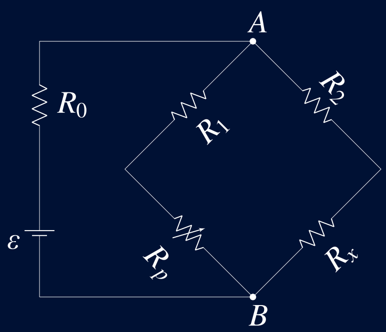
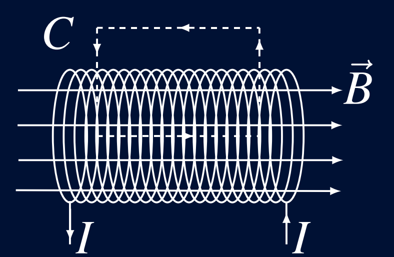
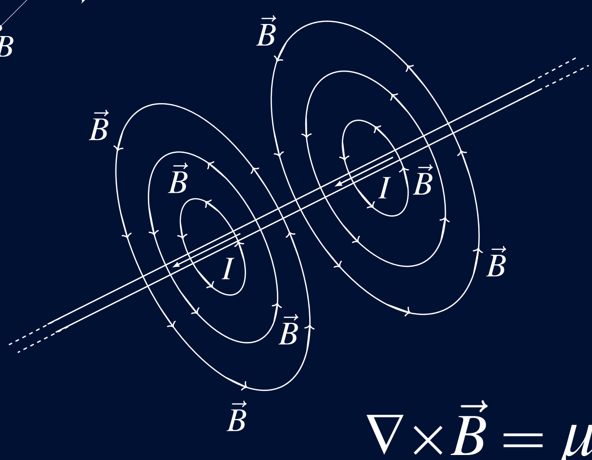
IVAN DE OLIVEIRA

INTRODUÇÃO AO ELETROMAGNETISMO







$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Blucher

Ivan de Oliveira

INTRODUÇÃO AO ELETROMAGNETISMO

Introdução ao eletromagnetismo
© 2021 Ivan de Oliveira
Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher
Editor Eduardo Blücher
Coordenação editorial Jonatas Eliakim
Produção editorial Isabel Silva
Diagramação e imagem da capa Ivan de Oliveira
Revisão de texto Gabriela Castro
Capa Leandro Cunha

Editora Blucher
Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4° andar
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009. É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora. Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Oliveira, Ivan de
Introdução ao eletromagnetismo / Ivan de Oliveira – São Paulo: Blucher, 2021.
324 p.: il.
ISBN 978-65-5506-170-3 (impresso)
ISBN 978-65-5506-171-0 (eletrônico)
1. Eletromagnetismo 2. Física I. Título
21-2646 CDD 530

Índices para catálogo sistemático:
1. Eletromagnetismo

Conteúdo

Capítulo 1

Análise vetorial e sistemas de coordenadas

Em muitos casos na física, elementos como direção e sentido são usados para a descrição completa de fenômenos, expressos pelo conceito de *vetores*. Quando as grandezas empregam esses elementos, são chamadas de *grandezas vetoriais*. Já em grandezas conhecidas como *grandezas escalares*, eles não são necessários. Neste capítulo, faremos uma descrição da álgebra vetorial, assim como dos sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

1.1 Vetores

1.1.1 Grandezas escalares

As grandezas escalares são aquelas caracterizadas simplesmente com um número e sua respectiva unidade. Energia, trabalho de uma força, pressão, massa, temperatura, tempo, carga elétrica, corrente elétrica, resistência elétrica e potencial elétrico são alguns exemplos dessas grandezas. Fica claro que, quando medimos a massa de um corpo, o valor da grandeza independe da direção e do sentido: basta dizer que a massa de é 35 kg para caracterizá-la.

1.1.2 Grandezas vetoriais

As grandezas vetoriais são completamente caracterizadas quando definimos três elementos: um módulo (número), uma direção e um sentido. São exemplos desse tipo de grandeza: deslocamento, velocidade, aceleração, força, impulso, momento linear, torque, momento angular, campo elétrico, campo magnético etc. É evidente que, para descrever a força aplicada em um determinado ponto, devemos definir o valor da força (módulo), a direção de aplicação dessa força e o sentido.

1.1.3 Representação de grandezas vetoriais

Há duas formas de representar as grandezas vetoriais: a algébrica e a geométrica. A representação algébrica será utilizada para a álgebra vetorial, onde será necessária a definição de direção e sentido. Já a representação geométrica será utilizada nas resoluções de problemas, onde uma descrição geométrica é necessária.

1.1.3.1 Representação algébrica de vetores

Quando utilizamos a representação algébrica, usamos uma letra com uma seta em cima, onde a letra representa a grandeza e a seta indica seu caráter vetorial, representando assim o vetor $\vec{V}$. Quando estamos interessados apenas no módulo da grandeza vetorial, representamos esse valor como sendo $|\vec{V}|$ ou simplesmente V.

1.1.3.2 Representação geométrica de vetores

Uma grandeza vetorial é representada geometricamente por um seguimento de reta orientado. A Fig. 1.1 mostra a representação geométrica de um vetor, onde A é a origem e B, a extremidade. Para o vetor $\vec{V}$ mostrado na Fig. 1.1, temos as seguintes características: **direção**: a mesma da reta suporte t; **sentido**: de A para B; e **módulo**: igual a distância entre A e B.

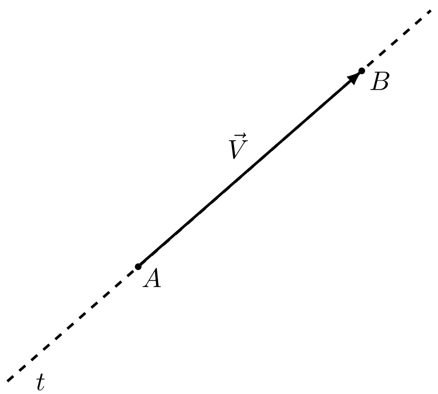


Figura 1.1: *Representação geométrica de grandezas vetoriais.*

1.1.4 Soma e subtração geométricas de vetores

Consideremos os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ mostrados na Fig. 1.2. Mantendo a direção e sentido de $\vec{a}$ e de $\vec{b}$, une-se a origem de $\vec{b}$ com a extremidade de $\vec{a}$, e o resultado (soma) é um vetor que tem a mesma origem do vetor $\vec{a}$ e a mesma extremidade do vetor $\vec{b}$. A Fig. 1.3 mostra o vetor soma $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$.

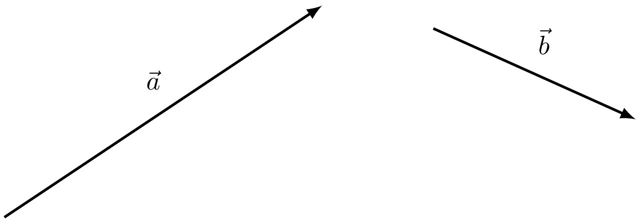


Figura 1.2: *Representação geométrica dos vetores* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$.

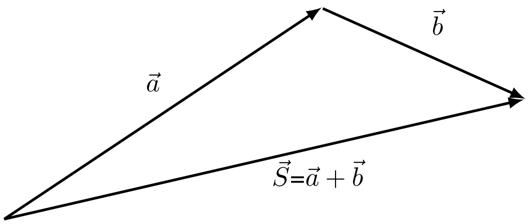


Figura 1.3: *Soma geométrica dos vetores* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *nessa ordem*.

É interessante notar que a ordem da soma dos vetores é irrelevante, ou seja, a lei comutativa também vale para a soma dos vetores. Em outras palavras,

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{1.1}$$

A Fig. 1.4 mostra que somando $\vec{a}+\vec{b}$ ou $\vec{b}+\vec{a}$, o vetor resultante mantém a mesma direção, sentido e módulo.

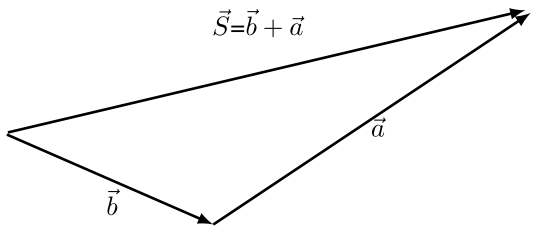


Figura 1.4: *Soma geométrica dos vetores* $\vec{b}$ *e* $\vec{a}$.

Consideremos agora os três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, mostrados na Fig. 1.5. Somando os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, temos o vetor resultante $\vec{S_1}=\vec{a}+\vec{b}$. Somando agora o vetor resultante $\vec{S_1}$ com o vetor $\vec{c}$, temos o vetor resultante $\vec{S}$, mostrado na Fig. 1.6.

É importante notar que, somando os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, obtemos o vetor $\vec{S_1}$, e, somando esse vetor com o vetor $\vec{c}$, obtemos o vetor resultante $\vec{S}$, como mostra a Fig. 1.7. Fica evidente que a ordem da soma também é irrelevante, pois o vetor resultante mantém

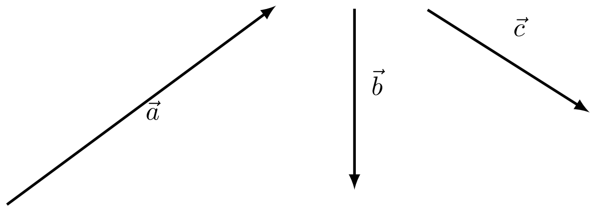


Figura 1.5: *Representação geométrica dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.*

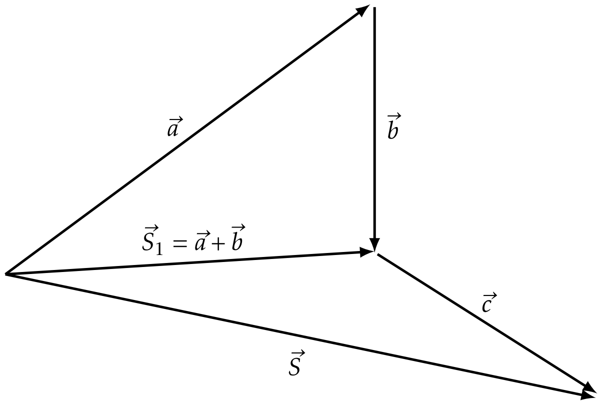


Figura 1.6: *Soma geométrica dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ na ordem a, b e c.*

sua direção e seu sentido e possui o mesmo módulo para qualquer ordem da soma e número de vetores, como fica claro pela Fig. 1.7. Dessa forma, é possível associar vetores através da lei associativa, ou seja,

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{1.2}$$

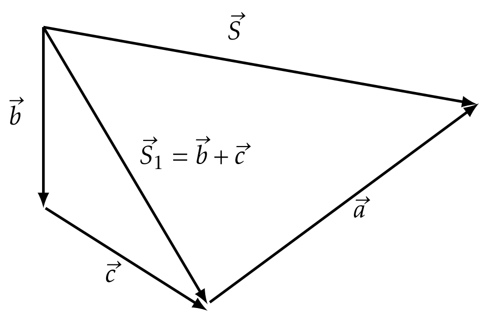


Figura 1.7: *Soma geométrica dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, na ordem dos vetores b, c e a.*

Para definir a subtração entre dois vetores, vamos inicialmente definir o que são vetores opostos. Dois vetores são opostos quando possuem o mesmo módulo e direção, mas sentidos opostos. Na Fig. 1.8, temos a representação de dois vetores opostos.

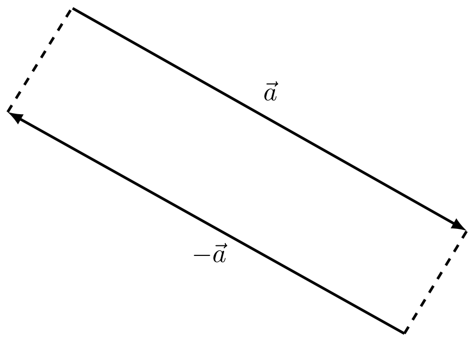


Figura 1.8: *Vetores opostos.*

O vetor diferença $\vec{d}$ entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é definido como a soma entre o vetor $\vec{a}$ e o vetor oposto de $\vec{b}$, ou seja,

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) \tag{1.3}$$

Assim, todas as regras descritas acima são válidas para encontrar a diferença entre dois vetores. Na Fig. 1.9, mostramos a diferença entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

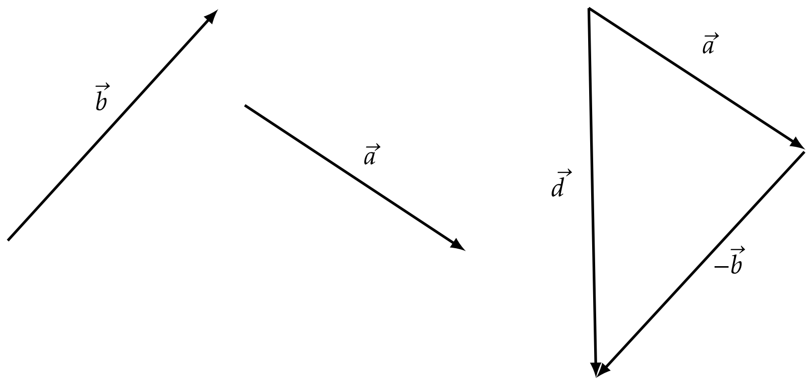


Figura 1.9: *Vetor diferença* $\vec{d}$.

1.1.5 Componentes de um vetor

Definimos como componente de um vetor a projeção desse vetor ao longo de dado eixo. Na Fig. 1.10, mostramos as componentes cartesianas do vetor $\vec{A}$. As projeções $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$

são as componentes vetoriais de $\vec{A}$ nas direções x e y, respectivamente. O ângulo θ indica a direção do vetor $\vec{A}$ em relação ao eixo x.

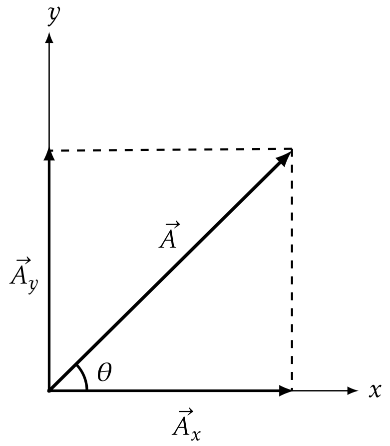


Figura 1.10: *Componentes cartesianas de um vetor.*

Utilizando a Fig. 1.10, podemos determinar as componentes cartesianas do vetor $\vec{A}$. Fica claro pela figura que:

$$\cos\theta = \frac{A_x}{A} \Rightarrow A_x = A\cos\theta \tag{1.4}$$

$$\sin\theta = \frac{A_y}{A} \Rightarrow A_y = A\sin\theta \tag{1.5}$$

Conhecendo as componentes do vetor $\vec{A}$, é possível determinar o módulo e a direção desse vetor. Assim, o módulo e a direção do vetor $\vec{A}$ na Fig. 1.10 são, respectivamente:

$$|\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 \Rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{1.6}$$

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \tag{1.7}$$

Vale salientar que, se o vetor $\vec{A}$ for em 3 dimensões, o significado das componentes é o mesmo, porém a relação para o módulo do vetor fica sendo:

$$|\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.8}$$

1.1.6 Vetores unitários

Os vetores unitários são vetores que tem módulos iguais a 1 e apontam para determinada direção. A utilização desses vetores é fundamental para realizar operações com os vetores. Neste livro, utilizaremos os vetores unitários $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ para indicar as direções x, y e z, respectivamente, mostrados na Fig. 1.11. É importante notar que os vetores unitários são perpendiculares entre si. O fato do ângulo entre eles ser de 90^o tem consequências importantes quando realizamos o produto entre vetores.

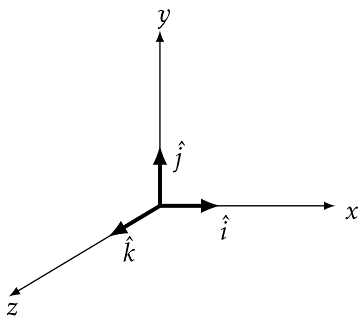


Figura 1.11: *Vetores unitários.*

Utilizando os vetores unitários, podemos escrever um vetor $\vec{A}$ em 3 dimensões da seguinte forma:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \tag{1.9}$$

onde A_x, A_y e A_z são as componentes do vetor $\vec{A}$ nas direções x, y e z, respectivamente.

Definimos acima o vetor unitário como um vetor que tem módulo igual a 1 e aponta para determinada direção. Esse vetor unitário pode ser definido da seguinte forma:

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \tag{1.10}$$

onde $\hat{a}$ é o vetor unitário que aponta na direção do vetor $\vec{A}$ de módulo igual a $|\vec{A}|$.

1.1.7 Operações algébricas com vetores

As operações algébricas entre os vetores são extremamente úteis no eletromagnetismo. Nesta seção são descritas as operações soma, subtração e produto, sendo esta última dividida em produto escalar e produto vetorial. É importante salientar que a divisão entre vetores não é uma operação definida.

1.1.7.1 Adição e subtração de vetores

Para realizarmos a soma e a subtração de dois vetores definiremos os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ da seguinte forma:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \tag{1.11}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \tag{1.12}$$

A partir dessa definição devemos somar as respectivas componentes nas devidas direções, assim a soma vetorial entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ fica sendo:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \tag{1.13}$$

Como já visto anteriormente, a subtração também é descrita como uma soma, porém devemos somar o vetor $\vec{A}$ com o oposto do vetor $\vec{B}$, da seguinte maneira:

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k} \tag{1.14}$$

É interessante notarmos que a soma ou a subtração entre dois vetores resulta em outro vetor. Essa característica não ocorre quando realizamos o produto escalar entre dois vetores, como será descrito a seguir.

1.1.7.2 Produto entre vetores

Muitas grandezas na física são descritas como o produto entre dois vetores, por exemplo: trabalho de uma força é o resultado do produto escalar entre o vetor força e o vetor deslocamento, momento angular é o resultado do produto vetorial entre o vetor posição e vetor momento linear, entre outras. Dessa maneira, o produto entre vetores tem um papel fundamental no tratamento de algumas grandezas, pois, além de descrevê-las, seu resultado pode ser um vetor ou um escalar, diferentemente da soma e da subtração.

1.1.7.2.1 Produto escalar O produto escalar entre dois vetores é definido como

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \tag{1.15}$$

onde $|\vec{A}|$ e $|\vec{B}|$ são os módulos dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, respectivamente, e θ o ângulo entre os vetores. Podemos interpretar o produto escalar entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ como o produto do módulo do vetor $\vec{A}$ pela projeção do vetor $\vec{B}$ ao longo do vetor $\vec{A}$, exemplificado na Fig. 1.12.

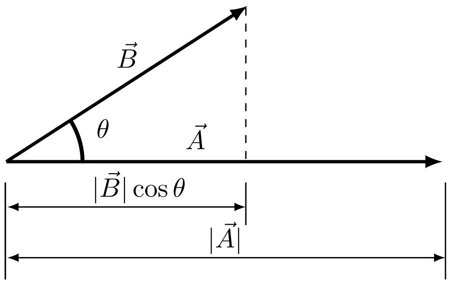


Figura 1.12: *Produto escalar entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.*

É importante notar que o resultado do produto escalar entre dois vetores é um escalar, ou seja, um número. Ele também pode ser calculado utilizando os vetores unitários, e, para isso, consideremos os vetores

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \tag{1.16}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \tag{1.17}$$

O produto escalar entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é dado por

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \tag{1.18}$$

e, realizando as respectivas multiplicações temos

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x(\hat{i}\cdot\hat{i}) + A_xB_y(\hat{i}\cdot\hat{j}) + A_xB_z(\hat{i}\cdot\hat{k}) + A_yB_x(\hat{j}\cdot\hat{i}) + \cdots + A_zB_z(\hat{k}\cdot\hat{k}) \tag{1.19}$$

Utilizando a definição de produto escalar da Eq. (1.15) e com o auxílio da Fig. 1.11 temos que

$$\hat{i}\cdot i = 1 \qquad \hat{j}\cdot\hat{i} = 0 \qquad \hat{k}\cdot\hat{i} = 0 \tag{1.20}$$

$$\hat{i}\cdot j = 0 \qquad \hat{j}\cdot\hat{j} = 1 \qquad \hat{k}\cdot\hat{j} = 0 \tag{1.21}$$

$$\hat{i}\cdot k = 0 \qquad \hat{k}\cdot\hat{j} = 0 \qquad \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \tag{1.22}$$

e, dessa forma, o produto escalar fica sendo

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.23}$$

É importante notar que, independentemente da maneira que calculamos o produto escalar entre dois vetores, o resultado é sempre um escalar.

1.1.7.2.2 Produto vetorial O produto vetorial entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ tem como resultado um vetor $\vec{C}$, que é perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e cujo módulo é dado por

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta \tag{1.24}$$

onde θ é o menor ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Na Fig. 1.13, temos a representação dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e o vetor $\vec{C}$ como resultado do produto vetorial.

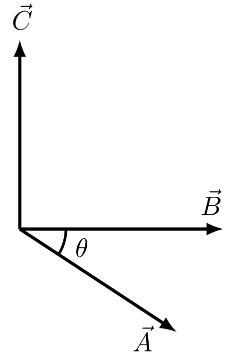


Figura 1.13: *Produto vetorial entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.*

Na Fig. 1.14, mostramos a chamada regra da mão direita, que permite determinar a direção e o sentido do vetor $\vec{C}$.

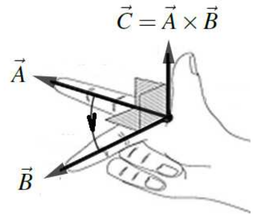


Figura 1.14: *Regra da mão direita para o produto vetorial. Rotação no sentido do vetor $\vec{A}$ para o $\vec{B}$.*

Assim como no produto escalar, podemos calcular o produto vetorial utilizando os vetores unitários. Consideremos os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ dados por

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \tag{1.25}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k} \tag{1.26}$$

e o vetor $\vec{C}$ dado por

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \tag{1.27}$$

Utilizando os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, temos para o vetor $\vec{C}$

$$\vec{C} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \tag{1.28}$$

Ao realizar as devidas multiplicações vetoriais e levando-se em conta que

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0 \qquad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \qquad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \tag{1.29}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j} \times \hat{j} = 0 \qquad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} \tag{1.30}$$

$$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \qquad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k} \times \hat{k} = 0 \tag{1.31}$$

o vetor $\vec{C}$, resultado do produto vetorial entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$, é dado por

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} \tag{1.32}$$

É fácil mostrar que a expressão acima pode ser escrita na forma de um determinante, ou seja,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.33}$$

No produto escalar, a ordem do produto não importa, ou seja,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \tag{1.34}$$

Isso não é uma surpresa, pois o resultado do produto escalar é um número, em outras palavras, o produto escalar é comutativo. Já o produto vetorial não obedece à propriedade comutativa, ou seja,

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A} \tag{1.35}$$

É fácil mostrar e por isso deixaremos como como exercício mostrar que,

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \tag{1.36}$$

1.1.8 Identidades vetoriais

Nesta seção serão listadas algumas relações entre vetores que possam ser úteis (Tab.1.1). Algumas delas serão demonstradas, enquanto outras deixaremos como exercícios.

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C} \quad (1.37)$$

$$\vec{A}\cdot(a\vec{B}) = a\vec{A}\cdot\vec{B} \quad \text{onde } a \text{ é um escalar} \quad (1.38)$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C} \quad (1.39)$$

$$(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C} \quad (1.40)$$

$$\vec{A}\times a\vec{B} = a\vec{A}\times\vec{B} \quad \text{onde } a \text{ é um escalar} \quad (1.41)$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = 0 \quad (1.42)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A} = \vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B} \quad (1.43)$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \quad (1.44)$$

Tabela 1.1: Identidades vetoriais.

Exercício Resolvido 1.1.1

Demonstre que

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

SOLUÇÃO: *Definindo um vetor $\vec{D}$ como*

$$\vec{D} = \vec{B}+\vec{C} = (B_x+C_x)\hat{i} + (B_y+C_y)\hat{j} + (B_z+C_z)\hat{k}$$

temos que

$$\vec{A}\cdot\vec{D} = A_xD_x + A_yD_y + A_zD_z$$
$$\vec{A}\cdot\vec{D} = A_x(B_x+C_x) + A_y(B_y+C_y) + A_z(B_z+C_z)$$

Lembrando que os componentes são escalares, a relação acima pode ser escrita como

$$\vec{A}\cdot\vec{D} = A_xB_x + A_xC_x + A_yB_y + A_yC_y + A_zB_z + A_zC_z$$

A partir da relação anterior, fica fácil identificar que

$$\vec{A}\cdot\vec{D} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z + A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z$$
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

■

Exercício Resolvido 1.1.2

Demonstre que

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

SOLUÇÃO: *Definindo um $\vec{D}$ como*

$$\vec{D} = \vec{B} + \vec{C}$$
$$\vec{D} = (B_x + C_x)\hat{i} + (B_y + C_y)\hat{j} + (B_z + C_z)\hat{k}$$

temos:

$$\vec{A} \times \vec{D} = (A_y D_z - A_z D_y)\hat{i} + (A_x D_z - A_z D_x)\hat{j} + (A_x D_y - A_y D_x)\hat{k}$$
$$\vec{A} \times \vec{D} = [A_y(B_z + C_z) - A_z(B_y + C_y)]\hat{i} + [A_x(B_z + C_z) - A_z(B_x + C_x)]\hat{j}$$
$$+[A_x(B_y + C_y) - A_y(B_x + C_x)]\hat{k}$$

Rearranjando os termos conseguimos

$$\vec{A} \times \vec{D} = [(A_y B_z - A_z B_y) + (A_y C_z - A_z C_y)]\hat{i} + [(A_x B_z - A_z B_x) + (A_x C_z - A_z C_x)]\hat{j}$$
$$+[(A_x B_y - A_y B_x) + (A_x C_y - A_y C_x)]\hat{k}$$
$$\vec{A} \times \vec{D} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_x B_z - A_z B_x)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} + (A_y C_z - A_z C_y)\hat{i}$$
$$+(A_x C_z - A_z C_x)\hat{j} + (A_x C_y - A_y C_x)\hat{k}$$

Com a Eq. (1.32), temos

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

■

Exercício Resolvido 1.1.3

Demonstre que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A}$$

SOLUÇÃO: *Definindo um vetor $\vec{D}$ como*

$$\vec{D} = \vec{B} \times \vec{C}$$
$$\vec{D} = (B_y C_z - B_z C_y)\hat{i} + (B_x C_z - B_z C_x)\hat{j} + (B_x C_y - B_y C_x)\hat{k}$$

temos

$$\vec{A} \cdot \vec{D} = A_x D_x + A_y D_y + A_z D_z$$
$$\vec{A} \cdot \vec{D} = A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_x C_z - B_z C_x) + A_z(B_x C_y - B_y C_x)$$

Fazendo as multiplicações e rearranjando os termos, obtemos

$$\vec{A} \cdot \vec{D} = B_x(C_y A_z - C_z A_y) + B_y(C_z A_x - C_x A_z) + B_z(C_x A_y - C_y A_x)$$

É fácil perceber que

$$(\vec{C}\times\vec{A})_x = C_yA_z - C_zA_y \qquad (\vec{C}\times\vec{A})_y = C_zA_x - C_xA_z \qquad (\vec{C}\times\vec{A})_z = C_xA_y - C_yA_x$$

Então

$$\vec{A}\cdot\vec{D} = B_x(\vec{C}\times\vec{A})_x + B_y(\vec{C}\times\vec{A})_y + B_z(\vec{C}\times\vec{A})_z$$

logo, temos finalmente

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}$$

■

1.2 Sistemas de coordenadas

Em muitas situações que envolvem a solução de problemas e a formulação de conceitos físicos, é importante fazer uso de um sistema de coordenadas adequado a simetria do problema. Nesta seção são descritas os três sistemas de coordenadas: o sistema de coordenadas cartesianas, o de coordenadas cilíndricas e o de coordenadas esféricas.

1.2.1 Coordenadas cartesianas

Em um sistema de coordenadas cartesianas, um ponto $P(x, y, z)$ é localizado pela intersecção de três planos perpendiculares entre si, com as coordenadas x, y e z constantes, como mostrado na Fig. 1.15.

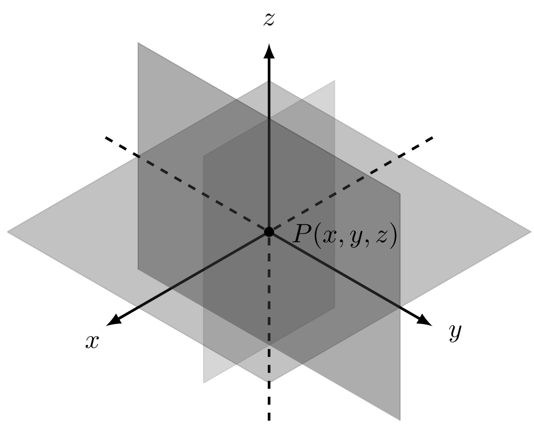


Figura 1.15: *Sistema de coordenadas cartesianas.*

Nesse sistema, o comprimento diferencial $d\vec{\ell}$, o elemento de área e o de volume são dados por:

$$d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \tag{1.45}$$

$$dA_z = dxdy \tag{1.46}$$

$$dA_y = dxdz \tag{1.47}$$

$$dA_x = dydz \tag{1.48}$$

$$dv = dxdydz \tag{1.49}$$

Na Fig. 1.16, mostramos os respectivos elementos de áreas dados pelas Eq. (1.46-1.48) e o elemento de volume dv. Os elementos das Eq. (1.46-1.48) representam as projeções do elemento de volume dv nos planos xy, xz e yz, respectivamente.

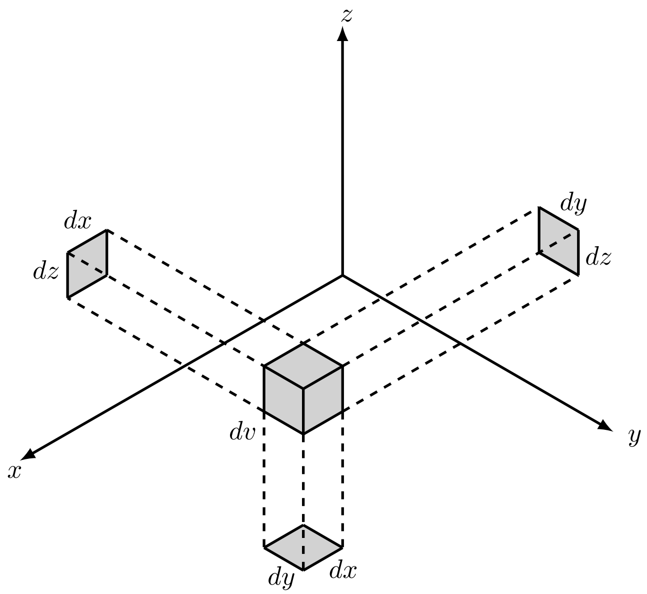


Figura 1.16: *Elementos de volume e de área em um sistema de coordenadas cartesianas.*

Exercício Resolvido 1.2.1

Considere um cubo de lado ℓ, cuja densidade volumétrica varia com a coordenada x da seguinte forma: $\rho = \alpha x$, onde α é uma constante. Determine a massa desse cubo.

SOLUÇÃO: *Como a densidade varia com a coordenada x, podemos determinar a massa do cubo da seguinte maneira:*

$$m = \int_V \rho dv$$

$$m = \int_0^\ell \int_0^\ell \int_0^\ell \alpha x dx dy dz$$

Ao resolver as integrais, encontramos que

$$m = \frac{\alpha \ell^4}{2}$$

■

1.2.2 Coordenadas cilíndricas

Em um sistema de coordenadas cilíndricas circulares, as coordenadas de localização de um ponto são (ρ,ϕ,z), onde ρ é a distância perpendicular ao eixo z, ϕ é o ângulo entre o eixo x e o semiplano que passa pelo eixo z e z é um plano paralelo ao plano xy. Na Fig. 1.17, mostramos cada uma das coordenadas. Os limites para ρ, ϕ e z são:

$$0 \leq \rho < \infty \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad -\infty < z < \infty \tag{1.50}$$

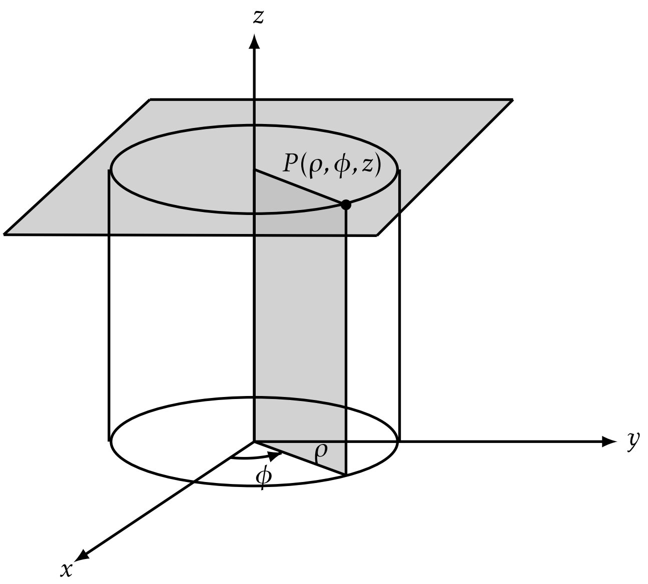


Figura 1.17: *Sistema de coordenadas cilíndricas.*

É fácil perceber pela Fig. 1.17 que as relações de transformação de coordenadas cartesianas para as coordenadas cilíndricas são dadas por

$$x = \rho \cos\phi \qquad y = \rho \sin\phi \qquad z = z \tag{1.51}$$

O vetor posição $\vec{r}$ e o vetor deslocamento diferencial $d\vec{\ell}$ em coordenadas cilíndricas são dados por

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} \tag{1.52}$$

$$d\vec{\ell} = \hat{\rho}d\rho + \rho d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z} \tag{1.53}$$

onde os vetores unitários $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ e $\hat{z}$ estão representados na Fig. 1.18.

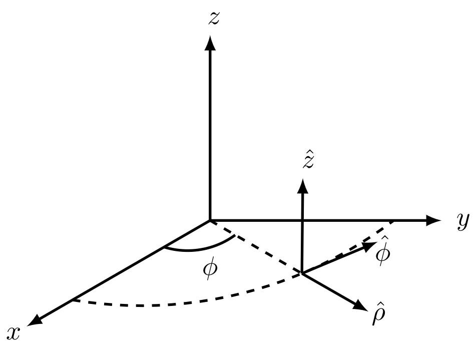


Figura 1.18: *Vetores unitários no sistema de coordenadas cilíndricas.*

Já na Fig. 1.19 mostramos o elemento de volume dv e a projeção deste no plano xy (área), dados respectivamente por

$$dv = \rho d\rho d\phi dz \tag{1.54}$$

$$dA = \rho d\rho d\phi \tag{1.55}$$

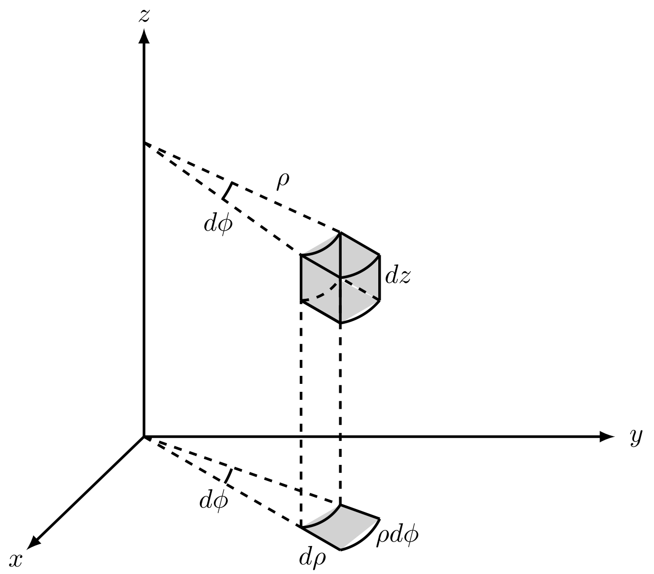


Figura 1.19: *Elementos de volume e de área em um sistema de coordenadas cilíndricas.*

Exercício Resolvido 1.2.2

Considere $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e calcule

$$\int_V f(x,y,z)dv$$

onde V é um cilindro definido por $x^2+y^2 \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

SOLUÇÃO: *Primeiro, vamos escrever a integral em coordenadas cilíndricas, substituindo*

$$x = \rho\cos\phi \qquad y = \rho\sin\phi \qquad z = z$$

em $\int_V f(x,y,z)dv$ *para conseguir*

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dv = \iiint_V \sqrt{\rho^2+z^2}\rho d\rho d\phi dz$$

com os seguintes limites: $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ *e* $0 \leq z \leq 1$. *Resolvendo as integrais em* ϕ *e* ρ*, que são imediatas, temos*

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{\rho^2+z^2}\rho d\rho d\phi dz = \frac{2\pi}{3}\left[\int_0^1 (1+z^2)^{3/2}dz - \int_0^1 z^3 dz\right]$$

A segunda integral acima é imediata, mas a primeira pode ser resolvida por substituição trigonométrica. Dessa forma, temos

$$\int_0^1 z^3 dz = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 (1+z^2)^{3/2} dz = \left[\frac{3}{8}\ln\left(\sqrt{z^2+1}+z\right)+\left(\frac{z^3}{4}+\frac{5z}{8}\right)\sqrt{z^2+1}\right]_0^1 = \frac{7}{4\sqrt{2}}+\frac{3}{8}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Dos resultados acima, obtemos finalmente que

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv = \frac{\pi}{12}\left[7\sqrt{2}+3\ln(1+\sqrt{2})-2\right]$$

■

1.2.3 Coordenadas esféricas

As coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) são definidas como mostra a Fig. 1.20, onde r é o raio de uma esfera centrado na origem e θ é o ângulo polar, ou seja, o ângulo entre o eixo z e o vetor $\vec{r}$. Já a coordenada azimutal ϕ é definida como o ângulo entre a projeção do vetor $\vec{r}$ no plano xy e o eixo x. Os limites para r, θ e ϕ são

$$0 \leq r < \infty \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \tag{1.56}$$

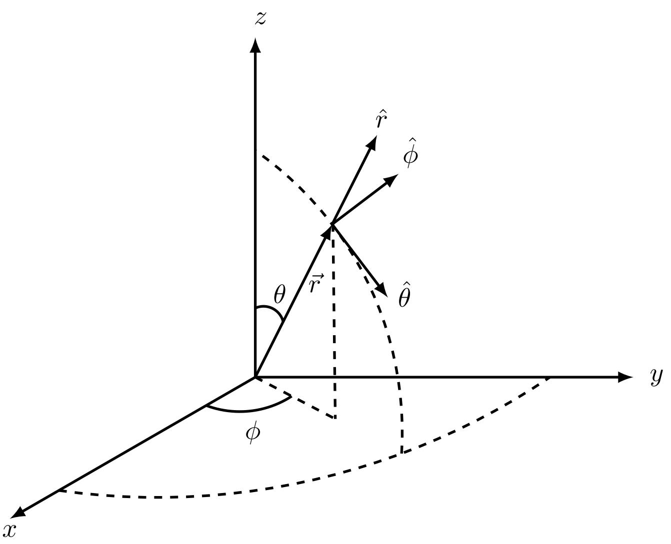


Figura 1.20: *Sistema de coordenadas esféricas.*

Analisando a Fig. 1.20, podemos facilmente encontrar as equações correspondentes de transformação das coordenadas cartesianas em esféricas, ou seja:

$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{1.57}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{1.58}$$

$$z = r\cos\theta \tag{1.59}$$

No sistema de coordenadas esféricas, o vetor posição é dado por

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\hat{i} + r\sin\theta\sin\phi\hat{j} + r\cos\theta\hat{k} \tag{1.60}$$

com

$$\hat{i} = \sin\theta\cos\phi\hat{r} + \cos\theta\cos\phi\hat{\theta} - \sin\phi\hat{\phi} \tag{1.61}$$

$$\hat{j} = \sin\theta\sin\phi\hat{r} + \cos\theta\sin\phi\hat{\theta} + \cos\phi\hat{\phi} \tag{1.62}$$

$$\hat{k} = \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta} \tag{1.63}$$

Já o elemento de comprimento é dado da seguinte forma:

$$d\vec{\ell} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi} \tag{1.64}$$

O elemento de área representado na Fig. 1.21 pela região hachurada e o elemento de volume são guais a

$$dA = r^2\sin\theta d\theta d\phi \tag{1.65}$$

$$dv = r^2\sin\theta drd\theta d\phi \tag{1.66}$$

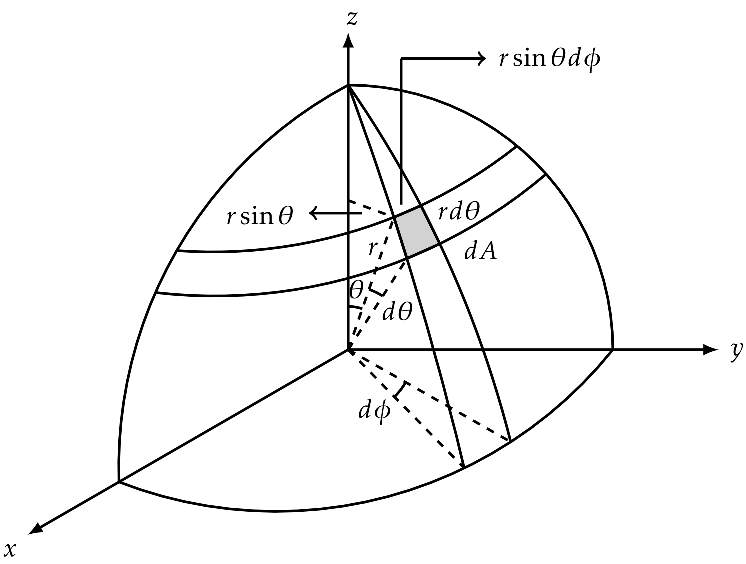


Figura 1.21: *Elemento de área em um sistema de coordenadas esféricas.*

Exercício Resolvido 1.2.3

Encontre o valor de

$$\int_V z dv$$

onde V é o volume definido por $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$.

SOLUÇÃO: *Primeiro vamos transformar a integral em coordenadas esféricas, substituindo*

$$x = r \sin\theta \cos\phi \qquad y = \rho \sin\theta \sin\phi \qquad z = r \sin\theta$$

em $\int_V z dv$, *para assim obter*

$$\iiint_V z dv = \iiint_V r \sin\theta r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

com os seguintes limites: $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. *Resolvendo as integrais, temos que*

$$\int_1^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r \sin\theta r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{15\pi}{4}$$

Logo,

$$\iiint_V z dv = \frac{15\pi}{4}$$

■

1.3 Funções vetoriais

1.3.1 Derivadas de funções vetoriais

Um vetor $\vec{F}$ em coordenadas cartesianas, por exemplo, pode ser função de uma grandeza escalar t e ser escrito da seguinte forma:

$$\vec{F} = \vec{F}(t) \tag{1.67}$$

$$\vec{F} = F_x(t)\hat{i} + F_y(t)\hat{j} + F_z(t)\hat{k} \tag{1.68}$$

onde $F_x(t), F_y(t)$ e $F_z(t)$ são as componentes do vetor $\vec{F}(t)$. É importante salientar que a função $\vec{F}$ pode ser representada em qualquer sistema de coordenadas. A derivada da função $\vec{F}$ é determinada da seguinte forma:

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t} \tag{1.69}$$

Considerando $\vec{F}$ como demonstrada na Eq. (1.68) e substituindo na Eq. (1.69), temos

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_x(t+\Delta t) - F_x(t)}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_y(t+\Delta t) - F_y(t)}{\Delta t}\hat{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_z(t+\Delta t) - F_z(t)}{\Delta t}\hat{k} \quad (1.70)$$

É fácil perceber que a derivada de uma função vetorial é dada por

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{dF_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dF_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dF_z(t)}{dt}\hat{k} \quad (1.71)$$

Usando o mesmo procedimento, é fácil demonstrar as propriedades de diferenciação para funções vetoriais mostradas na Tab.1.2, portanto deixaremos como exercícios.

Propriedades de diferenciação de funções vetoriais

$$\frac{d}{dt}(\vec{F} + \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} + \frac{d\vec{G}}{dt} \quad (1.72)$$

$$\frac{d}{dt}(f\vec{F}) = \frac{df}{dt}\vec{F} + f\frac{d\vec{F}}{dt} \quad (1.73)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \cdot \vec{G} + \vec{F} \cdot \frac{d\vec{G}}{dt} \quad (1.74)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{F} \times \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \times \vec{G} + \vec{F} \times \frac{d\vec{G}}{dt} \quad (1.75)$$

Tabela 1.2: Propriedades da diferenciação de funções vetoriais.

É importante perceber que as regras de diferenciação de funções vetoriais obedecem às mesmas regras de diferenciação do cálculo diferencial tratado de forma ordinária. Um ponto relevante é a regra dada pela Eq. (1.75), em que produto vetorial não é comutativo, portanto a ordem da diferenciação tem um papel substancial.

1.3.2 Integrais de funções vetoriais

1.3.2.1 Integral de linha

Consideremos a Fig. 1.22, onde a curva C no plano xy une os pontos A e B. Sejam as funções $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ contínuas em todos os pontos da curva C.

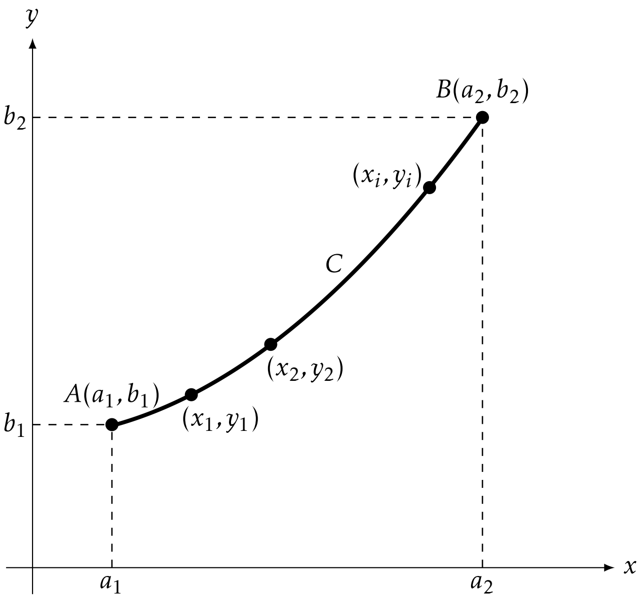


Figura 1.22: *Curva C no plano xy.*

Podemos ainda dividir a curva C em n partes, de maneira a escolher os pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_{n-1}, y_{n-1})$. A partir disso, podemos formar a seguinte soma:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \{P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\} \tag{1.76}$$

sendo $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$ e $\Delta y_i = (y_i - y_{i-1})$, com $i = 1, 2...n$. Dividindo a curva, de modo que $n \to \infty$, ou seja, que Δx_i e Δy_i tendem a zero, e considerando que o limite da soma S exista, chamamos S de integral de linha ao longo do caminho C e representamos por

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{1.77}$$

O resultado dado pela Eq. (1.76) pode ser estendido a três dimensões, e, nesse caso, temos a seguinte representação:

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell} \tag{1.78}$$

com $\vec{f}$=$P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + H(x, y, z)\hat{k}$ e $d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$.

Exercício Resolvido 1.3.1

Se $\vec{f} = (2x - 3yz)\hat{\imath} + (2y + 5xz)\hat{\jmath} + (1 - xyz)\hat{k}$, calcule

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$$

do ponto $a(0,0,0)$ ao $b(1,1,1)$ ao longo do caminho C, definido por:
a) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.
b) Segmento de reta passando pelos pontos a e b.

SOLUÇÃO:
a)

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \int [(2x - 3yz)\hat{\imath} + (2y + 5xz)\hat{\jmath} + (1 - xyz)\hat{k}] \cdot (dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k})$$

Como o caminho é definido por $x = t, y = t^2$ *e* $z = t^3$, *temos que*

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 (2t - 3t^5)dt + (2t^2 + 5t^4)2tdt + (1 - t^6)3t^3 dt$$

Resolvendo a integral do lado direito, obtemos

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \frac{23}{6}.$$

■

b)

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \int [(2x - 3yz)\hat{\imath} + (2y + 5xz)\hat{\jmath} + (1 - xyz)\hat{k}] \cdot (dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k})$$

Como o caminho é definido pela reta r *que passa pelos pontos* $a(0,0,0)$ *e* $b(1,1,1)$, *a equação paramétrica da reta é dada por*

$$r : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = t. \end{cases}$$

Com isso, temos

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^1 (2t - 3t^2)dt + (2t + 5t^2)dt + (1 - t^3)dt$$

que, resolvendo a integral do lado direito, obtemos

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \frac{41}{12}$$

■

1.3.2.2 Integral de superfície

Consideremos um determinado volume V, cuja superfície S é limitada por uma curva no espaço, como mostrado na Fig. 1.23, onde $\hat{n}$ é o vetor normal da superfície.

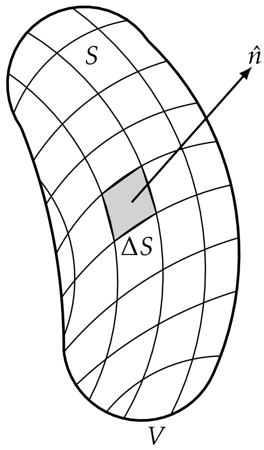


Figura 1.23: *Superfície S de um volume V.*

Suponhamos que cada ponto da superfície S seja definido pelo vetor

$$\vec{f} = P(x,y,z)\hat{i} + Q(x,y,z)\hat{j} + H(x,y,z)\hat{k} \tag{1.79}$$

e que as funções $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ e $H(x,y,z)$ sejam contínuas e uniformes nas coordenadas cartesianas x, y e z. Dividindo a superfície S em elementos de área ΔS e escolhendo um ponto ξ_i em cada uma das áreas elementares ΔS_i, podemos formar a seguinte soma:

$$\sum_{i=1} \vec{f}(\xi_i) \cdot \hat{n}(\xi_i)\Delta S_i \tag{1.80}$$

Com todos os elementos de área ΔS_i da Eq. (1.80) tendendo a zero e realizando a soma em toda a superfície S, temos o que chamamos de integral de superfície:

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1} \vec{f}(\xi_i) \cdot \hat{n}(\xi_i)\Delta S_i = \int_S \vec{f} \cdot \hat{n} dS \tag{1.81}$$

Na física, podemos interpretar a integral de superfície dada pela Eq. (1.81) como sendo o fluxo do campo vetorial $\vec{f}$ que cruza determinada superfície S.

Exercício Resolvido 1.3.2

Encontre o fluxo do campo vetorial $\vec{f} = 2xy\hat{\imath}+y^2\hat{\jmath}+(x+3y)\hat{k}$ através da superfície S limitada por um retângulo no plano xy, cujos vértices são (0,0), (3,0), (3,2) e (0,2).

SOLUÇÃO: *Na Fig. 1.24, mostramos a região da superfície S, assim como o vetor normal $\hat{n}$.*

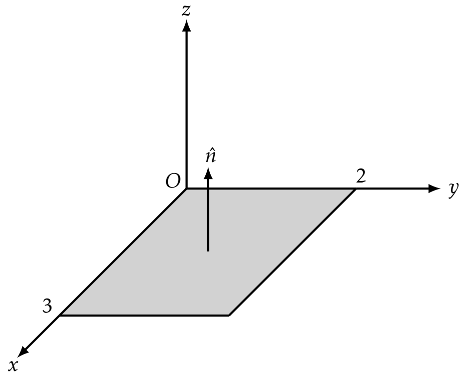


Figura 1.24: *Exercício resolvido 1.3.2.*

Pela figura, fica fácil perceber que o vetor normal é dado por $\hat{n} = \hat{k}$, e com isso temos

$$\int_S \vec{f} \cdot \hat{n} dS = \int_S [2xy\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + (x+3y)\hat{k}] \cdot \hat{k} dS$$

$$\int_S \vec{f} \cdot \hat{n} dS = \int_0^3 \int_0^2 (x+3y) dy dx$$

Resolvendo as integrais, obtemos

$$\int_S \vec{f} \cdot \hat{n} dS = 27.$$

■

1.4 Operadores vetoriais

O mundo real é tridimensional, portanto muitos de seus fenômenos precisam ser descritos utilizando a álgebra vetorial. Alguns fenômenos são melhores descritos e entendidos se utilizarmos o que chamamos de operadores vetoriais, divididos em gradiente, divergente e rotacional. Há inúmeras situações em que se faz uso desses operadores. Na termodinâmica, utilizamos as isotermas para descrever regiões de temperatura constante.

Este livro é fruto das notas de aulas das disciplinas que o autor leciona na Faculdade de Tecnologia (FT) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) e tem como objetivo apresentar aos estudantes universitários o eletromagnetismo como uma teoria que une conceitos da eletrostática, da eletricidade e do magnetismo.

A abordagem dos conceitos é feita utilizando princípios matemáticos de forma clara e objetiva, permitindo que o leitor perceba a importância desses princípios em diferentes áreas do conhecimento. Com esse objetivo fazemos, no primeiro capítulo, uma revisão ampla e objetiva dos principais conceitos matemáticos que serão utilizados na descrição dos conceitos do eletromagnetismo. Também conta com exercícios resolvidos para os diferentes tópicos e uma coleção de problemas ao final de cada capítulo. Os problemas foram escolhidos para que o estudante possa verificar o seu entendimento sobre os temas abordados em diferentes níveis de dificuldades. Além disso, apresentamos todas as respostas dos problemas propostos.

ISBN 978-65-5506-170-3
9 786555 061703

www.blucher.com.br

Blucher

Clique aqui e:

VEJA NA LOJA

Introdução ao Eletromagnetismo

Ivan de Oliveira

ISBN: 9786555061703

Páginas: 324

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2021

Peso: 0.532 kg