MAURÍCIO ZAHN

ÁLGEBRA LINEAR

Blucher

Maurício Zahn

ÁLGEBRA LINEAR

Lisiane Ramires Meneses
Revisora técnica

Álgebra linear

© 2021 Maurício Zahn

Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher

Editor Eduardo Blücher

Coordenação editorial Jonatas Eliakim

Produção editorial Isabel Silva

Diagramação Autor

Revisão de texto Maurício Katayama

Revisão técnica Lisiane Ramires Meneses

Capa Leandro Cunha

Imagem da capa iStockphoto

Editora Blucher
Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Zahn, Maurício

Álgebra linear / Maurício Zahn ; revisão técnica de Lisiane Ramires Meneses. – 1. ed. – São Paulo: Blucher, 2021. 290 p., il.

ISBN 978-65-5506-264-9 (impresso)

ISBN 978-65-5506-259-5 (eletrônico)

1. Álgebra linear 2. Matrizes (Matemática) I. Título II. Meneses, Lisiane Ramires

21-0960 CDD 512.5

Índices para catálogo sistemático: 1. Álgebra linear

Conteúdo

Capítulo 1

Matrizes e sistemas lineares

O estudo de matrizes e sistemas lineares é de vital importância para um curso de Álgebra linear pois constituem ferramentas essenciais para desenvolver a teoria dos espaços vetoriais e transformações lineares, os principais objetos de estudo deste livro.

1.1 Matrizes

Definição 1.1 Chama-se *matriz* a uma tabela com m linhas e n colunas, constituída por números, chamados de elementos da matriz.

Uma matriz será identificada por uma letra maiúscula e um elemento dessa matriz será indicado pela letra minúscula correspondente, acompanhada de dois índices i e j, onde o primeiro índice indica a linha em que tal elemento se encontra e o segundo índice a coluna onde ele se encontra. Dessa forma, uma matriz A com m linhas e n colunas costuma ser representada, simbolicamente, por

$$A = (a_{ij})_{m\times n}.$$

Assim, abrindo a notação matricial acima, escrevemos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Por exemplo, considerando a matriz $B_{3\times 2}$ abaixo

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},$$

temos que

- b_{11}, o elemento da linha 1 e coluna 1, vale 2;
- b_{12}, o elemento da linha 1, coluna 2, vale -1;
- etc.

Observe que a matriz B dada acima possui três linhas e duas colunas, por isso escrevemos $B_{3\times 2}$. Dada uma matriz $A_{m\times n}$, dizemos que $m \times n$ é o *tamanho* ou a *ordem* da matriz em questão.

Quando $m = n$, ou seja, quando o número de linhas é igual ao número de colunas, dizemos que a matriz é *quadrada*, e nesse caso os elementos a_{ii} formam a *diagonal da matriz*, também chamada de diagonal principal. Quando $m \neq n$, dizemos que a matriz é *retangular*.

1.1.1 Tipos especiais de matrizes

Nesta seção vamos apresentar os principais tipos de matrizes.

(a) **Matriz nula.** É uma matriz quadrada ou retangular, onde todas as entradas são nulas. Por exemplo,

$$0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad 0_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quando definirmos a soma de matrizes veremos que a matriz nula corresponde ao neutro aditivo.

(b) **Matriz diagonal.** É uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Exemplo:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

são matrizes diagonais.

Uma outra forma de denotar tais matrizes é

$$D = \operatorname{diag}(2, -1, 8) \quad \text{e} \quad E = \operatorname{diag}(3, 0, -5).$$

(c) **Matriz identidade.** É uma matriz diagonal (e, portanto, quadrada) $I_n = I_{n\times n}$ definida por

$$I_n = \operatorname{diag}(\underbrace{1, 1, 1, ..., 1}_{n}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma outra maneira de denotar a matriz identidade de ordem n é escrever $I = (\delta_{ij})_{n\times n}$, onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } & i = j \\ 0, \text{ se } & i \neq j \end{cases},$$

onde δ_{ij} é chamado de *delta de kronecker*.

No caso em que $n = 3$, temos

$$I_3 = \operatorname{diag}(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quando definirmos os produto de matrizes, veremos que essa matriz corresponde à unidade multiplicativa, i.e., é o neutro multiplicativo.

(d) **Matriz triangular inferior.** É a matriz quadrada $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$, se $i < j$. Ou seja, é uma matriz onde acima da diagonal as entradas são todas iguais a zero. Por exemplo, a matriz

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

é uma matriz triangular inferior.

(e) **Matriz triangular superior.** É a matriz quadrada $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$, se $i > j$. Ou seja, é uma matriz onde abaixo da diagonal as entradas são todas iguais a zero. Por exemplo, a matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz triangular superior. Note também que a matriz identidade I_n é ao mesmo tempo triangular inferior e superior.

(f) **Matriz linha.** É a matriz $A_{1\times n}$ formada por uma linha e n colunas.

Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}_{1\times 4}$$

é uma matriz linha.

(g) **Matriz coluna.** É a mariz $A_{n\times 1}$ formada por n linhas e 1 coluna.

Por exemplo, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$.

1.1.2 Operações com matrizes

No que segue, vamos definir a adição de matrizes, o produto de uma constante por uma matriz e o produto de matrizes. Tendo em vista que precisaremos recorrer à notação de somatório, por ser mais compacta, vamos definir inicialmente esse conceito.

Definição 1.2 Seja $F(n)$ uma expressão qualquer que depende de $n \in \mathbb{N}$. Definimos o *somatório* com k de 1 até um índice n fixado, dos $F(k)$ por

$$\sum_{k=1}^{n} F(k) = F(1) + F(2) + F(3) + ... + F(n).$$

Assim, se $F(n) = n^2$, temos, por exemplo, que

$$\sum_{k=1}^{5} F(k) = \sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$$

O somatório goza das seguintes propriedades: dadas $F(n)$ e $G(n)$ duas expressões que dependem de n e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha = \alpha \cdot n.$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot F(k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} F(k).$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (F(k) + G(k)) = \sum_{k=1}^{n} F(k) + \sum_{k=1}^{n} G(k).$

Todas essas propriedades são muito simples de provar, bastando abrir a definição de somatório. Faremos apenas a prova de (c) e deixaremos as demais a encargo do leitor.

Prova de (c). Basta abrir a notação de somatório e notar que para somas finitas vale a comutatividade e a associatividade:

$$\sum_{k=1}^{n} (F(k) + G(k)) = (F(1) + G(1)) + (F(2) + G(2)) + ... + (F(n) + G(n)) =$$

$$= (F(1)+F(2)+...+F(n))+(G(1)+G(2)+...+G(n)) = \sum_{k=1}^{n} F(k)+\sum_{k=1}^{n} G(k).$$

Definição 1.3 Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ de mesmo tamanho, e $k \in \mathbb{R}$, definimos a soma de matrizes e o produto de um escalar por uma matriz, respectivamente, por

$$A + B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n},$$

e

$$k \cdot A = (k \cdot a_{ij})_{m\times n},$$

para $i \in \{1, ..., m\}$ e $j \in \{1, ..., n\}$.

Ou seja, somar duas matrizes de mesmo tamanho é o mesmo que somar dois vetores e multiplicar uma matriz por um número real é o mesmo que multiplicar um vetor por um escalar.

Assim, por exemplo, dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, temos que

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

e

$$-7A = -7 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 21 & -7 \end{pmatrix}.$$

Definição 1.4 Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, definimos o produto entre A e B, e escrevemos $A \cdot B$, à matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$, onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Repare que para o produto $A \cdot B$ estar bem definido o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda. Isto permite efetuar um produto entre linha e coluna.

Vamos ser mais claros na definição acima: abrindo as matrizes, teremos

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & ... & b_{2p} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & ... & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2p} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix},$$

onde

- $c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + ... + a_{1n} \cdot b_{n1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k1}$;
- $c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + ... + a_{1n} \cdot b_{n2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k2}$;
- etc.

De forma geral, para determinar o elemento c_{ij} do produto $C = A \cdot B$, olhamos para a linha i de A e a coluna j de B, e então efetuamos o produto do primeiro elemento da linha i com o primeiro elemento da coluna j, e somamos com o produto do segundo elemento da linha i com o segundo elemento da coluna j, e assim por diante, até somar com o produto do último elemento da linha i com o último elemento da coluna j, ou seja,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Por exemplo, dadas as matrizes $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B_{3\times2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, temos que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot 1 & 1\cdot(-1)+2\cdot 4+3\cdot 1 \\ 2\cdot 2+(-1)\cdot 0+0\cdot 1 & 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 4+0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Convém observar que, neste caso, $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}$ resulta numa matriz 2×2. Já o produto $B_{3\times 2}\cdot A_{2\times 3}$ resultará numa matriz 3×3. Ou seja, em geral o produto de matrizes não comuta, e em geral temos que

$$A\cdot B \neq B\cdot A.$$

De fato, pode acontecer que o produto $A\cdot B$ esteja definido, mas o produto $B\times A$ não esteja sequer definido. Por exemplo, se $A_{2\times 3}$ e $B_{3\times 4}$, temos que $A\cdot B$ estará bem definido, mas $B\cdot A$ não tem sentido. Verifique!

Outro fato importante a ser observado é que, dada uma matriz $A_{m\times n}$, temos que I_n é neutro multiplicativo à direita de A e que I_m é neutro multiplicativo à esquerda de A, ou seja,

$$A_{m\times n}\cdot I_n = A \quad \text{e} \quad I_m\cdot A_{m\times n} = A.$$

Definição 1.5 Dizemos que duas matrizes $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e $B=(b_{ij})_{m\times n}$, de mesmo tamanho, são *iguais* se, e somente se, $a_{ij}=b_{ij}$, $\forall i\in\{1,2,...,m\}$ e $\forall j\in\{1,2,...,n\}$.

Ou seja, da mesma forma que estabelecemos uma igualdade de vetores (dois vetores são iguais quando as componentes de mesma posição são iguais), temos que duas matrizes são iguais quando seus elementos de mesma posição forem iguais.

Para verificar uma série de propriedades envolvendo igualdade de matrizes, mostramos a igualdade entre seus elementos de mesma posição.

Teorema 1.6 *(Propriedades algébricas das matrizes) Sejam A,B,C matrizes e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Então, valem as seguintes propriedades (onde elas estiverem bem definidas):*

01) $A+(B+C)=(A+B)+C$.

02) $A + B = B + A$.

03) *Existe uma matriz* 0 *tal que* $A + 0 = 0 + A = A$ *(matriz nula).*

04) *Para toda matriz* A*, existe uma matriz* B *tal que* $A+B = 0$*. Denotamos* $B = -A$.

05) *Existe uma matriz* I *tal que* $A \cdot I = I \cdot A = A$*. (matriz identidade)*

06) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

07) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

08) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

09) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

10) $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$.

Observação 1.7 Note que a propriedade 04) nos motiva o conceito de *diferença entre matrizes.* Ou seja, dadas duas matrizes A e B, de mesmo tamanho, podemos definir a diferença entre A e B pondo

$$A - B = A + (-B),$$

que não deixa de ser parecido com a maneira como definimos a diferença de dois vetores. Mas cuidado: a matriz $-A$ não recebe o nome de "simétrica"! Matriz simétrica é um conceito bem diferente e o veremos na Definição 1.11.

Demonstração da Proposição. Faremos a prova de algumas apenas e deixaremos as demais para o leitor.

01) $A + (B + C) = (A + B) + C$:
Escreva $B + C = S$, onde $S = (s_{ij})$ é tal que

$$s_{ij} = b_{ij} + c_{ij}.$$

Dessa forma, escrevemos

$$A + (B + C) = A + S = T = (t_{ij}),$$

onde

$$t_{ij} = a_{ij} + s_{ij}.$$

Por outro lado, escreva $A + B = Z$, onde $Z = (z_{ij})$, tal que

$$z_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

Dessa forma, escrevendo

$$(A + B) + C = Z + C = W = (w_{ij}),$$

onde

$$w_{ij} = z_{ij} + c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = a_{ij} + s_{ij} = t_{ij}.$$

Assim, concluímos que $w_{ij} = t_{ij}$, $\forall i$, $\forall j$, ou seja, $W = T$, o que mostra que

$$(A + B) + C = Z + C = W = T = A + S = A + (B + C),$$

provando 01).

05) Existe uma matriz I tal que $A \cdot I = I \cdot A = A$ (matriz identidade):
De fato, tome $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e considere $I = (\delta_{ij})_{n\times n}$. Então, escrevendo $A \cdot I = C$, temos que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \delta_{kj} = a_{i1} \cdot \delta_{1j} + a_{i2} \cdot \delta_{2j} + ... + a_{ij} \cdot \delta_{jj} + ... + a_{in} \cdot \delta_{n_j} = a_{ij},$$

pois $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Ou seja, concluímos que

$$c_{ij} = a_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\},$$

ou seja, mostramos que

$$A \cdot I = C = A.$$

Analogamente mostramos que $I \cdot A = A$. Isso prova 05).

08) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$:
Dadas as matrizes $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ e $C_{n\times p}$, escreva

$$S = B + C,$$

e denotando $S = (s_{ij})_{n\times p}$, onde

$$s_{ij} = b_{ij} + c_{ij},$$

temos

$$A \cdot (B + C) = A_{m\times n} \cdot S_{n\times p} = T_{m\times p},$$

onde

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot s_{kj}. \tag{1.1}$$

Por outro lado, denote

$$A \cdot B = P_{m\times p} \quad \text{e} \quad A \cdot C = Q_{m\times p},$$

onde

$$p_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \cdot b_{\ell j} \quad \text{e} \quad q_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \cdot c_{\ell j}.$$

Dessa forma, temos que

$$A \cdot B + A \cdot C = P + Q = R,$$

onde cada elemento r_{ij} dessa matriz é dado por

$$r_{ij} = p_{ij} + q_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \cdot b_{\ell j} + \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \cdot c_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{n} (a_{i\ell} \cdot b_{\ell j} + a_{i\ell} \cdot c_{\ell j}) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}(b_{\ell j} + c_{\ell j}) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \cdot s_{\ell j} = t_{ij},$$

ou seja, $r_{ij} = t_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, ..., m\}$, $\forall j \in \{1, 2, ..., p\}$, ou seja, mostramos que $R = T$, i.e.,

$$A \cdot B + A \cdot C = R = T = A(B + C).$$

09) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$ e $C = (c_{ij})_{p\times q}$, mostraremos que

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Escreva $M = (A \cdot B)_{m\times p}$ e $W = (B \cdot C)_{n\times q}$. Assim, temos que os elementos m_{ij} de M e w_{ij} de W são, respectivamente, dados por

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \text{e} \quad w_{ij} = \sum_{\ell=1}^{p} b_{i\ell} \cdot c_{\ell j}. \tag{1.2}$$

Note que, denotando

$$(A \cdot B) \cdot C = (M)_{m\times p} \cdot (C)_{p\times q} = (F)_{m\times q},$$

usando (1.2) temos que cada elemento f_{ij} de F é dado por

$$f_{ij} = \sum_{\ell=1}^{p} m_{i\ell} \cdot c_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{k\ell} \right) \cdot c_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} \cdot b_{k\ell} \cdot c_{\ell j}) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (b_{k\ell} \cdot c_{\ell j}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} a_{ik} \cdot (b_{k\ell} \cdot c_{\ell j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{\ell=1}^{p} b_{k\ell} \cdot c_{\ell j} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot w_{kj}.$$

Por outro lado, denotemos

$$A \cdot (B \cdot C) = A_{m\times n} \cdot W_{n\times q} = G_{m\times q},$$

onde $g_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot w_{kj} = f_{ij}$.

Como $g_{ij} = f_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $\forall j \in \{1, 2, ..., q\}$, concluímos que as matrizes F e G são iguais, ou seja, que

$$(A \cdot B) \cdot C = F = G = A \cdot (B \cdot C).$$

$\square$

Obs. Na prova acima usamos uma propriedade "comutativa" para somatórios, ou seja, vale a propriedade

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} F(i,j) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} F(i,j),$$

onde $F(i,j)$ é uma expressão qualquer que depende dos índices i e j.

Como um bom exercício, prove essa igualdade.

Exercícios

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, calcule $3A + 4B - 2C$.

2. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ e $B = (b_{ij})_{2\times 2}$ definidas, respectivamente, por

$$a_{ij} = i - 2j \quad \text{e} \quad b_{ij} = \begin{cases} i - j, & \text{se} \quad i \geq j \\ 1, & \text{se} \quad i < j. \end{cases}$$

   Determine $A + B$, $A - B$ e $A \cdot B$.

3. *Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix}$ e $D = (d_{ij})$ uma matriz diagonal de ordem 3. Determine os valores de x, y e z para os quais se verifique

$$AD = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}.$$

4. *Para cada número real α, considere a matriz

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

   Mostre que $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

5. *É verdade que se $A \cdot B = 0$, então $B \cdot A = 0$?

6. Dê um exemplo de duas matrizes A e B de mesmo tamanho tais que
$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2.$$

7. É verdade, de modo geral, que $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$, onde A e B são matrizes?

8. Sejam $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ matrizes triangulares superiores. Mostre que AB é uma matriz triangular superior com diagonal $a_{11}b_{11}$, $a_{22}b_{22}$, ..., $a_{nn}b_{nn}$.

9. *Seja $A_{m\times m} = (a_{ij})_{m\times m}$ uma matriz quadrada. Definimos o *traço* de A, e escrevemos $tr(A)$, como a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja,
$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{mm}.$$
Mostre que $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$, onde A e B são matrizes $m \times m$.

10. ***(Sel. Mestrado UFRGS 2006/2)** Se M é uma matriz $n \times n$ com elementos $\{m_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$, definimos o seu *traço* por meio da expressão $tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.
    (a) Se A e B são matrizes $n \times n$, então prove que $tr(AB) = tr(BA)$.
    (b) Se I é a matriz identidade $n \times n$, então mostre que não existem matrizes A e B tais que $AB - BA = I$.

1.1.3 Matriz transposta

Definição 1.8 Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, definimos a *matriz transposta* de A, e denotamos por A^t, a matriz definida por
$$A^t = (a_{ji})_{n\times m}.$$

Neste livro, o leitor irá encontrar o conteúdo de um primeiro curso de Álgebra Linear, abrangendo todos os tópicos abordados nessa disciplina, desde matrizes a espaços com produto interno.

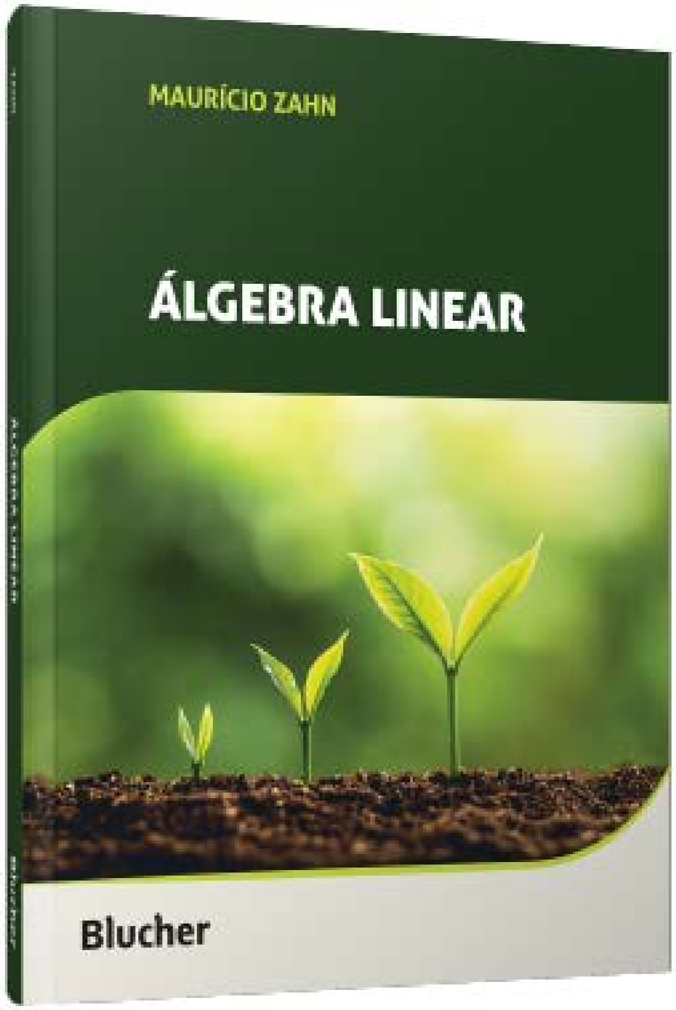
O autor procurou apresentar a teoria por inteiro, ou seja, o conteúdo foi escrito com todas as explicações necessárias para deixar o texto autossuficiente, recorrendo à linguagem da geometria analítica (um pré-requisito para a álgebra linear com o qual os alunos já estão familiarizados), mantendo todas as proposições demonstradas com riqueza de detalhes. Além disso, há uma ampla coleção de exercícios resolvidos e exercícios propostos, proporcionando uma harmonia entre teoria e exercícios.

Também foram incluídos dois apêndices ao final da obra, onde apresentamos a resolução de vários exercícios, sendo muitos deles de seleções de mestrado em Matemática de algumas universidades do Brasil, e uma explicação sobre o princípio da indução matemática.

ISBN 978-65-5506-264-9
9 786555 062649

www.blucher.com.br

Blucher



Clique aqui e:

VEJA NA LOJA

Álgebra Linear

Maurício Zahn

ISBN: 9786555062649
Páginas: 290
Formato: 17 x 24 cm
Ano de Publicação: 2021