

**SBA**   
**PRESS**

BRUNO AUGUSTO ANGÉLICO  
GABRIEL PEREIRA DAS NEVES

# CONTROLE DIGITAL APLICADO

**Blucher**



sociedade brasileira de  
AUTOMÁTICA

Bruno Augusto Angélico  
Gabriel Pereira das Neves

# CONTROLE DIGITAL APLICADO

*Controle digital aplicado*

© 2023 Bruno Augusto Angélico e Gabriel Pereira das Neves

Editora Edgard Blücher Ltda.

*Publisher* Edgard Blücher

*Editor* Eduardo Blücher

*Coordenação editorial* Jonatas Eliakim

*Produção editorial* Luana Negraes

*Diagramação* Autores

*Revisão de texto* Maurício Katayama

*Capa* Leandro Cunha

*Imagem da capa* Bruno A. Angélico

**Editora Blucher**

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4<sup>o</sup> andar

CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

**contato@blucher.com.br**

**www.blucher.com.br**

Este livro possui material extra, que pode ser acessado no site da editora por meio do QR code presente na quarta capa.

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, julho de 2021. É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

---

Angélico, Bruno A.

Controle digital aplicado / Bruno Augusto Angélico, Gabriel Pereira das Neves. — São Paulo : Blucher, 2023.

324 p. : il. (SBA Press)

Bibliografia

ISBN 978-65-5506-363-9

1. Sistemas de controle digital 2. Controle automático 3. Sistemas de tempo discreto 4. Controladores PID I. Título. II. Neves, Gabriel P. das.

22-6280

CDD 629.8

---

Índice para catálogo sistemático: 1. Engenharia de controles automáticos

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
1.1	Classificação de sinais . . . . .	18
1.2	Amostragem periódica . . . . .	20
1.3	Conversores A/D e D/A . . . . .	21
1.4	Introdução ao controle digital . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Amostragem e Reconstrução</b>	<b>31</b>
2.1	Amostrador ideal . . . . .	31
2.2	Teorema da amostragem . . . . .	33
2.3	Reconstrução de sinal em tempo discreto . . . . .	37
2.4	Segurador de ordem zero . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Transformada-<math>z</math></b>	<b>43</b>
3.1	Relação entre as transformadas $z$ e de Laplace . . . . .	48
3.2	Função de transferência . . . . .	50
3.3	Polos e zeros no plano- $z$ . . . . .	51
3.4	Sistema LIT causal e estável . . . . .	52
3.5	Algumas propriedades da transformada- $z$ . . . . .	53
3.6	Método da invariância ao impulso . . . . .	60
3.7	A Transformada- $z$ inversa . . . . .	61
3.7.1	Transformada- $z$ inversa por divisão longa . . . . .	61
3.7.2	Transformada- $z$ inversa por expansão em frações parciais . . . . .	62
3.8	Relação entre o plano- $s$ e o plano- $z$ . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Discretização de Sistemas Contínuos</b>	<b>71</b>
4.1	Mapeamento casado de polos e zeros . . . . .	71
4.2	Equivalente discreto por integração numérica . . . . .	73

4.3	Discretização de controladores PID . . . . .	83
4.4	Aproximação por segurador de ordem zero . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Análise de Sistemas de Controle em Tempo Discreto</b>	<b>95</b>
5.1	Do plano- $s$ para o plano- $z$ . . . . .	95
5.2	Análise de estabilidade . . . . .	98
5.3	Análise de erro em regime estacionário . . . . .	98
5.4	Lugar geométrico das raízes . . . . .	100
5.5	Resposta em frequência . . . . .	104
5.5.1	Margem de ganho e margem de fase . . . . .	106
5.5.2	O plano- $w$ . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Projeto de Controladores Digitais Clássicos</b>	<b>111</b>
6.1	Projeto e discretização de controladores em tempo contínuo . . . . .	111
6.1.1	Efeito da amostragem e do segurador de ordem zero . . . . .	111
6.2	Discretização da planta e projeto no plano- $z$ . . . . .	116
6.3	Projeto pelo LGR . . . . .	118
6.3.1	Compensador por avanço de fase . . . . .	121
6.3.2	Compensador por atraso de fase . . . . .	126
6.3.3	Controlador PID . . . . .	131
6.4	Projeto pelo método da resposta em frequência . . . . .	136
<b>7</b>	<b>Projeto Direto de Controladores Digitais</b>	<b>147</b>
7.1	Método de Ragazzini . . . . .	148
7.2	Controle <i>dead beat</i> . . . . .	157
7.3	Controle Dahlin . . . . .	165
<b>8</b>	<b>Controle Digital por Variáveis de Estado</b>	<b>173</b>
8.1	Linearização de equação de estados não linear . . . . .	175
8.2	Discretização de equação de estados contínua . . . . .	178
8.3	Solução da equação de estados em tempo discreto . . . . .	181
8.4	Matriz de transferência discreta . . . . .	182
8.5	Transformação de similaridade . . . . .	183
8.5.1	Forma canônica controlável . . . . .	184
8.5.2	Forma canônica observável . . . . .	187
8.5.3	Forma canônica diagonal . . . . .	189
8.6	Estabilidade segundo Lyapunov . . . . .	191
8.7	Controlabilidade e observabilidade . . . . .	194

8.8	Zeros na representação em espaço de estados . . . . .	199
8.9	Controle por realimentação de estados . . . . .	203
8.9.1	Invariância dos zeros a realimentação de estados . . . . .	206
8.10	Projeto de observadores de estado . . . . .	207
8.10.1	Observador preditor . . . . .	207
8.10.2	Observador pelo valor atual . . . . .	211
8.10.3	Sistemas com perturbações . . . . .	211
8.11	Princípio da separação . . . . .	214
8.12	Problema de rastreamento . . . . .	214
8.12.1	Realimentação de estados com entrada de referência e pré-filtro . . . . .	215
8.12.2	Inserção de integradores . . . . .	217
8.13	Exemplos de projeto . . . . .	219
<b>9</b>	<b>Introdução ao Controle Ótimo</b>	<b>241</b>
9.1	Controle quadrático ótimo . . . . .	241
9.2	Controle LQR . . . . .	246
9.2.1	Escolha de <b>Q</b> e <b>R</b> . . . . .	249
9.3	Filtro de Kalman . . . . .	254
<b>10</b>	<b>Aspectos Práticos</b>	<b>267</b>
10.1	Estruturas de representação de sistemas discretos . . . . .	267
10.2	Erros numéricos de precisão . . . . .	274
10.2.1	Erros de quantização na conversão A/D . . . . .	274
10.2.2	Erros devido ao arredondamento de coeficientes . . . . .	276
10.3	Exemplo de pseudocódigo . . . . .	281
<b>A</b>	<b>Controlador PID em Tempo Contínuo</b>	<b>285</b>
<b>B</b>	<b>Simulação de Sistemas de Controle Digital no MATLAB/Simulink</b>	<b>291</b>
<b>C</b>	<b>Modelagem de Sistemas Mecânicos no MATLAB/Simulink</b>	<b>301</b>
C.1	Matrizes de rotação . . . . .	302
C.2	Modelagem do pêndulo de Furuta . . . . .	305
C.3	Modelagem do pêndulo com roda de reação . . . . .	313
	<b>Referências</b>	<b>319</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>321</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Até a década de 1960 a tecnologia de controle de processos e processamento de sinais era praticamente toda analógica. A evolução dos computadores digitais e microprocessadores, juntamente com o desenvolvimento de algoritmos eficientes, causaram a migração para o controle digital e o processamento digital de sinais.

Diversas grandezas físicas com as quais lidamos são analógicas por natureza. Tais grandezas, como temperatura, pressão, velocidade etc., são representadas por valores contínuos. Sinais analógicos podem ser processados por circuitos elétricos envolvendo componentes passivos e ativos.

Os sinais também podem ser processados utilizando-se hardwares digitais. Para isso, os sinais analógicos precisam ser convertidos em digitais. Isso é conhecido como conversão analógico-digital (A/D). Basicamente, esse processo toma um número finito de amostras temporais do sinal analógico (processo de discretização no tempo) e efetua uma quantização das amplitudes dessas amostras, para que elas sejam representadas com um número finito de bits (processo de digitalização).

A princípio, quando comparado ao processamento analógico, o processamento digital de sinais tem uma estrutura mais complicada, levando ao seguinte questionamento: por que utilizá-lo? A resposta para tal pergunta possui vários argumentos favoráveis, tais como:

- possibilidade de armazenagem dos sinais e posterior processamento;
- as operações são basicamente adição, multiplicação e deslocamento, o que representa um processamento bem robusto;
- as operações podem ser facilmente modificadas, por exemplo, mudando apenas

algumas linhas de código da programação de um microcontrolador;

- facilidade de interconexão de blocos, uma vez que não há problemas de casamento de impedância como nos circuitos analógicos.

## 1.1 Classificação de sinais

Sinais geralmente transportam informações a respeito do estado ou do comportamento de um sistema físico e, em muitos casos, são sintetizados para comunicação entre humanos ou entre humanos e máquinas.

De modo geral, sinais podem ser classificados da seguinte forma [Lathi 1998]:

- sinais de energia e de potência;
- sinais periódicos e aperiódicos;
- sinais determinísticos e estocásticos;
- sinais de tempo contínuo e de tempo discreto;
- sinais analógicos e digitais.

Sinais com energia finita são denominados **sinais de energia**, ao passo que sinais com potência finita e diferente de zero são denominados **sinais de potência**. Se um sinal for de energia, ele não pode ser de potência, e vice-versa. No entanto, há sinais que não são de energia, nem de potência. Exemplos: sinal exponencial crescente e sinal rampa.

Sinais periódicos são tais que, para uma constante positiva  $T_0$ , denominada período, vale a relação  $f(t) = f(t \pm T_0)$ , para todo  $t$ . Pense que um carimbo pode ser feito com um fragmento desse sinal de duração  $T_0$ . Se o sinal original puder ser reproduzido por “carimbadas” sequenciais e não espaçadas do fragmento, então o sinal é dito **periódico** com período  $T_0$ . Caso contrário, o sinal é **aperiódico**.

Um sinal **determinístico** é tal que seu comportamento é precisamente conhecido para cada valor da variável independente. Por outro lado, caso apenas informações probabilísticas do sinal em um tempo futuro forem conhecidas, por exemplo, valor médio e variância, o sinal é dito **estocástico**.

Em relação à continuidade ou discretização no tempo e analogicidade ou digitalização em amplitude, pode-se ter a seguinte classificação:

- **Sinais analógicos de tempo contínuo** são definidos ao longo de todos os instantes de tempo e as amplitudes podem assumir qualquer valor real. São geralmente denominados apenas sinais analógicos.



- **Sinais analógicos de tempo discreto** são definidos em instantes discretos de tempo, mas as amplitudes podem assumir qualquer valor real. Podem ser matematicamente representados como sequências de números.
- **Sinais digitais de tempo contínuo** são aqueles definidos ao longo de todos os instantes do tempo, porém os valores de amplitude são definidos apenas em alguns valores discretos predefinidos.
- **Sinais digitais de tempo discreto** são aqueles em que ambos o tempo e a amplitude são discretos. São geralmente denominados apenas sinais digitais.

A Figura 1.1 ilustra a classificação dos tipos de sinais quanto à discretização e quantização.

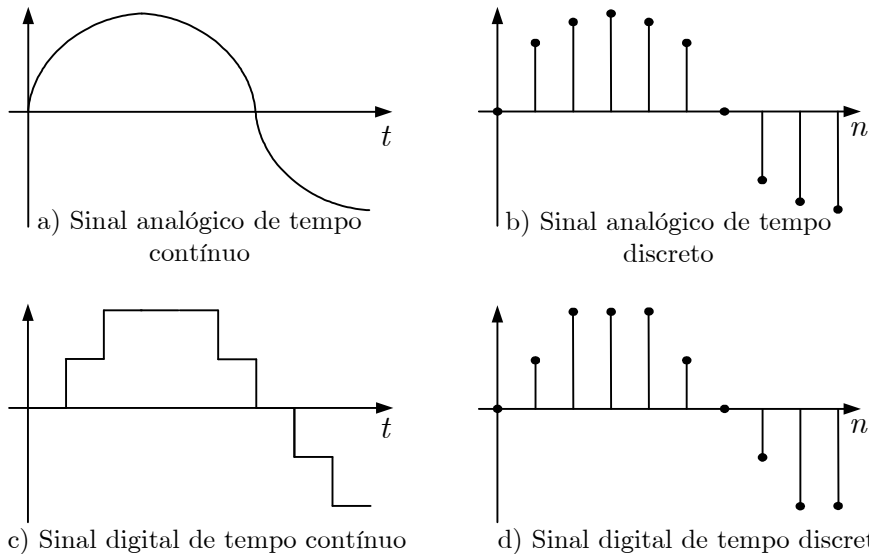
Um sinal também pode ser classificado quanto à causalidade. Um sinal que só se inicia a partir de  $t \geq 0$  é denominado sinal **causal**, ao passo que um sinal que se inicia antes de  $t = 0$  denomina-se sinal **não causal**. Ainda, um sinal que se extingue para  $t \geq 0$  é chamado de sinal **anticausal**.

Da mesma forma podemos classificar os tipos de sistemas de interesse aos nossos propósitos.

- **Sistemas de tempo contínuo** são sistemas em que ambas a entrada e a saída são sinais de tempo contínuo.
- **Sistemas de tempo discreto** são aqueles em que ambas a entrada e a saída são sinais de tempo discreto.
- **Sistemas digitais de tempo discreto** são aqueles em que ambas a entrada e a saída são sinais digitais de tempo discreto.

Um **sistema causal** é aquele em que a saída atual depende apenas de entradas passadas ou presentes. Um sistema físico é causal pois, caso contrário, ele teria capacidade de antecipar saídas futuras.

Os controladores abordados neste livro consideram sistemas **lineares e invariantes no tempo** (LITs). Tais sistemas respeitam o princípio da superposição, ou seja, a saída gerada pela combinação linear de diferentes sinais de entrada é igual à mesma combinação aplicada aos sinais de saída gerados pelos sinais de entrada individualmente. Além disso, sistemas LIT respeitam o princípio da invariância no tempo; um sistema é dito ser invariante no tempo se um retardo ou avanço de tempo do sinal de entrada causar em um deslocamento de tempo idêntico ao sinal de saída.



**Figura 1.1** – Classificação de sinais considerando discretização e quantização.

## 1.2 Amostragem periódica

Sinais de tempo discreto são matematicamente representados como seqüências de números. Uma seqüência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros. Formalmente, uma seqüência  $x$  é escrita como

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (1.1)$$

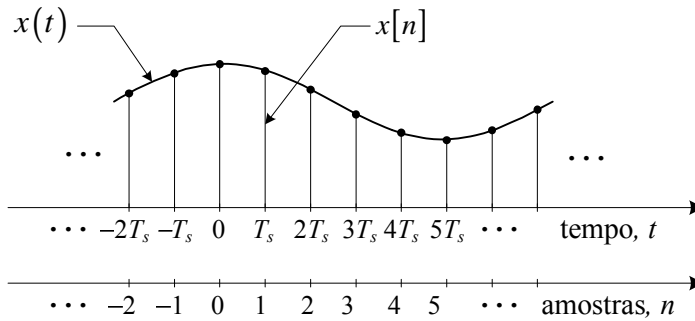
onde  $n$  é um número inteiro. Em um cenário prático, tais seqüências podem ser oriundas da **amostragem periódica** de um sinal analógico. Neste caso, o valor numérico do  $n$ -ésimo elemento na seqüência é igual ao valor do sinal em tempo contínuo,  $x(t)$ , no instante  $nT_s$ , i.e.,

$$x[n] = x(nT_s), \quad -\infty < n < \infty. \quad (1.2)$$

A quantidade  $T_s$  é denominada período de amostragem, e sua recíproca é a freqüência de amostragem  $f_s$  ou  $\omega_s = 2\pi f_s$ .

Na amostragem periódica o período  $T_s$  é constante (veja Figura 1.2). Apesar de a abscissa da seqüência ser uma linha contínua, é importante reconhecer que  $x[n]$  é definida apenas para valores inteiros de  $n$ . Não é correto pensar que  $x[n]$  vale zero quando  $n$  não é inteiro;  $x[n]$  simplesmente não é definida para valores não inteiros de  $n$ .

O **teorema de amostragem** estabelece a mínima freqüência que um sinal analógico precisa ser amostrado para posteriormente poder ser reconstruído. Tal teorema afirma



**Figura 1.2** – Relação entre sinal de tempo contínuo e sinal de tempo discreto.

que a frequência de amostragem deve ser maior ou igual a duas vezes a maior componente de frequência do sinal. Detalhes serão apresentados no Capítulo 2.

### 1.3 Conversores A/D e D/A

Um ponto crítico em sistemas digitais é a interface entre um circuito analógico e um digital, uma vez que a qualidade de seu projeto está diretamente relacionada a precisão, rapidez de resposta e confiabilidade no processamento digital de informações.

A **resolução** de um conversor A/D, quando expressa em bits, é igual ao número de bits do conversor. Por exemplo, um conversor com uma resolução de  $N$  bits pode representar  $2^N$  níveis de amplitude quantizados.

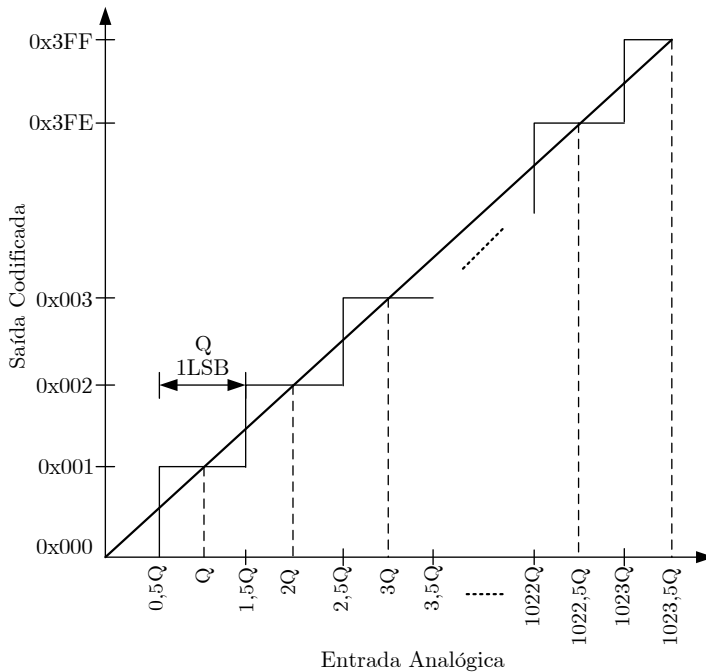
O intervalo de escala (FSR, *full-scale range*) do conversor é definido por  $\text{FSR} = (V_{\text{ref}+} - V_{\text{ref}-})$ , em que  $V_{\text{ref}+}$  e  $V_{\text{ref}-}$  representam, respectivamente, os extremos superior e inferior em que a tensão de entrada pode ser convertida (codificada).

Quando expressa em tensão, a resolução é a menor variação que pode ser identificada em uma escala analógica, ou seja,

$$Q = \frac{\text{FSR}}{2^N}. \quad (1.3)$$

$Q$  também é referenciada como 1LSB (um Bit Menos Significativo - *one Least Significant Bit*). Exemplo: Para  $V_{\text{ref}-} = 0V$ ,  $V_{\text{ref}+} = 5V$  e  $N = 10$  bits, tem-se  $Q = 0,0048 V$  (4,8 mV). A Figura 1.3 apresenta a relação entrada-saída de um exemplo de conversor A/D.

Suponha um conversor A/D de quatro bits, com  $V_{\text{ref}+} = 5 V$ ,  $V_{\text{ref}-} = 0 V$ , e que o valor da conversão em binário seja 1101. A tensão de entrada, então, é

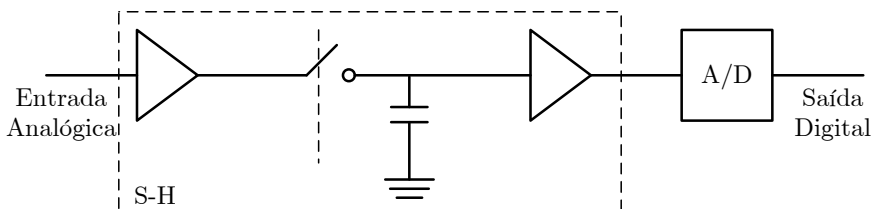


**Figura 1.3** – Relação entrada-saída de um conversor A/D unipolar ideal.

$$V_{in} = 5 \times \frac{(1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0)}{2^4} = 4,0625 \text{ V.}$$

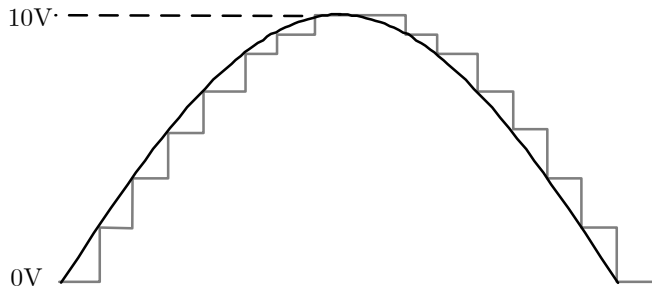
O **erro de quantização** do conversor expressa o desvio do resultado de conversão em relação a uma reta ideal. A magnitude do erro vai de 0 a  $\frac{1\text{LSB}}{2}$ .

A primeira etapa da conversão A/D é a **discretização** no tempo. Isso é fisicamente implementado por um circuito denominado **amostra e retém** (S-H, *sample-and-hold*), como ilustrado na Figura 1.4.



**Figura 1.4** – Circuito S-H na entrada do A/D.

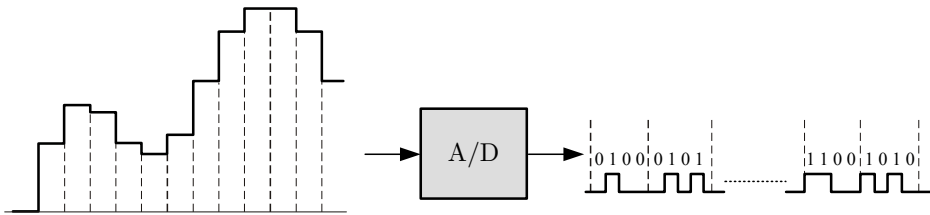
Tal circuito amostra o sinal de entrada a uma taxa de amostragem determinada por um *clock* e segura o nível do sinal em um capacitor até o próximo pulso de *clock*, como ilustrado na Figura 1.5.



**Figura 1.5** – Entrada e saída típica de um circuito S-H.

O **tempo de aquisição** é o tempo necessário para que o circuito S-H permaneça no modo amostragem de forma que o capacitor atinja a tensão de entrada. Uma nova aquisição não começa até que uma conversão tenha terminado.

A segunda parte consiste na quantização dos níveis de tensão constante da saída do S-H em códigos binários pelo conversor analógico/digital, como ilustrado na Figura 1.6.



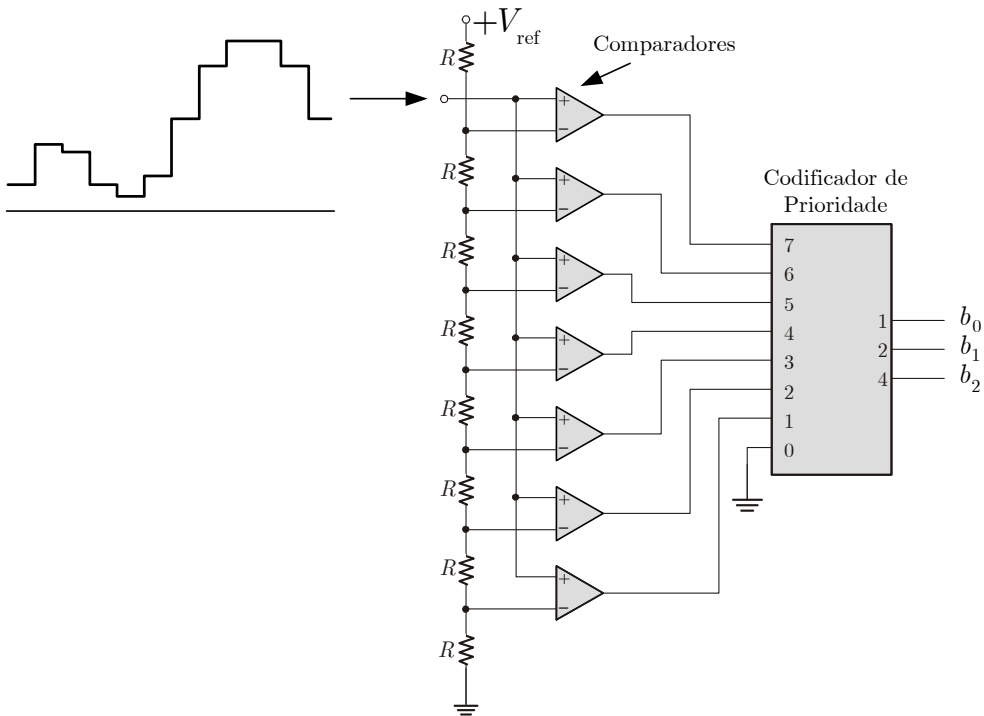
**Figura 1.6** – Conversão efetuada por um exemplo de A/D.

O **tempo de conversão** é o tempo necessário para se obter o valor digital na saída da tensão analógica de entrada. Note que o tempo de conversão não pode ser maior do que o tempo em que o sinal permanece constante.

Os circuitos integrados denominados conversores A/D possuem, internamente, o S-H e a conversão A/D propriamente dita, incluindo um, dois ou mais canais.

Há diversas formas de conversor A/D, tais como: *flash*, aproximações sucessivas, rampa, rampa dupla tipo integrador, tensão-frequência, sigma-delta.

A Figura 1.7 seguinte ilustra um exemplo de conversor A/D tipo *flash*. Tal conversor é rápido, mas necessita de  $2^n$  comparadores para a conversão com  $n$  bits. O codificador de prioridade produz um código binário correspondente à entrada de mais alta ordem acionada. No conversor por aproximações sucessivas, a conversão é realizada do bit mais significativo (MSB) para o menos significativo (LSB). O sinal de entrada é comparado ao valor analógico que representa o código binário na saída do registrador de aproximações sucessivas (SAR). Se o sinal de entrada for maior, o bit 1 no MSB é mantido no SAR.



**Figura 1.7** – Conversor A/D flash.

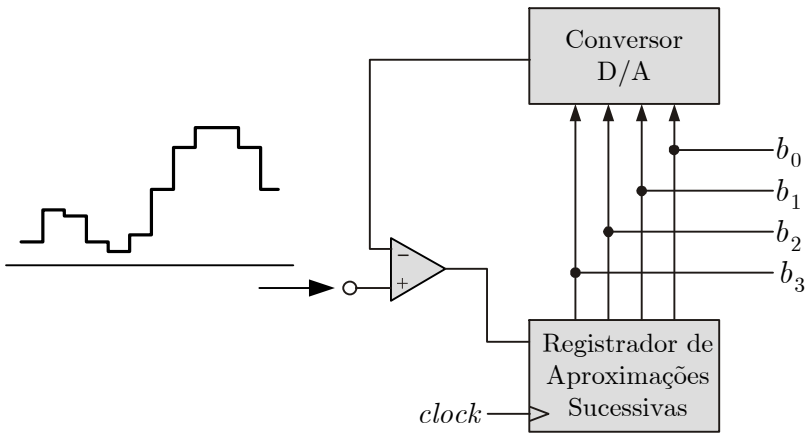
Caso contrário, tal bit fica em “0” (*reset*). Uma vez que o MSB representa metade da tensão de referência, conhecer o estado deste bit (0 ou 1) já significa saber se a tensão de entrada é maior ou menor que a metade da referência. Conhecido o bit mais significativo, passa-se ao próximo bit, que representa 1/4 da tensão de referência. A conversão segue assim até o LSB. A Figura 1.8 apresenta um esquema do conversor por aproximações sucessivas.

Por outro lado, conversores D/A convertem uma palavra digital em um sinal analógico sob a forma de uma tensão ou corrente de saída. São formados por elementos passivos, fontes de referência, chaves e amplificadores operacionais.

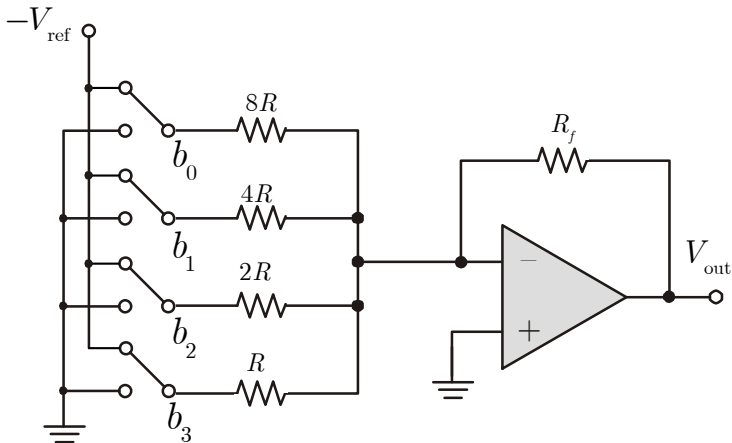
A Figura 1.9 apresenta um conversor D/A com resistores proporcionais. O valor de tensão convertido é dado por

$$V_{\text{out}} = \frac{R_f}{R} \left( b_3 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{8}b_0 \right) V_{\text{ref}}. \quad (1.4)$$

Outra forma de se implementar um conversor D/A é utilizando uma rede  $R - 2R$ . A vantagem é que apenas dois valores de resistência são necessários, conforme visto na Figura 1.10.



**Figura 1.8** – Conversor A/D por aproximações sucessivas.



**Figura 1.9** – Conversor D/A com resistores proporcionais.

Pode-se mostrar que a saída é proporcional ao peso da combinação binária que está em nível alto, tal que

$$V_{\text{out}} = \frac{1}{2} \left( b_3 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{8}b_0 \right) V_{\text{ref}}. \quad (1.5)$$

A conversão D/A também pode ser indiretamente feita considerando a modulação por largura de pulso (PWM, *Pulse Width Modulation*). Trata-se de um sinal com frequência constante e largura de pulso (ciclo ativo ou *duty cycle*) variável. Vários microcontroladores e processadores digitais de sinais possuem uma função para gerar sinal modulado com largura de pulso proporcional a um determinado número de bits (sinal digital). A variação da largura do pulso permite obter uma tensão média variável. O sinal PWM

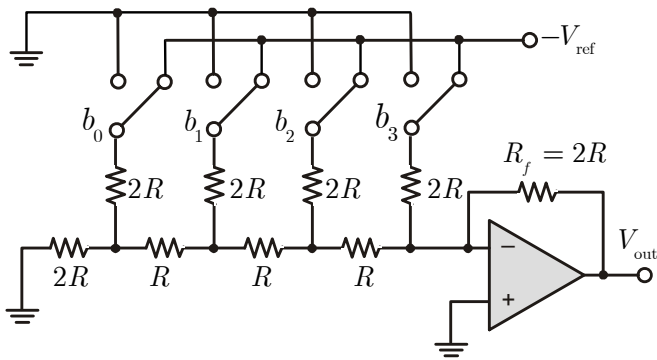


Figura 1.10 – Conversor D/A com rede  $R - 2R$ .

em um período pode ser representado por

$$V(t) = \begin{cases} V_{\text{pulso}}, & 0 \leq t \leq t_p \\ 0, & t_p \leq t \leq T \end{cases}, \quad (1.6)$$

onde  $T$  é o período da forma de onda,  $t_p$  a duração do pulso em nível alto e  $V_{\text{pulso}}$  a tensão de pulso. Assim, a tensão média do sinal PWM é dada por

$$V_M = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{t_p} V_{\text{pulso}} dt + \int_{t_p}^T 0 dt \right] = \frac{t_p}{T} V_{\text{pulso}}. \quad (1.7)$$

O ciclo ativo (*duty cycle*) corresponde à razão entre a largura do pulso em nível alto e o período do sinal ( $t_p/T$ ). O pulso da onda PWM apresenta tensão fixa, porém a tensão média ( $V_M$ ) é diretamente proporcional ao ciclo ativo e, como este varia entre 0 e 1,  $V_M$  pode variar entre 0 e  $V_{\text{pulso}}$ . Para se obter um conversor D/A a partir de uma saída PWM de um hardware digital, basta adicionar à saída um filtro passa-baixas com frequência de corte menor (pelo menos 10 vezes) que a frequência do PWM, como apresentado na Figura 1.11.

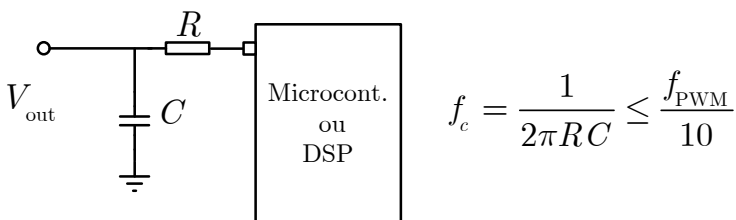


Figura 1.11 – Conversor D/A PWM.

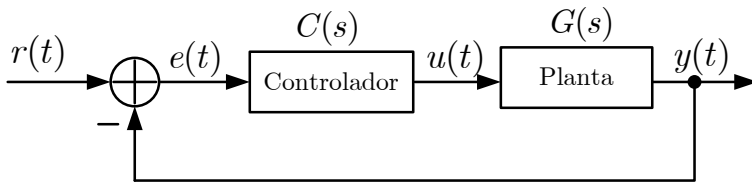


Para controlar resistências de aquecimento e ventiladores, por exemplo, não há necessidade de filtro, desde que a frequência do PWM não seja muito baixa. Pode-se, portanto, regular a taxa de aquecimento do resistor e a velocidade do ventilador, variando-se a tensão média aplicada a eles.

## 1.4 Introdução ao controle digital

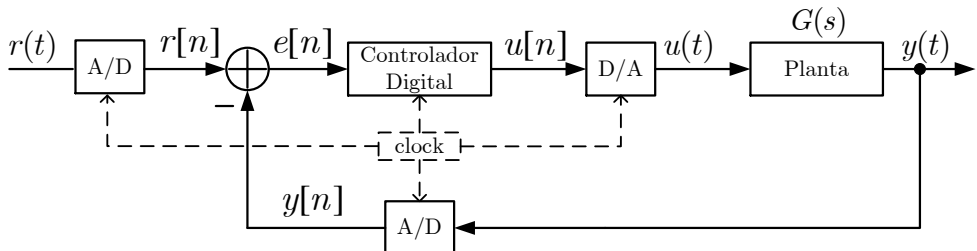
Ao longo deste texto, por abuso de notação, o termo controle digital será usado para fazer referência ao controle em tempo discreto com amplitudes quantizadas, ou seja, processado por um hardware digital. Por simplicidade, os termos controle digital e controle discreto serão considerados sinônimos aqui, apesar de digital e discreto serem, essencialmente, conceitos diferentes, como visto na classificação de sinais apresentada na Seção 1.1.

A Figura 1.12 apresenta a topologia típica de um sistema de controle com compensação em série e realimentação unitária.



**Figura 1.12** – Sistema de controle com realimentação unitária.

Por outro lado, a Figura 1.13 apresenta o mesmo sistema, mas com o controle implementado de forma discreta.



**Figura 1.13** – Sistema de controle com realimentação unitária em tempo discreto.

O período de amostragem é dado por  $T_s$ . Considere as seguintes definições:

- $r(t)$  e  $r[n] = r(nT_s)$ : sinal de referência (*set-point*) em tempo contínuo e em tempo discreto, respectivamente;

- $e[n] = e(nT_s)$ : sinal de erro atuante em tempo discreto;
- $y(t)$  e  $y[n] = y(nT_s)$ : variável controlada (ou regulada) em tempo contínuo e em tempo discreto, respectivamente;
- $u(t)$  e  $u[n] = u(nT_s)$ : sinal de controle (variável manipulada) em tempo contínuo e em tempo discreto, respectivamente.

Note que agora o controlador não pode mais ser implementado de forma analógica. Uma das formas<sup>1</sup> de fazer com que um hardware digital produza uma solução que se aproxime da solução em tempo contínuo com dinâmica é denominada método de Euler por diferença em avanço (*forward rectangular*). Note que a derivada de  $x$  em relação ao tempo, no instante  $t = nT_s$ , pode ser aproximada por

$$\dot{x}(t)|_{t=nT_s} \cong \frac{x([n+1]T_s) - x(nT_s)}{T_s}. \quad (1.8)$$

O importante é observar que uma derivada foi transformada em uma diferença ponderada. De forma geral, uma **equação diferencial** é transformada em uma **equação de diferenças**. A equação de diferenças é resolvida repetidamente a cada intervalo de tempo  $T_s$ . O Exemplo 1.1 ilustra o método de discretização por diferença em avanço.

✎ **Exemplo 1.1:** Utilizando o método de Euler por diferença em avanço, encontre a equação de diferenças para o equivalente digital do seguinte compensador:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 50 \frac{s+3}{s+10},$$

utilizando frequências de amostragens de 20 Hz e 40 Hz e considerando o sistema

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

**Solução:** de  $C(s)$ , note que

$$(s+10)U(s) = 50(s+3)E(s).$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace,

$$\dot{u} + 10u = 50(\dot{e} + 3e).$$

Utilizando a regra *forward rectangular* de Euler e considerando  $u[n] = u(nT_s)$ , tem-se

$$\frac{u[n+1] - u[n]}{T_s} + 10u[n] = 50 \left( \frac{e[n+1] - e[n]}{T_s} + 3e[n] \right).$$

<sup>1</sup>Outras formas melhores do que essa serão consideradas no Capítulo 4.

Rearranjando, tem-se

$$\begin{aligned} u[n+1] - u[n] + 10T_s u[n] &= 50(e[n+1] - e[n] + 3T_s e[n]) \\ \Rightarrow u[n+1] &= (1 - 10T_s)u[n] + 50(3T_s - 1)e[n] + 50e[n+1]. \end{aligned}$$

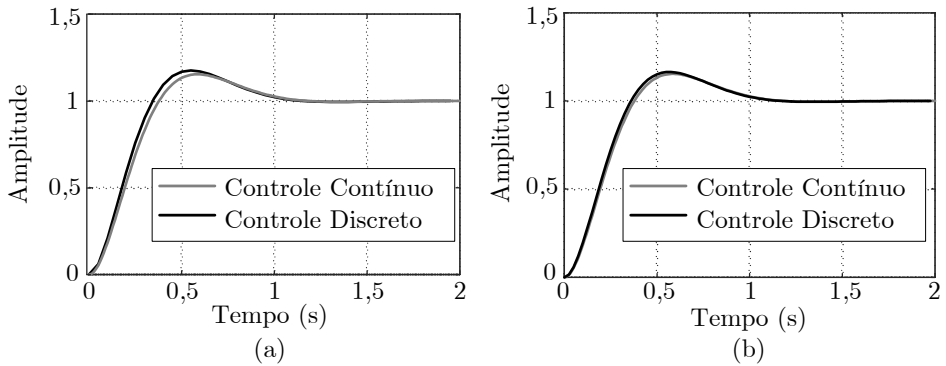
Para  $f_s = 20$  Hz  $\Rightarrow T_s = 0,05$  s, obtém-se

$$\begin{aligned} u[n+1] &= 0,5u[n] + 50(e[n+1] - 0,85e[n]) \\ \Rightarrow u[n] &= 0,5u[n-1] + 50(e[n] - 0,85e[n-1]). \end{aligned}$$

Para  $f_s = 40$  Hz  $\Rightarrow T_s = 0,025$  s, obtém-se

$$u[n] = 0,75u[n-1] + 50(e[n] - 0,925e[n-1]).$$

A Figura 1.14 apresenta as respostas em malha fechada ao degrau unitário para os dois casos considerados em comparação com o controle em tempo contínuo. Note que, quanto menor o período de amostragem, mais próxima é a resposta do sistema com controle digital da resposta com controlador em tempo contínuo.



**Figura 1.14** – Resposta ao degrau do Exemplo 1.1 com (a)  $f_s = 20$  Hz e (b)  $f_s = 40$  Hz.



SÃO POUCOS OS LIVROS DIDÁTICOS DE CONTROLE DIGITAL QUE TRAZEM EXEMPLOS DE SIMULAÇÃO EM SOFTWARES NUMÉRICOS. OS QUE O FAZEM UTILIZAM, MUITAS VEZES, BLOCOS FECHADOS PARA PARAMETRIZAR CONTROLADORES PRÉ-PROGRAMADOS, O QUE DISTANCIA A SIMULAÇÃO DA APLICAÇÃO PRÁTICA.

Nesta obra, há vários exemplos de simulação de controladores digitais em que os algoritmos são programados em blocos *Matlab Function* do software MATLAB®. Essa abordagem está muito próxima de programação embarcada em hardwares digitais.

Dessa maneira, este livro busca estreitar a distância entre simulação e prática. O texto é acessível a alunos de graduação, com conteúdo que abrange boa parte das ementas de cursos de controle digital. No âmbito da pós-graduação, o livro também pode ser utilizado como uma referência introdutória. Além disso, o conteúdo serve como um guia para engenheiros envolvidos com a prática de projeto de sistemas de controle.



[www.blucher.com.br](http://www.blucher.com.br)

**Blucher**



Clique aqui e:

[VEJA NA LOJA](#)

## Controle digital aplicado

---

Bruno Augusto Angélico, Gabriel Pereira das Neves

ISBN: 9786555063639

Páginas: 324

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2023

---