_k, para $k = 1, \ldots, n$, são todos constantes.

Forma "explícita"

A forma explícita é uma forma de representação de função polinomial não tão comum quanto a forma canônica, pois, dependendo da aplicação, muitas vezes sua representação é difícil (ou até impossível) de ser obtida. É dada pela seguinte expressão:

$$p(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdots (x - r_n), \tag{1.4}$$

onde o coeficiente a_0 é constante e os números r_k, para $k = 1, \ldots, n$, são as raízes do polinômio (admitindo a possibilidade de raízes complexas).

Forma de Newton

A forma da Newton é a forma menos conhecida, pois suas aplicações mais importantes estão ligadas a problemas mais específicos de análise numérica e computação científica. Sua expressão é a mais complexa de todas apresentadas aqui e é dada por

$$p(x) = a_0 + a_1(x - c_1) + a_2(x - c_1)(x - c_2) + \cdots + a_n(x - c_1) \cdots (x - c_n), \tag{1.5}$$

onde c_k são pontos quaisquer na reta e cada coeficiente a_k depende de c_j, para $j = 0, \ldots, k - 1$ e $k = 1, \ldots, n$.

Algumas vezes, é possível reescrever um polinômio de uma forma para outra, no entanto, esta tarefa pode ser bem difícil (ou até mesmo impossível). Por exemplo, para representar o polinômio $f(x) = x^2$ na forma canônica centrada em $c = 1$, uma maneira é somar e subtrair $c = 1$ de x:

$$x^2 = (x - 1 + 1)^2 = [(x - 1) + 1]^2 = (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1\,.$$

Para a forma explícita, basta observar que a raiz de $f(x)$ é $r = 0$, com dupla multiplicidade, sendo assim,

$$x^2 = (x-0)(x-0)\,.$$

Por fim, podemos representar $f(x)$ na forma de Newton, com $c_1 = -1$ e $c_2 = 2$, da seguinte maneira: escrevemos a identidade polinomial

$$x^2 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)(x-2),$$

onde a_0, a_1 e a_2 são os coeficientes a serem determinados. Como é uma identidade polinomial, ela deve valer para todos os valores de x, e usamos esse fato para descobrirmos os coeficientes, bastando usar valores convenientes. Quando escolhemos $x = -1$, $x = 2$ e $x = 0$, obtemos as seguintes identidades

$$\begin{cases} 1 &= a_0\,, \\ 4 &= a_0 + 3a_1\,, \\ 0 &= a_0 + a_1 - 2a_2\,, \end{cases}$$

cuja solução é $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$, isto é,

$$x^2 = 1 + (x+1) + (x+1)(x-2)\,.$$

Resumindo, podemos afirmar que as funções polinomiais

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 \\ f_2(x) &= (x-0)(x-0) \\ f_3(x) &= 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 \\ f_4(x) &= 1 + (x+1) + (x+1)(x-2) \end{aligned}$$

são, de fato, a mesma função, onde f_1 está na forma padrão, f_2 na forma explícita, f_3 na forma padrão centrada em $c = 1$ e f_4 na forma de Newton com $c_1 = -1$ e $c_2 = 2$.

Exercícios

1.3 Para cada função polinomial indicada na forma a seguir, faça a representação nas três outras formas, escolhendo $c = 1$ para a forma padrão centrada e $c_1 = -1$ e $c_2 = 2$ para a forma de Newton:

(a) $f(x) = x^2 - 2$, na forma padrão;
(b) $g(x) = (x-1)(x-3)$, na forma explícita;
(c) $h(x) = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$, na forma padrão centrada em $c = 1$;
(d) $i(x) = -2 + 3(x+1) + (x+1)(x+2)$, na forma de Newton com $c_1 = -1$ e $c_2 = -2$.

1.4 Use o método de Horner para avaliar as seguintes funções polinomiais nos pontos dados

(a) $f(x) = -4 + 11x - 2x^2 - x^3 + x^4$ em $x = -2$;
(b) $g(x) = 2 + 4x^2 - x^3 + 2x^5$ em $x = 3/2$;
(c) $h(x) = -1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5$ em $x = -1$.

1.2.2 Função afim

Uma *função afim* é uma função polinomial de primeiro grau (na forma padrão)

$$y = f(x) = ax + b, \tag{1.6}$$

onde coeficientes a e b são chamados de *coeficiente angular* e *intercepto*, respectivamente. O seu gráfico é uma linha reta e o intercepto é a coordenada no eixo y que intercepta a reta. A coordenada do eixo x que intercepta a reta, chamada de *raiz* ou *zero de f*, é igual a $r = -b/a$, para $a \neq 0$. Se $a = 0$, isso significa que a reta é paralela ao eixo x e que não há raiz neste caso, quando $b \neq 0$. Um caso particular da função afim é quando $b = 0$, caso em que a denominamos como *função linear*:

$$y = f(x) = ax.$$

Os gráficos das funções afim $f(x) = 3x/2 + 6$ e $g(x) = -x/2 + 2$ podem ser observados na Figura 1.4.

Admitindo que o coeficiente angular é diferente de zero ($a \neq 0$), é sempre possível transformar uma equação da reta em uma função afim e vice-versa, isto é,

$$\underbrace{c_0(x - x_0) + c_1(y - y_0) = 0}_{\text{eq. da reta}} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{y = ax + b \quad \text{ou} \quad x = cy + d}_{\text{funções afim}} \tag{1.7}$$

Neste caso, há uma relação entre os coeficientes da equação da reta e os coeficientes das funções afim para que a transformação de uma representação para a outra aconteça.

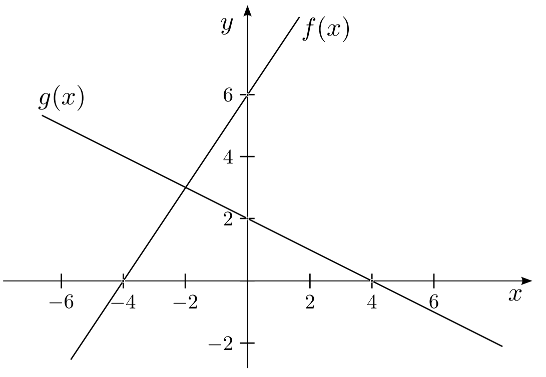

Figura 1.4: Exemplo de duas funções afim.

Uma função afim é completamente determinada por dois pontos distintos no plano com coordenadas horizontais distintas. Isso quer dizer que, dados dois pontos distintos no plano, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, com $x_1 \neq x_2$, é sempre possível calcular os coeficientes a e b de uma função afim. Neste caso, devemos resolver o seguinte sistema linear (2×2), para os coeficientes a e b,

$$\begin{cases} y_1 = b + a\,x_1\,, \\ y_2 = b + a\,x_2\,. \end{cases}$$

Por exemplo, sabendo que uma reta passa pelos pontos $P_1 = (2, 3)$ e $P_2 = (-2, -1)$, desejamos saber qual a função afim $f(x) = ax + b$ que representa tal reta. Para isso, devemos resolver o seguinte sistema linear (2×2):

$$\begin{cases} 3 = 2a + b\,, \\ -1 = -2a + b\,, \end{cases}$$

cuja solução é $a = 1$ e $b = 1$. Sendo assim, a função afim procurada é

$$f(x) = x + 1\,.$$

Para esboçar um gráfico de uma função afim, basta determinar dois pontos quaisquer que pertençam à reta definida pela função e desenhar a linha reta que passe por estes dois pontos.

Exercícios

1.5 Encontre as relações entre os coeficientes de uma função afim e de uma equação da reta que representam a mesma linha reta no plano. Isto é, dada a equação de uma reta

$$c(x - x_0) + d(y - y_0) = 0,$$

determine a e b em função de c, d, x_0 e y_0, tal que

$$y = a + bx.$$

1.6 Para os itens a seguir, dados os pontos P_1 e P_2, descubra a função afim que representa a reta que passa por eles.

(a) $P_1 = (2, 3)$ e $P_2 = (-2, 1)$

(b) $P_1 = (-2, -1)$ e $P_2 = (5, 1)$

(c) $P_1 = (1, -3)$ e $P_2 = (-2, 4)$

(d) $P_1 = (2, 3)$ e $P_2 = (3, 3)$

1.2.3 Função quadrática

Uma *função quadrática* é uma função polinomial de segundo grau (na forma padrão)

$$y = f(x) = c + bx + ax^2\,, \tag{1.8}$$

onde $a \neq 0$. O seu gráfico é uma curva chamada *parábola* e o coeficiente a é às vezes chamado de *curvatura*. Muitos fenômenos da natureza podem ser modelados por uma função quadrática, por exemplo, a fórmula horária para um movimento retilíneo uniformemente acelerado é dada por

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2\,,$$

onde $x(t)$ é a posição da partícula no instante t, x_0 é a posição inicial, v_0 é a velocidade inicial e a é a aceleração (constante).

Uma função quadrática possui alguns elementos geométricos notáveis que a caracterizam por completo. Começamos pelas raízes (r_1, r_2) de uma função quadrática, que são as coordenadas horizontais dos pontos da parábola que interceptam o eixo horizontal. Podem ser calculadas com a *fórmula de Báskara*:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\,, \tag{1.9}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de *discriminante*. Observe que, se $\Delta < 0$, não existem raízes reais, e se $\Delta = 0$, a raiz tem multiplicidade dupla, isto é, as raízes são iguais, $r_1 = r_2 = -b/2a$. A *concavidade* de uma parábola é determinada pelo coeficiente a: se $a > 0$ a concavidade é voltada para cima, por outro lado, se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo[1]. O *vértice* (x_v, y_v) de uma parábola é o ponto que é um ponto de máximo, no caso de a concavidade estar voltada para baixo, ou de mínimo, no caso de a concavidade estar voltada para cima. As suas coordenadas são dadas por

$$x_v = -\frac{b}{2a}\,, \tag{1.10}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}\,, \tag{1.11}$$

onde Δ é o discriminante da parábola. Observe que as parábolas não degeneradas sempre têm vértices, mas nem sempre possuem raízes reais. Todos estes elementos podem ser observados com o auxílio da Figura 1.5.

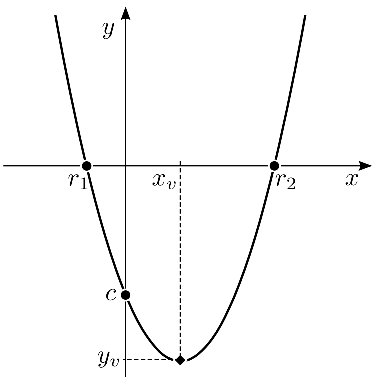

Figura 1.5: Elementos de uma função quadrática. Os círculos indicam a interseção da quadrática com os eixos, onde r_1 e r_2 são as raízes e c é o intercepto. O losango indica o vértice (x_v, y_v). Observe que neste exemplo a concavidade está para cima, implicando que $a > 0$.

Uma função quadrática é completamente determinada por três pontos coplanares $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$, desde que sejam não colineares e suas coordenadas horizontais sejam distintas (veja a Figura 1.6). Para descobrirmos

[1] Caso $a = 0$, então a parábola se degenera em uma reta.

os valores dos coeficientes da função quadrática, em primeiro lugar assumimos que a parábola esteja descrita na forma padrão

$$y = c + bx + ax^2,$$

e, em seguida, como cada ponto P_k pertence à parábola, suas coordenadas devem satisfazer a igualdade acima. Portanto, devemos resolver o seguinte sistema linear (3×3) para determinarmos os coeficientes a, b e c:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & c + b\,x_1 + a\,x_1^2\,, \\ y_2 & = & c + b\,x_2 + a\,x_2^2\,, \\ y_3 & = & c + b\,x_3 + a\,x_3^2\,. \end{array} \right.$$

Por exemplo, sabendo que a parábola passa pelos pontos $(-1, -1)$, $(1, -3)$ e $(3, -1)$ (veja a Figura 1.6), o sistema linear que define os coeficientes é

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} -1 & = & c + b\,(-1) + a\,(-1)^2 & = & c - b + a\,, \\ -3 & = & c + b\,(1) + a\,(1)^2 & = & c + b + a\,, \\ -1 & = & c + b\,(3) + a\,(3)^2 & = & c + 3b + 9a\,, \end{array} \right.$$

cuja solução é $c = -5/2$, $b = -1$ e $a = 1/2$. Portanto a parábola pode ser descrita por meio da seguinte expressão (forma padrão)

$$y = -\frac{5}{2} - x + \frac{1}{2}x^2\,, \tag{1.12}$$

cujo gráfico pode ser observado com auxílio da Figura 1.6

Por outro lado, assumindo que a parábola esteja descrita na forma de Newton

$$y = c + b(x - c_1) + a(x - c_1)(x - c_2),$$

basta resolvermos o sistema linear (3×3) a seguir para determinarmos os coeficientes a, b e c:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & c + b\,(x_1 - c_1) + a\,(x_1 - c_1)(x_1 - c_2)\,, \\ y_2 & = & c + b\,(x_2 - c_1) + a\,(x_2 - c_1)(x_2 - c_2)\,, \\ y_3 & = & c + b\,(x_3 - c_1) + a\,(x_3 - c_1)(x_3 - c_2)\,. \end{array} \right.$$

Se c_0 e c_1 são escolhidos convenientemente como sendo duas das abscissas dos pontos, isto é, por exemplo, $c_1 = x_1$ e $c_2 = x_3$, então o sistema linear para determinar os coeficientes da forma de Newton é

$$\begin{cases} y_1 &= c + b \ , \\ y_2 &= c + b\,(x_2 - c_1) + a\,(x_2 - c_1)(x_2 - c_2)\,, \\ y_3 &= c + b\,(x_3 - c_1)\,, \end{cases}$$

que é um sistema mais fácil de resolver do que o sistema decorrente da forma padrão.

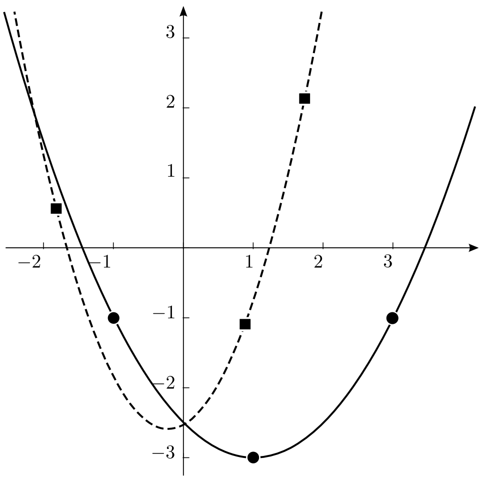

Figura 1.6: Três pontos não-colineares no plano definem uma parábola. Para a parábola tracejada, foram escolhidos três pontos (quadrados) ao acaso, e, para a parábola em linha cheia, foram escolhidos os pontos $(-1,-1)$, $(1,-3)$ e $(3,-1)$ (círculos), os mesmos utilizados no exemplo do texto.

Voltando ao exemplo dos três pontos, $(-1,-1)$, $(1,-3)$ e $(3,-1)$, se escolhermos $c_1 = x_1$ e $c_2 = x_3$ para a representação na forma de Newton

$$y = c + b(x+1) + a(x+1)(x-3)\,,$$

então o sistema linear resultante que define os coeficientes, para esta forma, é

$$\begin{cases} -1 &= c + b\,(-1+1) + a\,(-1+1)(-1-3) &= c\,, \\ -3 &= c + b\,(1+1) + a\,(1+1)(1-3) &= c + 2b - 4a\,, \\ -1 &= c + b\,(3+1) + a\,(3+1)(3-3) &= c + 4b\,, \end{cases}$$

cuja solução é $c = -1$, $b = 0$ e $a = 1/2$. Portanto, a parábola descrita na forma padrão por (1.12), também pode ser descrita na forma de Newton com da seguinte expressão:

$$y = -1 + \frac{1}{2}(x+1)(x-3)\,.$$

Como podemos perceber, comparando as formas escolhidas para a resolução do problema de determinação da parábola a partir de três pontos dados, a forma de Newton tem a vantagem de ter gerado um sistema linear bem mais simples. Com efeito, em problemas de interpolação em geral, a forma padrão gera um sistema linear altamente instável, fazendo com que seu uso em análise numérica seja descartado. Mais discussões sobre este assunto podem ser conferidas em Ruggiero & Lopes (1997) e Cunha (2003).

Exercícios

1.7 A partir da fórmula (1.11) que determina a coordenada vertical do vértice de uma parábola, elabore uma regra baseada nos sinais y_v e da concavidade a para determinar se a parábola possui raízes reais ou não.

1.8 Ache as interseções das quadráticas $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = -x^2 + x$ e interprete graficamente.

1.9 Sabendo-se que uma parábola passa pelos pontos $(-1, 1), (1, -2), (2, 4)$,

(a) encontre a quadrática, na forma padrão, que descreve esta curva;

(b) encontre a quadrática, na forma de Newton, utilizando $c_1 = -1$ e $c_2 = 1$;

(c) encontre a quadrática, na forma de Newton, utilizando $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$.

1.2.4 Função potência

A função potência pode ser escrita como

$$f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Para a positivo, o domínio de f é $[0, \infty)$, porém, se a for negativo, o número zero não pertence ao domínio. Para o caso especial em que a seja um número racional do tipo p/q, $p \in \mathbb{Z}$, e $q \in \mathbb{N}$, então definimos a potência como sendo

$$x^{p/q} = (x^p)^{1/q} \,,$$

isto é, primeiro elevamos x^p e depois calculamos a raiz. Caso q seja ímpar, então o domínio se estende por todos os reais, porém se q é par, então o domínio é restrito a todos os reais não negativos.

Vale observar que, no caso em que o expoente a é um número natural, a função potência é também uma função polinomial, como, por exemplo, $f(x) = x^2$. Além disso, uma função raiz é uma função potência para o caso em que $a = 1/n$, para $n \in \mathbb{N}$. Tome como exemplo a função raiz quadrada $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$. As funções a seguir são exemplos de funções potência.

(a) $f(x) = x^2$, (b) $f(x) = x^{-1}$, (c) $f(x) = x^{1/2}$,

cujos gráficos podem ser observados na Figura 1.7.

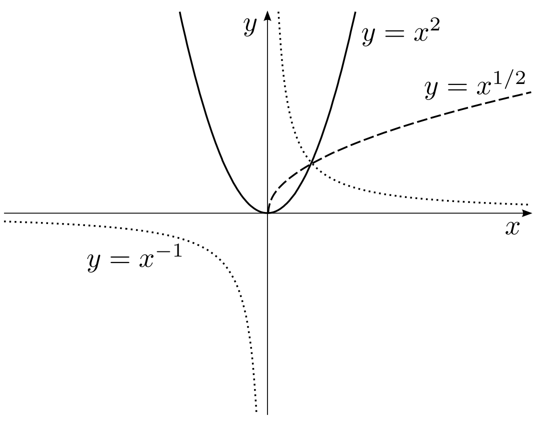

Figura 1.7: Gráficos de alguns exemplos de funções potência: $f(x) = x^2$ (linha cheia), $f(x) = x^{-1}$ (linha pontilhada) e $f(x) = x^{1/2}$ (linha tracejada).

Exercícios

1.10 Mostre algebricamente que as funções potência $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$ se interceptam em $x = 0$ e $x = 1$ (veja a Figura 1.7).

1.11 Mostre algebricamente que as funções potência $f(x) = x^{3/2}$ e $g(x) = \sqrt{x}$ se interceptam em $x = 0$ e $x = 1$.

1.12 Considere duas funções potência $f(x) = x^{2p}$ e $g(x) = x^{2q}$, onde p e q são inteiros tais que $q > p > 1$. Mostre que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in (-1, 1)$ e $g(x) < f(x)$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ e interprete graficamente.

1.2.5 Função racional

Uma função racional é definida como sendo

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{1.14}$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais. Uma função racional pode ser classificada como própria ou imprópria, dependendo dos graus dos polinômios $p(x)$ e $q(x)$. Uma função racional é classificada como *própria* quando o grau da função polinomial $p(x)$ é menor do que o grau de $q(x)$, caso contrário, dizemos que a função é *imprópria*.

As funções enumeradas a seguir são exemplos de funções racionais, cujos gráficos podem ser observados na Figura 1.8

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^3-1}$, (c) $f(x) = \dfrac{x^4}{4x^2-16}$ e

(b) $f(x) = \dfrac{5}{x^2-1}$, (d) $f(x) = \dfrac{2x^3-5x+1}{x^2+1}$.

Além disso, observamos que as funções dos exemplos (a) e (b) são racionais próprias, enquanto (c) e (d) são exemplos de funções racionais impróprias.

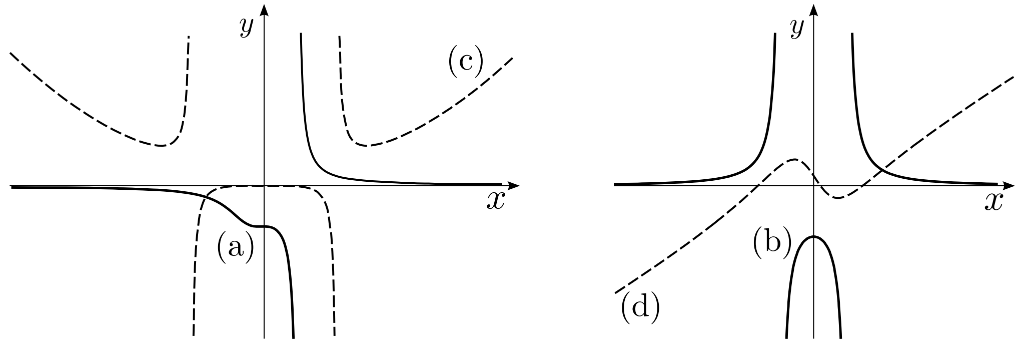

Figura 1.8: Gráficos de alguns exemplos de funções racionais.

Exercícios

1.13 Mostre que função racional imprópria $r(x) = (ax + b)/(cx + d)$, com $c \neq 0$, pode ser reescrita como

$$r(x) = \alpha + \frac{\beta}{cx + d}\,,$$

isto é, $r(x)$ é uma soma de um polinômio (de grau zero) e uma função racional própria. Ache as constantes em função de a, b, c e d.

1.14 Considere a função racional $f(x) = 1/(ax + b)$. Sabendo que f tem uma assíntota em $x = 1$ e que $f(0) = 1$, determine os coeficientes a e b.

1.2.6 Função exponencial

Uma função exponencial é uma função do tipo

$$f(x) = a^x, \tag{1.15}$$

onde a é um número real, positivo e constante.

A constante a pode assumir um valor especial chamado *número de Euler* (ou *número neperiano*), denotado pela letra e. Este valor pode ser definido como um limite de sequência ou por meio de uma equação diferencial. Neste caso, com a base e, a função exponencial passa a ter outras propriedades interessantes e, por isso, é denotada alternativamente como

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x\,. \tag{1.16}$$

O valor da constante de Euler e com a precisão de doze casas decimais é

$$2{,}718281828459\,.$$

Como a função exponencial é de fato uma constante elevada a um expoente (variável), ela herda todas as propriedades da operação da exponenciação:

$$\textbf{P1)}\qquad f(x+y) = f(x)f(y), \qquad \text{pois } a^{x+y} = a^x\, a^y \tag{1.17a}$$

$$\textbf{P2)}\qquad f(-x) = 1/f(x), \qquad \text{pois } a^{-x} = 1/a^x \tag{1.17b}$$

$$\textbf{P3)}\qquad f(x)^y = f(xy), \qquad \text{pois } (a^x)^y = a^{xy} \tag{1.17c}$$

As funções a seguir dois são exemplos de funções exponenciais. Os seus gráficos podem ser observados na Figura 1.9.

(a) $f(x) = 2^x$; (b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

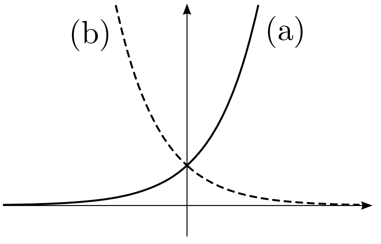

Figura 1.9: Gráficos de exemplos de funções exponenciais.

Exercícios

1.15 Mostre as seguintes afirmações e as interprete graficamente:

(a) toda função exponencial possui somente $x = 1$ como intercepto;
(b) nenhuma função exponencial possui raiz.

1.16 Considere duas funções exponenciais $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$, onde $b > a > 1$. Mostre que $g(x) > f(x)$ para todo $x > 0$ e $g(x) < f(x)$ para todo $x < 0$ e interprete graficamente.

1.2.7 Função logarítmica

O logaritmo em uma base $a > 0$ é definida como a função inversa da função exponencial na base a, isto é,

$$y = \log_a(x) \quad \text{se, e somente se,} \quad x = a^y. \tag{1.18}$$

Vale lembrar que o logaritmo, para qualquer base, só é definido para números positivos, isto é, o domínio de $\log_a(x)$ é $(0, \infty)$. O logaritmo possui as seguintes propriedades algébricas:

$$\textbf{P1)} \qquad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y); \tag{1.19a}$$

$$\textbf{P2)} \qquad \log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y); \tag{1.19b}$$

$$\textbf{P3)} \qquad \log_a(x^b) = b\log_a(x); \tag{1.19c}$$

$$\textbf{P4)} \qquad \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}; \tag{1.19d}$$

as quais podem ser demonstradas a partir da definição (1.18) e das propriedades da exponenciação (1.17a)–(1.17c) (fica como exercício).

A partir de (1.18), definimos a função logarítmica como sendo

$$f(x) = \log_a(x)\,, \tag{1.20}$$

para alguma constante $a > 0$. Para o caso especial em que $a = \mathrm{e}$, isto é, quando a é igual à constante de Euler, denominamos o logaritmo como *logaritmo natural* e o denotamos por $\ln(x)$.

As funções a seguir são exemplos de funções logarítmicas e seus gráficos podem ser observados na Figura 1.10.

(a) $f(x) = \log_2(x)$; (b) $f(x) = \ln(x) = \log_{\mathrm{e}}(x)$.

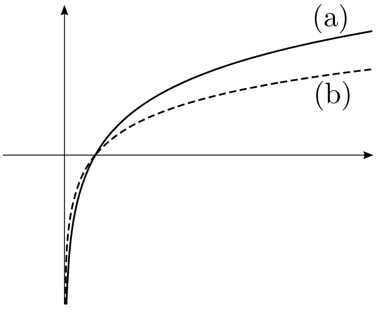

Figura 1.10: Gráficos de dois exemplos de funções logarítmicas.

Exercícios

1.17 Demonstre as propriedades do logaritmo (1.19a)–(1.19d), a partir da definição (1.18).

1.18 Verifique que $\log_a(a^b) = b$.

1.19 Mostre as seguintes afirmações e as interprete graficamente:

(a) toda função logarítmica possui somente $x = 1$ como raiz;

(b) nenhuma função logarítmica possui intercepto.

1.2.8 Funções trigonométricas

Uma função trigonométrica é toda função que é definida com auxílio do círculo do trigonométrico, que pode ser visto com auxílio da Figura 1.11. Dado um ângulo

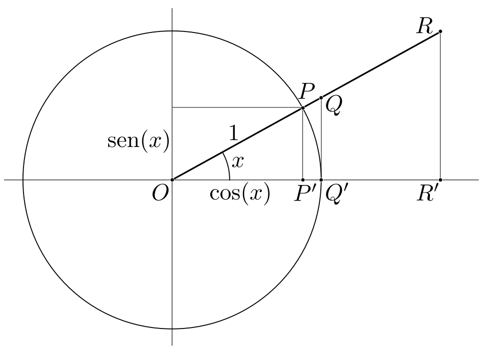

Figura 1.11: Definição das funções trigonométricas. Dado um ângulo x e considerando a circunferência de raio unitário, temos as seguintes relações trigonométricas: $\mathrm{sen}(x) = PP'$, $\cos(x) = OP$, $\tan(x) = QQ'$, $\csc(x) = OR$, $\sec(x) = OQ$ e $\cot(x) = OR'$.

x em radianos, a função seno, denotada por $\mathrm{sen}(x)$, é a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo y e a função cosseno, denotada por $\cos(x)$, é a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo x. O gráfico de ambas funções pode ser observado com auxílio da Figura 1.12.

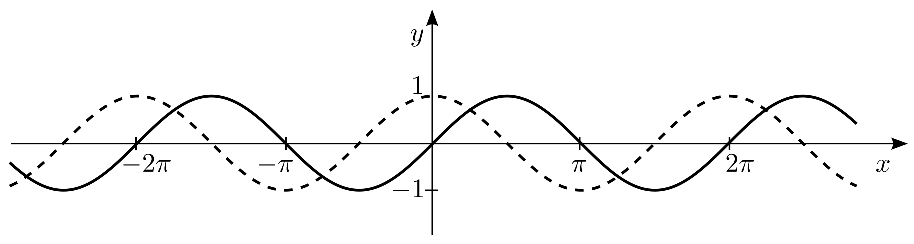

Figura 1.12: Os gráficos das funções seno (linha cheia) e cosseno (linha tracejada).

As outras funções trigonométricas, a tangente, cotangente, secante e cossecante, podem ser definidas algebricamente usando as funções seno e/ou cosseno da seguinte forma

(a) Tangente: $$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \tag{1.21}$$

(b) Cotangente: $$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\tan(x)} \tag{1.22}$$

(c) Secante: $$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \tag{1.23}$$

(d) Cossecante: $$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \tag{1.24}$$

e seus gráficos podem ser vistos com auxílio da Figura 1.13. Observe que todas estas funções trigonométricas possuem raízes ou assíntotas (dependendo do caso) nas abscissas múltiplas inteiras de π, isto é, em $x = k\pi$, para $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, a funções seno e cosseno são relacionadas por meio da *identidade trigonométrica fundamental*

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1\,, \tag{1.25}$$

que, dentre outras utilidades, pode ser usada para calcular um cosseno a partir de um seno e vice-versa, do seguinte modo

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)}\,, \tag{1.26}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}\,. \tag{1.27}$$

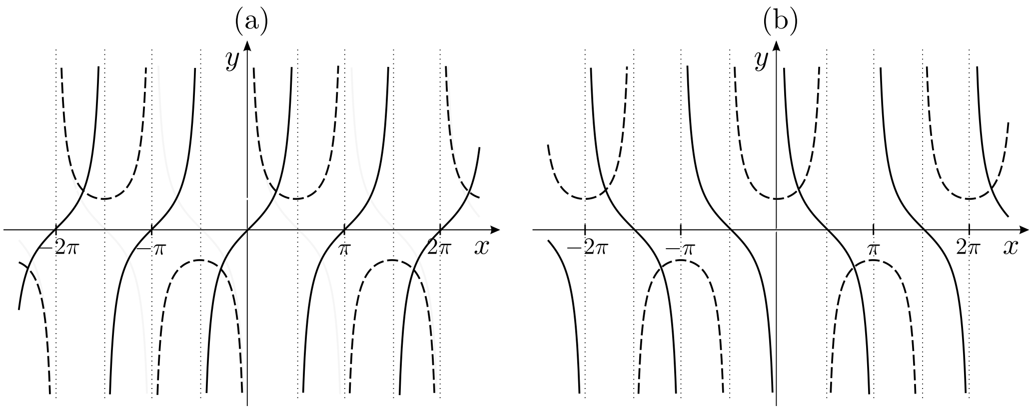

Figura 1.13: Em (a) os gráficos das funções tangente (linha cheia) e cossecante (linha tracejada) e em (b) os gráficos das funções co tangente (linha cheia) e secante (linha tracejada).

Além da identidade fundamental, as funções trigonométricas possuem uma grande quantidade de outras propriedades, das quais as mais comuns estão relacionadas no Apêndice A.

Exercícios

1.20 Sabe-se que basta somente a função seno (ou cosseno) para gerar todas outras as funções trigonométricas.

(a) Usando a identidade trigonométrica fundamental, mostre uma expressão para a tangente que dependa somente do seno.

(b) Similarmente, mostre uma outra expressão para a tangente que dependa somente da função cosseno;

(c) Repita os dois itens anteriores para a cotangente;

1.21 Usando a identidade trigonométrica fundamental, escreva as funções trigonométricas em função da função seno.

1.3 Funções definidas por partes

Funções definidas por partes são funções que têm expressões diferentes em intervalos disjuntos, como, por exemplo, uma função que é polinomial em um intervalo e exponencial em outro. As funções definidas por partes descritas a seguir são as mais básicas, porém essenciais na criação e no estudo de funções por partes mais complexas.

1.3.1 Função de Heaviside

A *função de Heaviside*, também conhecida por função degrau, tem o propósito de indicar se a variável é não negativa, retornando o valor 1 para este caso e 0 caso contrário. Pode ser definida como

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0\,, \\ 1/2, & \text{se } x = 0\,, \\ 1, & \text{se } x > 0\,, \end{cases} \tag{1.28}$$

e seu gráfico pode ser visto com auxílio da Figura 1.14. Vale mencionar que a

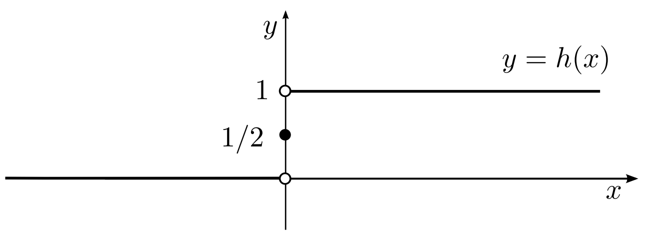

Figura 1.14: Gráfico da função de Heaviside.

definição de que em $x = 0$ a função vale $1/2$ é completamente arbitrária. Com efeito em $x = 0$, a função de Heaviside pode assumir qualquer valor, incluindo 0 ou 1, que são os valores mais comuns encontrados na literatura.

1.3.2 Função sinal

A função sinal é uma função que tem o propósito de extrair o sinal de um número x, isto é, indica se x é positivo ou negativo, retornando 1 ou -1, respectivamente. Pode ser definida como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0\,, \\ 0, & \text{se } x = 0\,, \\ 1, & \text{se } x > 0\,, \end{cases} \tag{1.29}$$

e seu gráfico pode ser conferido pela Figura 1.15.

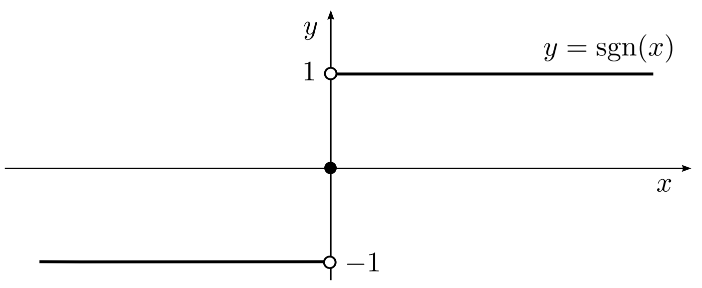

Figura 1.15: Gráfico da função sinal.

1.3.3 Funções módulo, caixa e indicadora

A *função módulo*, denotada por $|x|$, também conhecida como *função valor absoluto*, pode ser definida como

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0\,, \\ x, & \text{se } x \geq 0\ . \end{cases} \tag{1.30}$$

A *função indicadora* é uma função auxiliar que indica se um número pertence a um conjunto A ou não. Para um conjunto qualquer A, a sua função indicadora pode ser definida como

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A\,, \\ 0, & \text{se } x \notin A\,. \end{cases} \tag{1.31}$$

Vale observar que, para $x \neq 0$, podemos relacionar a função de Heaviside e a função indicadora da seguinte maneira:

$$h(x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,.$$

A *função caixa* indica se a variável pertence ou não a um intervalo simétrico, retornando o valor 1 para este caso e 0 para caso contrário. Pode ser definida como

$$b_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -a\,, \\ 1, & \text{se } -a \leq x \leq a\,, \\ 0, & \text{se } x > a\,. \end{cases} \tag{1.32}$$

É interessante notar que podemos definir a função caixa com auxílio da função indicadora da seguinte forma:

$$b_a(x) = \mathbb{I}_{[-a,a]}(x)\,.$$

Um caso especial da função caixa é a função retângulo, denotada por $\mathrm{rect}(x)$, cuja definição é dada por $\mathrm{rect}(x) = b_{1/2}(x)$, isto é,

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -1/2\,, \\ 1, & \text{se } -1/2 \leq x \leq 1/2\,, \\ 0, & \text{se } x > 1/2\,. \end{cases} \tag{1.33}$$

Na Figura 1.16 são dispostos os gráficos as funções módulo, indicadora e caixa.

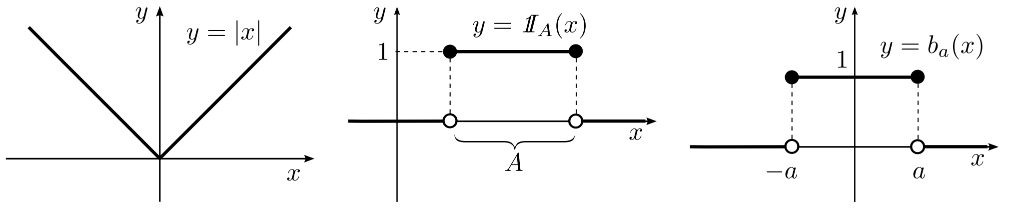

Figura 1.16: Da esquerda para direita, os gráficos das funções módulo, indicadora e caixa.

Exercícios

1.22 Resolva os itens a seguir

(a) mostre que $h(x) = x\,\mathrm{sgn}(x)$, onde $h(x)$ é a função de Heaviside;

(b) desenvolva algebricamente a função $g(x) = [\mathrm{sgn}(x)]^2$ e esboce seu gráfico;

(c) desenvolva algebricamente a função $\ell(x) = \mathrm{sgn}(x^2)$ e esboce seu gráfico.

(d) desenvolva algebricamente a função $m(x) = \mathrm{sgn}(4 - x^2)$ e esboce seu gráfico.

1.23 Resolva os seguintes itens:

(a) mostre que $\mathrm{sgn}(x) = 2h(x) - 1$, onde $h(x)$ é a função de Heaviside;

(b) desenvolva algebricamente a função $g(x) = [h(x)]^2$ e esboce seu gráfico;

(c) desenvolva algebricamente a função $\ell(x) = h(\mathrm{sgn}(x))$ e esboce seu gráfico.

1.4 Limite e continuidade

O limite de uma função em um ponto é uma operação simbolizada pela seguinte expressão

$$\lim_{x \to a} f(x)\,, \tag{1.34}$$

que pode ser lida intuitivamente como a seguinte pergunta:

O que acontece com o valor de $f(x)$
à medida que x se aproxima de a?

O significado do termo *se aproxima* é um tanto vago, ele quer dizer algo do tipo *infinitesimalmente próximo* ou, ainda, *tão próximo quanto se queira.* Esta proximidade deve ser independente da lateralidade, isto é, x se aproxima de a não importando se pela esquerda ou pela direita, ou alternadamente por ambos os lados.

1.4.1 Limites laterais

Para responder à pergunta é necessária a introdução de mais outro conceito, chamado *limite lateral*, que é uma operação que tem o significado igual ao do limite, no entanto restrito pela lateralidade. O *limite lateral à esquerda* é quando a operação do limite está restrita à condição de que a variável x sempre seja menor do que a. Sua notação é similar à do limite, porém com o sinal $-$ ao lado do argumento a, para indicar a lateralidade, isto é

$$\lim_{x \to a-} f(x)\,. \tag{1.35}$$

Respectivamente, o *limite lateral à direita* considera que a variável x seja sempre maior do que a e é denotado similarmente por

$$\lim_{x \to a+} f(x)\,, \tag{1.36}$$

onde o sinal + indica a lateralidade.

Para um limite lateral (tanto à esquerda quanto à direita), podem acontecer três resultados:

(i) o limite converge a um valor finito;
(ii) o limite "tende" a infinito (positivo ou negativo);
(iii) o limite não existe[2].

Para o primeiro caso, dizemos que há convergência lateral, e, para os outros dois, dizemos que há divergência. O terceiro caso representa uma divergência mais patológica, porém não incomum. Para uma melhor compreensão dos possíveis resultados, na Tabela 1.2 apresentamos cinco exemplos seguidos por uma breve análise.

Tabela 1.2: Exemplos de convergência e não convergência de limites de funções.

Exemplo	Análise
$\lim_{x \to 0+} 1/x = +\infty$	A função diverge para o infinito positivo, quando x se aproxima de 0 pela direita;
$\lim_{x \to 0-} 1/x = -\infty$	A função diverge para o infinito negativo, quando x se aproxima de 0 pela esquerda;
$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sen}(1/x) = \nexists$	O limite não existe, pois quando x se aproxima de 0 pela direita, $1/x$ tende a infinito (positivo), causando uma indefinição na função seno, cujos valores ficam oscilando entre -1 e 1;
$\lim_{x \to 0+} x^2 = \lim_{x \to 0-} x^2 = 0$	O limite é zero, pois ambos limites laterais apresentam o mesmo valor finito (zero).
$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$	O limite é zero, pois ambos limites laterais apresentam o mesmo valor finito (zero).

[2] O símbolo matemático para não existência é $\nexists$.

Para se computar limites que envolvam expressões mais complicadas, existem limites de expressões previamente computados, chamados *limites fundamentais*, dos quais apresentamos os quatro principais na Tabela 1.3.

Tabela 1.3: Limites fundamentais.

Limite	**Comentário**
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x} = a,$	Tal limite é utilizado para se calcular a derivada da função seno;
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{b}{x}\right)^x = \mathrm{e}^b,$	Este limite é uma das definições do número de Euler e; está associado ao problema de juros compostos para intervalo de tempo infinitesimal;
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{c^x - 1}{x} = \ln(c),$	Tal limite é utilizado para se calcular a derivada da função exponencial;
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$	Este limite mostra que a função exponencial sempre cresce mais depressa que qualquer função polinomial;

Observação: $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c > 0$.

Por exemplo, para avaliarmos o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\mathrm{e}x)}{\mathrm{e}^x - 1}\,,$$

podemos reescrevê-lo como

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\mathrm{e}x)}{x}\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

e usar os limites fundamentais da Tabela 1.3, obtendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\mathrm{e}x)}{\mathrm{e}^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\mathrm{e}x)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \mathrm{e}\frac{1}{\mathrm{e}} = 1\,.$$

1.4.2 Função contínua

Intuitivamente, podemos dizer que uma função é contínua quando, ao desenhar o gráfico da função com um lápis sobre um papel, o lápis fica em contato com o papel o tempo todo.

A continuidade de uma função é uma propriedade local, isto é, dado um ponto do domínio, podemos avaliar se a função é contínua ali ou não. Com efeito, uma função é *contínua* em um ponto $x = a$ se ambos limites laterais e a própria função possuem o mesmo valor finito. Por conveniência, caso a função seja contínua em todos os pontos de um intervalo I, então ela é chamada simplesmente de função contínua em I.

Quando a função não é contínua em um ponto, dizemos que ali há uma *descontinuidade* que pode ser classificada em três tipos:

(i) Se os limites laterais são iguais e finitos, porém a função possui um outro valor, ou não é definida, dizemos que a função tem uma *descontinuidade removível.*

(ii) No caso em que os valores dos limites laterais são números finitos, porém distintos, dizemos que a função apresenta uma *descontinuidade de salto.*

(iii) Quando pelo menos um limite lateral tende ao infinito, ou não existe, dizemos que a função tem uma *descontinuidade essencial.*

Por exemplo, a função

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

não é definida para $x = -1$, sendo, portanto, descontínua. No entanto, quando $x \neq -1$, podemos simplificar a função, observando que $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, fazendo com que

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1, \qquad \text{para } x \neq -1.$$

Sendo assim, a função $f(x)$ é igual a $x + 1$ para todos os reais x, com exceção de $x = -1$. Como $f(x)$ tende a -2 quando x tende a -1, tanto pela esquerda quanto pela direita, concluímos que $x = -1$ é um ponto de descontinuidade removível. Com base na função $f(x)$, podemos construir uma função contínua $\tilde{f}(x)$, bastando incluir o valor -2 no ponto de descontinuidade, isto é,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & \text{para } x \neq -1\,, \\ -2, & \text{para } x = -1\,. \end{cases}$$

Neste caso, observamos que a função $\tilde{f}(x)$ é igual a $x-1$.

Se considerarmos a seguinte função

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{para } x > 0\,, \\ x-1, & \text{para } x < 0\,, \end{cases}$$

observamos que em $x = 0$ há uma descontinuidade de salto, pois os limites laterais são finitos e distintos, como podemos comprovar:

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} (x-1) = -1 \neq \lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} (x+1) = +1\,.$$

Finalmente, a função $h(x) = x^{-1}$ tem descontinuidade essencial em $x = 0$, pois

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty\,.$$

Exercícios

1.24 Usando os limites fundamentais, manipule as expressões dos seguintes limites, para calculá-los.

(a) $\lim_{x\to\infty} x\,\mathrm{sen}(1/x) = 1$

(b) $\lim_{x\to\infty} (1+x)^{1/x} = \mathrm{e}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

1.25 Encontre o valor de a para que as funções definidas a seguir sejam contínuas. Em seguida, esboce o gráfico das funções.

(a) $$f(x) = \begin{cases} 6+x, & \text{se } x \in (-\infty; -2]\,, \\ 3x^2 + xa, & \text{se } x \in (-2; +\infty)\,. \end{cases}$$

(b) $$g(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x > 0\,, \\ a+x, & \text{se } x \leq 0\,. \end{cases}$$

(c) $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1\,, \\ a, & \text{se } x = 1\,. \end{cases}$$

Exercícios adicionais

1.26 Encontre o domínio máximo e o contradomínio para as seguintes funções:

(a) $f(x) = \sqrt{x-3}$ (b) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ (c) $f(x) = \ln[(x-2)(x+3)]$

1.27 Encontre as expressões das funções afim que representam as retas indicadas no gráfico mostrado na Figura 1.17.

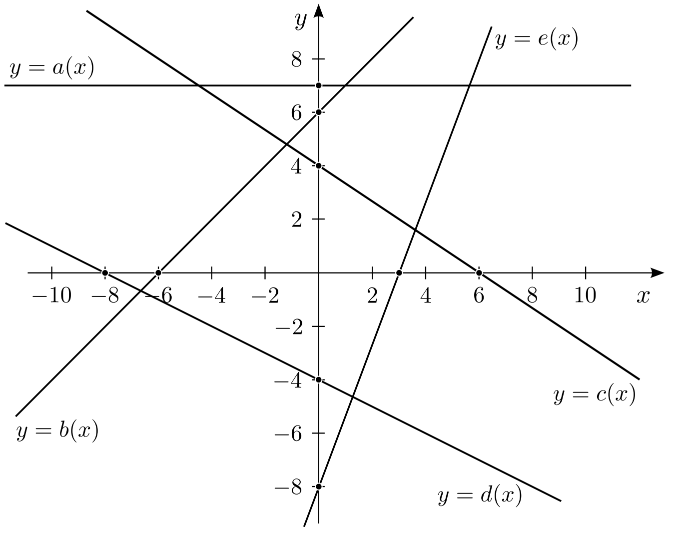

Figura 1.17: Retas usadas no Exercício 1.27: encontrar as expressões das funções afim que as representam.

1.28 Esboce o gráfico das retas representadas pelas seguintes funções afim:

(a) $y = 2x - 1$ (c) $y = x/3 + 1$ (e) $y = -2x$
(b) $y = 2x/3 + 2/3$ (d) $y = -2x/3 + 2$ (f) $y = -x/3 - 3$

1.29 Dada a função quadrática na forma padrão: $f(x) = 6 - 7x + x^2$, então:

(a) calcule as suas raízes, usando a fórmula de Báskara;

(b) reescreva-a na forma explícita;

(c) reescreva-a na forma de Newton, com $c_1 = 1$ e $c_2 = 3$;

(d) reescreva-a na forma padrão centrada no ponto $c = 2$.

1.30 Usando a identidade trigonométrica fundamental, mostre as seguintes identidades trigonométricas

$$\sec^2(x) - \tan^2(x) = 1 \tag{1.37}$$
$$\csc^2(x) - \cot^2(x) = 1 \tag{1.38}$$

1.31 Considere as seguintes funções:

$$f(x) = \text{máx}\{x, 0\} \quad \text{e} \quad g(x) = \text{máx}\{-x, 0\}$$

e resolva as seguintes questões:

(a) esboce os gráficos de f e g;

(b) mostre que qualquer número x pode ser escrito como $x = f(x) - g(x)$;

(c) expresse a função módulo como uma combinação das funções $f(x)$ e $g(x)$;

(d) esboce o gráfico da função $f(\cos(x))$.

1.32 Dada a curva mostrada na Figura 1.18, representá-la com o auxílio de funções indicadoras.

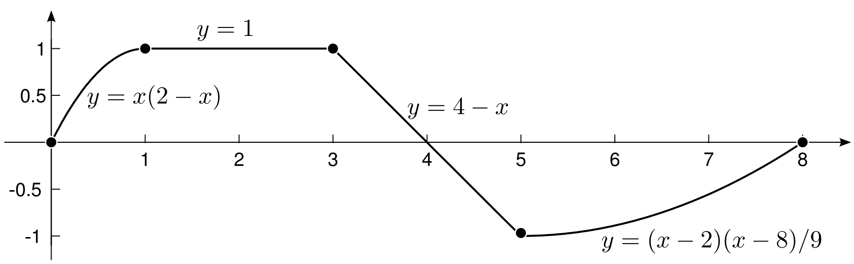

Figura 1.18: Curva do Exercício 1.32.

1.33 Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = |\,\text{sen}(x)|$

(b) $q(x) = \text{sgn}(\text{sen}(x))$

(c) $r(x) = x^2\, h(x)$

(d) $s(x) = x\ \text{sgn}(\text{sen}(x))$

(e) $t(x) = \cos(x)\, \text{sgn}(\text{sen}(x))$

1.34 Seja $g(x)$ uma função definida por partes da seguinte forma:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,, & \text{para } x \in (-\infty, -1)\,, \\ |x|\,, & \text{para } x \in [-1, 1]\,, \\ 1 + 2x\,, & \text{para } x \in (1, +\infty)\,. \end{cases}$$

Esboce o seu gráfico e calcule os seguintes limites (caso existam):

(a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to -1+} g(x)$ (e) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ (g) $\lim\limits_{x \to 1+} g(x)$

(b) $\lim\limits_{x \to -1-} g(x)$ (d) $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$ (f) $\lim\limits_{x \to 1-} g(x)$ (h) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

1.35 (Bracewell, 2000) Mostre que

$$h(ax + b) = \begin{cases} h(x + b/a), & \text{se } a > 0\,, \\ h(-x - b/a), & \text{se } a < 0\,, \end{cases}$$

o que leva à seguinte expressão

$$h(ax + b) = h(x + b/a)h(a) + h(-x - b/a)h(-a)\,,$$

onde $h(x)$ é a função de Heaviside.

1.36 Dada a seguinte função $v = f(z)$ mostrada na Figura 1.19, representá-la com o auxílio de funções de Heaviside.

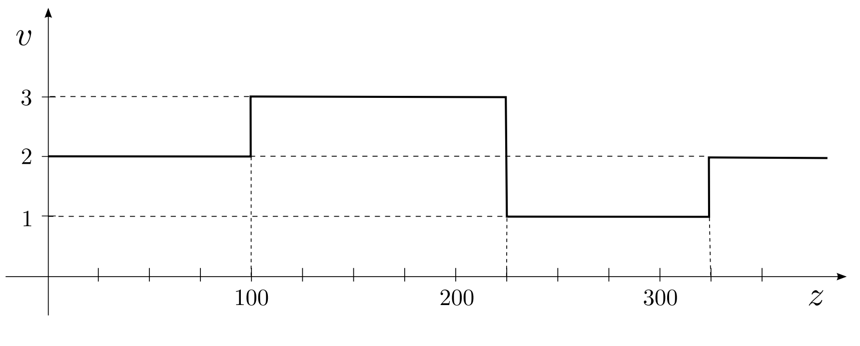

Figura 1.19: Função $v = f(z)$ do Exercício 1.36.