

JOÃO CYRO ANDRÉ | CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI | MIGUEL LUIZ BUCALEM | SERGIO CIFÚ

LIÇÕES EM
MECÂNICA DAS
ESTRUTURAS:
ANÁLISE
ELASTOPLÁSTICA

Blucher

LIÇÕES EM
MECÂNICA DAS
ESTRUTURAS:
ANÁLISE
ELASTOPLÁSTICA

João Cyro André

Carlos Eduardo Nigro Mazzilli

Miguel Luiz Bucalem

Sergio Cifú

Lições em Mecânica das Estruturas: Análise Elastoplástica

© 2022 João Cyro André, Carlos Eduardo Nigro Mazzilli, Miguel Luiz Bucalem, Sergio Cifú

Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher

Editor Eduardo Blücher

Coordenação editorial Jonatas Eliakim

Produção editorial Kedma Marques

Preparação de texto Andréa Stahel

Diagramação Negrito Produção Editorial

Revisão de texto Samira Panini

Capa Leandro Cunha

Imagem da capa Unsplash

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar

04531-934 - São Paulo - SP - Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

contato@blucher.com.br

www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Lições em mecânica das estruturas : análise elastoplástica / Carlos Eduardo Nigro Mazzilli... [et al]. -- São Paulo : Blucher, 2022.

636 p. : il.

Bibliografia

ISBN 978-65-5506-489-6 (impresso)

ISBN 978-65-5506-490-2 (eletrônico)

1. Análise estrutural (Engenharia) 2. Engenharia de estruturas 3. Engenharia mecânica I. Mazzilli, Carlos Eduardo Nigro

22-2782

CDD 624.171

Índices para catálogo sistemático:

1. Engenharia de estruturas

SUMÁRIO

Dedicatória.....	21
------------------	----

PRIMEIRA PARTE

Análise elastoplástica de estruturas reticuladas planas –
Métodos plásticos

1. Fragmentos históricos da teoria da plasticidade	27
2. Conceitos básicos	39
2.1 Comportamentos constitutivos básicos dos materiais estruturais	39
2.2 Formulação do problema de estruturas planas de barras em regime elastoplástico perfeito	44
2.3 Medidas de segurança das estruturas na elastoplasticidade perfeita	47
3. Elastoplasticidade perfeita em barras	51
3.1 Solicitação axial	51

3.2	Solicitação por flexão normal pura	59
3.3	Diagramas momento-curvatura idealizados	65
3.4	Solicitação por flexão normal simples	67
3.5	Solicitação por flexão normal composta	81
3.6	Solicitação por flexão normal com a presença de força cortante e força normal.....	85
3.7	Formulação do problema de estruturas planas de barras em regime elastoplástico perfeito	86
3.8	Estado duplo de tensão.....	86
4.	Análise incremental.....	93
4.1	Introdução	93
4.2	Algoritmo incremental para carregamento proporcional	94
5.	Análise limite intuitiva.....	137
	Introdução	137
6.	Teoremas da Análise Limite	169
6.1	Conceitos básicos	169
6.2	Teoremas da análise limite	172
7.	Métodos clássicos de análise limite	181
7.1	Método da combinação de mecanismos.....	181
7.2	Método das inequações	204
7.3	Análises paramétricas	216
7.4	Cargas distribuídas	235
	Apêndice 7A: Demonstração das “propriedades Souza Lima”	248

8. Análise limite por programação linear pela aplicação do teorema estático.....	251
8.1 Introdução	251
8.2 Forma geral	252
8.3 Forma reduzida	252
8.4 Forma canônica.....	253
8.5 Solução ótima pelo método simplex	257
8.6 Exemplos.....	258

9. Análise limite por programação linear pela aplicação do teorema cinemático	289
9.1 Introdução	289
9.2 Forma geral	290
9.3 Forma reduzida	292
9.4 Forma canônica.....	293
9.5 Solução ótima pelo método simplex	299
9.6 Exemplos.....	300

SEGUNDA PARTE

Análise elastoplástica de estruturas reticuladas planas –
Tópicos especiais

10. Cálculo de deslocamentos na análise limite	351
Introdução	351
11. Pórtico simples com resultados nem tanto.....	363
Introdução	363
Análise incremental.....	364

12. Elastoplasticidade perfeita em vigas de concreto armado..... 421

Introdução 421

13. Estudo de caso: Galeria sob aterro de rodovia..... 447

TERCEIRA PARTE

Análise elastoplástica de sólidos deformáveis

14. Fundamentos 457

14.1 Conceitos preliminares..... 457

14.2 Critérios de plastificação ou resistência 462

14.3 Relações entre tensões e deformações plásticas para condições tridimensionais.... 479

14.4 Formulação incremental do método dos elementos finitos para sólidos elastoplásticos 489

14.5 Formulação incremental do método dos elementos finitos para modelagem de problemas elastoplásticos..... 494

15. Teoremas da análise limite em estado multiaxial de tensão 501

15.1 Conceitos básicos..... 501

15.2 Teoremas da análise limite..... 503

16. Análise limite em estado plano de tensão 507

16.1 Introdução 507

16.2 Envoltórias na flexão normal simples 509

16.3 Viga em balanço com carga na extremidade..... 519

16.4 Viga biengastada com carga uniforme 531

17. Análise limite em estado plano de deformação.....	539
17.1 Introdução	539
17.2 Fundação direta em sapata corrida sobre meio elastoplástico perfeito com o critério de plastificação de Tresca ou de von Mises.....	540
17.3 Fundação direta em sapata corrida sobre meio elastoplástico perfeito com o critério de plastificação de Mohr-Coulomb.....	561
Anexo A – Programação linear pelo método simplex	589
A.1 Introdução	589
A.2 Interpretação geométrica.....	590
A.3 Método simplex.....	594
A.4 Forma canônica do problema de programação linear – PPL	594
A.5 Transformação de um PPL da forma geral para a forma canônica	605
A.6 Convergência e degenerescência.....	609
A.7 Algoritmo para o método simplex em PPL não degenerados	610
Anexo B – Relações cinemáticas em barras.....	613
B.1 Introdução	613
B.2 Relações deformações-deslocamentos generalizados em barra de treliça.....	614
B.3 Relações deformações-deslocamentos generalizados em barra biengastada de viga	616
B.4 Relações deformações-deslocamentos generalizados em barra biengastada de pórtico plano.....	617
B.5 Relações deformações-deslocamentos generalizados e equações de compatibilidade em estrutura	620
Referências.....	629
Crédito das imagens.....	635
Sobre os autores	639

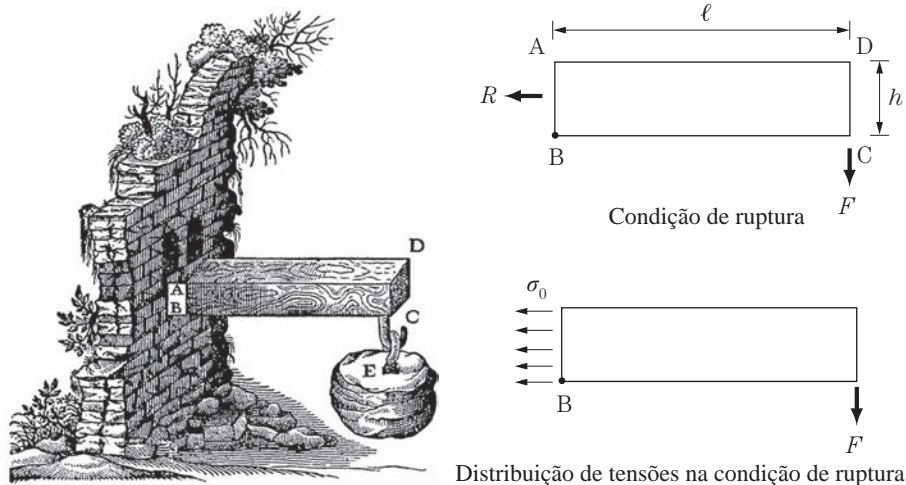
No segundo dia dos diálogos relativos a duas novas ciências, Galileu Galilei (1638) apresenta várias proposições sobre resistência à fratura, como se ilustra com sua primeira proposição:

Um prisma ou um cilindro sólido de vidro, aço, madeira ou outro material quebrável que seja capaz de sustentar um peso muito pesado quando aplicado longitudinalmente é, como observado anteriormente, facilmente rompido pela aplicação transversal de um peso que pode ser muito menor na proporção que o comprimento do cilindro exceda sua espessura.

Essa proposição é debatida na condição de ruptura, conforme mostra a Figura 1.1, e é caracterizada por $F\ell = \frac{\sigma_0 b h^2}{2} = \frac{R h}{2}$, que, apesar da equivocada uniformidade das tensões no engastamento, traz à luz a discussão sobre a distribuição das tensões na seção transversal e sobre a resistência à fratura de um elemento estrutural. Está lançada a semente para o desenvolvimento de teorias estruturais e, em particular, da teoria da plasticidade. O problema da resistência à fratura (materiais frágeis) de certa forma contrapõe-se ao da resistência de materiais dúcteis (teoria da plasticidade). O que há de comum é a preocupação com a determinação da capacidade de carga e, portanto, da caracterização do Estado Limite Último.

Figura 1.1

Análise de flexão de Galileu.



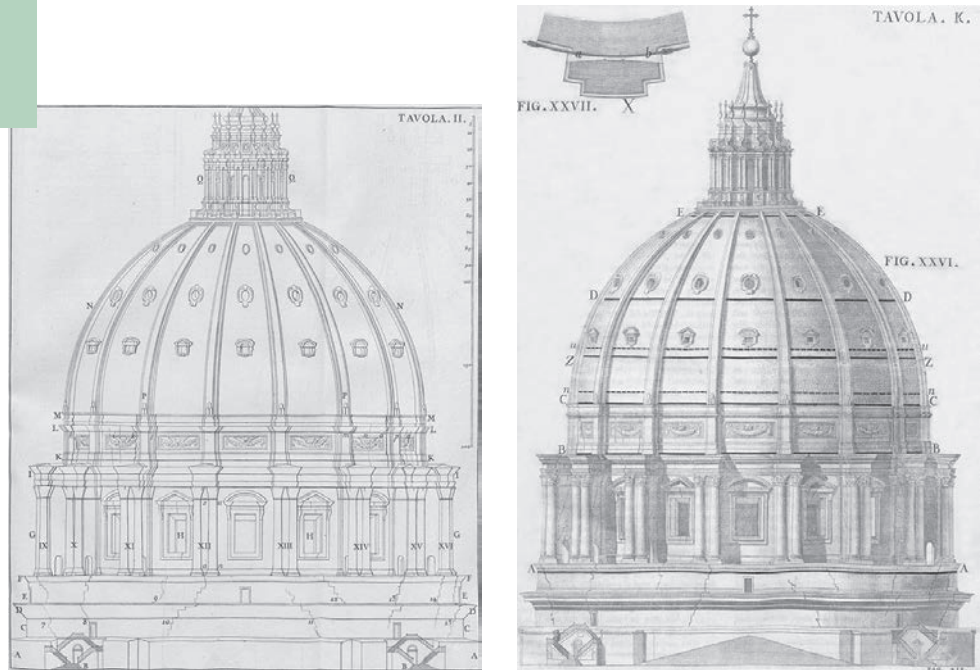
Em 1547, o papa Paulo III confiou a direção das obras da catedral de São Pedro, no Vaticano, a Michelangelo Buonarroti (1475-1564), pintor, escultor e arquiteto italiano, cuja contribuição mais notável foi a construção da cúpula da catedral. Essa cúpula foi concluída 24 anos após a morte de Michelangelo, com o trabalho de seus discípulos Domenico Fontana e Giacomo della Porta.

Em 1742, Jacquier, Le Seur e Boscovich, três prestigiosos matemáticos, apresentaram relatório com a indicação da possibilidade de colapso da cúpula da catedral de São Pedro e com a indicação de intervenções para evitá-la (LÓPEZ, 1998). Outros relatórios com outros autores e mesmas preocupações foram igualmente submetidos à apreciação papal.

Um ano depois, o papa Bento XIV convidou Giovanni Poleni para apresentar seu parecer sobre a situação estrutural da cúpula. Com a colaboração de Luigi Vanvitelli, principal arquiteto da catedral, realizou uma cuidadosa inspeção da estrutura, descrita por Vanvitelli em um conjunto de desenhos que mostram detalhadamente a posição das fissuras. O resultado desse trabalho foi a recuperação da cúpula, concluída em 1743, com a instalação de seis anéis de aço. A Figura 1.2 mostra cópias de desenhos originais com as posições das fissuras e dos anéis de aço.

Figura 1.2

Fissuras na cúpula e posição dos anéis de aço.



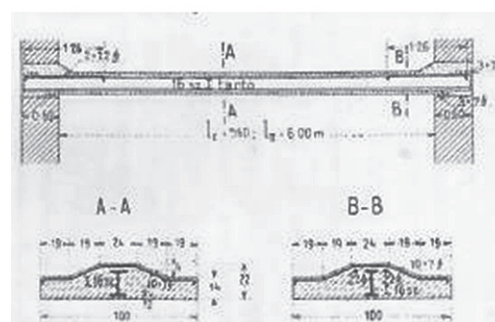
O trabalho integral de recuperação da cúpula da catedral de São Pedro foi relatado na obra *Memorie Istoriche del Templo Vaticano* (POLONI, 1748), nele se encontra, provavelmente, a primeira utilização intuitiva do teorema estático da análise limite para a obtenção de uma solução segura de recuperação.

Desses dois marcos históricos, transporta-se para 1914, ano de início da Primeira Guerra Mundial, quando Kazinczy apresenta os resultados dos ensaios de duas vigas biengastadas de aço envoltas em concreto, com 5,6 m e 6,0 m de vão, e carregadas com tijolos, como mostra a Figura 1.3, cujas imagens foram apresentadas em artigo dedicado ao legado de Kazinczy (KALISZKY et al., 2015).

Figura 1.3

Ensaio de Kazinczy.

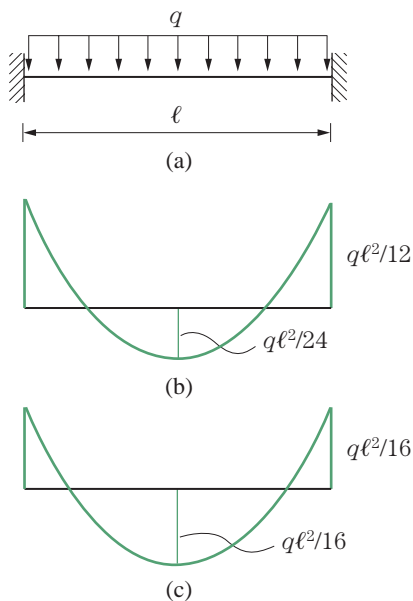
Fonte: Kaliszky et al., 2015.



Nesses ensaios (*apud* HEYMAN, 1998), Kazinczy observou que as fissuras no concreto serviram para revelar o comportamento das vigas de aço; apareceram duas rótulas plásticas nas extremidades das vigas; e, com o aumento da carga, formou-se uma terceira rótula no meio do vão, seguida de grandes deslocamentos. Na descarga total, observou que ocorreram deformações permanentes nas extremidades e no meio do vão da viga. Com base nessas observações, concluiu que uma viga biengastada se comporta como uma viga biapoiada após a formação das duas rótulas e que ela não sofre colapso antes que se formem três rótulas plásticas. Adicionalmente, destacou que a viga biengastada pode ser dimensionada para o diagrama de momentos fletores da Figura 1.4(c), na condição de colapso e com momentos no engastamento e no meio do vão iguais a $\frac{q\ell^2}{16}$, e não para o diagrama resultante da análise elástica linear mostrado na Figura 1.4(b), com momentos no engastamento e no meio do vão iguais a $\frac{q\ell^2}{12}$ e $\frac{q\ell^2}{24}$, respectivamente. Os dois diagramas de momentos fletores correspondem a soluções equilibradas, pois as somas dos momentos fletores no engastamento e no meio do vão resultam no mesmo valor $\frac{q\ell^2}{8}$. A capacidade resistente da viga é 33% maior do que a indicada pela análise elástica linear.

Figura 1.4

Distribuição de momentos fletores no colapso e da análise elástica linear.

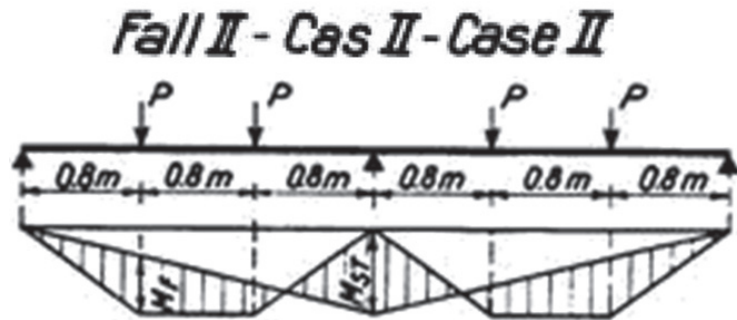


Três anos antes de se instalar a Segunda Guerra Mundial, em 1939, realizou-se em Berlim o Segundo Congresso IABSE – International Association for Bridge and Structural Engineering –, que contou com uma sessão onde foram apresentados oito trabalhos no tema Plasticidade, entre os quais comentam-se os de Maier-Leibnitz (1936) e Bleich (1936).

Maier-Leibnitz apresentou uma série de ensaios experimentais, cujos resultados esclarecem o comportamento das estruturas após o limite elástico. Seleciona-se o caso da viga contínua com dois tramos solicitados nos terços dos vãos com cargas concentradas, como mostra a Figura 1.5. Essa viga contínua é composta de dois perfis duplo T com 16 cm de altura com as seguintes características geométricas e físicas: $A = 43 \text{ cm}^2$, $I = 1727 \text{ cm}^4$, $W = 211 \text{ cm}^3$ e $\sigma_e = 2,512 \frac{\text{tf}}{\text{cm}^2}$. O momento fletor que limita o comportamento elástico é dado por $M_e = \sigma_e W = 530 \text{ tfcm}$.

Figura 1.5

Figura original da viga contínua ensaiada por Maier-Leibnitz.



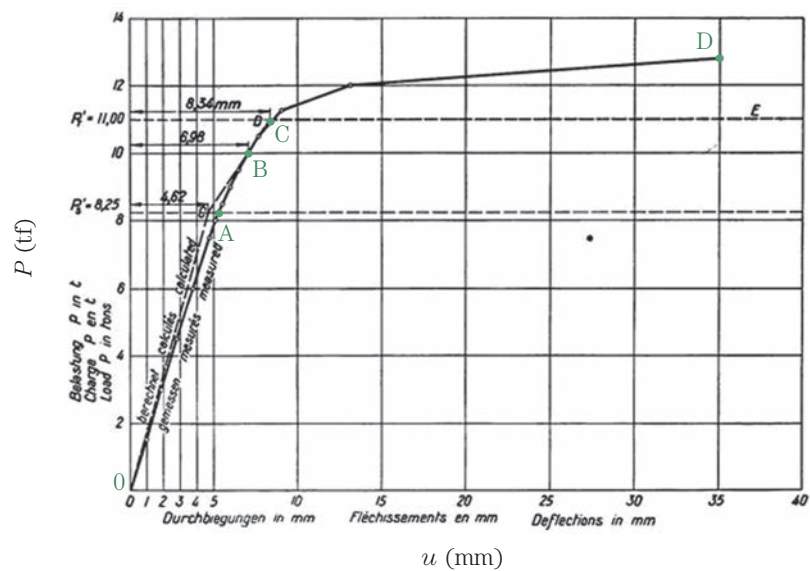
Um dos resultados obtidos por Maier-Leibnitz é o diagrama $P \times U$ da Figura 1.6, onde U é o deslocamento vertical no meio do tramo. Destacam-se nesse diagrama os pontos A, B, C, D.

$$A \equiv (8,25 \text{ tf}; 4,62 \text{ mm}) \quad B \equiv (10 \text{ tf}; 6,98 \text{ mm})$$

$$C \equiv (11,00 \text{ tf}; 8,34 \text{ mm}) \quad D \equiv (13,10 \text{ tf}; 35,00 \text{ mm})$$

Figura 1.6

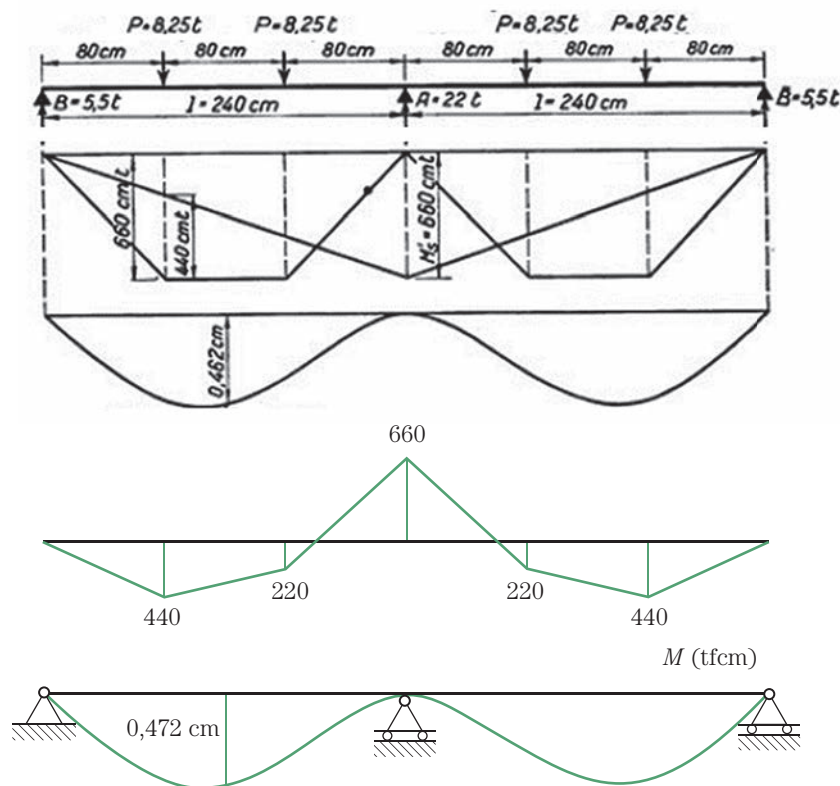
Figura original do diagrama $P(\text{tf}) \times U(\text{mm})$.



A Figura 1.7 apresenta resultados para a carga $P = 8,25$ tf: os obtidos por Maier-Leibnitz e os de uma análise elástica linear. Pode-se observar que o diagrama de momentos fletores é exatamente o mesmo e que ocorre uma diferença de aproximadamente 2% no deslocamento no meio do tramo, praticamente desprezável em face de eventuais variações nas características geométricas e físicas. Maier-Leibnitz concluiu que o comportamento até $P = 8,25$ tf foi praticamente linear, mesmo com um momento fletor no apoio central, com valor 660 tfcm, superior ao momento elástico limite, $M_e = \sigma_e W = 530$ tfcm. Aspecto importante a ser destacado, por favorecer a interpretação do comportamento da viga contínua após o limite elástico, é a representação do diagrama de momentos fletores como resultado da superposição dos diagramas devidos ao momento no apoio central com os devidos às cargas P .

Figura 1.7

Resultados em momentos fletores e deslocamento no meio do vão com $P = 8,25$ tf.

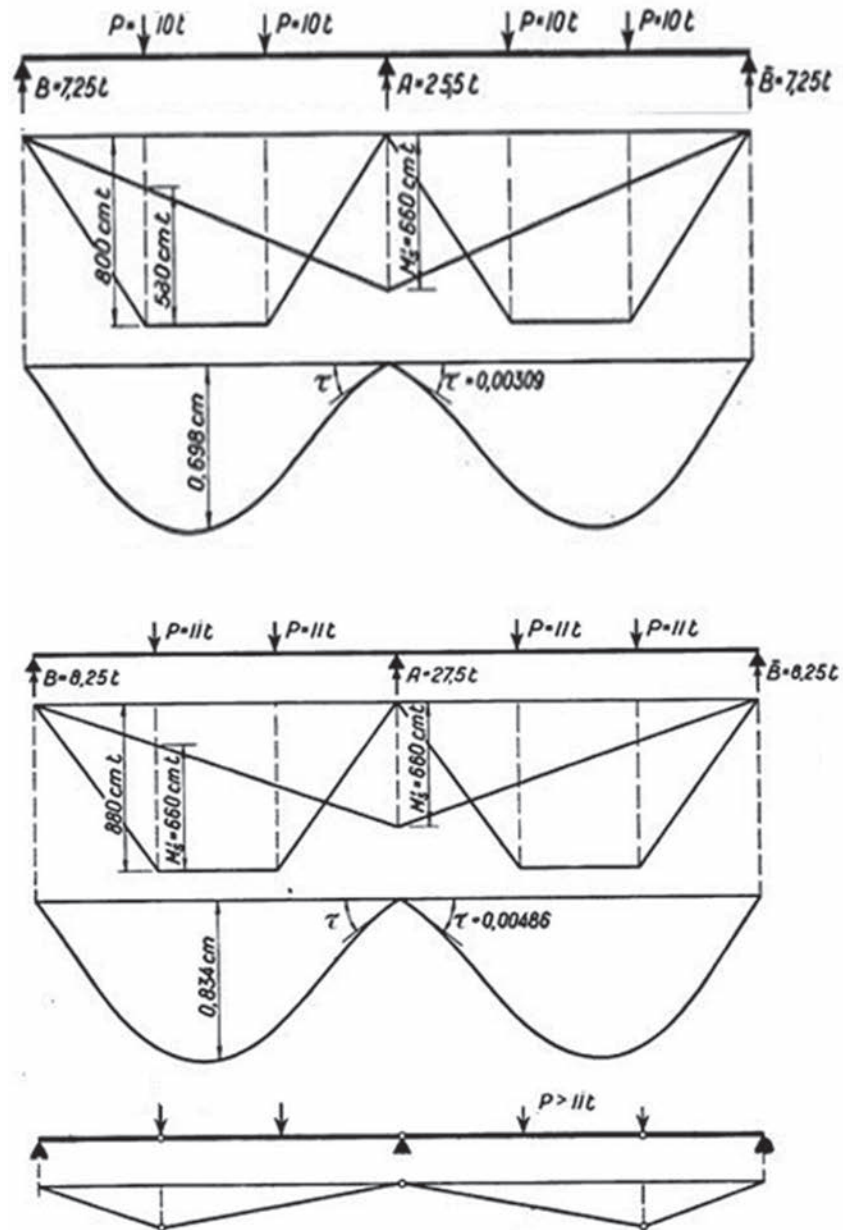


A Figura 1.8 apresenta os resultados obtidos por Maier-Leibnitz com $P = 10$ tf e $P = 11,00$ tf e indica o comportamento de mecanismo para $P > 11,00$ tf. Ele observou que o momento no apoio central permaneceu igual a 660 tfcm enquanto os momentos nos pontos de aplicação das cargas cresceram, o que mostra com clareza a capacidade de redistribuição de resistência pela viga contínua. Notou ainda, que ocorreu a rotação relativa no apoio central, como se instalasse uma rótula nessa posição, e a viga contínua passou a se comportar como duas vigas biapoiadas para acréscimos de carga a partir de $P = 8,25$ tf. Note-se que a maneira de apresentar o diagrama de momentos por Maier-Leibnitz favorece essa interpretação. Observou

ainda que, para carga superior a 11,00 tf, ficou comprometido o efetivo uso da viga contínua, pois os deslocamentos cresceram intensamente até atingirem o valor de 35 mm, quando ocorreu o seu colapso com $P = 13,10$ tf.

Figura 1.8

Resultados em momentos fletores e deslocamento no meio do vão com $P = 10$ tf e 11,00 tf e a indicação do comportamento de mecanismo para $P > 11,00$ tf.



Com base nesses resultados, Maier-Leibnitz apresentou um resumo de suas principais conclusões, que fornecem uma base sólida para a análise da capacidade resistente da viga contínua, com as seguintes hipóteses simplificadoras:

- $P = P_I = 8,25$ tf representa o maior valor de P para o qual o comportamento da viga contínua pode ser considerado como elástico linear. Cargas e descargas ocorrem sem que surjam deformações permanentes;
- para acréscimos de carga ΔP , tais que $P_I < P < P_{II} = 11,00$ tf, a viga contínua se comporta como duas vigas biapoiadas, com uma rótula no apoio central, de comportamento elástico linear;
- quando $P = P_{II} = 11,00$ tf, forma-se um mecanismo com grandes deslocamentos, de modo que essa carga é a carga limite da viga contínua.

Dos resultados do ensaio ainda se pode constatar que:

- o momento máximo resistente na seção transversal é $M_p = 660$ tf cm e será adiante referido como momento de plastificação da seção transversal;
- ao se atingir o valor M_p em uma seção, esse valor permanece constante para acréscimos de P . Essa condição será referida como de rótula plástica;
- o mecanismo para $P = P_{II} = 11,00$ tf será referido como mecanismo de colapso.

Bleich (1936) apresenta o conceito de um novo fator de segurança e vários exemplos de dimensionamento de estruturas com carregamentos que flutuam entre valores máximo e mínimo, ao qual se referiu como a teoria do equilíbrio plástico. Selecionam-se para destaque desse trabalho os aspectos ligados ao novo conceito, à época, de fator de segurança e as hipóteses da teoria do equilíbrio plástico.

O autor menciona que o método usual, à época, de projeto de estruturas de aço considera como limite o seu comportamento linear, ou seja, aplica o método das tensões admissíveis. Ele introduz o conceito de coeficiente de segurança externo, definido como a relação entre a carga limite de utilização da estrutura e a carga de serviço, e o faz com as explicações que se apresentam nos seguintes parágrafos:

O conhecimento de que em estruturas estaticamente indeterminadas os limites elásticos podem ser ultrapassados localmente sem necessariamente reduzir a capacidade de carga e, conseqüentemente, o fator de segurança da estrutura, visto que as seções sobrecarregadas podem ser aliviadas por aquelas menos solicitadas, deu origem a uma outra concepção de segurança no projeto de tais estruturas [...]

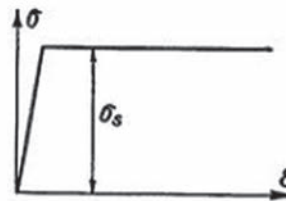
A nova definição do fator de segurança deve permitir o aproveitamento das propriedades de ductilidade do aço no projeto mais econômico de estruturas estaticamente indeterminadas. [...]

O fator de segurança é a relação entre a carga final e a carga útil. Por carga final entende-se aquele limite de carga até o qual a carga pode ser aumentada sem causar na estrutura deformações inadmissíveis [...]

Destaca-se que Bleich adota como hipóteses básicas em sua teoria do equilíbrio plástico que o aço possa sofrer deformações de acordo com o gráfico da Figura 1.9, ou seja, com comportamento elastoplástico perfeito em que a máxima deformação total exceda significativamente a deformação correspondente ao limite elástico, e que não ocorra fadiga do material.

Figura 1.9
Gráfico tensão-deformação original.

Fonte: Bleich, 1936.



Em dezembro de 1936, foi realizada, na então União Soviética, a *Conference on Plastic Deformation*, cujos resultados foram publicados pela Academia de Ciências da União Soviética em 1938, com a editoria geral de B. G. Galerkin. Entre os trabalhos estava o de A. A. Gvozdev, que ficou durante muito tempo desconhecido e que acabou sendo amplamente divulgado pela feliz e generosa ideia do Professor R. M. Haythornthwaite ao apresentar a tradução desse artigo (GVOZDEV, 1960).

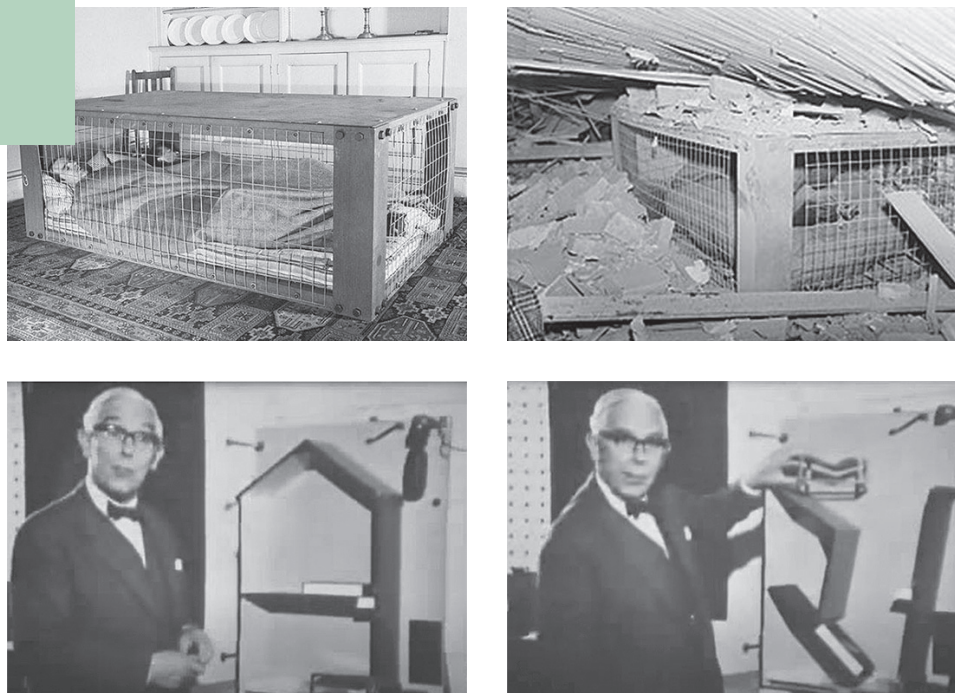
Esse artigo tem papel muito importante na Teoria da Plasticidade pois provavelmente é a primeira prova dos teoremas da análise limite. São apresentados os conceitos de soluções estaticamente e cinematicamente admissíveis e as demonstrações do teorema fundamental da análise limite, do teorema do limite inferior (ou estático) e do teorema do limite superior (ou cinemático).

Adicionalmente, introduz diversos conceitos da teoria de fluxo da plasticidade: deformações e deslocamentos generalizados, princípio da máxima dissipação plástica, condição de normalidade e lei de fluxo.

A eclosão da Segunda Guerra Mundial em 1939, que se estendeu até 1945, reduziu em muito o desenvolvimento de trabalhos que não estivessem diretamente relacionados aos esforços de guerra, os quais, de forma enviesada, foram

responsáveis por avanços técnicos e científicos. Um exemplo singular, mas importante na proteção dos ingleses, foi o desenvolvimento do abrigo Morrison por John Baker – que foi instalado em mais de 1 milhão de pequenas casas na Inglaterra. A Figura 1.10 mostra fotos do abrigo Morrison e dois fotogramas de filme sobre a demonstração em modelo reduzido, por John Baker, da eficácia do abrigo quando uma casa é submetida a uma carga dinâmica que simula o efeito de uma bomba.

Figura 1.10
O abrigo Morrison e
demonstração em modelo
reduzido de sua eficiência.



Após a Segunda Guerra Mundial publicou-se uma série de artigos e livros sobre Teoria da Plasticidade, muitos deles sobre métodos plásticos e outros tantos sobre a teorização da plasticidade. Uma extensa bibliografia desse período e anterior a ele pode ser encontrada em Baker, Heyman e Horne (1956), Neal (1977) e Jirásek e Bazant (2002).

Como menciona Heyman (1998), a aplicação da Teoria da Plasticidade na Inglaterra, com repercussão global, está associada ao nome de John Baker, que desenvolveu extenso trabalho em parceria com acadêmicos e com a indústria de aço britânica, atuando em posição de destaque no *Steel Structures Research Committee*. O livro *The Steel Skeleton*, publicado em 1956 em coautoria com M. R. Horne e J. Heyman, reúne ensaios experimentais para diversos tipos de estruturas de aço, reinterpreta os teoremas de análise limite em que utiliza o conceito de deslocamentos virtuais, faz uma resenha dos diversos métodos plásticos, sempre ilustrada com exemplos significativos. Trata-se de um clássico da Teoria da

Plasticidade, que foi e continua sendo importante referência nos livros e nos cursos que tratam de estruturas em regime elastoplástico perfeito em engenharia de estruturas.

Ainda em 1956, é publicada a primeira edição de *The Plastic Methods of Structural Analysis* de Bernard G. Neal. Esse livro é dedicado especialmente aos procedimentos analíticos e numéricos dos métodos plásticos em vigas e pórticos planos e trata de alguns tópicos especiais do tema. Foi reeditado uma terceira vez em 1977 e é igualmente texto de grande utilização nos cursos de engenharia de estruturas.

Milan Jirásek e Zdenek P. Bazant apresentam, em 2002, o livro *Inelastic Analysis of Structures*, que trata, nas duas primeiras partes, da análise plástica de estruturas em solitação uniaxial; da análise de estruturas em solitação multiaxial (terceira parte); e, nas duas últimas partes, apresenta tópicos avançados de Teoria da Plasticidade e comportamento inelástico dependente do tempo em metais e concreto.

A história contada é sempre uma coleção menor ou maior de fragmentos mais ou menos detalhados. A história apresentada aqui é de poucos e sucintamente detalhados fragmentos, mas que, junto com o aprendizado adquirido com nossos professores e nossa longa experiência didática na Escola Politécnica, constituem as bases deste livro. Uma coleção maior e mais detalhada desses fragmentos pode ser encontrada em Timoshenko (1983) e em Heyman (1998).

2.1 Comportamentos constitutivos básicos dos materiais estruturais

Estas são as propriedades básicas da deformação de um sólido sob a ação de uma dada sollicitação, como apresentadas pela Associação Brasileira de Cimento Portland (ABCP, 1967), documento preparado pelo Professor Telemaco van Langendonck com vocabulário preciso de teoria das estruturas:

Elasticidade é a propriedade de um corpo recuperar sua forma primitiva quando deixa de atuar a sollicitação que provocou a deformação. As deformações são imediatas e reversíveis, independentes do tempo.

Plasticidade é a propriedade de um corpo não recuperar a sua forma primitiva, embora conservando o seu volume, quando deixa de atuar a sollicitação que provocou a deformação. As deformações são imediatas e não reversíveis, independentes do tempo.

Viscosidade é a propriedade de um corpo apresentar deformações variáveis no tempo sob a ação de uma sollicitação.

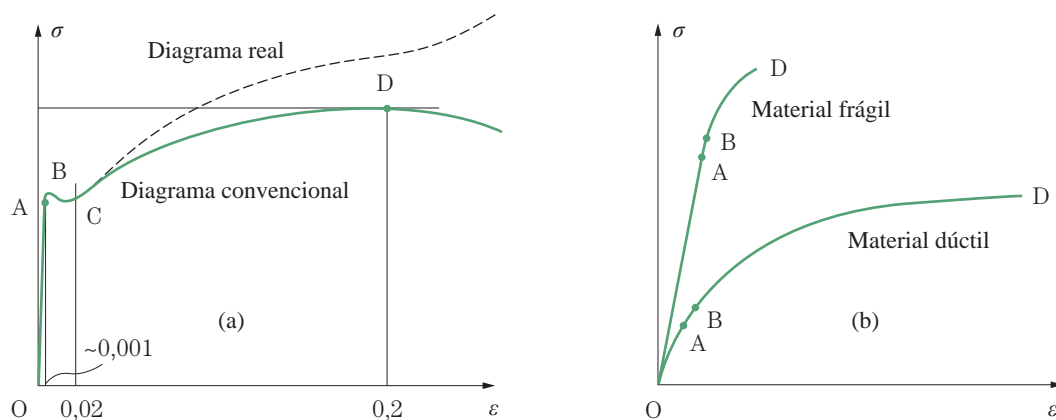
O comportamento constitutivo real do sólido pode envolver complexas combinações dessas propriedades básicas e pode ser interpretado e caracterizado por ensaios físicos. Em geral, ensaios uniaxiais de tração e de compressão fornecem as informações básicas para estabelecer esse comportamento, e permitem formular leis empíricas referidas como equações constitutivas, que relacionam tensões e deformações. No que se segue, são considerados apenas os materiais elastoplásticos.

Ensaio uniaxiais de tração e compressão

Os ensaios uniaxiais em barras são convenientemente representados por diagramas ($\sigma \times \varepsilon$), onde, para pequenas deformações, σ é a tensão normal definida pela relação entre a força aplicada e a área da seção transversal, $\sigma = \frac{F}{A}$, e ε é a deformação linear definida por $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\ell_f - \ell}{\ell}$, onde ℓ_f e ℓ são os comprimentos final e inicial da barra. No que se segue, admite-se a condição de pequena deformação quando as deformações são inferiores a 0,002.

Figura 2.1

Diagramas tensão-deformação
Popov (1968).



A Figura 2.1 apresenta dois diagramas típicos de ensaios de tração e compressão que são encontrados na maioria dos materiais elastoplásticos. O da esquerda, Figura 2.1(a), é típico de aço laminado a quente e outros poucos materiais, e apresenta as seguintes características principais:

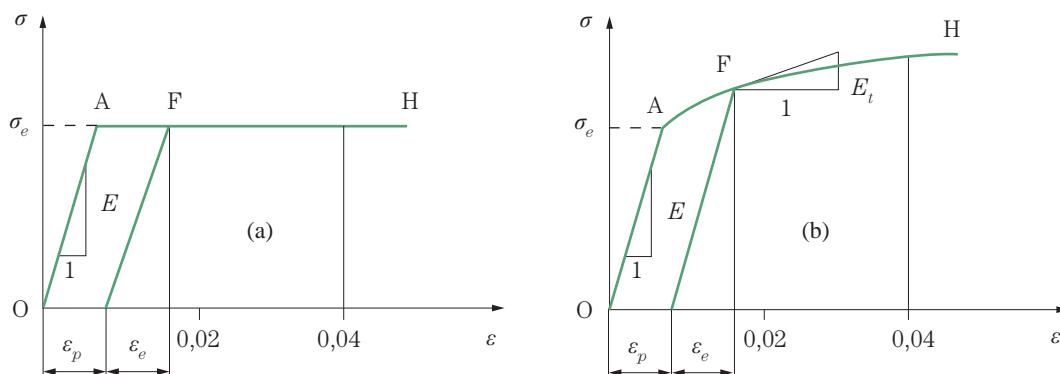
- o ponto A é o limite de elasticidade linear, e a tensão nesse ponto é referida como tensão de proporcionalidade, σ_p ;
- o ponto B é o limite de elasticidade, e a tensão nesse ponto é referida como tensão de escoamento σ_e ;
- no trecho BC, referido como patamar de escoamento, ocorre acréscimo de deformação praticamente sem acréscimo de tensão;
- a partir de C, ocorre pequena variação das dimensões da seção transversal, sendo importante destacar que em D ocorre diminuição mais brusca da seção transversal, fenômeno referido como estricção, e é considerado como ponto limite de resistência;
- o trecho OAB define o domínio elástico, e o trecho BCD, o domínio plástico.

Os diagramas da Figura 2.1(b) são típicos de aço laminado a frio, do concreto e de outros materiais, que são classificados como frágeis quando apresentam deformações pequenas na ruptura ou, em caso contrário, como dúcteis. Nesse diagrama não ocorre o patamar de escoamento, o trecho OAB define o domínio elástico, e o trecho BD, o regime plástico. Diz-se que esses materiais apresentam endurecimento (o termo encruamento também é utilizado), caracterizado pela inexistência de patamar de escoamento. Além do limite elástico, o aumento das deformações requer o contínuo aumento das tensões.

Como os pontos A e B são próximos, é usual admitir que as tensões de proporcionalidade e de escoamento sejam iguais, $\sigma_p = \sigma_e$. Assim, para pequenas deformações, os diagramas tensão-deformação podem ser representados como mostram a Figura 2.2(a), característica da elastoplasticidade perfeita, e a Figura 2.2(b), característica da elastoplasticidade com endurecimento. A inclinação da linha AO define o módulo de elasticidade do material, que relaciona tensão e deformação de acordo com a lei de Hooke, $\sigma = E\varepsilon$, no domínio elástico. A curva $\phi(\sigma, k) = 0$ no trecho AH representa a condição de plastificação; e a tangente a essa curva, o módulo de elasticidade tangente E_t . Note-se que $k = \sigma_e$ para o material elastoplástico perfeito e que k é uma função da deformação permanente do material elastoplástico com endurecimento. A deformação ε_p é a deformação permanente ou plástica quando se efetua o descarregamento total no ensaio uniaxial a partir de um ponto qualquer F da curva AH. Os ensaios experimentais mostram que o descarregamento ocorre segundo uma linha paralela a AO, com comportamento essencialmente elástico linear com módulo de elasticidade E .

Figura 2.2

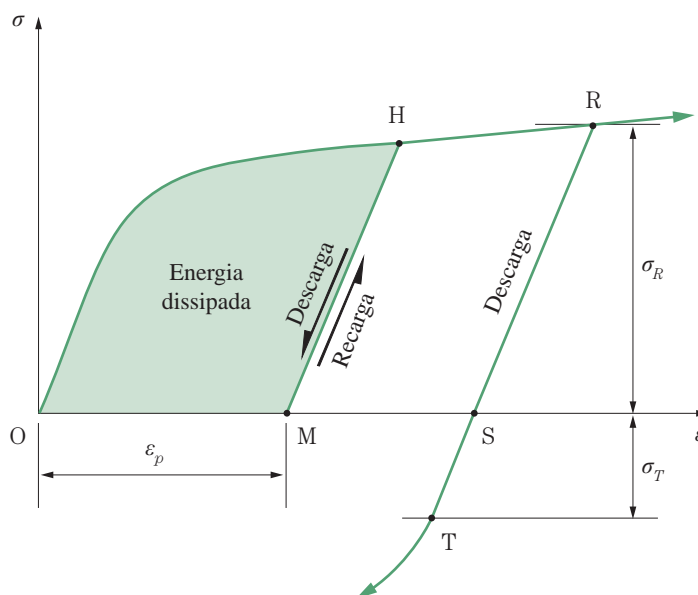
Diagramas tensão-deformação com pequenas deformações.



Ensaio experimentais uniaxiais com ciclos de carga e descarga apresentam informações importantes para análises com cargas cíclicas. Em um ensaio de tração, a carga até o ponto H adentra o regime plástico, e a descarga a partir desse

ponto ocorre com comportamento elástico linear e dissipação de energia indicada pela área OHMO da Figura 2.3, que ilustra o caso de material elastoplástico com endurecimento e comportamento não simétrico a tração e compressão. A recarga a partir de M ocorre com o mesmo comportamento elástico linear até o ponto H e segue com comportamento plástico até o ponto R. Uma nova descarga ocorre com comportamento elástico linear em tração até S e em compressão de S a T; quando atinge o limite elástico de compressão e segue com plastificação por compressão com $|\sigma_T| < \sigma_R$ tem-se o endurecimento cinemático. Esse fenômeno é conhecido como efeito Bauschinger e é igualmente verificado no caso de ensaio uniaxial de compressão. Quando se admite $|\sigma_T| = |\sigma_R|$ tem-se o endurecimento isotrópico.

Figura 2.3
Ensaio tensão-deformação
cíclico Popov (1968).

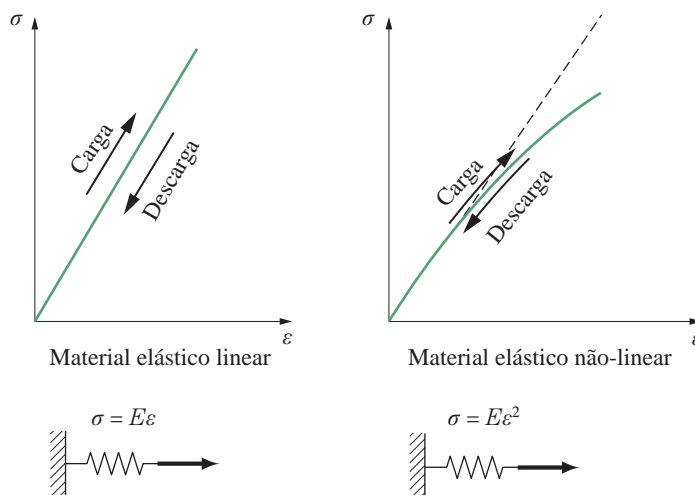


Modelos idealizados de ensaios uniaxiais de tração e compressão

A análise de ensaios uniaxiais de tração permite estabelecer relações constitutivas analíticas $\sigma = \sigma(\epsilon)$ que bem representem o comportamento do material ensaiado dentro de limites observados nesses ensaios e convenientes para análises matemáticas. Apresentam-se alguns modelos idealizados para materiais não viscosos, representados por diagramas $(\sigma \times \epsilon)$ e identificados por símbolos analógicos.

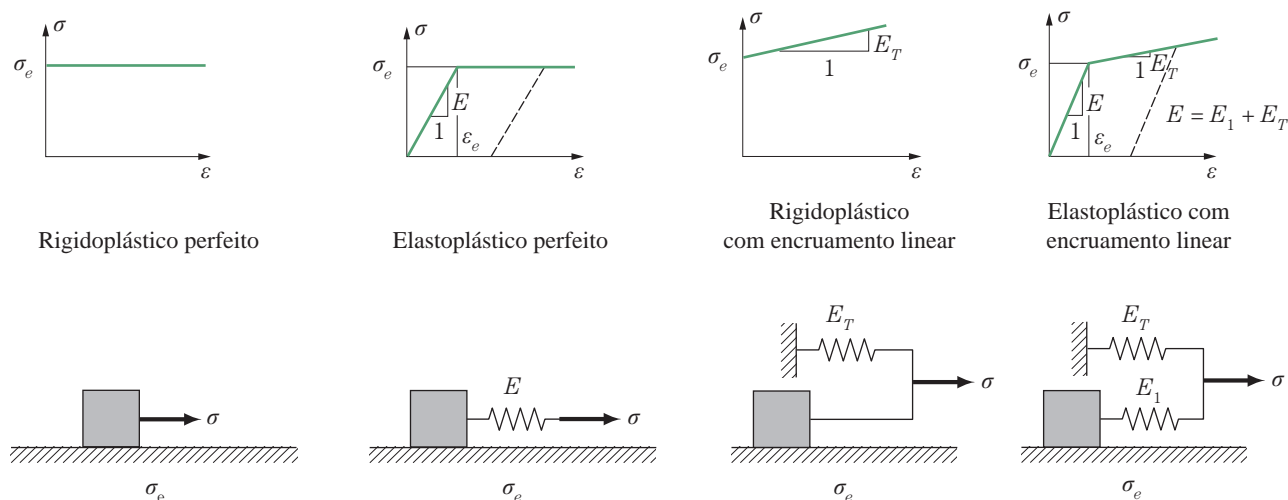
Para pequenas deformações e tensões abaixo do escoamento, o material tem um comportamento elástico que pode ser bem representado pelas expressões analíticas: $\sigma = E\epsilon$ ou, por exemplo, $\sigma = E\epsilon^2$, para os casos linear e não linear, como mostra a Figura 2.4.

Figura 2.4
Modelos elásticos.



Para pequenas deformações, mas fora do regime elástico, apresentam-se, na Figura 2.5, os modelos plásticos junto com suas representações analógicas: o rigidoplástico perfeito em que somente ocorre deformação ilimitada quando a tensão atinge o valor de escoamento; o elastoplástico perfeito, caracterizado pela equação $\sigma = E\epsilon$ para $\epsilon \leq \epsilon_e$ e pela função de plastificação $\phi(\sigma, \sigma_e) = \sigma - \sigma_e = 0$ para $\epsilon \geq \epsilon_e$; o rigidoplástico com endurecimento linear, caracterizado pela equação $\epsilon = 0$ para $\sigma \leq \sigma_e$ e pela função de plastificação $\phi(\sigma, k) = (\sigma - \sigma_e) - E_T\epsilon = 0$, e o elastoplástico com endurecimento linear, caracterizado pela equação $\sigma = E\epsilon$ para $\epsilon \leq \epsilon_e$ e pela função de plastificação $\phi(\sigma, k) = \sigma - [\sigma_e + E_T(\epsilon - \epsilon_e)] = 0$.

Figura 2.5
Modelos plásticos com suas representações analógicas.

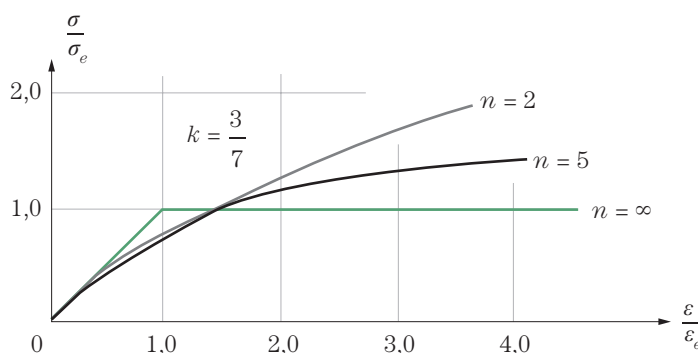


Diversos outros modelos podem ser estabelecidos, por exemplo os derivados da equação de Ramberg-Osgood (*apud* POPOV, 1968), que estabelecem os diagramas ($\sigma \times \varepsilon$) da Figura 2.6 pela expressão

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_e} = \frac{\sigma}{\sigma_e} + k \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} \right)^n,$$

com a identificação de quatro parâmetros (ε_e , σ_e , κ , n), a partir dos diagramas obtidos com o ensaio experimental.

Figura 2.6
Diagramas de Ramberg-Osgood.



2.2 Formulação do problema de estruturas planas de barras em regime elastoplástico perfeito

Hipóteses da teoria elementar de barra em regime elastoplástico perfeito.

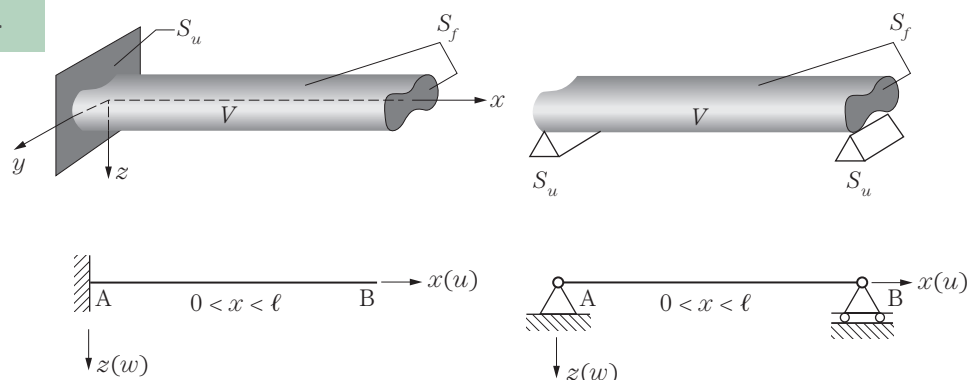
A Primeira e a Segunda Parte deste livro tratam da análise de vigas, treliças e pórticos planos pela teoria elementar de barras em que a equação constitutiva da lei de Hooke é substituída pela equação de material elastoplástico perfeito, observando as seguintes hipóteses:

- H1 as seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo da barra após a deformação;
- H2 não ocorre deformação no plano da seção transversal;
- H3 consideram-se pequenas deformações e pequenos deslocamentos;
- H4 a seção transversal tem um plano de simetria;
- H5 o carregamento externo atua no plano de simetria;
- H6 o material é elastoplástico perfeito.

Essas hipóteses fundamentam a formulação de uma teoria unidimensional para a análise de estruturas planas formadas por barras retas ou de pequena curvatura, o que permite a inclusão de arcos abatidos, solicitadas por ações coplanares que provoquem deformações exclusivas no seu plano. O domínio V se reduz ao intervalo $0 < x < \ell$, sendo ℓ o comprimento da barra, e o contorno às suas extremidades A e B, conforme ilustra, entre outras possibilidades, a Figura 2.7. Apresentam-se, a seguir, as relações cinemáticas, as equações de equilíbrio e as equações constitutivas que regem a teoria unidimensional de barra em regime elastoplástico perfeito e permitem formular o problema estrutural correspondente.

Figura 2.7

Representação de domínios tri e unidimensionais em barras.



Relações cinemáticas

A linha deformada do eixo da barra é definida pelas funções diferenciáveis $u(x)$, $w(x)$ e $w'(x)$ que satisfazem as condições de contorno em deslocamentos. Considerando as hipóteses H1 a H4, pode-se estabelecer o campo de deslocamentos pelas expressões:

$$u^p(x, z) \cong u(x) - z w'(x) \quad w^p(x, z) \cong w(x) \quad (2.1)$$

e, assim, derivar o campo de deformações pelas seguintes relações deformações-deslocamentos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u'(x) - z w''(x) \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

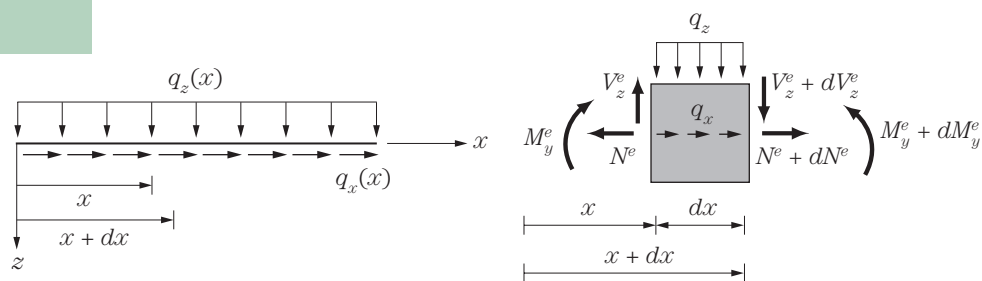
Equações de equilíbrio

A estrutura está em equilíbrio quando os esforços externos ativos e reativos satisfazem as equações de equilíbrio da estática e quando os esforços solicitantes satisfazem as seguintes equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{dN^e}{dx} + q_x(x) = 0 \quad \frac{dV_z^e}{dx} + q_z(x) = 0 \quad \frac{dM_y^e}{dx} = V_z^e \quad (2.3)$$

que têm seus parâmetros definidos na Figura 2.8.

Figura 2.8
Esforços solicitantes e externos em elemento de barra.



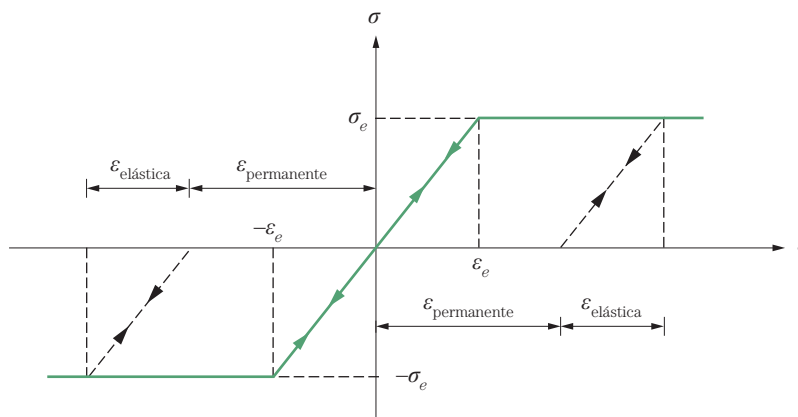
Equações constitutivas

Admite-se que o material elastoplástico perfeito tenha mesmas tensões de escoamento na tração e na compressão e que ele seja isotrópico de modo que em processo de carga e descarga esses limites não se alterem. Nas Equações (2.4) se apresentam a relação tensão-deformação no domínio elástico e a função de plastificação, coerentes com a representação gráfica da Figura 2.9. Note-se que σ e ϵ representam, respectivamente, no mesmo ponto, a tensão normal na seção transversal e a deformação linear na direção do eixo da barra. Para outras classes de problemas, torna-se necessário estabelecer critérios de plastificação que se apliquem a modelos bi e tridimensionais, o que se fará na Terceira Parte do livro.

$$|\sigma| = E |\epsilon| \text{ para } |\epsilon| \leq |\epsilon_e| \quad \phi(\sigma, \sigma_e) = \sigma - \sigma_e = 0 \quad (2.4)$$

Figura 2.9

Diagrama tensão-deformação de material elastoplástico perfeito.



Com as relações cinemáticas, as equações de equilíbrio e as equações constitutivas, é possível agora apresentar a formulação do problema de estruturas planas de barras em regime elastoplástico perfeito:

Para certo histórico de carregamento aplicado estaticamente trata-se de obter uma resposta específica ou respostas diversas em esforços solicitantes, deslocamentos e modificações do comportamento estrutural, que satisfaçam as relações cinemáticas (2.1) e (2.2), as equações de equilíbrio entre os esforços externos ativos e reativos e entre os esforços externos e internos, (2.3), e as equações constitutivas (2.4).

2.3 Medidas de segurança das estruturas na elastoplasticidade perfeita

Segurança de uma estrutura é a capacidade que ela apresenta de suportar, durante toda a sua vida útil, as diversas ações para as quais foi projetada, mantendo as condições funcionais a que se destina.

Esse conceito qualitativo necessita de ser consolidado por métodos quantitativos que, utilizando as extensas possibilidades de ensaios matemáticos e físicos desenvolvidos ou em desenvolvimento, ofereçam uma medida da segurança de uma estrutura, como é o caso do método dos estados limites.

Os estados limites podem ser classificados em:

- estados limites últimos, relacionados ao esgotamento da capacidade portante da estrutura, como: colapso plástico, perda da estabilidade do equilíbrio, ruptura de seções críticas, deterioração por fadiga etc.;

- estados limites de utilização, relacionados às exigências funcionais e de durabilidade das estruturas, como: fissuração excessiva, deslocamentos excessivos, vibrações excessivas etc.

Assim, com a conceituação de estados limites, pode-se estabelecer que:

Segurança de uma estrutura é a capacidade que ela apresenta de suportar, durante toda a sua vida útil, as diversas ações para as quais foi projetada, sem atingir nenhum estado limite.

É com esse conjunto de ideias, discutidas em Zagottis (1978), que se apresentam fatores de segurança na análise determinística de estruturas reticuladas planas em regime elastoplástico perfeito.

Quando se consideram carregamentos proporcionais monotonicamente crescentes, é de interesse para a análise da segurança de uma estrutura introduzir os conceitos de primeiro e segundo limites de plastificação. O primeiro limite de plastificação é caracterizado pelo multiplicador do carregamento, γ_I , que leva à ocorrência do primeiro ponto plastificado na estrutura. O segundo limite de plastificação é caracterizado pelo multiplicador do carregamento, γ_{II} , que leva ao colapso plástico da estrutura, quando ela perde sua capacidade portante, pela formação de um mecanismo decorrente da plastificação ocorrida em diversos pontos da estrutura.

Um primeiro indicador de segurança é o fornecido pelo **método das tensões admissíveis** – a máxima tensão na estrutura deve ser menor ou igual a uma tensão efetiva, caracterizada por um critério de plastificação, dividida por γ_i , denominado coeficiente de segurança interno. No caso de análises unidimensionais, é expresso por:

$$\sigma_{max} \leq \frac{\sigma_e}{\gamma_i} .$$

Como em regime elástico linear há proporcionalidade entre esforços internos, esforços externos, deslocamentos e deformações, pode-se estabelecer uma expressão equivalente em termos do carregamento externo:

$$P_{max} \leq \frac{P_I}{\gamma_i} ,$$

onde P_I é o carregamento correspondente ao primeiro limite de plastificação.

A maioria das estruturas tem capacidade portante que vai além do regime elástico linear, o que aponta para o estabelecimento de outros indicadores de segurança.

O segundo limite de plastificação propicia um indicador de segurança quando se estabelece que o máximo carregamento externo deve ser menor ou igual ao carregamento correspondente ao colapso plástico da estrutura dividido por γ_e , denominado coeficiente de segurança externo, o que pode ser representado por:

$$P_{max} \leq \frac{P_{II}}{\gamma_e},$$

onde P_{II} é o carregamento correspondente ao segundo limite de plastificação. Identifica-se esse procedimento como **método do fator de carga**.

Em análise incremental de estruturas hiperestáticas, valores intermediários γ_ℓ , tais que $\gamma_I < \gamma_\ell < \gamma_{II}$, que definem mudanças do comportamento estrutural, pela plastificação de barras ou formação de rótulas plásticas, ainda podem ser propostos. São esses coeficientes que permitem estabelecer outros fatores de segurança definidos por:

$$P_{max} \leq \frac{P_\ell}{\gamma_\ell},$$

onde P_ℓ é o carregamento correspondente à mudança de comportamento associado ao coeficiente γ_ℓ . Note-se que γ_ℓ é um coeficiente de segurança externo.

A crítica comum a todos esses indicadores é que não levam em conta a variabilidade das ações e a variabilidade das resistências. O coeficiente de segurança externo leva em conta o comportamento da estrutura até um estado limite último, o de colapso ou de ruptura, o que representa a vantagem de considerar toda a capacidade resistente da estrutura. Uma análise bem completa desses aspectos pode ser encontrada em Zagottis (1978).

A forma contemporânea mais usual de estabelecer uma medida de segurança é a proposta pelo **método semiprobabilístico**, em que se admitem as ações, os esforços solicitantes, as resistências e os esforços resistentes como variáveis aleatórias. Os valores característicos das ações e dos esforços solicitantes são definidos a partir de seus valores médios e coeficientes de variação que tenham probabilidade baixa, por exemplo 5%, de serem ultrapassados. Por outro lado, os valores característicos das resistências e dos esforços resistentes são definidos a partir de seus valores médios e coeficientes de variação que tenham probabilidade baixa, por exemplo 5%, de não serem alcançados.

Os valores de cálculo são obtidos por vários coeficientes de majoração nas ações e esforços solicitantes e por vários coeficientes de redução nas resistências e esforços resistentes, que levam em conta diversos fatores, definidos em normas e códigos estruturais. A condição de segurança é dada então pela relação

$$\text{Esforço solicitante de cálculo} \leq \text{Esforço resistente de cálculo.}$$

e a condição econômica corresponde à igualdade nessa inequação.

Essas medidas de segurança serão ilustradas para estado limite último devido ao colapso plástico nos exemplos do Capítulo 4, quando se considera carregamento proporcional em duas situações:

- cálculo de coeficientes de segurança em relação às cargas de serviço;
- determinação de cargas máximas de serviço para dados coeficientes de segurança ou de ponderação.

O método semiprobabilístico será aplicado de forma simplificada, considerando o valor da ação de cálculo, P_d , calculado pelo produto do valor da ação característica, $P_k = P$, por coeficiente de majoração γ_f , ou seja:

$$P_d = \gamma_f P_k = \gamma_f P.$$

Por outro lado, considera-se o valor da resistência de cálculo, P_{IId} , calculado pela relação entre o valor característico da resistência, $P_{Ik} = P_{II}$, e o coeficiente de redução, γ_a , ou seja:

$$P_{IId} = \frac{P_{Ik}}{\gamma_a} = \frac{P_{II}}{\gamma_a}.$$

Assim, a condição de segurança será definida por:

$$\gamma_f P \leq \frac{P_{II}}{\gamma_a},$$

onde P e P_{II} representam, respectivamente, o carregamento característico e o segundo limite de plastificação característico.

O aprofundamento do método semiprobabilístico e até mesmo a apresentação de elementos básicos de métodos probabilísticos fogem aos objetivos deste livro e podem ser encontrados em Fusco (1976), Zagottis (1978), Melchers e Beck (2018) e Nowak e Collins (2013).

As Lições em Mecânica das Estruturas são o resultado de décadas de atuação dos autores nas disciplinas de Mecânica das Estruturas no curso de Engenharia Civil da Escola Politécnica da USP, e poderão ser igualmente úteis aos alunos nos cursos de Engenharia Mecânica, Mecatrônica, Naval, Química, Minas, Aeronáutica e Aeroespacial, e tantos outros em que a análise de sistemas estruturais seja requerida.

Este terceiro volume – Lições em Mecânica das Estruturas: Análise Elastoplástica – dedica-se ao estudo de sistemas estruturais em regime elastoplástico perfeito e introduz o leitor ao campo da não linearidade física.

Na parte A, estabelecem-se os fundamentos da análise elastoplástica de estruturas reticuladas planas com carregamento coplanar acompanhados de uma coleção de exemplos solucionados por análise incremental e por análise limite, como problemas de mínimo e de máximo resolvidos por métodos clássicos e por programação linear, que se constituem introdutórios ao campo da otimização.

Na parte B, apresentam-se alguns tópicos especiais de análise elastoplástica. À luz dos conceitos do teorema estático, apresentam-se o dimensionamento de vigas de concreto armado e o estudo de caso de reforço de galeria.

Na parte C, apresenta-se uma introdução à análise elastoplástica de sólidos deformáveis. Especial atenção é dada à teoria de fluxo da plasticidade e à formulação incremental do método dos elementos finitos para a solução de modelos elastoplásticos. Dois estudos de casos, a saber, barras em estado plano de tensão e fundação direta em sapata rasa, em estado plano de deformação, completam este livro.





Clique aqui e:

VEJA NA LOJA

Lições em Mecânica das Estruturas: Análise Elastoplástica

**Carlos Eduardo Nigro Mazzilli, João Cyro André,
Miguel Luiz Bucalem, Sérgio Cifú**

ISBN: 9786555064896

Páginas: 636

Formato: 27.5 x 20.5 cm

Ano de Publicação: 2022