TUANNY MACIEL

VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

Do seu jeito

Blucher

Tuanny Maciel

VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

Do seu jeito

Vetores e geometria analítica: do seu jeito

Editora Edgard Blucher Ltda.

Publisher Edgard Blücher

Editor Eduardo Blücher

Coordenação editorial Jonatas Eliakim

Produção editorial Ariana Corrêa

Revisão de texto Maurício Katayama

Capa Leandro Cunha

Imagem da capa iStockphoto

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4ºandar
04531-934 São Paulo SP Brasil
Tel 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, 21 de julho de 2021.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Maciel, Tuanny
Vetores e geometria analítica : do seu jeito / Tuanny Maciel. – São Paulo: Blucher, 2022.
128 p.: il.

Bibliografia
ISBN 978-65-5506-400-1 (impresso)

1. Geometria analítica 2. Cálculo vetorial I. Título.

22-5490 CDD 516

Índice para catálogo sistemático:
1. Geometria analítica

Conteúdo

Capítulo 1

Vetores

Neste capítulo apresentaremos um elemento de fundamental importância para o nosso estudo: *o vetor*. Estaremos interessados em definir o que entenderemos por um vetor, bem como apresentar propriedades e operações entre vetores, seja de forma geométrica ou algébrica.

1.1 Vetores

1.1.1 Definição

Vale a pena iniciar nossa discussão a partir do conceito de grandeza física, que pode ser entendida como alguma propriedade que se pode medir em um fenômeno físico. Por exemplo, se estamos estudando o movimento em determinado sistema, podemos medir propriedades como o tempo, comprimento ou a massa. Estas últimas propriedades podem ser medidas quantitativamente e cada uma dessas propriedades mensuráveis é chamada de grandeza física.

Por sua vez, algumas dessas propriedades podem ser definidas completamente a partir de um número e de uma unidade de medida: a essas tais chamamos *grandezas* *escalares*. A definição completa de outras grandezas depende da apresentação do número, da unidade de medida e de uma orientação para a grandeza; a essas tais nós chamamos *grandezas vetoriais*.

O tempo, a área, o volume e a temperatura são alguns exemplos de grandezas escalares. Por outro lado, velocidade, aceleração e força são exemplos de grandezas vetoriais. Estaremos interessados no estudo de vetores, que são grandezas vetoriais. Antes de definir o que entenderemos por um vetor, apresentaremos algumas definições.

Definição 1. Sejam dois pontos A e B arbitrários, que determinam uma reta r. Chamamos de segmento, e denotamos por $\overline{AB}$, ao conjunto de pontos da reta r compreendidos entre os pontos A e B.

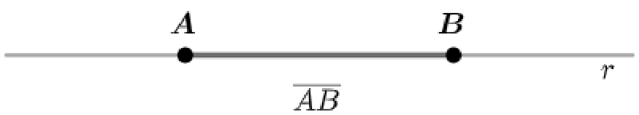

Figura 1.1: Segmento de reta

Observação: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ são iguais; já que, por definição, representam o mesmo conjunto de pontos.

Estabeleceremos aqui a definição de um *segmento orientado*.

Definição 2. Sejam dois pontos A e B arbitrários, que determinam uma reta r. Definimos um segmento de reta orientado, ou apenas segmento orientado, $\overrightarrow{AB}$, como sendo o segmento que tem como ponto inicial o ponto A e como ponto final o ponto B. Note que estamos estabelecendo os pontos onde começa e termina o segmento. Com isto, estamos dando uma orientação ao segmento.

Observação: Note que os segmentos orientados $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.

Agora já conseguimos identificar segmentos que têm mesma direção e também comparar a orientação de segmentos orientados, isto é, comparar o sentido dos segmentos.

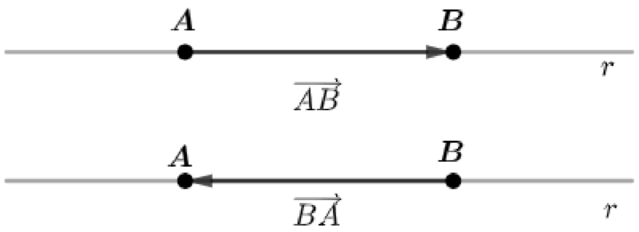

Figura 1.2: Segmento de reta orientado

Vale salientar que a comparação só será possível se tais segmentos tiverem a mesma direção; caso contrário, não seria cabível a comparação entre o sentido dos segmentos orientados.

Observe os segmentos orientados abaixo:

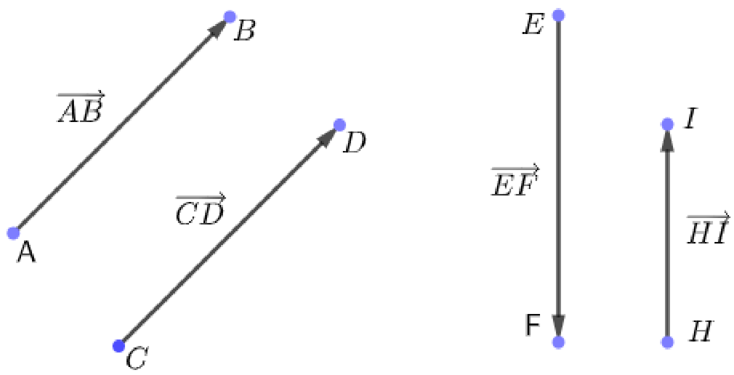

Figura 1.3: Segmento orientados

Percebemos que:

- $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido;
- $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{HI}$ têm a mesma direção, porém sentidos contrários;
- $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{EF}$ não têm a mesma direção, e assim não podemos comparar os sentidos.

Além da direção e do sentido, também é possível analisar o comprimento (módulo ou norma) de cada segmento. Por exemplo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o mesmo comprimento, e denotaremos $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

Definição 3. Segmentos orientados que têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento são chamados de *segmentos equipolentes*.

Os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são exemplos de segmentos equipolentes. Representamos por: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Observe que, a partir da relação de equipolência, podemos construir infinitos segmentos equipolentes a um dado segmento orientado. Visto que precisamos apenas preservar direção, sentido e comprimento. Na figura a seguir, temos que, dado o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, os segmentos $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{MN}$ são todos equipolentes a $\overrightarrow{AB}$.

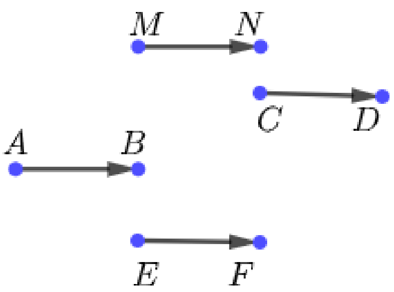

Figura 1.4: Segmento equipolentes

Com esta ideia em mente, podemos escolher uma entidade que representa o conjunto de todos os segmentos equipolentes ao segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Essa entidade é o que chamamos **vetor** e representamos por $\vec{u}$. É importante ressaltar que um vetor não representa um conjunto de pontos específico, mas sim uma classe de segmentos orientados equipolentes a um dado segmento. Conforme o exemplo que acabamos de ver, o vetor $\vec{u}$ representa a classe de vetores equipolentes ao segmento $\overrightarrow{AB}$. E ainda, chamamos atenção para a ideia de que um vetor é o mesmo em qualquer lugar do espaço, desde que preserve direção, sentido e comprimento.[1 2] E, assim, definimos

$$\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A}$$

onde A é o ponto inicial e B é o ponto final do segmento.

Observação: Teremos um **vetor nulo**, $\vec{0}$, no caso de segmentos nulos (isto é, quando o ponto final e inicial coincidem), e um vetor $\vec{u}$ será considerado **vetor unitário** quando a norma (módulo ou comprimento) dele for igual a um, isto é, $|\vec{u}| = 1$.[3]

1.2 Operações com vetores

Será que podemos efetuar operações com vetores? A resposta é sim. Tais operações com vetores podem ser representadas na forma geométrica ou na forma algébrica.

Os vetores são elementos pertencentes a espaços vetoriais[4], que, por sua vez, são munidos das operações adição e produto (multiplicação) por um escalar, satisfazendo oito propriedades. Sendo assim, é possível realizar as operações *adição* e *produto por um escalar*.

E, além disso, poderemos definir relações que permitam estabelecer produto entre vetores, a saber, o produto interno ou produto escalar, o produto vetorial e o produto misto.

1.2.1 Adição entre vetores

Abordaremos aqui, de forma geométrica, a adição entre vetores. Para isto, suponhamos dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

O *vetor soma* $\vec{u} + \vec{v}$ será dado pelo vetor $\overrightarrow{AC}$, que foi obtido ao "ligarmos" o ponto onde começa (origem) do vetor $\overrightarrow{BC}$ ao ponto onde termina (extremidade) do vetor $\overrightarrow{AB}$,

[1]Em geral, denotamos vetores por letras minúsculas.

[2]Daí surge a ideia de vetor livre, pois na verdade o que estamos fazendo é procurar segmentos equipolentes a um dado segmento orientado.

[3]Também é usual encontrar a notação $\|\ \|$.

[4]Será abordado no curso de álgebra linear

e, após isso, traçar-se o vetor a partir da origem de $\overrightarrow{AB}$ até a extremidade de $\overrightarrow{BC}$[5], como mostra a figura a seguir:

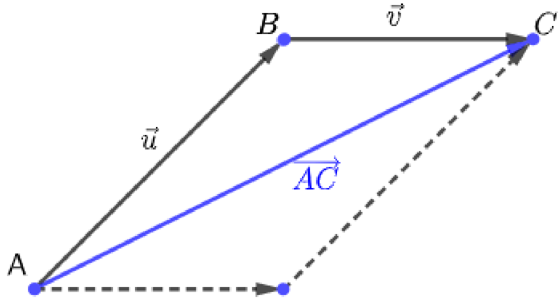

Figura 1.5: Vetor soma

Note que poderíamos representar geometricamente representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e ainda obter que o vetor soma $\vec{v}+\vec{u}$ é igual ao vetor $\vec{u}+\vec{v}$. De forma semelhante ao que conhecemos no estudo das operações com números reais, espera-se encontrar certas "regularidades" (ou seja, propriedades) nas operações com vetores. E é através da validade das propriedades que será possível operar com os vetores. Para isso, considerando vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer, temos:

S.1 $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$; **(Comutatividade)**

S.2 $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\vec{v}+(\vec{u}+\vec{w})$. **(Associatividade)**

S.3 $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$; **(Elemento neutro)**

S.4 $\vec{u}+(\vec{-u})=\vec{-u}+\vec{u}=\vec{0}$; **(Elemento inverso)**

Com a ideia construída no paralelogramo acima conseguiremos, graficamente, demonstrar tais propriedades.

Observação: Na Figura 1.5, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, definimos o vetor soma como $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$. É natural nos perguntarmos se aconteceria $|\vec{w}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$, isto é, se a norma

[5]Esse processo é conhecido como regra do paralelogramo.

(comprimento ou módulo) do vetor soma é dado como a soma dos módulos dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Para responder esse questionamento, observamos a figura:

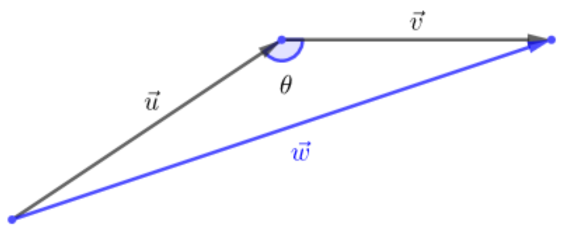

Figura 1.6: Lei dos cossenos

Utilizando a *lei dos cossenos* no triângulo, temos:

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta,$$

onde θ é ângulo[6] entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Assim, o que podemos afirmar é que:

$$|\vec{w}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta}.$$

Ou seja, não podemos afirmar que $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

1.2.2 Produto por um escalar

Discutiremos aqui outra operação que se pode realizar com vetores: produto de um escalar por um vetor – que é o mesmo que falar em multiplicação de um número por um vetor.

Definiremos o *produto por um escalar* como o vetor que é obtido através da multiplicação de um número $\lambda \in \mathbb{R}$ por um dado vetor $\vec{u}$. E denotaremos por $\lambda\vec{u}$.

[6]Entende-se por ângulo a menor região delimitada por duas semi-retas de mesma origem.

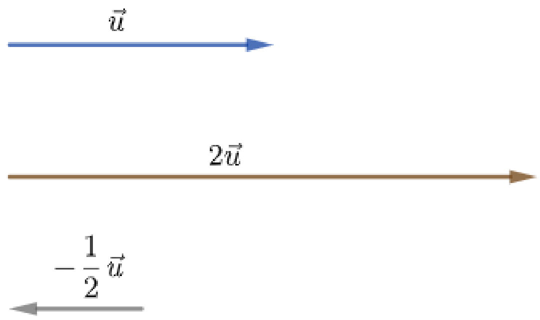

Figura 1.7: Vetor produto por escalar

Com o auxílio da figura acima, observe que a direção do vetor $\lambda\vec{u}$ será a mesma do vetor $\vec{u}$. E o sentido dependerá do valor de λ; se $\lambda > 0$, o sentido permanecerá o mesmo do vetor $\vec{u}$, enquanto que, se $\lambda < 0$, teremos sentido oposto do vetor $\vec{u}$. Além disso, o comprimento (módulo) do vetor $\lambda\vec{u}$ será definido como $|\lambda\vec{u}| = |\lambda||\vec{u}|$.[7] E no caso em que $\lambda = 0$ teremos um vetor nulo.

Dados dois vetores quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{V}$, e três escalares α, β e $\lambda \in \mathbb{R}$[8], são válidas as seguintes propriedades:

P.1 $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$;

P.2 $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;

P.3 $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;

P.4 $1\,\vec{u} = \vec{u}\,1 = \vec{u}$.

No exemplo a seguir, disponível em [1], trabalharemos com as ideias expostas nas seções anteriores.

[7]Note que, apesar de estarmos utilizando a mesma notação para indicar o comprimento de λ e $\vec{v}$, um representa o comprimento de um número e o outro de um vetor, que são conceitos diferentes. É comum encontrar na literatura a representação || || para representar módulo de um vetor.

[8]Aqui, $\mathbb{V}$ é um conjunto de vetores e $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

Exemplo 1. Expresse o segmento $\overrightarrow{CX}$ em função do segmento $\overrightarrow{CB}$, sabendo que, na figura a seguir, a medida de $\overrightarrow{AX}$ é a metade da medida do segmento $\overrightarrow{XB}$.

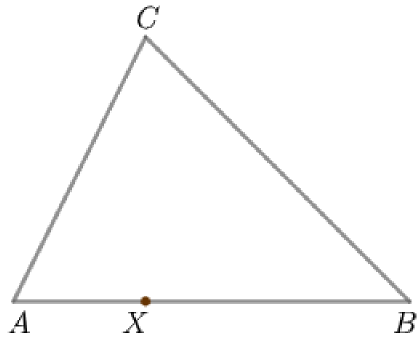

Figura 1.8

Solução: *Do enunciado temos que* $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{XB}$ *. E o que queremos é escrever* $\overrightarrow{CX}$ *utilizando os vetores* $\overrightarrow{CA}$ *e* $\overrightarrow{CB}$*.*

Observando a figura acima, $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX}$*, ou ainda* $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{CX} - \overrightarrow{CA}$*.*

Por outro lado, podemos escrever $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CX}$*.*

Daí,

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{XB}$$

$$\overrightarrow{CX} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CX}$$

$$\overrightarrow{CX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB},$$

e assim:

$$\boxed{\overrightarrow{CX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}.}$$

Exemplo 2. Prove que $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$, chamado de *versor* de $\vec{u}$, é um vetor unitário, com a mesma direção e sentido do vetor $\vec{u}$.

Solução: *Seja* $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$, *é fácil perceber que o vetor* $\vec{v}$ *tem mesma direção e mesmo sentido do vetor* $\vec{u}$. *Agora queremos mostrar que* $\vec{v}$ *é unitário, ou seja, que* $|\vec{v}| = 1$. *Observe que*

$$|\vec{v}| = \left|\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right| = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|} = 1.$$

Portanto, é um vetor unitário.

1.3 Dependência linear

Nesta seção estaremos interessados em estabelecer condições para que possamos trabalhar com vetores de forma algébrica. Para isso é necessário apresentar algumas definições.

Definição 4. Um vetor $\vec{u}$ é dito uma *combinação linear* dos vetores $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ ...,\ \vec{u}_n$, se existirem números reais $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ tais que possibilite escrever o vetor $\vec{u}$ como:

$$\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ ... + a_n\vec{u}_n.$$

No exemplo 1, da seção anterior, dizemos que $\overrightarrow{CX}$ foi escrito como uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$. De outra maneira, poderíamos dizer que existe uma dependência linear entre eles.

Definição 5. Sejam os vetores $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ ...,\ \vec{u}_n$. Diremos que eles são *linearmente dependentes* [L.D], se for possível representar algum deles como a combinação linear dos demais vetores na lista de vetores apresentada. Caso contrário, eles serão ditos *linearmente independentes* [L.I].

Novamente no exemplo citado, os vetores $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ seriam linearmente dependentes, pois foi possível encontrar escalares $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$, tal que

$$\overrightarrow{CX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}.$$

Definição 6. Se os vetores do conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n\}$ forem linearmente independentes, então tais vetores formarão uma *base* para o espaço vetorial formado por esse conjunto de vetores[9]. Podemos ainda caracterizar a base de um espaço vetorial como *ortogonal* ou como *ortonormal*. Quando os vetores da base são, dois a dois, perpendiculares entre si, dizemos que a base é ortogonal. Quando, além de ortogonais, os vetores da base são unitários, dizemos que tal base é ortonormal

Um outro modo de verificarmos que os vetores $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, ..., $\vec{u_n}$ são linearmente independentes (L.I) é verificar se a combinação linear

$$a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} + \ \ldots + a_n\vec{u_n} = 0,$$

terá solução única $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Sendo possível encontrar um escalar diferente de zero, os vetores já serão linearmente dependentes (L. D).

Estabelecidas as definições acima, podemos tratar os vetores em termos de suas coordenadas. Para simplificar, pensaremos nosso espaço como sendo o $\mathbb{R}^3$.

Para o $\mathbb{R}^3$, temos que os vetores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$ formam um base ortogonal, isto é, o ângulo formado entre eles é um ângulo reto. Percebe-se claramente que $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ formam uma base ortonormal, pois, além de formarem, dois a dois, um ângulo reto, os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são unitários.

[9]A definição de espaço vetorial com um maior formalismo será vista na disciplina de Álgebra Linear. Por enquanto, basta entender um espaço vetorial como um conjunto de vetores que pertencem a esse espaço, e uma base para o espaço vetorial como o conjunto de vetores L.I. capazes de gerar, a partir de uma combinação linear dos vetores dessa base, qualquer outro vetor que pertence ao espaço vetorial.

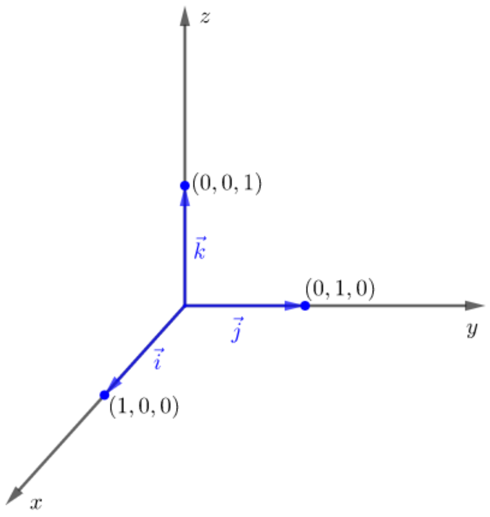

Figura 1.9: Base ortonormal

Além disso, como o conjunto $\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ forma uma base para o $\mathbb{R}^3$, qualquer vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ poderá ser representado a partir dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. E, por isso, denominamos $\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ como a *base canônica* do $\mathbb{R}^3$. Assim podemos escrever qualquer vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, de forma simplificada, como $\vec{v} = (x, y, z)$.

Observação: Processo análogo pode ser construído para o $\mathbb{R}^2$.

Agora iremos trabalhar e operar com vetores em coordenadas.

Para começarmos,

- **Considerando dois pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, como determinar um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$?**

Já sabemos que o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$, onde A é a origem e B é a extremidade do vetor. Assim, a partir das coordenadas dos pontos A e B, temos:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Mostramos como trabalhar com as operações adição e multiplicação por um escalar de forma geométrica em seções anteriores. Veremos como tais operações se comportam com vetores dados em coordenadas.

- **Se tivermos dois vetores $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (d, e, f)$, como definir o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$?**

Se estamos representando vetores em termos de suas coordenadas, temos que seguir as regras de trabalhar com pares ou ternos coordenados, por exemplo. Desse modo, o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ será definido somando coordenada a coordenada. Assim:

$$\vec{u} + \vec{v} = (a + d, b + e, c + f).$$

- **E como definir o vetor $\lambda\vec{u}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$?**

Como $\lambda \in \mathbb{R}$, e supondo que $\vec{u} = (a, b, c)$, define-se:

$$\lambda\vec{u} = \lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c).$$

Apresentaremos algebricamente outros conceitos, como distância entre pontos, módulo de um vetor e ponto médio entre vetores. Consideremos dois pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Observe a Figura 1.10:

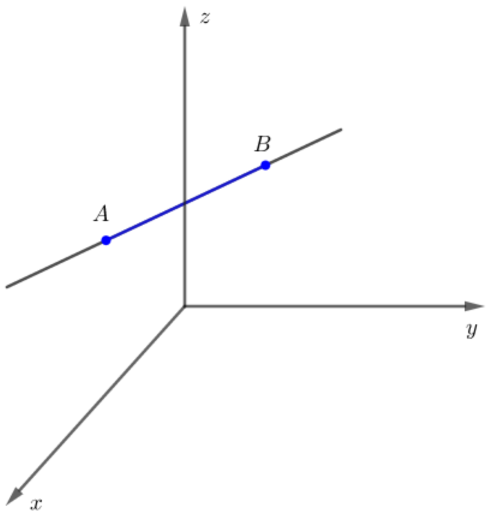

Figura 1.10: Distância entre dois pontos

- **Como determinar a distância, d, entre os pontos A e B?**

Estabeleceremos que a distância, $d(A,B)$, entre os pontos será dada por:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Para facilitar, pense como pontos do $\mathbb{R}^2$, e utilize o teorema de Pitágoras.

- **Sendo um vetor $\vec{v} = (a,b,c)$, como calcular o módulo do vetor $|\vec{v}|$?**

Note que a ideia é a mesma que construímos na pergunta anterior, visto que um vetor pode ser definido por dois pontos. Logo,

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

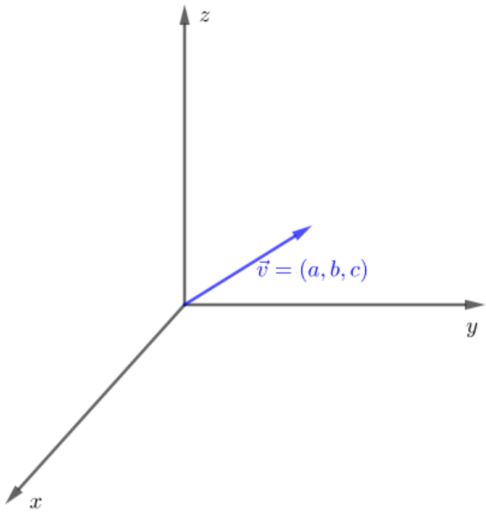

Figura 1.11: Módulo de um vetor

- **Como encontrar as coordenadas de um ponto médio, M, do segmento $\overline{AB}$?**

Observe a figura

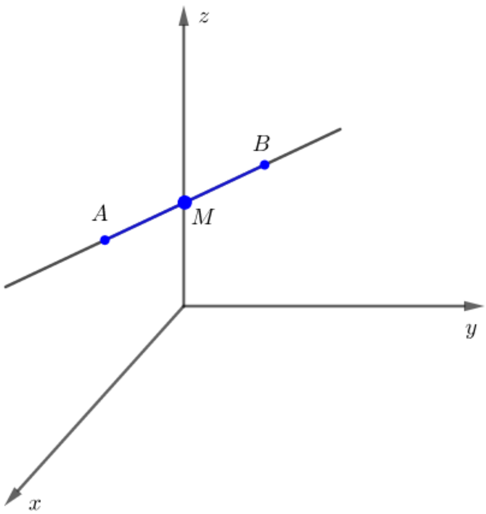

Figura 1.12: Distância entre dois pontos

Suponhamos que o ponto seja $M(x, y, z)$. Sendo assim, definimos:

$$M(x, y, z) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Vejamos agora um exemplo disponível em [5].

Exemplo 3. Considere os pontos $A(4, -1, -2)$, $B(2, 5, -6)$ e $C(1, -1, -2)$ vértices de um triângulo. Qual o comprimento da mediana do triângulo relativa ao lado AB?

Solução: *Queremos determinar o comprimento da mediana, relativa ao lado AB. Lembremos que a mediana é um segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a ele; neste caso, o vértice é o ponto C e o lado oposto é AB, como mostra a figura:*

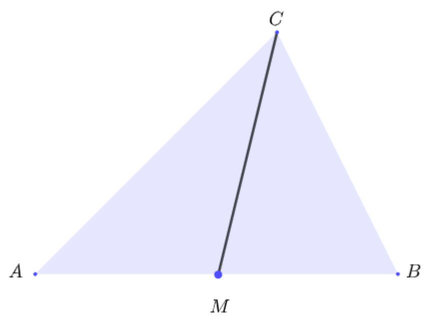

Figura 1.13

Como queremos encontrar o comprimento da mediana, é necessário inicialmente encontrarmos o segmento $\overline{CM}$, para depois determinarmos $|\overline{CM}|$. E, antes disso, ter conhecimento do ponto médio $M(x, y, z)$ do segmento $\overline{AB}$.

Logo, temos:

$$M(x, y, z) = M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{-2+(-6)}{2}\right) = M(3, 2, -4).$$

Além disso, é sabido que $\overline{CM} = M - C = (2, 3, -2)$. *E, assim,*

$$|\overline{CM}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}.$$

Exemplo 4. Encontre os vértices A, B e C de um triângulo sabendo que os pontos $M(5, 0, -2)$, $N(3, 1, -3)$ e $P(4, 2, 1)$ são pontos médios dos segmentos AB, AC e BC, respectivamente.

Solução: *Para iniciarmos, vamos supor que os pontos sejam* $A(a, b, c)$, $B(d, e, f)$ *e* $C(g, h, i)$. *E que* M, N *e* P *sejam os pontos médios dos lados AB, AC e BC, respectivamente.*

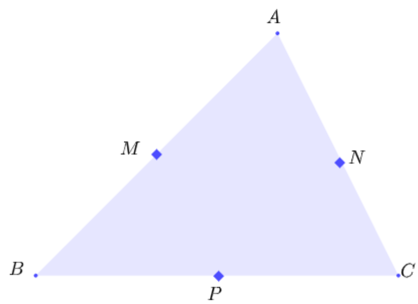

Figura 1.14

Sendo assim, da definição de ponto médio de um segmento, temos:

$$(5, 0, -2) = \left(\frac{a+d}{2}, \frac{b+e}{2}, \frac{c+f}{2}\right) \tag{1.1}$$

$$(3, 1, -3) = \left(\frac{a+g}{2}, \frac{b+h}{2}, \frac{c+i}{2}\right) \tag{1.2}$$

$$(4, 2, 1) = \left(\frac{d+g}{2}, \frac{e+h}{2}, \frac{f+i}{2}\right) \tag{1.3}$$

Note que das equações (1.1), (1.2) *e* (1.3), *utilizando a igualdade entre ternos coordenados, temos:*

$$\begin{cases} a + d = 10 \Rightarrow a = 10 - d \\ b + e = 0 \Rightarrow b = -e \\ c + f = -4 \Rightarrow c = -4 - f \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} a + g = 6 \Rightarrow a = 6 - g \\ b + h = 2 \Rightarrow b = 2 - h \\ c + i = -6 \Rightarrow c = -6 - i \end{cases} \tag{1.5}$$

e

$$\begin{cases} d + g = 8 \Rightarrow g = 8 - d \\ e + h = 4 \Rightarrow h = 4 - e \\ f + i = 2 \Rightarrow i = 2 - f \end{cases} \tag{1.6}$$

Assim, das equações (1.4)*,* (1.5) *e* (1.6) *acima, temos* $10 - d = 6 - g \Rightarrow g = d - 4$*. E, substituindo na primeira equação de* (1.6)*, temos* $d = 6$*. Consequentemente,* $g = 2$ *e* $a = 4$.

Para encontrarmos as demais coordenadas aplicamos o mesmo processo nas equações acima, e teremos os pontos $A(4, -1, -6)$*,* $B(6, 1, 2)$ *e* $C(2, 3, 0)$.

1.4 Exercícios propostos

Exercício 1. Sabendo que um trapézio é um quadrilátero que possui dois dos seus lados paralelos, mostre que o segmento que surge ao unir os pontos médios dos outros dois lados será paralelo às bases.

Exercício 2. Verifique se o conjunto formado pelos vetores $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, -1, -1)$ e $\vec{w} = (-1, 1, -1)$ é L.D ou L.I.

Exercício 3. Determine um vetor $\vec{u}$ que tenha comprimento 7, isto é, $|\vec{u}| = 7$, e esteja na mesma direção do vetor $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Exercício 4. Dados os pontos $A(2,1,2)$, $B(0,-1,3)$ e $C(2,1,2)$, verifique se eles formam um triângulo e, em caso afirmativo, determine as coordenadas dos pontos médios de cada lado do triângulo.

Exercício 5. Com os dados do exercício anterior, determine o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{AC}$.

Esta obra foi pensada, em especial, para os alunos que cursam a disciplina de Geometria Analítica. Aborda os conteúdos de vetores e operações, produtos interno, vetorial e produto misto, retas e planos, além de temas sobre cônicas e algumas quádricas especiais. Em todos os temas, busca-se trazer ao leitor tanto uma interpretação geométrica como uma interpretação algébrica.

Além dos assuntos já conhecidos por tantos livros e materiais de geometria analítica, este livro trata os conteúdos de forma didática. A ideia, aqui, vai além de apresentar os conteúdos de maneira formal e com rigor matemático, em geral, apresentado em outras bibliografias, oferecendo aos leitores uma espécie de manual para consultas rápidas, por meio de perguntas e respostas estabelecidas ao longo do texto, favorecendo o entendimento do leitor e contribuindo para que ele consiga resolver outras questões sobre os conteúdos abordados, sempre utilizando de uma linguagem simples e mais próxima da linguagem do aluno.

ISBN 978-65-5506-400-1

9 786555 064001

www.blucher.com.br

Blucher