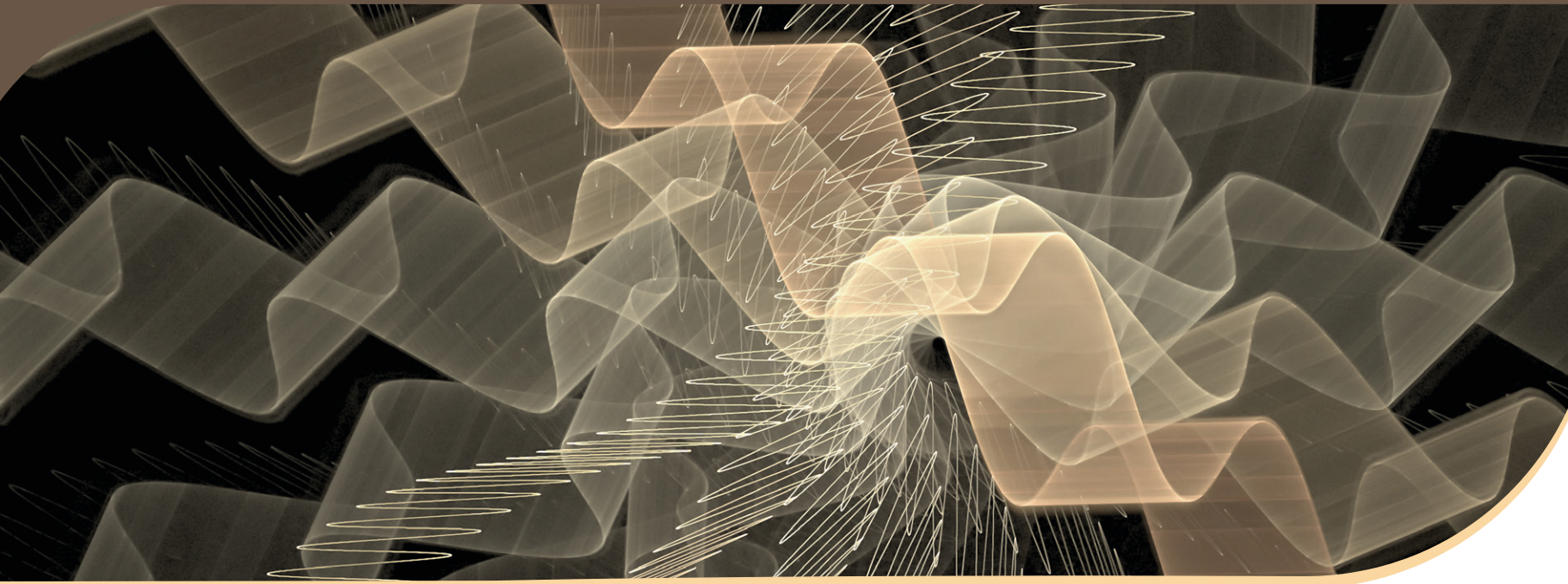


EDUARDO CHAVES MONTENEGRO

# ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Conceitos básicos



**Blucher**

Eduardo Chaves Montenegro

# ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Conceitos básicos

*Ondas eletromagnéticas: conceitos básicos*

© 2023 Eduardo Chaves Montenegro

Editora Edgard Blücher Ltda.

*Publisher* Edgard Blücher

*Editor* Eduardo Blücher

*Coordenação editorial* Jonatas Eliakim

*Produção editorial* Catarina Tolentino

*Preparação de texto* Évia Yashumaru

*Diagramação* Roberta Pereira de Paula

*Revisão de texto* MPMB

*Capa* Laércio Flenic

*Imagem da capa* iStock photo

# Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar

04531-934 – São Paulo – SP – Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

**contato@blucher.com.br**

**www.blucher.com.br**

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, julho de 2021.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Montenegro, Eduardo Chaves

Ondas eletromagnéticas / Eduardo Chaves

Montenegro. – 1. ed. – São Paulo : Blucher, 2023.

224 p.

Bibliografia

ISBN 978-65-5506-782-8

1. Ondas eletromagnéticas I. Título

23-0645

CDD 539.2

Índices para catálogo sistemático:

1. Ondas eletromagnéticas

# CONTEÚDO

<b>PARTE I – EQUAÇÕES DE MAXWELL</b>	<b>19</b>
<b>I. EQUAÇÕES DE MAXWELL</b>	<b>21</b>
Lei de Gauss	21
Inexistência de cargas magnéticas	24
Lei de Faraday	25
Lei de Ampère-Maxwell	30
Propriedades elétricas e magnéticas da matéria: sumário qualitativo	40
Condições de contorno nas interfaces	46

<b>PARTE II – PROPAGAÇÃO</b>	<b>49</b>
<b>II. A EQUAÇÃO DE ONDA</b>	<b>51</b>
Propagação de um pulso	51
<b>III. PROPAGAÇÃO EM MEIOS CONFINADOS: CABO COAXIAL</b>	<b>59</b>
Características do cabo coaxial	59
Campos independentes do tempo no cabo coaxial (DC)	60
Campos dependentes do tempo no cabo coaxial (AC)	62
Transferência de energia: vetor de Poynting	72
Complemento: efeito pelicular (“skin effect”)	82
<b>IV. PROPAGAÇÃO NO ESPAÇO LIVRE</b>	<b>91</b>
Equação de onda plana no espaço livre	91
Propriedades das ondas eletromagnéticas no espaço livre	94
<b>V. PROPAGAÇÃO EM MEIOS CONFINADOS: GUIAS DE ONDA</b>	<b>101</b>
Componentes longitudinais dos campos	101
Guia de onda retangular	102

---

Dispersão do sinal	106
Considerações práticas e alimentação do guia de onda retangular	108
<b>PARTE III – REFLEXÃO E TRANSMISSÃO</b>	<b>111</b>
<b>VI. INCIDÊNCIA NORMAL DE ONDAS TEM</b>	<b>113</b>
Incidência normal na interface de um dielétrico	113
Casamento de impedâncias	119
Incidência normal em condutores	122
Complemento: terminação em cabos coaxiais	124
Complemento: energia dissipada na superfície de um condutor	130
<b>VII. CAVIDADES RESSONANTES</b>	<b>133</b>
Cavidades TEM	134
Cavidades retangulares	136
<b>VIII. INCIDÊNCIA OBLÍQUA DE ONDAS TEM</b>	<b>141</b>
Incidência oblíqua em um dielétrico	141
Complemento: transmissão digital de dados	151

Incidência oblíqua em condutores	154
Reflexão especular e difusa	154
<b>PARTE IV – GERAÇÃO</b>	<b>157</b>
<b>IX. RADIAÇÃO POR CARGAS ACELERADAS</b>	<b>159</b>
Campo de radiação de uma carga acelerada	159
<b>X. RADIAÇÃO PRODUZIDA POR CORRENTES</b>	<b>171</b>
Campo de radiação produzido por um fio	171
Telescópios de radiofrequência	175
Complemento: modulação AM e FM	177
Complemento: cálculo do dipolo curto	179
<b>PARTE V – SUPERPOSIÇÃO</b>	<b>181</b>
<b>XI. SUPERPOSIÇÃO, REFLEXÃO E REFRAÇÃO</b>	<b>183</b>
Incidência normal em um condutor – superposição	184
O ângulo de Brewster revisitado	185
Transmissão e reflexão em dielétricos	188

---

<b>XII. INTERFERÊNCIA</b>	<b>195</b>
Interferência de duas fontes	195
Interferência de N fontes	200
Interferência de um número muito grande de fontes paralelas e coerentes	203
<b>XIII. DIFRAÇÃO</b>	<b>205</b>
Princípio de Huygens-Fresnel	206
O princípio de Babinet	207
Dupla fenda e experiência de Young	210
<b>XIV. POLARIZAÇÃO</b>	<b>211</b>
Polarização produzida por duas antenas ortogonais	211
Polarizadores	214
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>221</b>



# CAPÍTULO I

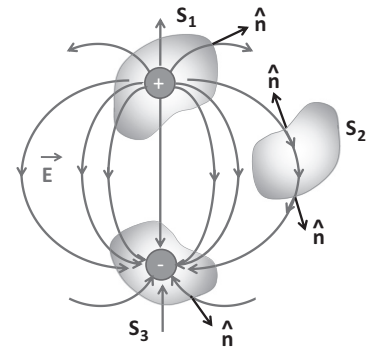
## Equações de Maxwell

### LEI DE GAUSS

A lei de Gauss estabelece que cargas elétricas são fontes do campo elétrico e associa o fluxo do campo elétrico em uma superfície fechada arbitrária, com o valor da carga interna,  $q_{int}$ , a esta superfície:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}. \quad (I-1)$$

O vetor  $\hat{n}$  é unitário, perpendicular a cada ponto da superfície fechada que, por convenção, tem o sentido dirigido para fora da mesma, e  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo. A Figura I-1 ilustra a aplicação da Lei de Gauss em três superfícies fechadas imersas no campo elétrico produzido por um dipolo elétrico. Pode-se ver que, para a superfície  $S_1$  que envolve a carga positiva, o produto escalar  $\vec{E} \cdot \hat{n}$  é sempre positivo. Assim, todos os termos da soma (integral) são positivos e o resultado é um valor positivo. Para a superfície  $S_2$ , o produto escalar  $\vec{E} \cdot \hat{n}$  é negativo na parte superior, e na parte inferior ele é positivo. Por não existirem cargas no interior da superfície  $S_2$ , a Lei

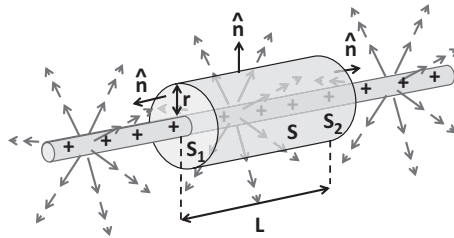


**Figura I-1** – Ilustração da Lei de Gauss, com três superfícies gaussianas fechadas com fluxos totais positivo ( $S_1$ ), negativo ( $S_3$ ) e zero ( $S_2$ ).

de Gauss garante que a contribuição positiva se iguale exatamente à contribuição negativa, fornecendo um resultado nulo. Para a superfície  $S_3$ , o raciocínio é o mesmo daquele usado para a superfície  $S_1$ , mas levando em conta que o produto escalar  $\vec{E} \cdot \hat{n}$  agora é sempre negativo, fornecendo um valor negativo para a integral de superfície. As linhas de força do campo elétrico divergem da região onde existem cargas positivas e convergem para a região onde existem cargas negativas.

## CAMPO ELÉTRICO DE UM FIO MUITO LONGO UNIFORMEMENTE CARREGADO

Em situações em que existe simetria, e somente nessas situações, por exemplo no caso de um fio muito longo uniformemente carregado, a Lei de Gauss na forma integral (Equação (I-1)) pode ser utilizada para calcular o campo elétrico. Como a superfície  $S$  da Equação (I-1) é arbitrária, podemos escolhê-la de modo que tenha a mesma simetria do fio, como a superfície cilíndrica fechada mostrada na Figura I-2. Na superfície lateral do cilindro temos que (i)  $\vec{E}$  é paralelo a  $\hat{n}$ , logo,  $\vec{E} \cdot \hat{n} dA = E dA$ ; (ii) o módulo  $E$  é constante na superfície lateral já que, por simetria, não depende da sua posição na superfície; (iii) nas duas bases, as normais são ortogonais ao campo elétrico, logo  $\vec{E} \cdot \hat{n} dA = 0$ ; (iv) a integral na superfície fechada reduz-se à integral na superfície (aberta) lateral do cilindro; (v) sendo constante nesta superfície,  $E$  pode ser colocado para fora da integral. Temos a seguinte sequência, onde  $r$  é o raio do cilindro,  $L$  é seu comprimento, e a densidade linear de carga é  $\lambda$ :



**Figura I-2** – Fio muito longo uniformemente carregado. A superfície gaussiana cilíndrica de raio  $r$  utiliza a simetria da distribuição de cargas para o cálculo do campo elétrico pela Lei de Gauss na forma integral.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_{\text{sup.lateral}} E dA = E \int_{\text{sup.lateral}} dA = E 2\pi r L = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}.$$

Logo,

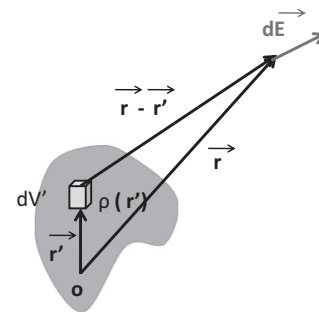
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (\text{I-2})$$

Enfatizamos que as passagens anteriores só puderam ser feitas devido à simetria. Por exemplo, caso a seção transversal do fio seja quadrada, uma superfície cilíndrica não tem a mesma simetria da distribuição de cargas e o procedimento acima não pode ser aplicado. Para uma distribuição arbitrária de cargas, como ilustrado na Figura I-3, o campo elétrico em um ponto qualquer, localizado pelo vetor  $\vec{r}$ , pode ser calculado pela superposição dos campos produzidos por elementos de volume que subdividem a distribuição de carga, cada um deles contendo uma carga volumétrica elementar  $\rho(\vec{r}')dV$ :

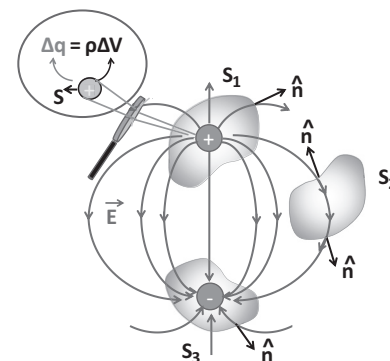
$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')dV}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (\text{I-3})$$

### OBSERVANDO O CAMPO ELÉTRICO COM UMA “LUPA”

A Equação (I-1) relaciona o fluxo do campo elétrico em uma superfície fechada com a carga total existente no seu interior. Vamos olhar com uma “lupa” (imaginária!) uma pequena parte da carga positiva do conjunto mostrado na Figura I-1 e reproduzido na Figura I-4 para procurar informações sobre o campo elétrico *local* naquela região. Se a carga  $q_{int}$  não é pontual, mas volumétrica com uma densidade de carga  $\rho$ , podemos utilizar volumes e superfícies cada vez menores que irão envolver frações de carga cada vez menores, mas de modo que  $\Delta q/\Delta V = \rho$  seja finito. Dividindo a Equação (I-1) por  $\Delta V$  e fazendo o limite  $\Delta V \rightarrow 0$  encontramos uma relação que associa o campo elétrico e a densidade de carga *em um ponto*.



**Figura I-3** – Geometria para o cálculo do campo elétrico em um ponto devido a uma distribuição arbitrária de cargas.



**Figura I-4** – Ilustração para obter a Lei de Gauss na forma diferencial.

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA}{\Delta V} = \frac{\Delta q}{\Delta V \epsilon_0} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta V \epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (\text{I-4})$$

O limite do lado esquerdo da Equação (I-4) é a divergência de  $\vec{E}$ , e a Equação (I-4) pode ser reescrita como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (\text{I-5})$$

A Equação (I-5) é a forma diferencial da Lei de Gauss. As duas formas são importantes. A forma integral (Equação (I-1)) é muito útil na interpretação de vários sistemas enquanto a forma diferencial (Equação (I-5)) é necessária para se obter formalmente várias propriedades do campo elétrico.

O caminho inverso pode ser feito pelas Equações (I-1) e (I-5), juntamente com o teorema de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}.$$

## INEXISTÊNCIA DE CARGAS MAGNÉTICAS

Cargas pontuais (monopolos) magnéticas nunca foram observadas. Este fato pode ser expresso pela equação

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0, \quad (\text{I-6})$$

que indica a inexistência de regiões de convergência ou divergência das linhas de força do campo magnético.

A Figura I-5 ilustra o campo magnético de um ímã cilíndrico. As linhas de força são contínuas, sem começo ou fim, concentrando-se no interior do ímã e espalhando-se no exterior. Para uma superfície que envolva um dos polos do ímã, como a mostrada, vemos que o fluxo é positivo para toda superfície externa ao ímã. Na parte interna, o fluxo é negativo e, como o campo magnético é bem mais intenso no interior do que na região externa do ímã, os dois fluxos se compensam.

### OBSERVANDO O CAMPO MAGNÉTICO COM UMA “LUPA”

Usando a mesma argumentação apresentada para obter a Equação (I-5) podemos obter o equivalente diferencial da Equação (I-6):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I-7})$$

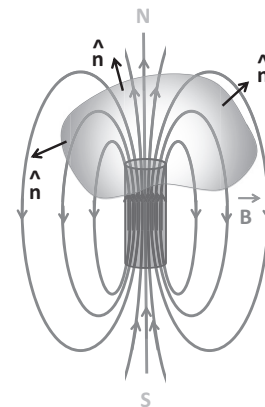
para expressar o fato de que cargas magnéticas não são observadas, mesmo que olhe-mos com uma “lupa” cada ponto do espaço.

### LEI DE FARADAY

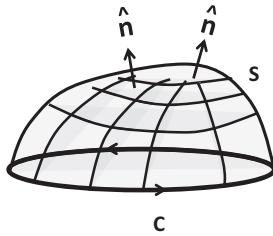
A Lei de Faraday estabelece uma segunda fonte para campos elétricos, além das cargas elétricas conforme dado pela Lei de Gauss. Os campos elétricos podem também ser produzidos por campos magnéticos *que variem com o tempo*:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot \hat{n} dA. \quad (\text{I-8})$$

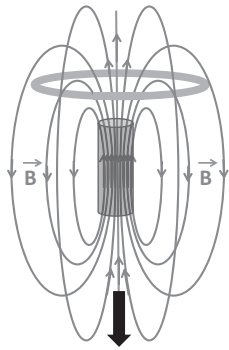
A equação acima relaciona uma integral de linha sobre um caminho *fechado* e o fluxo do campo magnético,  $\Phi_B$ , dado por uma integral de superfície, *aberta e arbitrária*,



**Figura I-5** – Ilustração da inexistência de cargas magnéticas. Não há regiões fechadas para onde as linhas de força do campo magnético converjam ou diverjam.



**Figura I-6** – Ilustração de uma superfície aberta,  $S$ , apoiada em um caminho fechado,  $C$ .



**Figura I-7** – Ilustração de um ímã afastando-se de uma espira.

apoiada sobre este caminho. Como uma superfície aberta não possui parte de “dentro” ou de “fora”, a normal não pode ser definida como foi feito no caso da Lei de Gauss. Ela é definida pela *regra da mão direita* a partir do sentido de  $d\vec{l}$  que, por sua vez pode ser escolhido arbitrariamente. A Figura I-6 ilustra a convenção. Caso o sentido do caminho fosse invertido, o sentido da normal também seria invertido, de modo a não afetar a igualdade expressa pela Equação (I-8).

## CORRENTE INDUZIDA EM UMA ESPIRA

A leitura da Equação (I-8) pode ser melhor apreciada por meio de um exemplo específico. A Figura I-7 esquematiza uma experiência simples de indução. Uma espira metálica circular é colocada próxima a um dos polos (norte) de um ímã, que é deslocado rapidamente de modo a se afastar da espira. Observa-se o aparecimento de uma corrente na espira. De acordo com a Lei de Faraday, o afastamento do ímã provoca um campo magnético variável com o tempo na região da espira (que ficou fixa no referencial do laboratório) e um campo elétrico é então observado nesta mesma região. Este campo elétrico induzido atua nos elétrons da espira condutora produzindo uma corrente.

Para determinar o sentido da corrente – e do campo elétrico induzido – utilizamos o procedimento descrito a seguir. Fazemos coincidir com a espira um caminho circular (imaginário!) e apoiamos uma superfície arbitrária (imaginária!) nele, conforme ilustra a Figura I-8. Como a superfície é arbitrária, escolhemos uma superfície plana para melhor visualização. *Escolhemos* um sentido para o caminho  $e$ , a partir dessa escolha, o sentido da normal fica estabelecido pela regra da mão direita. Vamos observar como se comporta o fluxo.

Para a normal escolhida, o produto escalar  $\hat{n} \cdot \vec{B}$  é sempre positivo na superfície definida pelo anel. Logo,  $\Phi_B > 0$ . Ao se afastar o ímã do anel, o campo diminui,  $(d\Phi_B/dt) < 0$  e,  $-(d\Phi_B/dt)/dt > 0$ . A integral de linha deve, portanto, ser também po-

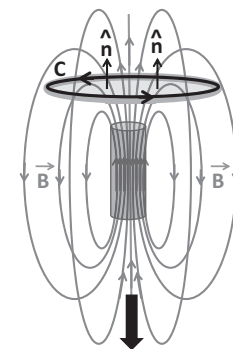
sitiva e o campo elétrico deve ter o mesmo sentido do caminho arbitrado para isso ocorrer. A corrente induzida fluirá na direção do sentido arbitrado. Caso o ímã se aproxime do anel, mantendo-se o mesmo sentido do caminho e seguindo o mesmo raciocínio, encontraremos que a corrente fluirá no sentido contrário ao arbitrado. Um movimento oscilatório do ímã provocará uma corrente alternada no anel.

## O CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO

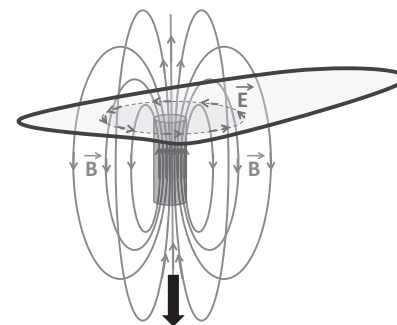
Um ponto importante é que o campo elétrico é induzido *existindo ou não um anel condutor* nas vizinhanças do ímã. Se considerarmos um plano fixo (imaginário!) no referencial do laboratório e movimentarmos o ímã em relação a ele, um campo elétrico de indução é produzido como ilustrado na Figura I-9. O ímã produz em cada ponto do espaço, nas suas vizinhanças, um campo magnético  $\vec{B}(x, y, z, t)$ . Se este campo magnético varia no tempo, um campo elétrico  $\vec{E}(x, y, z, t)$  é produzido naquele ponto – e em todos os outros na vizinhança do ímã. A espira é um medidor deste campo, e pode estar presente ou não. Caso ela esteja presente, o campo de indução produzido movimentará os elétrons da espira metálica produzindo uma corrente. O mesmo efeito pode ser obtido por um solenoide cuja corrente varie com o tempo. Esta capacidade dos campos elétricos e magnéticos de se gerarem mutuamente dará origem às ondas eletromagnéticas.

## EXEMPLO: ALTERNADOR MONOFÁSICO

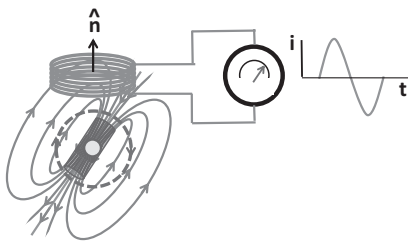
Pela Lei de Faraday, uma corrente é gerada em uma espira desde que nela haja variação do fluxo magnético. Quanto mais rápida for esta variação maior será a corrente induzida. Podem-se construir diversos arranjos com o objetivo de provocar variações rápidas do fluxo magnético e maximizar a corrente induzida. No arranjo



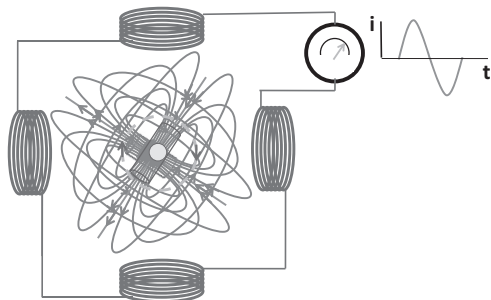
**Figura I-8** – Lei de Faraday. Sentido da corrente induzida em uma espira condutora quando um ímã se afasta dela.



**Figura I-9** – Campo elétrico observado em um plano (fictício) induzido por um campo magnético que varia com o tempo (gerado pelo afastamento do ímã) na região de observação (no caso, o plano).



**Figura I-10** – Ilustração de um alternador monofásico com um polo.



**Figura I-11** – Ilustração de um alternador monofásico de quatro polos.

ilustrado na Figura I-10, o ímã gira, forçado por um agente externo, em torno de um eixo fixo próximo à espira (ou a um conjunto de espiras) produzindo a variação de fluxo desejado. O ímã, ao girar, alterna a passagem dos polos norte e sul na direção da espira produzindo uma corrente induzida alternada, aproximadamente senoidal, e com uma frequência igual à da rotação do ímã. Este tipo de arranjo pode ter sua eficiência melhorada utilizando-se dois ímãs ortogonais (quatro polos) e quatro conjuntos de espiras, como mostrado na Figura I-11. Se os quatro conjuntos de espiras forem conectados em série, é fácil constatar que a corrente gerada é quatro vezes maior do que aquela produzida no arranjo da Figura I-10, com os quatro conjuntos de espiras operando em fase. Este gerador é denominado alternador monofásico. São produzidos comercialmente para aplicações de baixa potência (2 a 20 kW) e utilizados em conjuntos motor-gerador com o rotor movido por um motor a gasolina ou diesel para gerar energia em shows ou hospitais de campanha, por exemplo. Podem também compor as turbinas geradoras de energia eólica.

## OBSERVANDO O CAMPO MAGNÉTICO INDUZIDO COM UMA “LUPA”

A Lei de Faraday relaciona a integral de linha do campo elétrico com o fluxo do campo magnético. Mas poderíamos tentar usar uma “lupa” para associar, não integrais de linha e fluxos, mas os próprios campos, de forma similar a como foi feito na Lei de Gauss. Para isso vamos utilizar um pequeno circuito (imaginário!) fixo em um plano enquanto o campo magnético varia ao ser afastado do plano, conforme ilustra a Figura I-12. O circuito tem a normal em uma direção arbitrária e define uma área  $\Delta S$ , que podemos diminuir progressivamente (a “lupa”) para achar as propriedades dos campos em um ponto. Dividindo a Equação (I-8) por  $\Delta S$ , podemos escrever, se a área  $\Delta S$  for suficientemente pequena:



$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{B} \cdot \hat{n} \Delta S}{\Delta S} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \hat{n}). \quad (\text{I-9})$$

O limite no lado esquerdo da Equação I-9 é definido como a componente do rotacional do campo elétrico  $\vec{E}$  na direção da normal  $\hat{n}$  ao circuito onde foi calculada a integral de linha acima, isto é:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \hat{n}). \quad (\text{I-10})$$

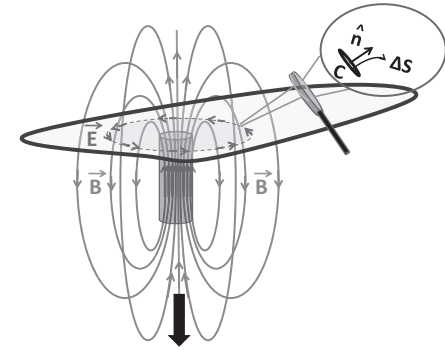
Como a escolha da orientação do circuito, e conseqüentemente da direção da normal, é arbitrária, a Equação (I-8) pode ser generalizada para:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{I-11})$$

que relaciona o rotacional do campo elétrico  $\vec{E}(x, y, z, t)$  com a variação com o tempo do campo magnético  $\vec{B}(x, y, z, t)$  no mesmo ponto. A Equação (I-11) é a forma diferencial da Lei de Faraday. Nesta forma, fica claro que o campo elétrico de indução é gerado sempre que houver variação temporal do campo magnético naquele ponto. Caso exista uma carga elétrica neste ponto a força de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{I-12})$$

atuará na carga fazendo-a se movimentar. Caso exista uma espira metálica, uma corrente elétrica será nela produzida.



**Figura I-12** – Ilustração para se obter a Lei de Faraday na forma diferencial.

## CAMPOS CONSERVATIVOS E POTENCIAL ELÉTRICO

Caso não existam variações de campos magnéticos com o tempo em uma região determinada, a integral de linha da Equação (I-8) é nula. Da mesma forma, a Equação (I-11) fornece  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ . Nestas circunstâncias, o campo elétrico é conservativo e suas fontes são unicamente as cargas. Pode-se associar um potencial  $V(x, y, z)$  a este campo de modo que  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ , já que  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V \equiv 0$ . A diferença de potencial entre dois pontos é dada por:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (\text{I-13})$$

e pode ser efetuada por qualquer caminho que ligue os pontos A e B. Caso os campos magnéticos na região de interesse sejam pequenos ou de baixas frequências, isto é, não variem muito rapidamente com o tempo,  $\vec{\nabla} \times \vec{E} \sim \vec{0}$  e continua-se a usar o conceito de potencial na prática. É o caso da corrente alternada residencial (60 Hz), com “voltagens” de 110 V ou 220 V. Em circuitos de alta frequência, como os de micro-ondas, não se podem utilizar o conceito de potencial de forma generalizada.

## LEI DE AMPÈRE-MAXWELL

A Lei de Ampère-Maxwell estabelece as fontes do campo magnético. São duas fontes, as correntes elétricas e os campos elétricos variáveis com o tempo:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \\ &= \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA. \end{aligned} \quad (\text{I-14})$$

A estrutura da Equação (I-14) é a mesma da Lei de Faraday, envolvendo integrais de linha em um caminho fechado, e integrais de superfície apoiadas neste caminho. As integrais de superfície estão associadas ou à derivada em relação ao tempo do fluxo do campo elétrico, ou ao fluxo do vetor densidade de corrente  $\vec{J}$ , já que:

$$i = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA. \quad (\text{I-15})$$

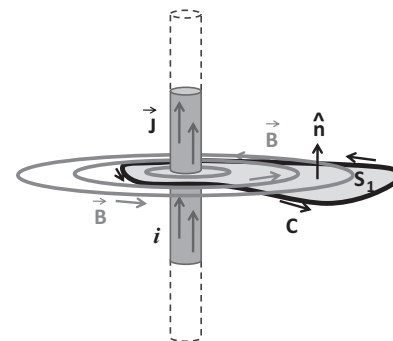
Devemos enfatizar que a corrente  $i$  é um escalar e quando nos referimos ao “sentido da corrente”, estamos assumindo implicitamente o *sentido de*  $\vec{J}$ . Assim, o sentido do caminho e o “sentido da corrente” obedecem à regra da mão direita.

## A LEI DE AMPÈRE

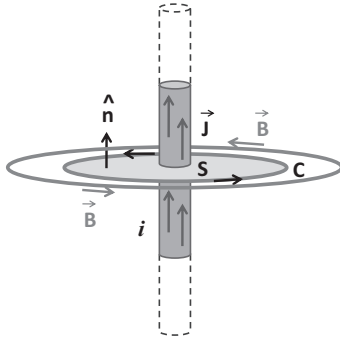
Quando os campos são estáticos, a Equação (I-14) é denominada Lei de Ampère.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i. \quad (\text{I-16})$$

A Figura I-13 ilustra o campo magnético de um fio muito longo. Em virtude da simetria, as linhas de força do campo magnético são círculos centrados no eixo do fio condutor e o sentido do campo é dado pela regra da mão direita, a partir do sentido da corrente. É importante enfatizar que o caminho utilizado na Equação (I-16) não precisa coincidir com uma linha de força, pode ser um caminho *arbitrário* (c) como o mostrado na Figura I-13. A corrente total que intercepta a superfície ( $S_1$ ) apoiada no caminho (c) é  $i$  e, portanto, a integral de linha sobre este caminho *arbitrário* é  $\mu_0 i$ .



**Figura I-13** – Ilustração da Lei de Ampère em um caminho arbitrário.



**Figura I-14** – Ilustração da Lei de Ampère em um caminho circular envolvendo um fio com corrente muito longo.

## CAMPO MAGNÉTICO DE UM FIO MUITO LONGO

Em situações em que existe simetria, como no caso do fio muito longo, e *somente nessas situações*, a Lei de Ampère pode ser utilizada para calcular o campo magnético. Como o caminho é arbitrário, podemos escolher um caminho que coincida com uma linha de força, como o caminho circular mostrado na Figura I-14. Neste caminho temos (i)  $\vec{B}$  é paralelo a  $d\vec{l}$ , logo  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = Bdl$ ; (ii) o módulo  $B$  é constante ao longo do caminho de integração já que, por simetria, não depende da sua posição no círculo; (iii) sendo constante,  $B$  pode ser colocado para fora da integral. Temos a seguinte sequência, onde  $r$  é o raio do círculo (caminho):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C Bdl = B \oint_C dl = B 2\pi r = \mu_0 i$$

logo,

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} i. \quad (\text{I-17})$$

A simetria é essencial para efetuar as passagens acima. Caso a seção reta do fio fosse quadrada, por exemplo, as linhas de força do campo magnético não seriam mais circulares e o desenvolvimento acima não poderia ser aplicado.

## A CORRENTE DE DESLOCAMENTO

O termo  $\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$  da Equação (I-14) é denominado *corrente de deslocamento* e indica que um campo elétrico variando no tempo produz um campo magnético, de forma análoga à Lei de Faraday, mas invertendo os dois campos. A corrente de deslocamento,

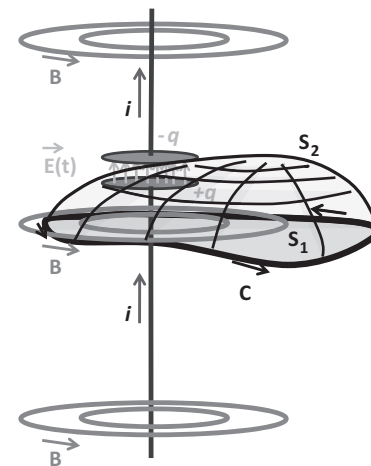
incluída por Maxwell, é um complemento essencial da Lei de Ampère, sem o qual apareceriam inconsistências no conjunto de equações dos campos. Isto pode ser visto pelo arranjo ilustrado na Figura I-15, que mostra um fio muito longo interrompido por um capacitor de placas paralelas. Como foi visto na análise do fio muito longo (Figura I-14), um campo magnético que circula em torno da corrente é produzido nas vizinhanças do fio. A integral de linha do campo magnético pode ser calculada utilizando-se o fluxo da densidade de corrente em uma superfície *qualquer* apoiada nesse caminho. Caso a superfície escolhida seja a  $S_1$ , no mesmo plano do caminho, o resultado é  $\mu_0 i$ , já que a corrente que intercepta a superfície  $S_1$  é  $i$ . Entretanto, se a superfície escolhida for a  $S_2$ , em forma de chapéu, e que passa entre as placas do capacitor, nenhuma corrente (de condução) intercepta a superfície  $S_2$ . O resultado da integral de linha do campo magnético seria então zero. Esta inconsistência é resolvida com a corrente de deslocamento. Entre as placas do capacitor, existe fluxo de campo elétrico na superfície  $S_2$ . Por sua vez, não existe fluxo de campo elétrico na superfície  $S_1$ . Usando a superfície  $S_1$ , que fornece fluxo de campo elétrico zero para fechar a superfície, e usando a Lei de Gauss, obtemos:

$$\Phi_E = \int_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_{S_1+S_2} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_{S_1+S_2} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

A corrente de deslocamento,  $i_d$ , será então:

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dq}{dt} = i,$$

igual à corrente de condução e o valor da integral de linha é o mesmo, quer usemos a superfície  $S_1$  ou  $S_2$ .



**Figura I-15** – Ilustração da Lei de Ampère-Maxwell em um fio muito longo interrompido por um capacitor de placas paralelas.

## OBSERVANDO O CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO COM UMA “LUPA”

Repetindo o procedimento utilizado para obter a Equação (I-9), e fazendo uso da Equação (I-15) obtemos, dividindo a Equação (I-14) por  $\Delta S$ :

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} = \mu_0 \frac{\vec{J} \cdot \hat{n} \Delta S}{\Delta S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E} \cdot \hat{n} \Delta S}{\Delta S}.$$

O lado esquerdo da equação acima é a componente do rotacional na direção  $\hat{n}$  e, como a direção da normal é arbitrária, obtemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{I-18})$$

que relaciona o rotacional do campo magnético  $\vec{B}(x, y, z, t)$  com a densidade de corrente  $\vec{J}(x, y, z, t)$  e a variação com o tempo do campo elétrico  $\vec{E}(x, y, z, t)$  no mesmo ponto.

O caminho inverso pode ser obtido usando-se as Equações (I-14) e (I-18), juntamente com o teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA = \int_s (\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot \hat{n} dA = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

## CAMPO MAGNÉTICO PRODUZIDO POR UMA CARGA COM VELOCIDADE CONSTANTE ( $v \ll c$ )

Vamos ilustrar o aparecimento do campo magnético devido à variação temporal do campo elétrico para uma situação análoga à mostrada na Figura I-9, substituindo o ímã por uma carga pontual aproximando-se com velocidade  $v$  de um plano fixo no laboratório, conforme ilustrado na Figura I-16. Para a normal arbitrada no sentido mostrado, haverá um aumento do fluxo de campo elétrico,  $d\Phi_E/dt > 0$ , na área delimitada pelo circuito circular (imaginário!) mostrado. Assim, pela Equação (I-14), o campo magnético produzido no plano terá o sentido dado pela regra da mão direita, e terá linhas de força circulares devido à simetria. Teremos então que  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$  com  $B$  constante ao longo do caminho. Logo:

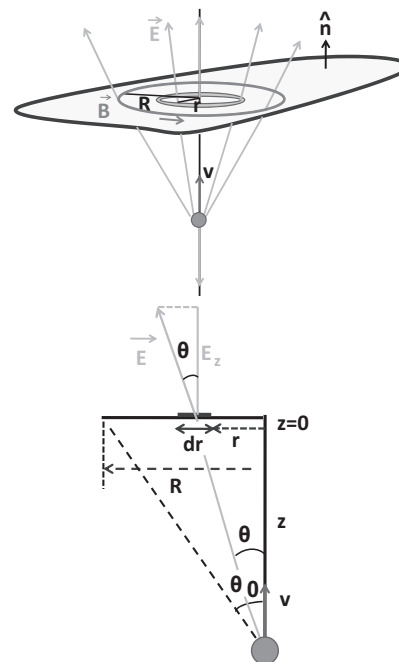
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi R = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (\text{I-19})$$

O fluxo do campo elétrico pode ser calculado pela soma dos fluxos em setores circulares de raio  $r$  e largura  $dr$ . O campo elétrico em cada um desses setores é dado por:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}'}{(z^2 + r^2)}, \quad (\text{I-20})$$

onde  $\hat{r}'$  é o vetor unitário na direção da reta que une a carga a um ponto qualquer do setor circular. Daí vem que, notando que  $E_z$  é positivo quando  $z$  é negativo:

$$E_z = E \cos \theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$



**Figura I-16** – Ilustração dos campos elétrico e magnético produzidos por uma carga com velocidade constante ( $v \ll c$ ). O campo magnético é gerado pelo campo elétrico variando no tempo no plano (fictício) de observação.

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_S E_z dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{z}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi r dr \\ &= \frac{-q}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right).\end{aligned}$$

Como  $dz/dt = v$ , obtemos,

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{qv}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Usando a Equação (I-19), considerando a geometria mostrada na Figura I-16, e lembrando que  $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$  obtemos:

$$B = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{v}{c^2} E \text{ sen } \theta_0,$$

que, pela observação da Figura I-16, pode ser escrita na forma vetorial como:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}. \quad (\text{I-21})$$

No título desta seção incluímos a restrição  $v \ll c$ . De fato vemos que em um ponto qualquer do plano da Figura I-16, o campo elétrico varia com o tempo, e que o campo



magnético, pela Equação (I-21), também. Pela Lei de Faraday (Equação (I-11)), um campo magnético variando com o tempo gera um campo elétrico de indução. Portanto, a rigor, o campo elétrico utilizado para calcular o fluxo da Equação (I-19) deve ser acrescido do campo elétrico induzido. Este processo iterativo continua de forma sucessiva, com infinitos passos, até convergir para o campo final resultante. Quando  $v \ll c$  essas correções podem ser desprezadas e a Equação (I-21) é, para fins práticos, uma boa aproximação para o campo magnético induzido.

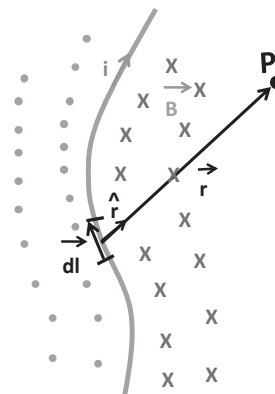
A generalização para velocidades próximas à da luz envolve as transformações de Lorentz para os campos, tópico que não será abordado neste texto. O campo coulombiano de uma carga só é dado pela Equação (I-20) no referencial no qual a carga está em repouso. Em um referencial no qual a carga se move relativamente a ele com uma velocidade *qualquer*, o campo elétrico deve ser obtido utilizando as transformações de Lorentz entre os dois referenciais.

## A LEI DE BIOT-SAVART

Uma corrente elétrica em um condutor é constituída de uma grande quantidade de cargas em movimento devido a um campo elétrico aplicado. Em virtude das colisões sucessivas, a velocidade média dos elétrons, denominada *velocidade de deriva ou de arraste*, é aproximadamente constante e da ordem de  $\sim 10^{-4}$  m/s  $\ll c$ . Podemos então utilizar o resultado da seção anterior para calcular o campo magnético devido a uma corrente percorrendo um fio condutor de seção reta A.

A carga  $dq$  que se movimenta ao longo elemento  $d\vec{l}$  do fio produz no ponto P próximo a ele (Figura (I-17)) um campo elétrico coulombiano  $d\vec{E}$  variando no tempo que, por sua vez, gera um campo magnético  $d\vec{B}$  dado, de acordo com a Equação (I-21), por:

$$d\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times d\vec{E} = \frac{dq \vec{v} \times \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2}. \quad (\text{I-22})$$



**Figura I-17** – Geometria utilizada para o cálculo do campo magnético produzido por um fio com corrente.

Lembrado que a densidade de corrente relaciona à densidade volumétrica de carga com sua velocidade média,

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \quad (\text{I-23})$$

e que  $dq = \rho dV = \rho A dl$ , temos, usando a Equação (I-15), e considerando que a velocidade média  $\vec{v}$  das cargas tem a mesma direção e sentido do elemento  $d\vec{l}$  do fio:

$$dq \vec{v} = \rho A dl \vec{v} = \rho A v d\vec{l} = JA d\vec{l} = i d\vec{l}. \quad (\text{I-24})$$

Usando a Equação (I-24) em (I-22), lembrando que  $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$ , e integrando ao longo do fio, obtemos a Lei de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (\text{I-25})$$

Como o fio condutor é neutro, o campo elétrico total produzido no ponto P é nulo. Este campo elétrico total é produzido pelas cargas que se movimentam em relação a P (elétrons) e pelas cargas, de sinal contrário, que estão em repouso em relação a ele. Somente contribui para a produção do campo magnético no ponto P *as cargas que se movimentam em relação a esse ponto*, já que somente estas cargas produzem um campo elétrico *variando no tempo* no ponto P. O campo elétrico produzido pelas cargas fixas em relação a P não varia no tempo e não produz campo magnético.

## EQUAÇÕES DE MAXWELL: SUMÁRIO

As quatro equações de Maxwell nas suas formas integral e diferencial são no vácuo:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad (I-1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (I-5)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (I-6) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (I-7)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \quad (I-8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (I-11)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA \quad (I-14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (I-18)$$

As equações de Maxwell fornecem os valores da integral de superfície (ou da divergência) e da integral de linha (ou do rotacional) dos campos elétricos e magnético e sua estrutura pode ser entendida evocando-se o teorema de Helmholtz, que estabelece que qualquer campo vetorial é univocamente determinado se a sua divergência e seu

rotacional são conhecidos em todo espaço. Esta é a base matemática para descrever campos vetoriais. Os valores da divergência e do rotacional dos campos elétrico e magnético são determinados pela experiência (leis de Gauss, Ampère, Faraday), complementados e sintetizados nas equações de Maxwell.

A observação acima deve, entretanto, ser complementada. A teoria da relatividade impõe que as leis físicas tenham a mesma forma em todos os referenciais inerciais e que sua transformação de um referencial para outro obedeça às transformações de Lorentz. Se este princípio for aplicado nas equações que envolvem as divergências dos campos elétrico e magnético, as equações que envolvem o rotacional destes campos são formalmente obtidas. Dessa forma, ao se incluir a teoria da relatividade, duas das equações de Maxwell tornam-se redundantes. O que também enfatiza que as equações de Maxwell já obedecem aos postulados da teoria de relatividade.

A força de Lorentz (Equação (I-12)) completa o cenário. Cargas e correntes são fontes de campos elétricos e magnéticos que, por sua vez, podem ser observados pelo movimento que produzem nas cargas devido à força de Lorentz.

## **PROPRIEDADES ELÉTRICAS E MAGNÉTICAS DA MATÉRIA: SUMÁRIO QUALITATIVO**

As equações de Maxwell descritas anteriormente consideram que o meio que abriga os campos eletromagnéticos é o vácuo. Na prática, é necessário descrever esses campos nos mais diversos meios onde eles são observados ou se propagam, como: a atmosfera, oceanos, vidros, concreto, madeira, vegetação, plásticos, polímeros, metais etc. Esta enorme variedade de materiais é dividida, para uso prático, em duas classes: condutores e dielétricos. Nos bons condutores (via de regra, metais) um ou mais elétrons por átomo não estão localizados em nenhum átomo em particular, mas podem circular livremente por todo o volume do material. Nos dielétricos (plásticos, vidros, madeira) todos os elétrons estão ligados aos átomos e somente pequenos deslocamentos

nas vizinhanças do núcleo são permitidos. A linha divisória entre estas duas classes não é estrita e alguns materiais (o solo, por exemplo) podem ser considerados, do ponto de vista eletromagnético, condutores ou isolantes dependendo do comprimento da onda eletromagnética que nele se propaga.

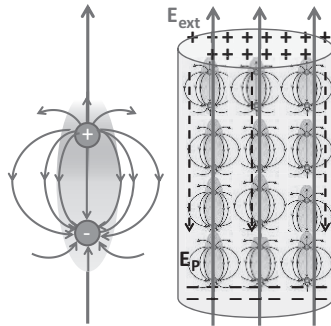
A matéria é constituída de átomos que, por sua vez, são constituídos de núcleos e elétrons. Núcleos e elétrons possuem duas propriedades intrínsecas: carga, que é fonte de campo elétrico, e spin, que é fonte de campo magnético. De uma forma geral as cargas negativas dos elétrons se distribuem nas vizinhanças da carga positiva do núcleo atômico de modo a anular o campo elétrico resultante nas proximidades do átomo. Moléculas têm mais de um núcleo e, em algumas delas, denominadas polares (como a água), os elétrons estão deslocados em relação ao centro de carga positiva, formando um dipolo elétrico. O campo elétrico deste dipolo é, em geral, cancelado pelas moléculas vizinhas idênticas, devido à orientação aleatória que elas possuem provocada pela agitação térmica.

Com exceção dos materiais ferromagnéticos, os efeitos de campos magnéticos externos nos materiais são bem menos significativos quando comparados com aqueles provocados pelo campo elétrico. Para a grande maioria dos átomos, os momentos magnéticos intrínsecos dos elétrons e do núcleo, associados ao spin eletrônico e nuclear, respectivamente, praticamente se cancelam fornecendo um campo magnético resultante muito pequeno ou nulo. Quando um átomo é imerso em um campo magnético, o campo elétrico induzido pela Lei de Faraday modifica o movimento orbital dos elétrons provocando um aumento do momento magnético na direção contrária ao campo magnético aplicado. Este mecanismo, que ocorre com todos os átomos, é denominado *diamagnetismo*, mas o momento de dipolo magnético gerado por este mecanismo é muito pequeno. Existem, entretanto, substâncias para as quais o cancelamento dos momentos magnéticos intrínsecos dos elétrons e do núcleo não é completo, e apresentam um pequeno momento de dipolo magnético resultante. Estas substâncias são denominadas *paramagnéticas*, mas a agitação térmica orienta aleatoriamente estes átomos que acabam por ter o momento de dipolo magnético cancelado

pelos seus vizinhos, tornando o momento de dipolo magnético médio também muito pequeno. Os materiais *ferromagnéticos* são especiais pela sua capacidade de se auto-organizar e ter os momentos magnéticos de vários átomos orientados na mesma direção em pequenas regiões do material.

## DIELÉTRICOS: PERMISSIVIDADE ELÉTRICA

Esta desorganização natural dos momentos de dipolo elétrico ou magnético de um conjunto de átomos ou moléculas é revertida pela aplicação de um campo elétrico ou magnético externo. A Figura I-18 ilustra o caso do campo elétrico. Os dipolos elétricos associados às moléculas do material ou aqueles que são formados pela ação do campo elétrico se alinham com o campo elétrico externo aplicado. Estes dipolos ficam aproximadamente alinhados e produzem um campo elétrico *contrário* ao campo externo. No interior do material, as cargas pertencentes a dipolos vizinhos e alinhados na direção do campo elétrico se cancelam, mas nas interfaces opostas do dielétrico acumulam-se duas densidades superficiais de carga, uma positiva e outra negativa. Estas cargas superficiais produzem um campo elétrico contrário ao campo elétrico externo, de modo que o campo elétrico resultante é *menor* do que o aplicado. Em meios lineares, em que o valor dos momentos de dipolo é proporcional ao campo elétrico aplicado, o efeito resultante da ação dos dipolos pode ser adequadamente quantificado substituindo-se a permissividade elétrica do vácuo pela permissividade elétrica do meio, isto é, fazendo-se  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ , onde  $\epsilon > \epsilon_0$  nas equações de Maxwell. Efetivamente podemos ver, pela Lei de Gauss, que a substituição  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$  com  $\epsilon > \epsilon_0$  diminui o valor do campo elétrico calculado naquele meio. As permissividades elétricas dos vários materiais são determinadas experimentalmente e, em geral, tabeladas na forma da permissividade relativa,  $\epsilon_R$ , definida como  $\epsilon_R = \epsilon/\epsilon_0$ .



**Figura I-18** – Ilustração de um meio dielétrico. O campo elétrico externo orienta os dipolos elétricos das moléculas do material.

Se o campo elétrico é alternado, o valor da permissividade elétrica depende da frequência, já que a resposta que as moléculas dão a um campo elétrico variando depende da frequência. Este ponto será discutido quando abordarmos o tema de radiação.

## PERMISSIVIDADES RELATIVAS DE ALGUNS MATERIAIS

Os valores das permissividades relativas de alguns materiais na frequência de 1,0 MHz são: 4,84 (vidro), 4,15 (gelo), 2,26 (polietileno), 2,59 (solo seco), 2,1 (“Teflon”, politetrafluoretileno) e 78,3 (água).

## VETOR DENSIDADE DE FLUXO ELÉTRICO

A Lei de Gauss indica que se definirmos um vetor  $\vec{D}$ , de modo que:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (\text{I-26})$$

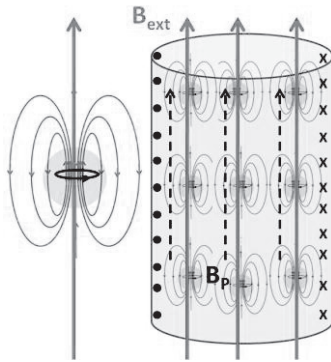
as fontes deste vetor são somente as cargas livres, isto é:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} \, dA = q_{\text{int}}. \quad (\text{I-27})$$

O vetor  $\vec{D}$  é denominado *densidade de fluxo elétrico* e é útil para determinação das condições de contorno do campo elétrico nas interfaces, como veremos adiante.

## MATERIAIS MAGNÉTICOS: PERMEABILIDADE MAGNÉTICA

O diamagnetismo, paramagnetismo e ferromagnetismo são fenômenos que só podem ser devidamente descritos pela mecânica quântica. Entretanto, uma análise macroscópica dos seus efeitos pode ser feita considerando que pequenos dipolos magnéticos (podem ser pensados como nano-solenoides) sejam associados aos átomos e se alinhem na direção do campo magnético externo aplicado. Nos materiais diamagnéticos, o alinhamento se dá no sentido contrário ao do campo aplicado, enquanto nos materiais paramagnéticos ele se dá no mesmo sentido do campo. Nessas condições,



**Figura I-19** – Ilustração de um meio paramagnético. O campo magnético externo orienta os dipolos magnéticos das moléculas do material.

um raciocínio similar ao aplicado na seção anterior pode ser adotado para o caso de materiais diamagnéticos ou paramagnéticos. Vejamos o caso paramagnético, ilustrado na Figura I-19. O campo magnético externo alinha os dipolos magnéticos associados aos átomos na mesma direção e sentido do campo magnético aplicado e, portanto, tendendo a aumentar o campo magnético resultante. Como o valor deste momento é pequeno, a agitação térmica impede que um alinhamento efetivo seja obtido. Observando os nano-solenoides localizados em uma seção reta do cilindro ilustrado, vemos que as correntes se anulam para os átomos vizinhos situados em uma seção reta do cilindro. Entretanto, este cancelamento não ocorre nas superfícies laterais e o resultado final do alinhamento dos dipolos é equivalente à geração de uma *densidade de corrente de magnetização* na superfície lateral do cilindro. O campo magnético produzido por esta corrente é na mesma direção e sentido do campo magnético externo, aumentando-o.

O efeito macroscópico do aumento do campo magnético em materiais paramagnéticos pode ser obtido substituindo-se nas equações de Maxwell a permeabilidade magnética do vácuo,  $\mu_0$ , pela permeabilidade magnética do meio,  $\mu$ , ou seja, fazendo  $\mu_0 \rightarrow \mu$  na Lei de Ampère-Maxwell. Definindo permeabilidade relativa por  $\mu_R = \mu/\mu_0$ , teremos que  $\mu_R > 1$  para materiais paramagnéticos e  $\mu_R < 1$  para os materiais diamagnéticos.

Pode-se ver que se  $\mu > \mu_0$  o campo magnético em um meio paramagnético é maior do que aquele em que há o vácuo na mesma região do espaço.

## PERMEABILIDADES RELATIVAS DE ALGUNS MATERIAIS

Valores típicos de  $\mu_R$  para materiais paramagnéticos são 1,001001 (“Teflon”), 1,0000003 (madeira seca), e para materiais diamagnéticos são 0,999 (cobre) e 0,999992 (água pura). Para efeitos práticos considera-se  $\mu_R = 1$ , isto é  $\mu = \mu_0$  para todos os materiais que não sejam os ferromagnéticos.



## VETOR CAMPO MAGNÉTICO AUXILIAR

A Lei de Ampère-Maxwell indica que se definirmos um vetor  $\vec{H}$ , de modo que

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (\text{I-28})$$

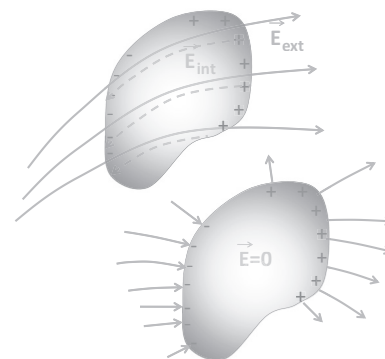
as fontes deste vetor são somente as correntes produzidas por cargas livres, isto é:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dA. \quad (\text{I-29})$$

O vetor  $\vec{H}$  é denominado *campo magnético auxiliar* e é útil para determinação das condições de contorno do campo elétrico nas interfaces, como veremos adiante. Em alguns textos o campo  $\vec{H}$  é denominado campo magnético e  $\vec{B}$ , campo de indução magnética.

## CONDUTORES

A aplicação de um campo elétrico externo em um condutor neutro provoca um deslocamento de cargas negativas (elétrons) no sentido contrário ao do campo e um progressivo acúmulo de cargas positivas na direção e sentido do campo aplicado. Na superfície do condutor ocorre um bloqueio do movimento dos elétrons que acabam por se acumular na superfície, o mesmo ocorrendo com cargas positivas na superfície oposta. As cargas positivas e negativas acumuladas nas superfícies geram um campo elétrico que se opõe ao campo elétrico externo em um processo de acúmulo e adaptação da distribuição de cargas e que somente cessa quando o campo elétrico no seu interior for nulo de modo a não promover mais nenhum movimento de carga. A Figura I-20 ilustra o processo. Atingida a distribuição de cargas de equilíbrio, distribuição essa que depende da forma geométrica do condutor, o campo elétrico torna-se



**Figura I-20** – Redistribuição de cargas em um condutor quando um campo elétrico externo é aplicado. A soma do campo elétrico externo com o campo elétrico produzido pelas cargas induzidas é zero no interior do condutor.

zero no seu interior e normal à sua superfície externa. Este rearranjo de cargas e campos no condutor é extremamente rápido, sendo da ordem da fração do ato segundo ( $1\text{as} = 10^{-18}\text{ s}$ ) no caso de bons condutores, como o cobre. Dessa forma mesmo para correntes alternadas de altas frequências, quando as cargas e os campos ficam se redistribuindo e se modificando rapidamente na superfície, o equilíbrio é continuamente alcançado. Nesse caso, a corrente associada à redistribuição de cargas é também superficial, como será visto no Capítulo III (efeito pelicular).

### CONDIÇÕES DE CONTORNO NAS INTERFACES

É muito comum que os campos elétricos e magnéticos se encontrem em regiões onde ocorre uma mudança brusca de meio. As interfaces ar-vidro, ou ar-água são exemplos corriqueiros desta situação. Como os campos devem obedecer às equações de Maxwell em todo o espaço, algumas condições de contorno são impostas a eles na interface de separação entre os meios. Elas são explicitadas para as componentes normais e tangenciais dos campos na interface entre os dois meios. Em resumo:

- A componente normal do vetor densidade do campo elétrico,  $D_{\perp}$ , é contínua na interface entre dois dielétricos.
- A componente normal do vetor campo magnético,  $B_{\perp}$ , é contínua na interface entre dois dielétricos.
- A componente tangencial do vetor campo elétrico,  $E_{\parallel}$ , é contínua na interface entre dois dielétricos.
- A componente tangencial do vetor campo magnético auxiliar  $H_{\parallel}$ , é contínua na interface entre dois dielétricos.
- A componente normal do vetor densidade campo elétrico é descontínua na superfície externa de um bom condutor  $D_{\perp ext} - D_{\perp int} = \sigma_s$ , onde  $\sigma_s$  é a densidade

superficial de carga no condutor. A componente tangencial do campo elétrico na superfície externa de um bom condutor é contínua,  $E_{\parallel ext} - E_{\parallel int} = 0$ . No interior do condutor perfeito o campo elétrico é nulo, como foi visto e, portanto, o campo elétrico tangencial externo também é nulo.

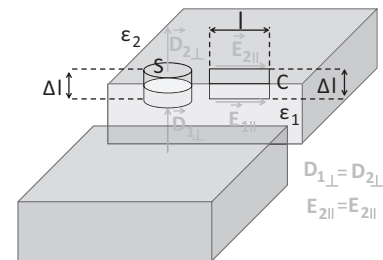
- A componente tangencial do vetor campo magnético auxiliar é descontínua na superfície de um bom condutor,  $H_{\parallel ext} - H_{\parallel int} = J_s$ , onde  $J_s$  é a densidade superficial de corrente no condutor. A componente normal do campo magnético na superfície externa de um bom condutor é contínua.

As condições de contorno relativas às componentes normais dos campos são obtidas pelas integrais de superfícies envolvendo esses campos, enquanto as condições de contorno relativas às componentes tangenciais são obtidas pelas integrais de linha. As Figuras I-21, I-22, e I-23 ilustram o procedimento, indicando uma superfície cilíndrica e um circuito retangular para a aplicação das integrais. Consideremos a Figura I-21. Pela Equação (I-27), as fontes do vetor  $\vec{D}$  são as cargas livres. Como não existem cargas livres na interface de dois dielétricos – somente cargas de polarização – a integral na superfície cilíndrica fechada deve ser nula. Quando  $\Delta l \rightarrow 0$ , somente as superfícies das bases do cilindro contribuem e as componentes normais do vetor  $D$  devem ser iguais. Note que as normais às superfícies do cilindro apontam “para fora” deste e a contribuição para o fluxo de  $\vec{D}$  no meio 1 é negativa, enquanto no meio 2 é positiva. Sendo iguais, elas se anulam.

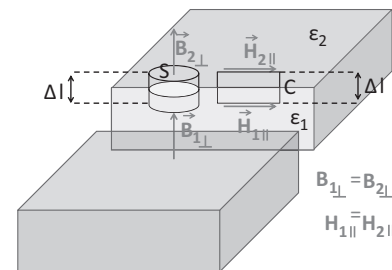
O mesmo raciocínio pode ser aplicado à componente normal do campo magnético  $\vec{B}$  (Figura I-22) usando a Equação (I-6), já que não existem cargas magnéticas.

No caso do condutor (Figura I-23), existe carga superficial e o fluxo total de  $\vec{D}$  não é nulo. A única superfície que contribui para o fluxo é a base externa do cilindro. Temos então:

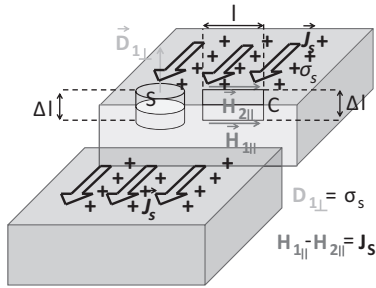
$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dA = D_{\perp} S = \rho_{int} S \Delta l.$$



**Figura I-21** – Condições de contorno para os campos E e D na interface entre dois dielétricos. A ilustração corresponde à interface entre um gás (permissividade  $\epsilon_2$ ) e um sólido (permissividade  $\epsilon_1$ ).



**Figura I-22** – Condições de contorno para os campos B e H na interface entre dois dielétricos. A ilustração corresponde à interface entre um gás (permissividade  $\epsilon_2$ ) e um sólido (permissividade  $\epsilon_1$ ).



**Figura I-23** – Condições de contorno para os campos D e H na superfície de um condutor. A ilustração corresponde à interface entre um gás e um condutor.

Quando  $\Delta l \rightarrow 0$ ,  $\rho_{int} \Delta l \rightarrow \sigma_s$  e, simplificando S, obtemos  $D_{\perp} = \sigma$ .

A metodologia para as integrais de linha é a mesma. Usando a Lei de Faraday (Equação (I-8)) no circuito C da Figura I-21 e notando que quando  $\Delta l \rightarrow 0$  o fluxo do campo magnético tende a zero, vemos que a integral de linha do campo elétrico deve ser nula. Arbitrando a normal para fora da página, a contribuição de  $E_{\parallel}$  é positiva, enquanto a de  $E_{2\parallel}$  é negativa, anulando a integral de linha se  $E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$ . O mesmo raciocínio pode ser usado na Figura I-22, para o campo  $\vec{H}$ , usando a Equação (I-29), e observando que não existe corrente de cargas livres na interface entre dois dielétricos.

Para condutores submetidos a campos externos variando com o tempo existe uma corrente superficial responsável por rearranjar as cargas superficiais. Nesse caso, a Equação (I-29) aplicada no circuito C, e tomando o sentido da normal como sendo o mesmo de  $J_s$ , torna-se:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = (H_{1\parallel} - H_{2\parallel})l = i = J\Delta l.$$

Quando  $\Delta l \rightarrow 0$ ,  $J\Delta l \rightarrow J_s$  e, simplificando  $l$ , obtemos  $(H_{1\parallel} - H_{2\parallel}) = J_s$ .

O livro apresenta conceitos básicos relacionados às Ondas Eletromagnéticas em nível intermediário. A abordagem apresentada nesta obra oferece uma visão integrada das Ondas Eletromagnéticas, incluindo sua geração por cargas aceleradas, propagação e interação com os diversos meios materiais, integrando a ótica (visível) com a radiofrequência em um único ambiente conceitual. As Equações de Maxwell na sua forma integral são utilizadas sempre que possível, de forma a explorar os aspectos conceituais associados à produção, propagação e interação das Ondas Eletromagnéticas, assim minimizando as barreiras matemáticas que usualmente bloqueiam o entendimento dos conceitos pelos estudantes nesse nível. O livro se destina aos leitores que tenham cursado as disciplinas básicas de Eletromagnetismo, normalmente oferecidas para estudantes de Física e Engenharia nos dois primeiros anos após o ingresso na maioria das universidades brasileiras.



**Blucher**



Clique aqui e:

[VEJA NA LOJA](#)

## Ondas eletromagnéticas Conceitos básicos

---

Eduardo Chaves Montenegro

ISBN: 9786555067828

Páginas: 224

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2023

---