



**JOSÉ MANOEL BALTHAZAR
ANGELO MARCELO TUSSET
MAURÍCIO APARECIDO RIBEIRO
WAGNER BARTH LENZ
VINÍCIUS PICCIRILLO
DIEGO COLÓN
ÁTILA MADUREIRA BUENO
GIANE GONÇALVES LENZI
FREDERIC CONRAD JANZEN**

SISTEMAS DINÂMICOS E MECATRÔNICOS

TEORIA E APLICAÇÃO DE CONTROLE

Blucher

VOL. 1

José Manoel Balthazar
Angelo Marcelo Tuset
Maurício Aparecido Ribeiro
Wagner Barth Lenz
Vinícius Piccirillo
Diego Colón
Átila Madureira Bueno
Giane Gonçalves Lenzi
Frederic Conrad Janzen

SISTEMAS DINÂMICOS E MECATRÔNICOS

Teoria e aplicação de controle

Volume 1

Sistemas dinâmicos e mecatrônicos: Teoria e aplicação de controle, vol. 1

© 2021 José Manoel Balthazar, Angelo Marcelo Tuset, Maurício Aparecido Ribeiro, Wagner Barth Lenz, Vinícius Piccirillo, Diego Colón, Átila Madureira Bueno, Giane Gonçalves Lenzi, Frederic Conrad Janzen
Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher

Editor Eduardo Blücher

Coordenação editorial Jonatas Eliakim

Produção editorial Isabel Silva

Diagramação Autores

Revisão de texto Bárbara Waida

Capa Leandro Cunha

Editora Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009. É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora. Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Balthazar, José Manoel

Sistemas dinâmicos e mecatrônicos: teoria e aplicação de controle / José Manoel Balthazar... [et al.]. – 1. ed. – São Paulo: Blucher, 2021.

256 p.: il. (Sistemas dinâmicos e mecatrônicos ; 1)

ISBN 978-65-5506-269-4 (impresso)

ISBN 978-65-5506-265-6 (eletrônico)

1. Engenharia 2. Sistemas dinâmicos 3. Análise de sistemas – Modelos matemáticos 3. Sistemas lineares 4. Sistemas não lineares 5. Mecatrônica 6. Equações diferenciais I. Balthazar, José Manoel.

21-0816

CDD 620.001185

Índices para catálogo sistemático:

1. Engenharia de sistemas: Modelagem

Conteúdo

1	Introdução	11
1.1	Noções básicas de modelagem de sistemas eletromecânicos	17
1.2	Dispositivos inerciais	18
2	Introdução aos sistemas dinâmicos	21
2.1	Introdução	21
2.2	Princípio da mínima ação	21
2.3	Método lagrangeano	24
2.4	Método hamiltoniano	26
2.4.1	Exemplo: vibração unidimensional da corda	28
3	Métodos numéricos aplicados à dinâmica	35
3.1	Introdução	35
3.2	Sistemas dinâmicos autônomos e não autônomos	35
3.3	Estabilidade local	38
3.4	Soluções periódicas	40
3.5	Soluções quasi-periódicas	41
3.6	Soluções caóticas	42
3.7	Mapa de Poincaré	44
3.8	Expoentes de Lyapunov	47
3.9	Teste 0-1	51
3.10	Análise espectral – <i>Fast Fourier Transform</i>	54
3.11	Diagrama de bifurcação	56
3.12	Bacia de atração	58
3.13	Gráficos de recorrência	59
3.13.1	Tipos de gráficos de recorrência	60

3.13.2	Quantificação de recorrência	61
4	Métodos analíticos aproximados	65
4.1	Introdução	65
4.2	Teoria de perturbação	65
4.2.1	Método de perturbação	66
4.2.2	Exemplo de aplicação do método de perturbação	68
4.2.3	Termos seculares	70
4.3	Método de múltiplas escalas	72
4.4	Equações de modulação	75
4.4.1	Método de múltiplas escalas com múltiplos graus de liberdade	75
4.4.2	Método de múltiplas escalas com múltiplos graus de liberdade	77
4.4.3	Implementação do método de múltiplas escalas	80
5	Identificação paramétrica	85
5.1	Introdução	85
5.2	Identificação dos parâmetros	86
5.2.1	Parâmetro δ_1	87
5.2.2	Parâmetro δ_2	89
5.2.3	Parâmetro α_1	90
5.2.4	Parâmetro α_2	91
5.2.5	Parâmetro α_3	92
5.2.6	Parâmetro α_4	93
5.2.7	Parâmetros δ_3, δ_4 e δ_5	94
5.2.8	Resumo dos experimentos	94
5.2.9	Sistema de Duffing sem e com amortecimento	95
5.3	Saltos	98
6	Fundamentos de controle	101
6.1	Sistemas dinâmicos lineares	101
6.2	A transformada de Laplace	103
6.2.1	Resultados importantes e propriedades	103
6.2.2	Transformada inversa de Laplace	112
6.3	Solução de equações diferenciais pelo método da transformada de Laplace	113

6.4	Função de transferência	114
6.5	Estabilidade de sistemas de controle	116
6.5.1	Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz	117
6.6	Análise de sistemas de controle pelo critério de Nyquist	121
6.6.1	Percurso de Nyquist	123
6.6.2	Critério de estabilidade de Nyquist	123
7	Controle por realimentação dos estados	127
7.1	Introdução	127
7.2	Projeto de controle por alocação de polos	129
7.2.1	Primeira estratégia	129
7.2.2	Segunda estratégia	130
7.2.3	Terceira estratégia	130
7.3	Problema de controle ótimo quadrático	131
7.4	Controle da vibração de sistemas mecânicos vibracionais	133
7.4.1	Controle de um sistema mecânico vibracional com uma massa	133
7.4.2	Controle de um sistema mecânico vibracional com duas massas acopladas	138
8	Controle ótimo para sistemas não lineares	145
8.1	Introdução	145
8.2	Controle linear <i>feedback</i>	145
8.3	Controle linear <i>feedback</i> aplicado em um sistema eletromecânico não linear	148
8.3.1	Projeto de controle linear <i>feedback</i>	151
8.4	Controle de estados dependentes da equação de Riccati (SDRE) . .	154
8.5	Aplicação do controle SDRE	157
8.6	Modelo matemático não linear	157
9	Controle de processo	165
9.1	Introdução	165
9.2	Processo de fermentação alcoólica	165
9.3	Modelo matemático do reator	166
9.4	Sistemas de controle	170
9.5	Controladores	170

9.5.1	Controlador liga-desliga (<i>on-off</i>)	171
9.5.2	Controlador proporcional (P)	171
9.5.3	Controlador proporcional-integral (PI)	171
9.5.4	Controlador proporcional-integral-derivativo (PID)	172
9.6	Controle LQR	172
9.6.1	Aplicação	173
9.6.2	Estratégias de controle para reator de malha aberta	173
9.6.3	Projeto do controlador LQR	175
10	Controle robusto H_∞ e <i>polynomial chaos</i>	179
10.1	Introdução	179
10.2	Diagrama de blocos e sinais	181
10.2.1	Robustez	183
10.3	Sistema nominal	184
10.3.1	Estabilidade interna	185
10.3.2	Desempenho	185
10.4	Família de plantas	186
10.4.1	Robustez de estabilidade clássica	187
10.4.2	Robustez de estabilidade quando há família de plantas	188
10.4.3	Robustez de desempenho quando há família de plantas	189
10.5	Fundamentos matemáticos	190
10.5.1	Matrizes e valores singulares	190
10.5.2	Espaços de Banach	192
10.5.3	Espaços de Hilbert	195
10.5.4	Espaços de sistemas: normas de sistemas	196
10.5.5	Planta estendida	198
10.5.6	Problema de sensibilidade mista	199
10.6	Aplicações de <i>polynomial chaos</i> a controle robusto	200
10.6.1	Ferramentas matemáticas básicas	201
10.7	Probabilidades e variáveis aleatórias	203
10.7.1	Processos estocásticos	206
10.7.2	Sistemas diferenciais estocásticos	209
10.7.3	Método do <i>polynomial chaos</i> com distribuição normal	210
10.7.4	Método do <i>polynomial chaos</i> com outras distribuições	215
10.7.5	Utilização em análise de robustez	216

11 Métodos de otimização	219
11.1 Introdução	219
11.2 Função de otimização	219
11.3 <i>Particle Swarm Optimization</i> (PSO)	220
11.4 Algoritmo genético	222
11.4.1 População inicial	222
11.4.2 Critérios de parada	223
11.4.3 Restrições de variáveis	223
12 Sistemas mecatrônicos não lineares	227
12.1 Introdução	227
12.2 Saturação	228
12.3 Zona morta	229
12.4 <i>Backlash</i>	231
12.5 Fricção	233
12.5.1 Atrito de Coulumb	233
12.5.2 Atrito viscoso	234
12.5.3 Atrito de Stribeck	234
12.6 Relé	234
Referências	239
Sobre os autores	253

Capítulo 1

Introdução

Sabe-se que os fenômenos que envolvem uma evolução em relação ao tempo são denominados sistemas dinâmicos. Geralmente, esses sistemas são expressos por um conjunto de equações diferenciais parciais, com condições de contorno e condições iniciais no tempo bem definidas, obtidas via princípio variacional de Hamilton.

Essencialmente, esse princípio reduz a formulação do sistema dinâmico em duas quantidades escalares. A primeira é a energia cinética (E_c) e a segunda é o trabalho realizado (W) (que pode ser conservativo ou não conservativo), sendo ambas invariantes sob as transformações de coordenadas generalizadas. As equações diferenciais obtidas para descrever os fenômenos dinâmicos podem ser discretizadas no espaço, produzindo um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDO). Esse novo conjunto de EDO é resolvido na dimensão do tempo, podendo possuir ou não resolução analítica. Assim, um modo de resolução é utilizando algoritmos apropriados de integração numérica. Alguns exemplos desses algoritmos são o método de Euler, o método de Runge-Kutta etc.

Os problemas que são descritos pelas EDO de movimento podem conter n graus de liberdade e são expressos da seguinte forma:

$$\frac{dx}{dt} = h(x(t); t) + f(x(t)) + g(t) \tag{1.1}$$
$$x(t) \in \mathbb{R}^{2n}$$

em que f é o vetor de forças internas (elétricas, magnéticas etc.) e $g(t)$ é um vetor de carregamentos externos. Assim, se $g = 0$ o sistema é dito autônomo,

e se $g \neq 0$ o sistema é não autônomo. Outra classificação envolve o cálculo do divergente da função h , que permite classificar os sistemas como conservativo ou dissipativo.¹

É importante ressaltar que a resolução de problemas nas mais diversas áreas da ciência, independentemente da sua especialidade, é definida pelas suas características interdisciplinares, por meio de uma cooperação sistemática entre as partes: teórica (qualitativa) e experimental (quantitativa).

Entretanto, deve-se prevenir os cientistas, independentemente de suas áreas de atuação, sobre as limitações das análises lineares, pois a descrição de fenômenos naturais ou tecnológicos possui uma extrema complexidade em virtude das inúmeras variáveis que os descrevem. Um exemplo são as análises de sistemas dinâmicos estruturais de uma plataforma de petróleo que é submetida ao impacto de ondas marítimas, que seguem uma não linearidade no seu movimento.

Outros aspectos das não linearidades podem ser de origem elástica, inercial ou dissipativa e, geralmente, são aproximados por polinômios que contêm termos quadráticos ou de ordens superiores. Ressalta-se que, em estruturas sujeitas a grandes deslocamentos e pequenas deformações, geralmente apenas os efeitos da não linearidade geométrica são considerados. Um entendimento dessas características dinâmicas é essencial para projetos de controle, que possibilitam analisar o tratamento das equações diferenciais não lineares, a fim de obter um sistema cujas amplitudes e fases dos modos vibracionais possuam deslocamentos desejados. Ou seja, determinar um processo no qual o sistema possua amplitudes vibracionais aceitáveis para não comprometer a estrutura. Por exemplo, as vibrações de uma ponte, que quando não controladas podem comprometer a sua estrutura e causar rompimento.

Assim, é importante saber sobre o uso adequado das ferramentas que possam servir para analisar os sistemas dinâmicos não lineares. No entanto, antes de efetuar tais análises, recomenda-se pesquisar as condições de equilíbrio do sistema, identificando os modos e as frequências naturais e verificando a existência de ressonâncias internas e/ou externas, grandes deslocamentos, múltiplas soluções, pontos de bifurcação (em que a resposta sofre mudanças bruscas qualitativamente), respostas com períodos diferentes ao da excitação, sensibilidade

¹A Equação (1.2) possibilita analisar a topologia da estrutura estudada por meio do mapa de Poincaré, que está associado ao retrato de fase gerado pelas equações.

às condições iniciais, ressonâncias super- e sub-harmônicas, que são alguns dos fenômenos presentes em sistemas não lineares.

No entanto, a não linearidade dos sistemas dinâmicos gera alguns comportamentos interessantes, como o denominado comportamento caótico. As condições necessárias para a existência de movimento caótico são: o sistema deve ter pelo menos três variáveis dinâmicas independentes; e as equações diferenciais do movimento devem conter um termo não linear que acople várias variáveis. Ou seja, a dinâmica do sistema torna-se caótica, sendo um fenômeno que obedece a leis determinísticas, mas cujo comportamento é imprevisível.

Sabe-se que, para modelos determinísticos, condições iniciais idênticas levam a resultados idênticos, no entanto, em sistemas que apresentam um comportamento caótico isso não acontece. Uma possível explicação é considerar o determinismo no sentido forte da palavra, dessa maneira, as condições iniciais quase idênticas levariam a resultados quase idênticos. Por outro lado, em um sistema com comportamento caótico, o estado atual torna-se totalmente imprevisível após um determinado tempo.

Com o passar dos anos, perguntou-se: como controlar o caos? Dessa forma, desenvolveram-se técnicas de eliminação do comportamento caótico do sistema dinâmico não linear a partir da introdução de um comportamento como se fosse periódico, isto é, técnicas que alteram o movimento do sistema dinâmico caótico para um sistema dinâmico periódico. Essas mudanças na trajetória de um sistema dinâmico caótico podem ser induzidas por pequenas perturbações, em virtude de a não linearidade nesses sistemas apresentar dependência com as condições iniciais. Assim, sem alterar a dinâmica do sistema, pode-se fazê-lo se comportar de maneiras distintas. Por outro lado, grandes perturbações que modifiquem a dinâmica do sistema alterarão substancialmente a trajetória original. Entretanto, em algumas situações, essas mudanças pode ser extremamente vantajosas, pois possibilitam que o sistema dinâmico caótico recaia o mais rápido possível para um determinado estado.

Ressalta-se que os sistemas dinâmicos caóticos são mais flexíveis, em virtude da extrema facilidade de modificar a sua trajetória. Entre outras características, apresentam grande sensibilidade às perturbações nas suas condições iniciais ou nos seus parâmetros de controle. Isso significa que, muitas vezes, não basta dispor de uma ferramenta adequada para a sua análise, como um programa de computa-

dor avançado, é necessário que seu usuário investigue com critério as diversas respostas quando as condições iniciais ou os parâmetros de controle são perturbados. Em outras palavras, é necessário investigar a *estabilidade topológico-estrutural* do sistema em questão. Além disso, os métodos numéricos utilizados são incondicionalmente estáveis para a integração de sistemas dinâmicos lineares, no entanto, quando aplicados aos sistemas não lineares, podem perder a estabilidade.

Além dos fatos apresentados, sabe-se que caos pode ser desejado ou indesejado, dependendo da aplicação de interesse. Por exemplo, em problemas de combustão, caos poderá ser desejável, pois o aumento da mistura de ar e de combustível poderá levar a um melhor desempenho da máquina em operação. Por outro lado, em aplicações de aerodinâmica ou de hidrodinâmica, caos gera turbulência e é indesejável, pois o aumento do arrasto dos veículos poderá elevar os custos operacionais. Em mecânica estrutural, caos poderá levar a operações irregulares e falhas por fadiga. Assim, o fenômeno caótico poderá ser restringido aos domínios de operação de muitos instrumentos eletrônicos e mecânicos.

Portanto, devemos diagnosticar o comportamento caótico desses sistemas para determinar as regiões em que um determinado grupo de parâmetros possui o comportamento caótico e, assim, aplicar técnicas de controle que tornarão seu comportamento periódico. Um exemplo dos métodos que utilizamos para diagnosticar esse comportamento é o diagrama de bifurcações, que mostra a duplicação de períodos e, conseqüentemente, a transição para o caos. Outra análise importante para a dinâmica caótica do sistema é o cálculo do espectro de Lyapunov, que, se for positivo, indica dependência sensível às condições iniciais e, portanto, comportamento caótico.

Vários trabalhos vêm sendo desenvolvidos por diversos autores neste campo de dinâmica não linear e caos, e tem-se observado um grande desenvolvimento nesta área do conhecimento. Vale a pena ressaltar que a ocorrência desses fenômenos em sistemas não lineares é visualizada mais facilmente quando uma análise paramétrica é realizada, pois isso possibilita a determinação de parâmetros que servirão como controle do sistema, geralmente adotando-se a amplitude ou a frequência de excitação como parâmetros de controle. Os demais parâmetros do sistema dinâmico são mantidos constantes, enquanto o parâmetro de controle é lentamente modificado. Isso fornece ao projetista um completo entendimento do que pode ocorrer com o sistema quando se varia determinado parâmetro. Se

algumas propriedades do sistema forem utilizadas como parâmetros de controle, pode-se encontrar uma faixa segura em que a excitação, ao variar, não provocará uma resposta caótica ou com grandes deslocamentos.

Assim, essa análise paramétrica busca revelar a faixa de valores de determinados parâmetros do sistema que apresenta vibrações com amplitude excessiva ou sensibilidade às condições iniciais. De um modo bastante geral, obter a solução do sistema dinâmico é de suma importância, pois se verifica para quais valores dos parâmetros essa solução é estável ou não.²

Seguindo essa linha de raciocínio, para um sistema modelado por meio de EDO não lineares dificilmente será possível obter uma solução exata, ou analítica. Geralmente, a única forma de obter as soluções é por meio de métodos numéricos, nos quais apenas respostas estáveis são obtidas, e algoritmos especiais devem ser usados para obter as trajetórias instáveis. Também, pode-se dizer que existem vários métodos aproximados para resolver equações não lineares que resultam em soluções analíticas aproximadas. Ressalta-se que, dispondo de uma solução analítica, a análise paramétrica torna-se mais simples e rápida. Dentre os métodos conhecidos para essas soluções aproximadas, destacam-se os de perturbações (balanço harmônico, método da média e método das múltiplas escalas). O objetivo deste capítulo foi apresentar alguns sistemas dinâmicos básicos não lineares, modelados matematicamente, com um número finito de graus de liberdade, representados por equações diferenciais ou não. Supõe-se que as condições de existência, de diferenciabilidade e de prolongamento destas soluções sejam satisfeitas para os problemas expostos neste trabalho.

Um esclarecimento: a modelagem matemática de sistemas dinâmicos tem como costume considerá-los como funções exclusivas do tempo, sem sofrer ação do movimento da estrutura excitada; esses modelos são denominados ideais. Em contrapartida, os modelos que consideram a vibração estrutural e da fonte de

²A instabilidade de uma solução implica os fenômenos de bifurcação ou de escape. Nesta linha de previsão de escape ou de caos, o critério de Melnikov se destaca como uma importante teoria. Outra condição importante é aquela que considera o conjunto de soluções de uma equação diferencial, e não apenas sua parte de regime permanente. Deve-se focalizar a bacia de atração, e não só a cascata de bifurcações do regime permanente. Um sistema dinâmico também perde sua *integridade* quando a sua bacia se torna fractal, e não apenas quando ela desaparece ao se atingir o ponto crítico. É conhecido que, com as variações do parâmetro de controle, podem ocorrer três tipos de saltos (*jump*) na amplitude da solução: para soluções estáveis, soluções caóticas e soluções ilimitadas.

energia denominam-se modelos não ideais. Assim, o estudo dos modelos dinâmicos (ideais e não ideais) normalmente se desenvolve por três vias:

- (a) Propor a solução analítica ou por métodos de perturbação das equações do movimento obtidas de formulação lagrangiana para modelos de poucos graus de liberdade, com e sem os controles propostos.
- (b) Análise numérica de modelos de elementos finitos de grande porte, com e sem os controles propostos.
- (c) Instrumentação, medição de vibrações de estruturas existentes suportando fontes de vibração não ideais, com e sem os controles instalados, e tratamento numérico de sinais. Obviamente, não se pode esquecer da importância da teoria de controle no condicionamento das respostas dos sistemas dinâmicos quer eles sejam lineares ou não lineares.

Para atingir esses objetivos, é importante definir o integrador do método numérico, sendo os mais usados Runge Kutta e Previsor Corretor. Assim, passa-se ao estudo dos retratos de fase das variáveis dependentes, dos gráficos de recorrência (RP) e das seções de Poincaré, que fornecem a topologia (geometria) dos fenômenos envolvidos. Uma análise mais qualitativa desses fenômenos é efetuada via cálculo dos expoentes de Lyapunov para a caracterização dos comportamentos regular (periódico e quasi-periódico) e irregular (caos) ou, mais recentemente, por meio do teste 0-1. Também pode ser efetuada análise de dados experimentais, isto é, quando não se conhecem as equações diferenciais que regem o fenômeno, utilizam-se técnicas de reconstrução do espaço de fase.

Ressalta-se que muitas destas pesquisas têm gerado conhecimentos importantes para a área de mecânica teórica e aplicada. Por meio do uso de modelos matemáticos, têm sido identificados e explicados diversos fenômenos não lineares. Dessa forma, definiremos algumas metodologias para modelar um sistema dinâmico.³

³É também de suma importância a determinação da estabilidade das soluções das equações do movimento obtidas. Normalmente, adota-se a definição de estabilidade segundo Lyapunov. Diz-se que um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico é estável se, qualquer que seja a perturbação imposta ao estado de equilíbrio, o sistema permanece suficientemente próximo a esse estado; no caso oposto tem-se instabilidade. Se o sistema perturbado tender ao estado de equilíbrio inicial com o passar do tempo, diz-se que é assintoticamente estável.

1.1 Noções básicas de modelagem de sistemas eletromecânicos

Sistemas eletromecânicos são aqueles que integram sistemas elétricos, mecânicos e de controle. Esses sistemas são classificados em três grupos: eletromecânicos convencionais (MACRO), microeletromecânicos (MEMS) e nanoeletromecânicos (NEMS).

Os MEMS são sistemas cujos limites escalares mínimo e máximo são de $0,1 \mu\text{m}$ e 1 mm , respectivamente. Sabe-se que MEMS são constituídos essencialmente por mecanismos flexíveis, que se movimentam sem a junção de pinos e/ou juntas. No entanto, mecanismos flexíveis utilizam a propriedade de deformação como fonte de movimento. Dentre as principais vantagens desses mecanismos está o fato de serem construídos com uma única peça: a inexistência de problemas de folga devidos à montagem de pinos, resultando na ausência de lubrificação, e também de fadiga do material.

A aplicação de mecanismos flexíveis em projetos de MEMS é quase 100%, já que, na microescala em que são fabricados, a presença de pinos e juntas torna a montagem difícil, senão impossível. Além disso, a presença de folgas não permitiria transmitir deslocamentos da ordem de nano a micrômetros gerados pelos MEMS.

Os sistemas MEMS podem ser atuados de três formas: capacitiva, piezoelétrica e eletrotermomecânica. Todas permitem que um MEMS seja atuado por meio da aplicação de um potencial elétrico. A atuação capacitiva apresenta a desvantagem da não linearidade entre a voltagem aplicada e o deslocamento gerado. A atuação piezoelétrica tem as mesmas desvantagens do atuador capacitivo, além da dificuldade tecnológica de se depositar o material piezoelétrico na escala do MEMS. Já a atuação eletrotermomecânica é muito utilizada nos MEMS, pois a existência de uma não linearidade entre a voltagem aplicada e o deslocamento gerado, e principalmente a facilidade de fabricação e o tempo de resposta é maior que as anteriores.

Já os NEMS possuem limites escalares mínimo e máximo de $0,1 \text{ nm}$ e $0,1 \mu\text{m}$, dessa forma, a sua visualização é por meio de microscópios especiais, por exemplo, o microscópio de força atômica (*Atomic Force Microscopes* – AFM). É também de conhecimento geral que os fabricantes desses produtos têm trabalhando com base

em tentativa e erro, consumindo-se um tempo considerável e enorme quantidade de recursos financeiros para melhoria da resolução e do funcionamento desses microscópios.

Assim, é necessário um investimento na interface do projeto de fabricação, fornecendo um ferramental matemático e de simulações numéricas para análise do comportamento dinâmico desses sistemas. Os modelos matemáticos propostos devem concordar com o comportamento físico e com os resultados experimentais obtidos pelos dispositivos de teste. As considerações para a modelagem são as características físicas como amortecimento, inércia, elasticidade e capacitância.

Os MEMS operam em diversos domínios de energia, em particular nos domínios elétrico e elástico. Portanto, as simulações numéricas do comportamento desse tipo de mecanismo vincula as seguintes etapas: a análise elétrica, para determinar a distribuição de voltagem (tensão) no MEMS quando se aplica uma corrente elétrica, e a análise da deformação elástica gerada pela presença de cargas térmicas, que eventualmente somam-se à análise térmica, para determinar a distribuição de temperatura devida ao efeito Joule.

Na seção a seguir tratamos de dispositivos inerciais em virtude de sua extrema importância, pois são a base de dispositivos de geolocalização para aeronaves, de aviões comerciais até drones militares para reconhecimento de lugares. Outra aplicação são os automóveis autônomos.

1.2 Dispositivos inerciais

Os MEMS são microtransdutores que convertem energia elétrica em energia mecânica ou vice-versa. Esses dispositivos, quando dispostos convenientemente como microssensores e microatuadores, integram relés, pinças, osciladores, filtros, transformadores, mixers, giroscópios, acelerômetros etc.

Como são construídos por processos de fabricação por fotolitografia, é possível a sua integração com dispositivos em um único chip, sendo seu baixo custo garantido pelas técnicas de processamento em pacote. A redução de dimensão desses dispositivos traz diversos benefícios, como: espaço e massa reduzidos, menor consumo de energia e redução de custo de fabricação. Entretanto, os custos de prototipagem são elevados, pois a obtenção dos parâmetros característicos do

MEMS é complexa, uma vez que as suas dimensões geométricas e as do ambiente em que operam são em escala micrométrica.

Com isso, os sensores inerciais baseados em MEMS vêm substituindo alguns dos seus precursores, pois apresentam menores tamanho, peso, consumo de energia e custo, e alta confiabilidade de operação, quando comparados com os sensores convencionais. A principal característica que ainda favorece os sensores convencionais é a precisão das medições, que ainda supera a obtida com os dispositivos MEMS, mas esta diferença vem se tornando cada vez menor. Assim, apresentaremos de forma resumida algumas características físicas para aplicarmos nesses dispositivos.

Primeiramente, definiremos que a força \vec{F} que atua em um corpo exercendo uma rotação é definida como:

$$\vec{F} = 2m\Omega \times \vec{V} \quad (1.2)$$

em que m é a massa do corpo, \vec{V} é o vetor de velocidade do corpo e Ω é o vetor de velocidade angular do sistema. Essa aplicação de rotação é o movimento básico de giroscópios, com a força \vec{F} proveniente do chamado efeito de Coriolis.

Existem diversos tipos de estruturas mecânicas que aproveitam esse efeito. Um exemplo são os giroscópios *tuning-fork*, também denominados de tipo diapação, que contêm um par de massas que oscilam com mesma amplitude, mas em direções opostas. Quando essas massas são rotacionadas, a força de Coriolis cria uma vibração ortogonal que pode ser medida. O uso de duas massas de prova conjugadas na configuração citada permite ao giroscópio uma maior precisão na sua medida. Essa estrutura é muito conhecida por rejeitar os efeitos da aceleração linear, em que ambas as massas se comportaram de modo idêntico. Esse problema é corrigido pelo modo diferencial da posição, em que esse efeito pode ser anulado. A operação diferencial também torna o dispositivo relativamente imune aos efeitos de vibrações externas.

Capítulo 2

Introdução aos sistemas dinâmicos

2.1 Introdução

Para dar início à modelagem matemática desses sistemas, nós precisamos determinar alguns princípios básicos para obter as equações diferenciais pertinentes ao sistema. Também precisamos determinar o princípio da mínima ação, mais conhecido como princípio de Hamilton, que estabelece o valor estacionário do sistema. Esse valor estacionário é atribuído à tendência das trajetórias no espaço de fase.

2.2 Princípio da mínima ação

O princípio da mínima ação estabelece que o sistema possui um valor estacionário (máximo, mínimo ou sela) para a trajetória que será efetivamente percorrida pelo sistema. Assim, vamos considerar o cálculo da distância entre o ponto A e o ponto B . Calcula-se a distância infinitesimal ds do comprimento infinitesimal da curva dada pela função $y(x)$, sendo definida por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{2.1}$$

Reescrevendo e integrando em relação a x e no intervalo $[x_1, x_2]$ a Equação (2.1), teremos:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2.2)$$

Como $\frac{dy}{dx} = y'$, teremos:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (2.3)$$

Assim, a equação é uma função de $y(x)$, $y'(x)$ e x e, com isso, podemos considerar a Equação (2.3). Logo, teremos:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx \quad (2.4)$$

Dessa forma, podemos maximizar ou minimizar a integral da Equação (2.4). A Figura 2.1 ilustra a trajetória descrita pela curva $y(x)$, que minimiza ou maximiza a Equação (2.4).

Vamos considerar a curva $\hat{y}(x)$, que também pode minimizar ou maximizar a integral, Equação (2.1), como mostra a Figura 2.1. Definimos a função $\hat{y}(x)$, que descreve uma segunda trajetória, da seguinte forma:

$$\hat{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x) \quad (2.5)$$

em que $\varepsilon \in \Re$ e $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

Por hipótese, quando $\varepsilon = 0$, a função da Equação 2.5 torna-se $\hat{y}(x) = y(x)$, que será a função que otimiza a integral da Equação (2.4). Dessa forma, a Equação (2.4) é uma função de ε .

$$\Phi(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx \quad (2.6)$$

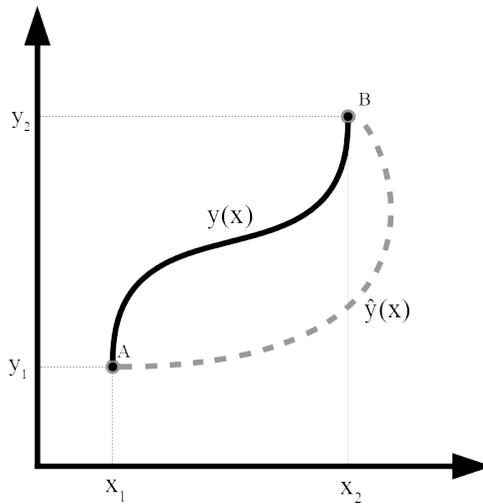


Figura 2.1: Esquema para minimização da trajetória das partículas.

Dessa forma, teremos que se $\varepsilon = 0$, a integral s possui um valor de máximo ou mínimo, o que implica que Φ também terá um máximo ou mínimo. Portanto, para determinar a otimização de s , utilizaremos:

$$\left. \frac{d\Phi(x)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (2.7)$$

Assim, derivando a Equação (2.6) em relação a ε , teremos:

$$\frac{d\Phi(x)}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx \quad (2.8)$$

Aplicando a integração por partes na segunda parcela da Equação (2.8), teremos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \quad (2.9)$$

Como $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, teremos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \quad (2.10)$$

Substituindo a Equação (2.10) na Equação (2.8), teremos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx \quad (2.11)$$

Portanto, para que a integral definida pela Equação (2.11) se anule para qualquer valor de $\eta(x)$, temos que:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2.12)$$

Dessa forma, nós definimos a equação de Euler-Lagrange.

2.3 Método lagrangeano

O método de Lagrange se baseia na Equação (2.12), que se constitui numa formulação alternativa para a segunda lei de Newton, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, que relaciona a variação temporal do momento de um corpo à força \vec{F} que atua sobre ele. Dessa forma, reescrevemos a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad (2.13)$$

em que $\mathcal{L}[q_k(t), \dot{q}_k(t)]$ é uma função escalar denominada função lagrangeana e (q_k, \dot{q}_k) são as denominadas coordenadas e velocidades generalizadas, que são definidas como:

$$\begin{aligned} q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t) \\ \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_N(t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

A função lagrangeana \mathcal{L} é definida como a diferença entre a energia cinética E_c e a energia potencial E_p :

$$\mathcal{L} \equiv E_c - E_p \quad (2.15)$$

Assim, o movimento do corpo é expresso em termos de coordenadas generalizadas q_k que se relacionam com as coordenadas cartesianas (x, y, z) dessa forma:

$$x = x(q_1, q_2, q_3, t) \quad (2.16)$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3, t)$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3, t)$$

A tendência temporal nessas relações só existe quando há um movimento relativo entre os sistemas de coordenadas. Se ambos os sistemas são fixos, então tal dependência temporal não existe. Exemplo disso é $\Lambda[q_m(t), t]$, uma função escalar do tempo e das coordenadas generalizadas que produz exatamente a mesma dinâmica que a lagrangeana,

$$\mathcal{L}[q_m(t), \dot{q}_m(t)] + \frac{d\Lambda[q_m(t), t]}{dt} \quad (2.17)$$

uma vez que a derivada total não altera a equação de Euler-Lagrange.

É útil definir um conjunto de momentos canônicos conjugados,

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \quad (2.18)$$

A Equação (2.18) mostra que o momento canônico é constante do movimento se a lagrangeana não depende explicitamente da correspondente coordenada generalizada. Para essa metodologia, podemos definir a velocidade generalizada como:

$$\dot{q}_j \equiv \frac{dq_j}{dt} \quad (2.19)$$

Dessa forma, com a Equação 2.19, a energia cinética E_c pode ser reescrita da seguinte forma:

$$E_c = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \quad (2.20)$$

Assim, vale:

$$E_C = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{kj} \frac{dq_k}{dt} \frac{dq_j}{dt} \quad (2.21)$$

em que

$$A_{kj} = \frac{\partial x}{\partial q_k} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \frac{\partial z}{\partial q_j} \quad (2.22)$$

2.4 Método hamiltoniano

Como vimos anteriormente, o método de Lagrange nos fornece equações diferenciais de segunda ordem para as variáveis dependentes q_j . No entanto, no formalismo de Hamilton, as equações diferenciais são reescritas como duas equações diferenciais de primeira ordem.

Antes de definirmos a equação de Hamilton, precisamos estabelecer algumas definições para melhor entendimento do leitor. Dessa forma, definiremos primeiramente a transformada de Legendre.

Seja $f(x)$ diferenciável em relação às suas variáveis independentes. Assim, vamos admitir que desejamos encontrar uma função $h(x)$ que possa ser expressa em termos de $\frac{dh(x)}{dx} = \alpha$ e que seja equivalente a $f(x)$. Então, teremos que:

$$\alpha = \frac{f(x) - h(x)}{x} \quad (2.23)$$

Logo:

$$h(x) = f(x) - \alpha x \quad (2.24)$$

A função $h(x)$ é denominada transformada de Legendre de $f(x)$. A transformada de Legendre possui muitas aplicações, como na termodinâmica, área que tem por objetivo o estudo dos sistemas constituídos por *infinitos* entes físicos, ou seja, quando o número de moléculas tende ao infinito ($N \rightarrow \infty$).

Considere que o momento generalizado p_j seja definido pela velocidade generalizada \dot{q}_j . Dessa forma:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (2.25)$$

Aplicando a transformada de Legendre, Equação 2.24, na equação de Lagrange, teremos:

$$\mathcal{L} - \sum_j p_j \dot{q}_j \quad (2.26)$$

Assim, podemos definir a função hamiltoniana da seguinte forma:

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) \equiv \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t) \quad (2.27)$$

Então, obtemos a relação entre $\vec{\dot{q}}$ e \vec{q}, \vec{p}, t a partir da definição generalizada. Logo, teremos:

$$dH = \sum_j p_j d\dot{q}_j + \sum_j \dot{q}_j dp_j - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (2.28)$$

Desse modo, utilizando as definições de momento generalizado, o primeiro e o quarto termos da Equação (2.28) se cancelam. Portanto, obtemos as denominadas equações canônicas de Hamilton:

$$\begin{aligned} \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ -\frac{dp_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_j} \\ -\frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.4.1 Exemplo: vibração unidimensional da corda

Na Figura 2.2, temos um exemplo de uma corda engastada e livre para oscilar verticalmente.

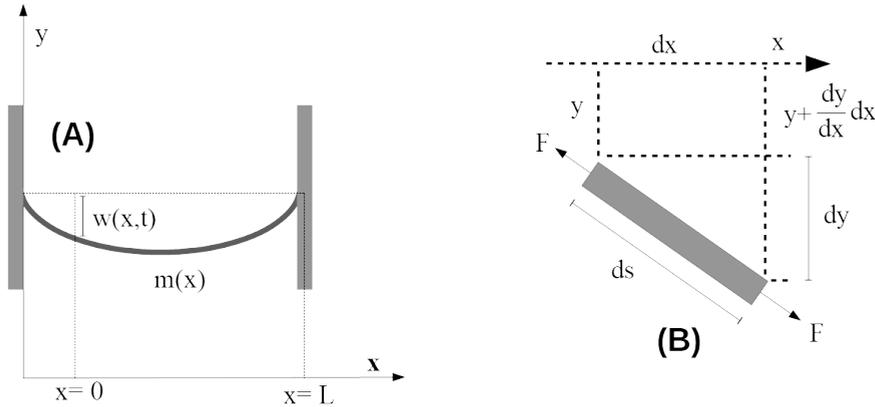


Figura 2.2: (A) Corda de tamanho L engastada nas duas extremidades. (B) Diferencial ds da corda e força de tração F .

A Figura 2.2.B ilustra uma parte infinitesimal da corda de comprimento dx , com distância y do eixo x e com uma força de tração F . Considerando o princípio de Hamilton, temos:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (2.30)$$

Se $\delta A = 0$, teremos:

$$\delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \equiv 0 \quad (2.31)$$

Considerando a equação de Lagrange, $\mathcal{L} = E_c - E_p$, em que E_c é a energia cinética no instante t , e E_p , a energia potencial na posição x e no tempo t , teremos que a energia cinética é definida por:

$$E_c(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^C m(x) \left[\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (2.32)$$

Com base na Figura 2.2.B, teremos:

$$ds^2 = dy^2 + dx^2 \therefore ds = \sqrt{dy^2 + dx^2} \quad (2.33)$$

e

$$dy = \left[y(x, t) + \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right] - dy \quad (2.34)$$

A variação do comprimento da corda é dada por:

$$\delta c = ds - dx \quad (2.35)$$

Assim, substituindo na Equação (2.35) a Equação (2.34), teremos:

$$\delta c = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 \right]} dx - dx \quad (2.36)$$

Utilizando a expansão de Taylor na seguinte equação:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (2.37)$$

Substituindo a Equação (2.37) na Equação (2.36), teremos:

$$\delta c \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.38)$$

Portanto, podemos descrever a energia potencial da seguinte forma:

$$E_p(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^C F \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.39)$$

Retomando a equação de Hamilton, Equação (2.30), e substituindo as equações das energias potencial e cinética, teremos:

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^C \left\{ m(x) \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 - F \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dt \quad (2.40)$$

Considerando as condições de contorno $\delta y(x, t_1) \equiv 0$ e $\delta y(x, t_2) \equiv 0$,

$$\delta A = \delta \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^C m(x) \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 - F \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx dt \quad (2.41)$$

Considerando $u = m(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$ e $v = \delta y(x, t)$, integrando por partes o primeiro termo da Equação (2.41) e considerando as condições de contorno, teremos:

$$\int_{t_1}^{t_2} m(x) \delta \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 dt = - \int_{t_1}^{t_2} m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \delta y(x, t) dt \quad (2.42)$$

Para o segundo termo, consideramos $u = F \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)$ e $v = \delta y(x, t)$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^C F \delta \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx &= F \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) \delta y(x, t) \Big|_0^C \\ &- \int_0^C F \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) \delta y(x, t) dx \end{aligned} \quad (2.43)$$

Dessa forma, substituindo as Equações (2.42) e (2.44) na Equação (2.41):

$$\begin{aligned} \delta A &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^C F \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \right) \delta y(x, t) dx dt \\ &- F \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \delta y(x, t) \right) \equiv 0 \Big|_0^C \end{aligned} \quad (2.44)$$

Assim, uma das soluções que satisfazem a equação anterior, originada pelo princípio de Hamilton, é dada por:

$$F \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \equiv 0 \quad (2.45)$$

$$-F \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial y} \right) \Big|_0^C \equiv 0 \quad (2.46)$$

sendo $\delta y(x, t) \Big|_0^C = \delta y(C, t) - \delta y(0, t)$.

Podemos observar que a Equação (2.45) é a equação de onda do sistema que descreverá o comportamento dinâmico da corda. Para uma análise mais profunda da função $y(x, t)$, é necessário determiná-la. Uma das formas é pelo método de separação de variáveis. Então, vamos considerar que $y(x, t)$ seja uma função contínua que depende do tempo t e da posição x . Desse modo, podemos escrever a função $f(x, t)$ como o produto da parte espacial $z(x)$ e da temporal $f(t)$:

$$y(x, t) = z(x).f(t) \quad (2.47)$$

Dessa forma, as derivadas de segunda ordem são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} &= f(t) \frac{d^2 z(x)}{dx^2} \\ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} &= z(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Logo, substituindo juntamente com as derivadas na Equação (2.45),

$$F f(t) \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = m(x) z(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \quad (2.49)$$

Dividindo essa equação por $f(t).z(x)$, teremos:

$$\frac{F}{z(x)} \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = \frac{m(x)}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \quad (2.50)$$

De maneira conveniente, tomaremos a constante de proporcionalidade $cte = -\omega^2$. Assim, podemos reescrever a Equação (2.50) como:

$$\frac{F}{m(x)z(x)} \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = \frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\omega^2 \quad (2.51)$$

Dessa forma, teremos:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z(x)}{dx^2} - \frac{m(x)\omega^2}{F} z(x) &= 0 \\ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) &= 0\end{aligned}\tag{2.52}$$

Fazendo $\beta^2 = \frac{\omega^2 m(x)}{F}$ e reescrevendo as equações anteriores, teremos:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z(x)}{dx^2} + \beta^2 z(x) &= 0 \\ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) &= 0\end{aligned}\tag{2.53}$$

Ambas as equações possuem soluções analíticas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}f(t) &= R \cos(\omega t + \phi) \\ z(x) &= C_1 \operatorname{sen}(\beta x) + C_2 \operatorname{cos}(\beta x)\end{aligned}\tag{2.54}$$

Considerando as condições de contorno do sistema:

$$\begin{aligned}F \frac{\partial z(C)}{\partial x} &= F \frac{\partial z(0)}{\partial x} = 0 \\ y(0, t) &= 0 ; z(0) = 0\end{aligned}\tag{2.55}$$

e também que $z(C) = 0$ e a corda não vibra, o que não satisfaz a solução do problema, teremos:

$$\operatorname{sen}(\beta C) = 0\tag{2.56}$$

Para que a Equação (2.56) seja nula, teremos que satisfazer:

$$\beta_n C = n\pi \therefore C = \frac{n\pi}{\beta_n}\tag{2.57}$$

Como:

$$\omega^2 = \frac{F\beta^2}{m(x)\pi} \beta_n\tag{2.58}$$

substituindo a Equação (2.58) na Equação (2.57), teremos:

$$\omega_n = n\pi \sqrt{\frac{F}{m(x)C^2}} \quad (2.59)$$

em que $n = 1, 2, 3, \dots$. Ou seja, a frequência natural de vibração da corda depende do comprimento da corda, da massa e da força de tração. A superposição das soluções fornece que:

$$y(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \text{sen}(n\pi x/L) c_m \text{cos}(n\pi x/L) \quad (2.60)$$

Com base na condição de ortogonalidade, teremos que:

$$c_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (2.61)$$

sendo as frequências naturais da corda definidas como $\frac{m\pi x}{L}$.

RECENTEMENTE, ENGENHEIROS E CIENTISTAS TÊM SE DEDICADO À SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL E À ANÁLISE EXPERIMENTAL, DESENVOLVENDO TÉCNICAS PREDITIVAS E SISTEMAS DE CONTROLE A PARTIR DA INVESTIGAÇÃO DE MODELOS FÍSICOS REAIS EM VÁRIAS FRENTES. ASSIM, FAZ-SE NECESSÁRIO CAPACITÁ-LOS NA IDENTIFICAÇÃO DE NECESSIDADES E POSSIBILIDADES DE REDUÇÃO DAS VIBRAÇÕES ESTRUTURAIS, POR MEIO DE ANÁLISE DINÂMICA, NO PROJETO E NA OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE.

Este texto visa oferecer aos leitores engenheiros, pesquisadores e estudantes um material didático e de pesquisa básico e atual, versando sobre dinâmica e controle lineares e não lineares aplicados à engenharia e à ciência moderna. Ao longo de seus doze capítulos, os principais tópicos desenvolvidos são: noções básicas de modelagem matemática e de métodos numéricos (diagramas de fase, diagrama de bifurcações, cálculo dos expoentes de Lyapunov, confecção de mapas e secções de Poincaré, teste 0-1, gráficos de recorrência etc.); busca de soluções analíticas aproximadas por meio do método das múltiplas escalas; identificação não linear, fundamentos de controle, tópicos de controles linear, não linear e robusto e noções básicas do uso de caos polinomial, como análise de sensibilidade de parâmetros; tópicos de controle de processos e controladores baseados em lógica *fuzzy*, além de noções de otimização usando-se PSO; noções básicas de controladores não lineares (zona morta, saturação etc.); e aplicações de controle em sistemas eletromecânicos e mecatrônicos.



www.blucher.com.br

Blucher



Clique aqui e:

VEJA NA LOJA

Sistemas Dinâmicos e Mecatrônicos – Volume 1

Teoria e aplicação de controle

José Manoel Balthazar, Angelo Marcelo Tusset, Mauricio Aparecido Ribeiro

ISBN: 9786555062694

Páginas: 256

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2021

Peso: 0.437 kg
