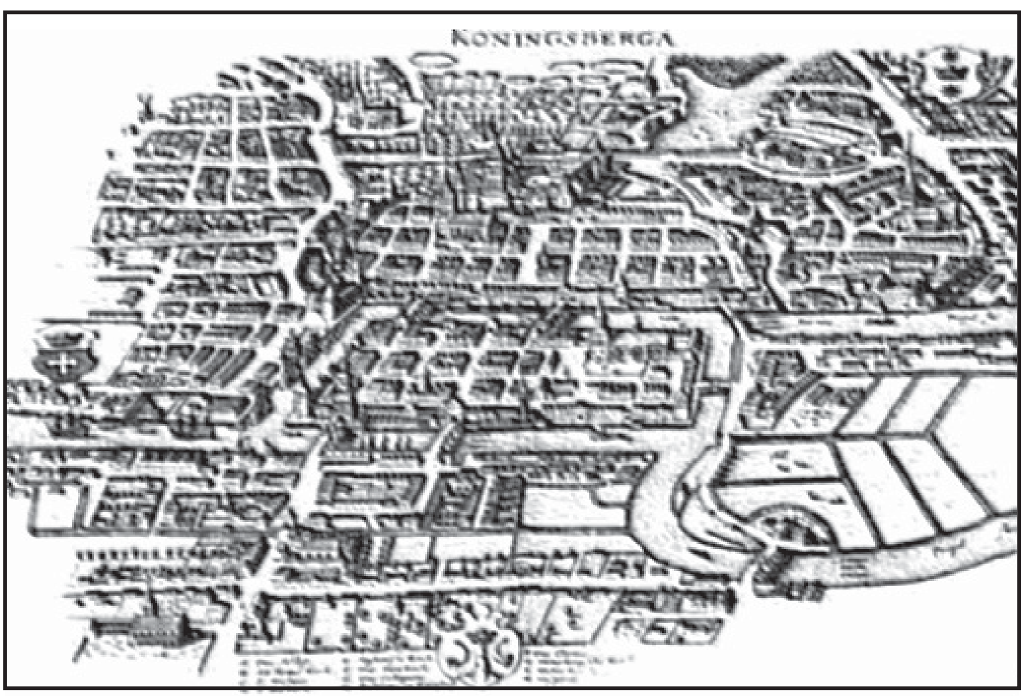
Agora falando sério
Preferia não falar
Nada que distraísse
O sono difícil ...
Chico Buarque
Agora falando sério

Capítulo 1 : Primeiras ideias

1.1 Um rápido histórico

Cerca de 270 anos se passaram desde que a ideia de grafo apareceu associada a diversos problemas, suscitados por situações ou aplicações variadas em diversos campos. Uma apresentação histórica resumida pode, então, mostrar como se pode chegar a construir um modelo de grafo : muitos dos exemplos que se seguem são bastante simples e ajudam a quem se inicia no uso dos recursos da teoria.



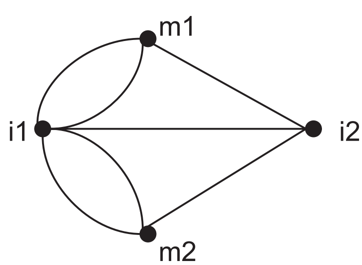
Fonte: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Topology_in_mathematics.html .

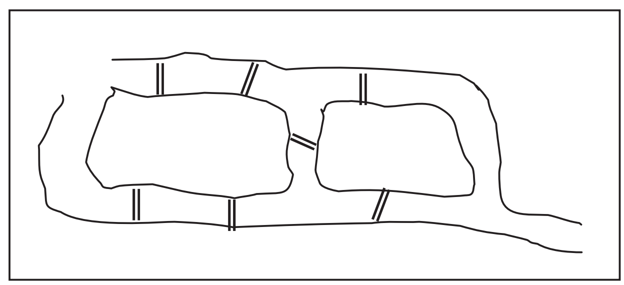
.

O problema de Euler

O primeiro registro conhecido de um problema relacionado com o que hoje em dia se chama a *teoria dos grafos*, remonta a 1736. Nesse ano Euler, grande matemático e geômetra, visitou a cidade de Königsberg, na então Prússia Oriental (atualmente ela se chama Kaliningrad e fica em uma pequena porção da Rússia, entre a Polônia e a Lituânia). A cidade, na época, era o local de moradia de diversos intelectuais conhecidos e se pode imaginar que Euler tenha se sentido atraído pelo ambiente, que deveria ser movimentado pelo fato de Königsberg pertencer à poderosa Liga Hanseática de comércio marítimo.

O fato é que ele, ao lá chegar, tomou conhecimento de um problema que estava sendo discutido entre a *intelligentsia* da cidade e que, embora parecesse simples, não tinha sido ainda resolvido. No Pregel, rio que corta a cidade, havia duas ilhas que, na época, eram ligadas entre si por uma ponte. As duas ilhas se ligavam ainda às margens por mais seis pontes ao todo, como aparece no desenho da época. O problema consistia em encontrar o percurso para um passeio que partisse de uma das margens e, atravessando uma única vez cada uma das sete pontes, retornasse à margem de partida.

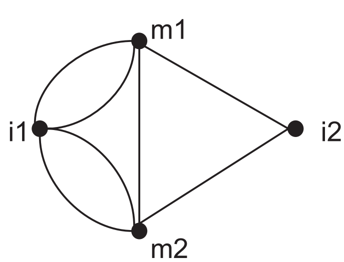


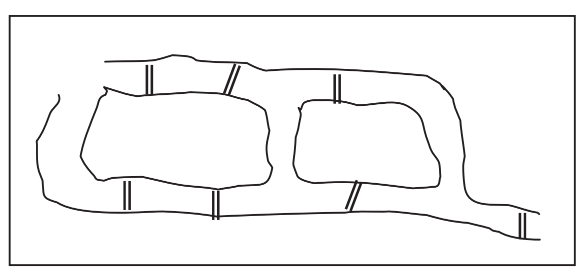


Euler observou que o número de passagens de uma margem para uma ilha, ou entre duas ilhas, era sempre ímpar (veja no esquema ao lado, onde cada ponte é representada por uma linha e cada margem, ou ilha, por um ponto) : isso indica que se pode passar, mas em algum momento não se conseguirá retornar. Ele provou que, para que o passeio desejado pelos intelectuais de Königsberg fosse possível, cada massa de terra deveria se ligar à outra por um número *par* de pontes.

Este esquema é uma representação gráfica do que, hoje em dia, se chama um *modelo de grafo*.

Suponha que a ponte entre as duas ilhas não existisse: no esquema, a linha (*i1,i2*). Em compensação, imagine que houvesse uma ponte diretamente de uma margem para a outra, ou seja (*m1,m2*).





Observe que tudo o que mostramos corresponde ao velho problema que aparece de vez em quando em jornais, revistas de charadas etc., que é o de achar como percorrer todas as linhas de uma dada figura, sem tirar o lápis do papel.

Exercício: Verifique, neste caso, se existe algum passeio que atravesse cada ponte uma única vez e volte ao ponto de partida.

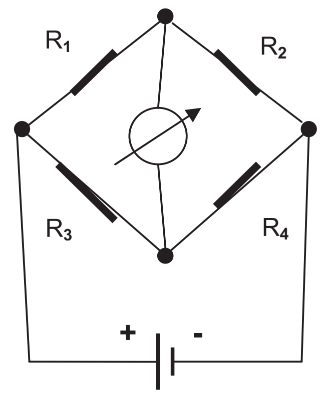
Euler foi o pesquisador mais produtivo que jamais existiu (com mais de 70 espessos volumes de trabalhos !). O problema das pontes não passou, para ele, de um pequeno desafio intelectual, sem muita

Aqui temos um intervalo de 111 anos. Felizmente o trabalho de Euler foi encontrado mais tarde !

importância : não o estudou mais a fundo, nem procurou desenvolvê-lo, achar aplicações para ele, ver aonde poderia levar.

Para a teoria dos grafos, isso não foi bom : a solução do problema das pontes se perdeu no meio da sua enorme produção e, por mais de 100 anos, ninguém pensou em algo parecido.

O problema de Kirchhoff



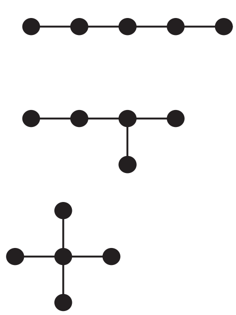
Apenas em 1847, Kirchhoff publicou resultados sobre circuitos elétricos, nos quais utilizava modelos de grafos : essa pesquisa produziu alguns resultados ainda hoje importantes para a teoria, além do interesse para o estudo da eletricidade.

Para dar uma idéia dos problemas que aparecem, mostramos ao lado o esquema de um circuito elétrico conhecido como *ponte de Wheatstone*, usado para medir resistência elétrica : no aparelho que o contém, as resistências R_1, R_2 e R_3 podem ser modificadas à vontade e a resistência R_4 é a que vai ser medida.
O círculo com a seta é um instrumento de medida (galvanômetro) e na parte de baixo do esquema há um símbolo que representa uma fonte de energia. Todo técnico de televisão, por exemplo, possui um medidor desse tipo.

Um modelo de grafo pode ser construído para representar este circuito e as propriedades dele podem ser estudadas, inclusive com recursos teóricos desenvolvidos pelo próprio Kirchhoff.

O problema de Cayley

Em 1857, Cayley se interessou pela enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos, que são compostos de carbono e hidrogênio com cadeias abertas. Para recordar um pouco de química, diremos que dois compostos diferentes são *isômeros* quando possuem a mesma composição percentual (e, portanto, a mesma *fórmula condensada*).

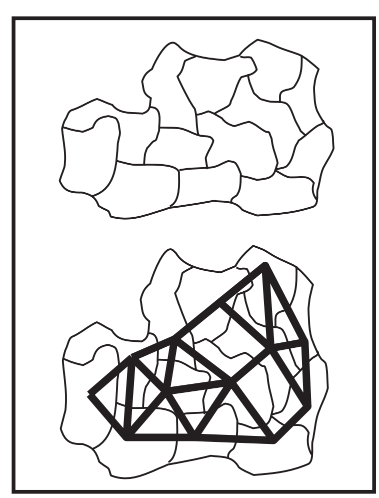


Por exemplo, os esquemas ao lado correspondem aos três isômeros do *pentano* (C_5H_{12}), representados apenas pelas ligações entre seus átomos de carbono, sabendo-se que o carbono tem valência 4 (ou seja, um átomo de carbono pode se ligar a um máximo de 4 outros átomos).

Verifique que em cada esquema há 12 posições vazias que irão receber os átomos de hidrogênio.

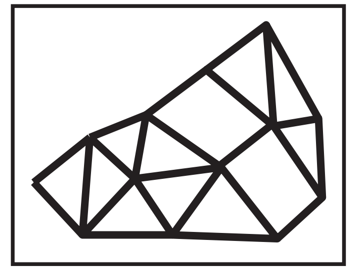
Cayley desenvolveu uma técnica para determinar o número de diferentes isômeros desses hidrocarbonetos: por exemplo, para o *tridecano* $C_{13}H_{28}$, ele é de 802.

O problema de Guthrie



Por essa época, um estudante inglês de matemática – Guthrie – descobriu, por meio de um irmão que trabalhava com mapas, um problema relacionado com a prática da cartografia. O irmão lhe disse que todo cartógrafo, ao desenhar seus mapas, sabia que não precisaria de mais de quatro diferentes cores para colorir as regiões neles representadas. Isso era conhecimento prático desses profissionais, e parava por aí.

Guthrie resolveu dar atenção ao problema, de um ponto de vista matemático. Para isso, ele tomou um mapa, associou pontos às suas regiões e uniu dois pontos por uma linha, quando as regiões correspondentes tinham uma fronteira em



comum. O problema de provar que, para qualquer mapa, é necessário usar no máximo 4 cores, parece simples, mas é muito difícil : nem Guthrie, nem seus contemporâneos conseguiram resolvê-lo. Formulado no meio do século XIX, foi somente em 1976 que se conseguiu um resultado significativo e, ainda assim, com uso extensivo de computadores.

Para que serviu todo esse trabalho ? Para a própria teoria, que se desenvolveu muito e abriu caminho para muitas aplicações ...

Ao longo do século XX, cresceu o interesse de muitos matemáticos pelo estudo dos grafos, em geral trazido pelo estudo de problemas como estes que descrevemos e, com isso, foi sendo desenvolvido um corpo teórico que permite, atualmente, a abordagem de muitos problemas novos. Centenas de artigos são publicados anualmente e novos livros estão sempre sendo editados em todo o mundo.

A partir da década de 1950, a pesquisa operacional – disciplina matemática envolvida com problemas de organização – começou a utilizar intensamente os modelos de grafo, em busca de melhores soluções para problemas de projeto, organização e distribuição. Estas aplicações, viabilizadas pela invenção do computador, promoveram uma grande divulgação desse tipo de modelagem e abriram caminho para a aplicação de muitos dos conceitos desenvolvidos nesse período.

A teoria dos grafos é, hoje, um campo de interesse crescente, cujas aplicações vão desde os problemas de localização e de traçado de rotas para diversos tipos de serviços, ao projeto de processadores eletrônicos, passando pelo planejamento de horários, pelo estudo da estrutura do DNA e pelo projeto de códigos, além dos problemas comparativamente mais simples como o da interligação elétrica e o da engenharia molecular, projeto de novos compostos químicos : extensões dos trabalhos de Kirchhoff e Cayley, apresentados anteriormente.

Finalmente, os modelos de grafo tem sido essenciais no campo cada vez mais presente da gestão de recursos, planejamento de transportes e otimização de recursos humanos.

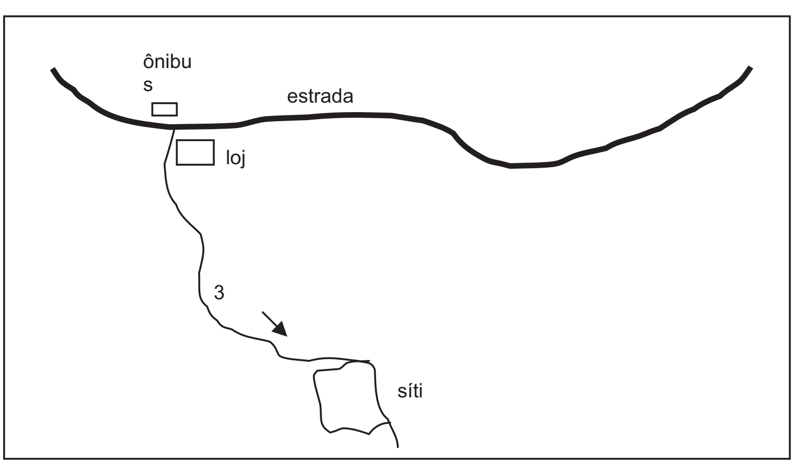
1.2 Um ponto muito importante: o modelo

Quando procuramos estudar um problema – de *qualquer* natureza – utilizando os conhecimentos de que dispomos, encontramos sempre uma dificuldade inicial, que não pode ser evitada:

O mundo em que vivemos é complicado demais !

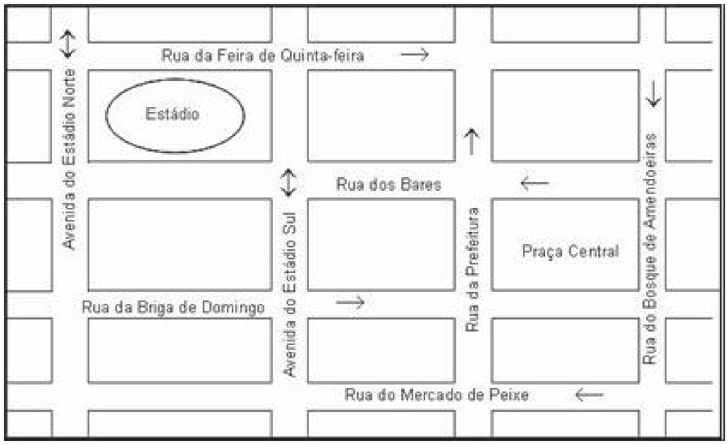
Então vamos procurar simplificar.

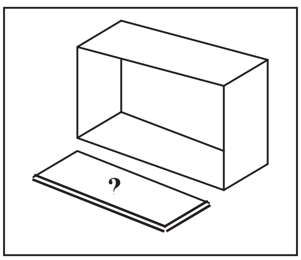
Imagine que um amigo tenha convidado você para um churrasco de aniversário num sítio distante. Junto com o convite veio um mapa:



O mapa não é nada preciso, mas todo mundo compareceu ao churrasco: o esquema cumpriu o seu papel.

Se você fosse um taxista e o seu cliente lhe desse um endereço que você não conhecesse, você precisaria de um guia de ruas, em que as ruas aparecessem de maneira mais precisa, inclusive com a mão e a contramão.





Agora pense em um carpinteiro que vai colocar uma prateleira em uma estante. Ele terá de cortar a madeira de modo que a prateleira caiba no espaço a ela destinado: se ela for grande demais não entra, se for pequena demais vai ficar folgada e não poderá ser afixada às paredes da estante. Então o ideal é que a prateleira seja cortada de acordo com a largura da estante.

Mas qual é a largura da estante ? Podemos medi-la “a olho” e dizer ao carpinteiro que é, por exemplo, de “uns 80 centímetros”. Ele vai torcer o nariz, é claro.

Podemos colocar a estante sobre uma mesa especial, com calibradores óticos de precisão ou coisa semelhante, para dizer ao final que a largura é de 77,648 centímetros. Isto quer dizer que teremos de levar a estante, por exemplo, a um laboratório especializado como os do Instituto Nacional de Metrologia.

Nada de sugerir isso ao carpinteiro, ele vai achar que fugimos do hospício. Ele vai, simplesmente, tirar da sua maleta uma trena de carpinteiro (aquela que vai se dobrando em pedaços) e tomar a medida de que precisa: por exemplo, 77,6 centímetros. E vai dar certo, a prateleira vai se encaixar direitinho.

Agora, vamos pensar um pouco: o que ele fez ?

Ele usou um instrumento de medida de comprimento – a trena – que tem graduações em centímetros e em milímetros: a trena nos permite, portanto, obter uma útil simplificação da realidade que é a medida “real” da largura da estante.

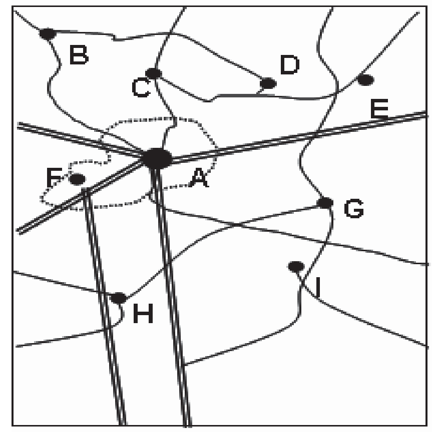
Esta “largura real” não nos interessa, na verdade, e nem há como conhecê-la. Apenas, se no lugar da estante tivéssemos uma montagem mecânica – como um motor de automóvel, por exemplo – a medida talvez tivesse de ser tomada com mais precisão, talvez até o centésimo de milímetro. A mesma diferença de precisão existe, por exemplo, ao se medir meio litro de leite na cozinha, ou um mililitro de um medicamento injetável.

O problema, no entanto, continuaria a ser o mesmo: estaríamos trabalhando com uma *simplificação da realidade*.

A uma simplificação da realidade, construída com um objetivo, chamamos modelo.

Em grande parte das nossas atividades, estaremos lidando com modelos, sem nos darmos conta disso. Por outro lado, praticamente todas as ciências trabalham com modelos. Um *instrumento de medida por comparação* – como a trena – cria um modelo da grandeza que ele mede (no nosso exemplo, o comprimento da prateleira).

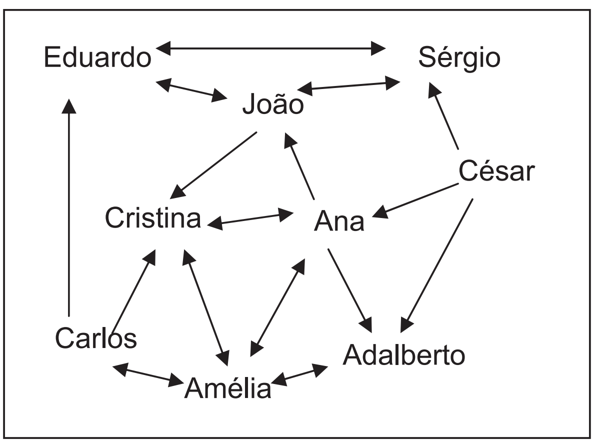
Um *mapa rodoviário*, como o que vemos abaixo, é um modelo de uma região sobre a qual algum tipo de conhecimento nos interessa: podemos usá-lo, por exemplo, ao programar uma viagem de fim de semana. Ele é, naturalmente, uma simplificação da realidade que é a região verdadeira.



Ele mostra diversas cidades, das quais A é a maior, sua área urbana abrangendo a vizinha F. Há diversas rodovias e se pode ver quais são as mais importantes.

Vamos imaginar que ele faça parte de um guia turístico. Ele conterá as distâncias entre as interseções das estradas, o que vai nos permitir calcular as distâncias que iremos percorrer para ir a um dado local, diretamente ou passando antes em tal e tal lugar. Teremos dados sobre as cidades a visitar, preços de hotéis, informações sobre compras, espetáculos, locais pitorescos etc., que nos permitirão avaliar *quanto* iremos desembolsar em cada cidade. E vamos construir o nosso modelo de viagem com tudo isso.

Até agora, tratamos de modelos que procuravam reproduzir relações espaciais – esquemas, plantas, mapas.



Os modelos podem também representar outros tipos de relação. Vamos para um exemplo que vai nos aproximar do nosso objetivo principal:

Uma professora primária pode construir um *modelo do relacionamento* entre seus alunos, apenas pedindo a cada um que indique os colegas dos quais mais gosta. Depois, ela irá escrever os nomes dos alunos em um papel e colocar setas de um para outro, indicando quem gosta de quem. Este modelo se chama *sociograma*.

Ele permite descobrir, por exemplo, um aluno deslocado na turma (César) e dois grupos unidos, um de meninos e outro de meninas. Além disso, o modelo mostra que Ana e Amélia são mais sociáveis, elas gostam de dois meninos (e Amélia tem, também, o afeto deles); já Cristina só se relaciona dentro do grupo das meninas ... etc..

Então poderemos ter modelos que não envolvam valores numéricos (como o sociograma) ou, ao contrário, que nos permitam trabalhar com eles (como quando usamos o guia turístico com mapa). Estes dois exemplos trataram de modelos que possuem um certo tipo de *organização*, que pode ser indicado por pontos (cidades, ou alunos da professora) e por ligações (estradas, ou ligações afetivas); o primeiro envolvia muitos valores numéricos, enquanto neste último, tudo o que nos interessou foi:

- Quais eram os elementos envolvidos;
- Quais elementos estavam ligados e quais não estavam.

*Voltaremos a este tipo de modelo, que é um **modelo básico de grafo.***

Antes de prosseguir, vamos insistir naquilo que estivemos discutindo:

*Um modelo é uma simplificação de uma realidade com a qual **nos interessa** trabalhar, construída de modo a conter aquilo que mais **nos interessa** e de forma que nos permita obter as respostas de que necessitamos.*

Ele pode *vir pronto*, como o guia de ruas, o mapa rodoviário ou a trena, *ou teremos de construí-lo*, como fez o amigo que convidou você ao sítio dele, ou a professora com seu sociograma.

Há muitas coisas que podemos querer saber a respeito de um modelo, tanto sobre a construção como sobre seu uso:

- Ele ***contém as informações*** que nos interessam ? (No caso do sociograma, podemos imaginar que a professora vai colocar nele os dados sobre o relacionamento dos alunos na turma, que interessam a ela – mas não, provavelmente, coisas como a altura e o peso dos alunos).
- Contendo tudo que nos interessa, ***será que ele fica muito complicado ?*** (No caso do guia turístico com mapa, é claro que, se levarmos em conta dados em demasia, vamos acabar nos confundindo).
- O modelo é ***feito, ou usado, por nós***, para servir a ***nossos interesses***: será que, ao usá-lo, iremos prejudicar alguém ? (***Questão ética !***)
- É possível *resolver* o modelo ?

⇒ *Aqui temos uma nova dúvida: o que é resolver um modelo ?*

Resolver um modelo é obter respostas para o problema a ele associado.

Pelo que já vimos, a *trena* nos informa imediatamente a *largura da estante*, com a precisão de que necessitamos.

O *sociograma* deixa claras as *relações afetivas* entre os alunos da turma.

Já o *modelo de viagem* começa a ficar mais complicado e exige cuidado, ou ele se tornará de pouca utilidade por ser difícil de resolver. E nele encontramos uma questão importante, que é a de *precisarmos ter clareza sobre o que estamos querendo !*

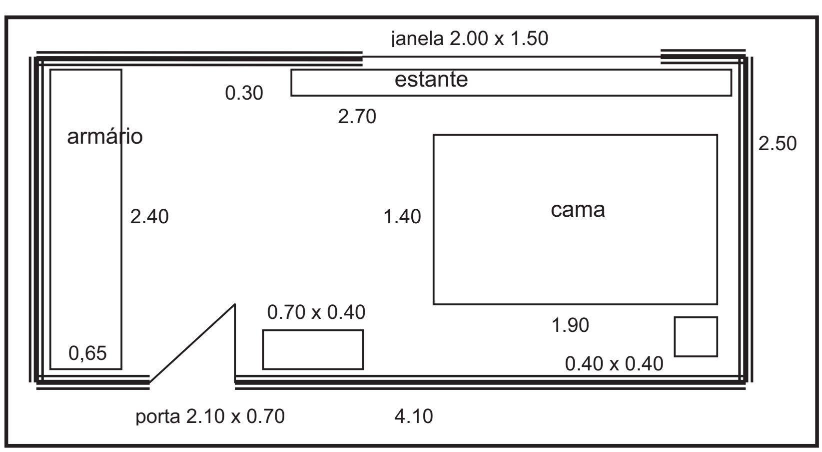
Por outro lado, se o marido gostar de praia e a mulher dele de montanha, a construção do modelo exigirá uma ***negociação***, ou o modelo dele irá acabar atropelando os desejos dela (ou vice-versa). ***Observe como este ponto se aproxima das questões éticas !***

A resolução de um modelo passa por todas estas questões.

Falta-nos apenas colocar (no ar) duas dúvidas importantes, a serem esclarecidas mais adiante:

- *Um dado modelo tem solução ?*
- *Mesmo tendo solução, será que conseguiremos achá-la ?*

Vamos pensar no problema de um casal que deseja comprar móveis para seu quarto. Eles, com todos os cuidados que conseguiram imaginar, fizeram uma planta assim:



Na hora de escolher os móveis, acharam um guarda-roupa antigo que se encaixava perfeitamente no estilo dos demais móveis, fizeram todos os cálculos, acertaram um esquema de pagamento e – na mesma hora – compraram tudo.

Eles só se esqueceram de verificar se o guarda-roupa era desmontável ... afinal, hoje em dia, todos o são !!! Mas aquela beleza de antiguidade tinha 2.20 metros de altura e ... não passava na porta ! Resultado: grande despesa adicional, para desmontar e montar de novo um armário que não tinha sido feito para isso.

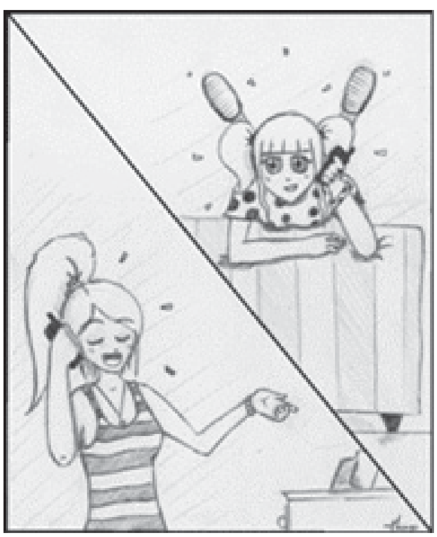
O modelo deles *não tinha solução* (ou, pelo menos, uma solução dentro dos *parâmetros de custo* por eles estabelecidos).

Já um modelo que certamente tem uma solução, é o das loterias (claro, o número sorteado *vai ser* um daqueles) – mas qual é essa solução ?

Se fizermos um negócio, podemos ganhar dinheiro ou não: há muitos fatores que influem nisso, inclusive a sorte. O mundo não é exato, há muitas incertezas e todos sabemos disso.

Uma loteria é um modelo dessas incertezas, que tem ao menos a certeza de ter uma solução (que ninguém sabe qual vai ser) mas, como temos ao menos esta certeza, jogamos nela. Pode ser uma rifa baratinha de quermesse, que custa 1 real e tem 30 números – ou pode ser a mega-sena, que tem 50.000.000 de combinações possíveis e que pode custar muito caro, se quisermos ter uma chance apenas razoável de acertar alguma coisa.

Aliás, este enorme número nos aponta uma dificuldade muito comum em alguns dos problemas que encontraremos.



Imagine, por exemplo, que os alunos daquela turma do sociograma adorem uma fofoquinha. Para simplificar, suponhamos que, em um fim de semana, a Amélia ouviu dizer que ... (esta é imperdível !). Ela nem vai pensar se gosta ou não de alguém na turma, vai logo telefonar para algum colega para contar tudo. E, é claro, esta atitude vai se repetir, porque cada um que ouvir a notícia vai tratar de passá-la adiante.

Por exemplo, a Amélia pode contar ao Sérgio, que depois vai contar ao Adalberto, que fala com o César, que ... e depois de algum tempo, todos estarão sabendo.

Nossa pergunta é a seguinte: de quantas maneiras diferentes a fofoca da Amélia pode se propagar na turma, cada aluno falando com apenas um colega e sem contar as repetições do tipo: “já sei, o Fulano (ou a Fulana) me contou” ?

Há apenas 9 alunos na turma. Você imaginaria que há 40.320 maneiras diferentes disso acontecer ?

Um exemplo de maior impacto ainda é o da lenda do jogo de xadrez, segundo a qual o seu inventor cobrou do rei da Pérsia, por sua invenção, um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois pela segunda, quatro pela terceira ... e a conta total chegou a 18.446.744.073.709.551.615 grãos, muito mais do que todas as colheitas do país no século seguinte. O rei, é claro, não pagou.

Podemos também estar interessados em resultados **qualitativos.** Será que os alunos só vão falar com os colegas de quem gostam ? E aí, contando para Amélia toda turma vai saber a fofoca, ou apenas a panelinha dela ? Isso depende da estrutura do sociograma. (Volte ao sociograma e verifique que César não saberá nunca de nenhuma fofoca ...).

> *Este tipo de problema, como os problemas de grafos que iremos discutir, pertence à classe dos problemas combinatórios. Alguns deles podem ser resolvidos sem maior dificuldade – porém outros admitem um número tão grande de possibilidades que, mesmo que o exame de cada uma delas seja simples e rápido, não chegaremos necessariamente à melhor delas (por exemplo, à mais barata, um interesse comum em problemas aplicados).*

Mesmo dispondo do mais rápido dos computadores, uma busca como essa poderia levar *meses* ou *anos*, em alguns problemas. Basta imaginar que o nosso modelo tenha tantas possibilidades de solução quantos grãos de trigo o inventor do xadrez pediu ao rei e que cada uma delas exija um milionésimo de segundo (10^{-6} segundo) para ser examinada. Parece incrível, mas o exame de todas elas levaria quase 600.000 anos ...

Em uma situação parecida com essa, teremos de procurar, dentro do modelo que construirmos, uma solução satisfatória que *não seja* muito demorada *de achar*. Mais adiante, voltaremos a esta discussão.

1.3 Os modelos de grafo

Vamos voltar um pouco, no tempo e no texto deste livro.

> *O **problema das pontes de Königsberg**, resolvido por Euler, foi representado aqui por um desenho com 4 pontos, correspondentes às margens e ilhas, e 7 linhas representando as pontes.*
>
> *Os **circuitos elétricos** foram representados por Kirchhoff associando uma linha a cada componente e um ponto a cada local onde dois ou mais componentes são conectados.*
>
> *As **fórmulas químicas** dos hidrocarbonetos foram representadas por Cayley, associando pontos aos átomos de carbono e linhas às ligações entre eles.*
>
> *E a professora primária construiu seu **sociograma** associando pontos aos seus alunos e colocando setas para indicar quem gostava de quem.*

Todos esses esquemas são ***modelos*** – representações simplificadas de realidades – que podem ser resolvidos para obtenção de resultados de interesse dos seus construtores.

> O estudo do problema das pontes ***serviu a Euler*** para mostrar que o passeio desejado pelos habitantes da cidade não podia ser realizado do modo que eles queriam.
>
> Kirchhoff ***desenvolveu uma teoria*** para calcular as propriedades dos circuitos elétricos a partir de esquemas do tipo que exemplificamos.
>
> Cayley usou seus esquemas de hidrocarbonetos para ***contar o número*** de isômeros.
>
> A professora usou seu sociograma para ***estudar situações de relacionamento*** dentro de sua turma de alunos.

Olhando tudo de novo, é claro que existe *algo* de muito semelhante entre esses esquemas.

Neste momento é que a matemática entra em ação.

E é na hora de ***usar matemática*** que, frequentemente, aparece uma visão preconceituosa. Imagine um diálogo entre dois alunos:

> *A: – Lá vão eles começar a teorizar ...*
> *B: – Até aqui eu estava entendendo,*
> *mas agora ficou muito teórico...*
> *A: ... para que serve essa teoria toda ?*

A matemática é uma ciência ? Uma linguagem ? (Não vamos entrar nessa discussão). Diremos que ela é uma ***disciplina teórica***.

Para que vai nos servir a matemática ?

Ela nos permite ***fazer sem gastar*** (ou seja, no papel ou no computador). É claro que vai haver um esforço, principalmente mental, gasto na obtenção da solução de um problema. A ciência experimental é diferente: uma experiência (sobretudo de física) pode exigir, além desse esforço, uma aparelhagem muitas vezes dispendiosa. Pense no LHC, um caríssimo acelerador de partículas dentro de um túnel circular de 27 quilômetros ! (No entanto, custou "apenas" o preço de um único porta-avões !)

Ela também vai nos permitir ***abstrair***. Ou seja, com ela poderemos estudar uma situação do mundo real, a partir de um modelo, sem que tenhamos que nos preocupar com a sua origem: de onde aquilo veio não interessa, enquanto a matemática estiver sendo usada.

Se as informações estão ***completas e corretas*** ou não, é problema da ***construção do modelo*** (ou ***modelagem***).

Quais as vantagens da abstração?

> Por um lado, esta ***despreocupação com a origem*** do problema: para os exemplos acima, iremos descrever ***uma única teoria*** capaz de lidar com todos os problemas.
>
> Além disso, toda operação tem uma operação ***inversa***, isto é, nossas ações podem ser "desfeitas" sem custo.

Como lidar com isso, no que aqui nos interessa ?

Vamos definir formalmente algo do que já falamos, chamado ***grafo***.

Todos sabem o que é um *conjunto*: uma coleção de objetos bem definidos e distintos um do outro.

> Um *grafo* é um *objeto matemático* (ou uma *estrutura matemática*) formado por ***dois conjuntos***.
>
> O primeiro deles, ***que chamaremos de V***, é o conjunto de *vértices*.
>
> O outro é um conjunto de *relações entre vértices*. Diremos que ele é o conjunto de *arestas* e o ***representaremos por E***. Se dois vértices *v* e *w* de V estão relacionados, diremos que entre eles existe uma aresta pertencente a E, que chamaremos (*v,w*) ou simplesmente *vw*. O nome "aresta", você já conhece: faz parte da Geometria, ao tratar de polígonos e de poliedros.
>
> Resumindo: para se conhecer um grafo precisamos saber *quais* são os vértices e "*quem está ligado com quem*".
>
> Isto apela, naturalmente, para uma visão *gráfica* da estrutura, que pode ser aproveitada na sua representação por esquemas.

Então poderemos denominar um dado grafo como G = (V,E). É claro que podemos usar outras letras, com ou sem índices, dependendo de nossas necessidades (por exemplo, se tivermos 3 grafos poderemos chamá-los G_1, G_2 e G_3, ou então G, H e I).

Podemos criar um esquema gráfico, associando cada vértice a um ponto e cada relação a uma linha Observe os esquemas apresentados no ítem 1.1.

Agora, podemos dizer que esses esquemas ***representam*** grafos. ***Representam***, porque se trata de uma idéia abstrata.

No problema das pontes, cada massa de terra (margem ou ilha) é um ***vértice*** e cada ponte é uma ***aresta***.

No problema dos circuitos elétricos, cada ponto de conexão é um ***vértice*** e cada componente é uma ***aresta***.

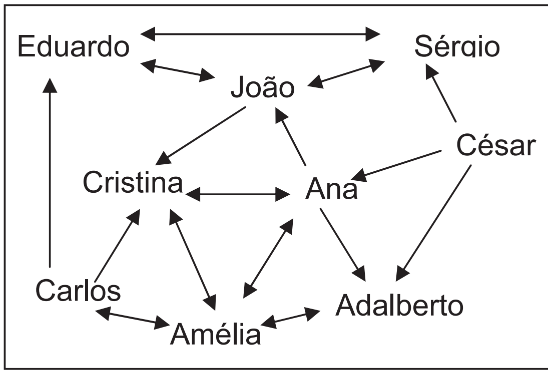
No problema das fórmulas químicas, cada átomo é um ***vértice*** e cada ligação entre dois átomos é uma ***aresta***.

No problema do relacionamento dos alunos, cada aluno é um vértice e cada ... (Um momento ! Aqui há algo de diferente !).

De fato, se associarmos uma aresta à relação "a gosta de b", ***não estaremos descrevendo corretamente*** o que ocorre. No modelo (veja a figura abaixo), essa relação "gostar de" é representada por uma seta: isto porque "a gosta de b" ***não é*** o mesmo que "b gosta de a". Veja esta situação: Jorge é casado com Maria; Jorge e Maria se gostam (um gosta do outro). Jorge gosta de Flávia, sua mãe: e Maria, será que gosta da sogra ? Frequentemente isso não acontece ...

Dizemos que a relação "gostar de" *não é simétrica*. A relação "ser irmão de", por exemplo, é simétrica: se "a é irmão de b", é claro que "b é irmão de a".

Então a estrutura a ser usada ***não é exatamente*** a mesma dos outros casos: vamos definir algo chamado *grafo orientado*, onde a relação que nos interessa será indicada por uma seta, que vai mostrar em que sentido ela se aplica. Um elemento desse conjunto de relações se chama um *arco*.



No problema de relacionamento dos alunos, portanto, cada aluno corresponderá a um vértice e cada relação "gostar de" a um arco. Para indicar a diferença, chamaremos o outro tipo de estrutura (que usa arestas) de *grafo não orientado*.

Aqui é importante voltar e olhar para o grafo que representa o problema de Euler, no início do capítulo. Podemos observar que existem pares de vértices unidos por 2 arestas, correspondentes às massas de terra unidas por 2 pontes.

Um grafo assim construído é um *2-grafo*. Mais geralmente, se existirem *p* arestas entre dois vértices quaisquer, o grafo é dito ser um *p-grafo*. Um grafo com no máximo uma ligação entre dois vértices é, então, um *1-grafo* (mas deixaremos de lado essa denominação).

Podemos ter um *p-grafo orientado*, se existir algum par de vértices unido por *p* arcos de mesmo sentido.

Ao falar da representação de grafos, voltaremos a lidar com este conceito.

Observação: Mais adiante, olharemos para um esquema de grafo e diremos:

"Este grafo ...".
Insistimos em que isso é um abuso de linguagem.
Devemos ter em mente que *grafo* é algo abstrato.

Ao longo dos capítulos que se seguem, estaremos discutindo algumas propriedades das estruturas de grafo e aplicando-as na solução de modelos. Com isso, teremos a ocasião de observar:

- a *potencialidade de uso* da teoria dos grafos;
- *o que devemos procurar em um grafo*, para resolver o nosso modelo, e assim poder selecionar uma *técnica de resolução* para lidar com ele.

Para isso, apresentaremos problemas e técnicas de resolução: e também algo da teoria, quando isso for necessário, ou esclarecer melhor a quem buscar um aprofundamento. Para quem precisar de mais ainda, teremos as *referências*.

> *Ao longo do texto, o* ***material teórico (teoremas, resultados, algoritmos etc.)*** *terá uma apresentação semelhante à deste parágrafo (com uma barra dupla à esquerda).*

1.4 Matemática Discreta, Computação e Algoritmos

Quando vamos retirar dinheiro de uma caixa eletrônica de um banco, temos que cumprir um certo "ritual". Primeiramente colocamos o nosso cartão na máquina; ela então "responde" mostrando uma lista de possibilidades. Apontamos "saque" e ela pede nossa senha. Depois que a fornecemos, a máquina confere e pergunta quanto queremos. Se o pedido estiver dentro de certos limites e se houver numerário na máquina, ela libera a quantia pedida. Este "ritual" é um procedimento muito rígido – qualquer erro faz com que a máquina se recuse a fornecer nosso dinheiro.

Bem, as máquinas não pensam e não há ninguém dentro delas. Estamos então "conversando" com um computador, ou melhor com o programa que controla a máquina. Este programa é escrito por uma pessoa (ou várias) e o procedimento que temos de executar frente à máquina é o que chamamos de um *algoritmo*.

Uma característica importante da nossa sociedade é a ***quantidade de atividades*** que dependem de tais procedimentos, isto é, de algoritmos. Nem sempre estaremos "conversando" com uma máquina: ao programar a vistoria de um automóvel temos que cumprir rigidamente várias etapas, numa seqüência precisa, sob o risco de perdermos muito tempo ("... desculpe, senhor, mas está faltando tal ou qual papel ...").

Algoritmos, procedimentos, sempre fizeram parte da vida social dos homens: basta pensar, por exemplo, nas receitas de cozinha, como para fazer um bolo: "Bata a manteiga com o açúcar, ***quando*** clarear adicione as gemas uma a uma batendo sempre, depois coloque a farinha aos poucos, ***se*** ficar muito espesso coloque leite ..." . Aqui foram omitidos diversos ***dados do problema***, que são as quantidades a serem utilizadas: mas, habitualmente, precisaremos fornecê-los.

Então podemos ver que algoritmos não são novidade; foi, no entanto, a partir da Segunda Guerra Mundial que eles assumiram importância capital. O motivo disso foi a espantosa evolução dos computadores: alguns problemas até então inacessíveis puderam ser abordados com sucesso, ***desde que pudessem ser resolvidos por um algoritmo.***

Com isso, a ***Matemática Discreta*** (Combinatória, Grafos etc.), que trabalha com conjuntos enumeráveis (em contraste com a Matemática do contínuo), experimentou um grande avanço. Por seu lado, ela também pode oferecer contribuições importantes à Ciência da Computação. E a simbiose entre a Matemática Discreta e a Computação encontra sua expressão na ciência da construção e análise de algoritmos, a ***Algorítmica***.

Ao longo deste livro veremos que grafos e algoritmos são inseparáveis. Muitas das soluções para os problemas serão expressas não por um número, mas por um método e pelo correspondente algoritmo.

Algoritmos

Falamos acima de *algoritmos*. E vamos dar logo uma definição formal:

> *Um algoritmo é um procedimento, aplicado em etapas repetitivas e com eventuais desvios lógicos.*

Observação: Alguma controvérsia é sempre gerada em torno da definição de algoritmo; alguns autores exigem que o algoritmo chegue sempre a um final oferecendo uma saída (resposta). Assim “comece do número 1 e a cada etapa some 1 unidade” não seria um algoritmo, pois não pararíamos nunca.

Outra controvérsia é quanto à finalidade. Note que na definição não pedimos que ele faça alguma tarefa de que necessitamos. Mas, no nosso caso, estaremos sempre usando algoritmos com uma finalidade precisa. Nesse caso, devemos verificar a sua correção, isto é, se o algoritmo efetivamente faz o que desejamos. Vamos ver alguns exemplos:

Algoritmo de divisão inteira com resto

```
3402 | 31
 302   109
  23
```

Você reconhece, no quadro ao lado, uma *conta de dividir*. Pode conferir, está certa e é uma divisão com resto, coisa do primeiro grau.

Que tal procurarmos descrever o que fazemos, ao efetuar essa divisão ?

> Muito fácil: 3 é menor que 31; “abaixamos” o 4; 34 é maior que 31, então fazemos a
> Divisão: 34 / 31 = 1
> Depois: 1 x 1 = 1, “para” 4 dá 3, 1 x 3 = 3, “para” 3 dá 0 e aí “abaixamos” 0.
> Depois: 30 é menor que 31, então escrevemos 0 no quociente e “abaixamos” 2.
> Divisão: 302 / 31 = 9;
> Depois: 9 x 1 = 9, “para” 12 dá 3 “e vai” 1; 9 x 3 = 27 “e” o 1 “que foi”, dá 28, “para” 30 dá 2. O resto é 23.
> **Observação:** É importante observar que as ***divisões parciais*** que fizemos são ***inteiras***.

Observe que fomos deliberadamente coloquiais. Não especificamos as razões para que o algoritmo funcione (isso foi visto no primeiro grau ...). Essa é uma das vantagens do algoritmo; depois que provamos seu funcionamento ele pode ser realizado automaticamente.

Agora, em uma linguagem mais sofisticada (formalizada):

> *1.* ***Comparar*** primeiras casas do dividendo com o divisor: ***guardar*** o primeiro resultado maior ou igual que o divisor; [(*dividendo parcial*) 3 < 31; 34 > 31;]
>
> *2.* ***Dividir*** o dividendo parcial pelo divisor; [34 / 31 = 1;]
>
> ***Enviar*** o resultado para o *quociente parcial;*
>
> *3.* ***Multiplicar*** o quociente parcial pelo divisor; *subtrair* do dividendo parcial (as operações “para” equivalem ao cálculo de *restos*);
> [1 x 1 = 1, “para 4, 3; 1 x 3 = 3, “para” 3, 0]

4. ***Se*** <u>houver uma casa não utilizada no dividendo</u>:

Tomar a primeira casa do dividendo ainda não usada; ***acrescentar*** ao final do dividendo parcial;
["baixa" 0, <u>*novo dividendo parcial*</u> = 30]

Caso contrário, fim.

5. ***Se*** <u>o dividendo parcial for menor que o divisor</u>:

enviar 0 para o quociente parcial; [era 1, passa a ser 10]

repetir o **<u>passo 4</u>**; [30 < 31, logo "baixa" 2, novo dividendo parcial = 302, e cai no ...]

Caso contrário, *voltar* ao **<u>passo 2</u>** .

[302 / 31 = 9; então passo 3: 9 x 1 = 9, "para" 12, 3; 9 x 3 = 27 "e" 1, 28, "para" 30, 2].

Observe que os textos entre colchetes, [...] são *comentários*: não fazem parte do processo. Os diversos passos e alternativas apresentados, à exceção do ***fim***, terminam sempre com um ponto-e-vírgula, (;).

O que acabamos de ver é exatamente um *procedimento*, aplicado em *etapas repetitivas* e com eventuais *desvios lógicos*. Logo, trata-se de um ***algoritmo***.

Ele também é um processo de resolução, uma vez que oferece uma saída, um resultado que era exatamente o que desejávamos – o resultado da divisão.

> "Desvio lógico" é um apelido para o "se" que encontramos duas vezes na descrição do processo. Note que ele abre caminho para duas opções, conforme a *cláusula* (condição) que ele contém seja satisfeita ou não.

Observe que, ao lado de cada etapa, incluímos a etapa correspondente da primeira descrição. Observe também que *enviar* significa, no caso do quociente parcial, acrescentar um novo algarismo ao final dele.

Todo algoritmo contém *comandos*. Aqui eles correspondem às palavras em ***negrito itálico*** e podem ser *diretivas* (***comparar, dividir*** etc.) ou *condições* (**se**, ***enquanto***).

Nem todo algoritmo é exclusivamente numérico, isto é, abstrato. No nosso exemplo do caixa eletrônico, o algoritmo que nos permite interagir com a máquina lida com nomes, números, ações físicas ("passar cartão"), acesso remoto (para ver se você tem mesmo dinheiro) e consequências lógicas abstratas (subtrair a retirada feita do seu saldo). Por outro lado, se dissermos à cozinheira que, ao fazer seu bolo, ela está utilizando um algoritmo, é muito provável que ela nos olhe com cara de ponto de interrogação. Onde estariam os números ? Nas quantidades, como dissemos antes.

É muito importante observar que um algoritmo numérico só pode "funcionar", isto é, oferecer uma resposta correta, se corresponder a um raciocínio lógico-matemático correto, apoiado em conceitos matemáticos comprovados. Só a lógica e a matemática podem provar a correção de um algoritmo.

Exemplo *de algoritmo que "não funciona" :*

Algoritmo (errado !) para achar a *raiz quadrada* de um número inteiro de 4 algarismos:

Tomar um número inteiro de 4 algarismos;

Separar as duas primeiras casas das duas últimas;

Somar os dois números de dois algarismos assim obtidos.

O valor obtido é a raiz quadrada do número utilizado.

Exemplo: 2025 (20 + 25 = 45; 45^2 = 2025).

Se você experimentar com 3025, ou com 9801, também vai funcionar. ***E só com estes números***. Ou seja, *não se trata de uma propriedade* de qualquer número inteiro de 4 algarismos, mas de uma exceção. Observe, por exemplo, 2500 (raiz quadrada 50 e não 25 + 00 = 25).

Ainda um exemplo:

Algoritmo (errado !) para achar um *número primo*:

> *Tomar* um inteiro k qualquer;
>
> *Calcular* os dois valores: $p = 4k - 1$, e $q = 4k + 1$.

Ou p ou q é primo.

Exemplo: k = 3, (4 x 3) − 1 = 11, (4 x 3) + 1 = 13.

Ora, todo número impar é da forma $4k \pm 1$, logo todo número primo maior que 2 será dessa forma. Esta condição, porém, é ***necessária***, mas não ***suficiente***, ou seja, nem todo número dessa forma é primo. Após algumas tentativas encontramos k = 14 que nos dá p = 55 e q = 57. Nenhum deles é primo e portanto o algoritmo não faz o que desejamos.

Há muitas formas de se descrever um mesmo algoritmo, algumas mais simples, outras mais complicadas. E há muitos algoritmos tão simples quanto o da divisão, ao lado de outros bastante complicados.

Exercício: Experimente descrever formalmente um algoritmo bem simples, como o da multiplicação.

Como já observamos, teremos mais adiante ocasião de estudar algoritmos que trabalham com grafos. Para isso, precisaremos de ***formas de representação*** eficientes para os grafos. A representação gráfica pode até ser conveniente para nós, seres humanos, mas para um computador devemos pensar em outras estruturas. Iremos encontrar esses recursos mais adiante neste livro.