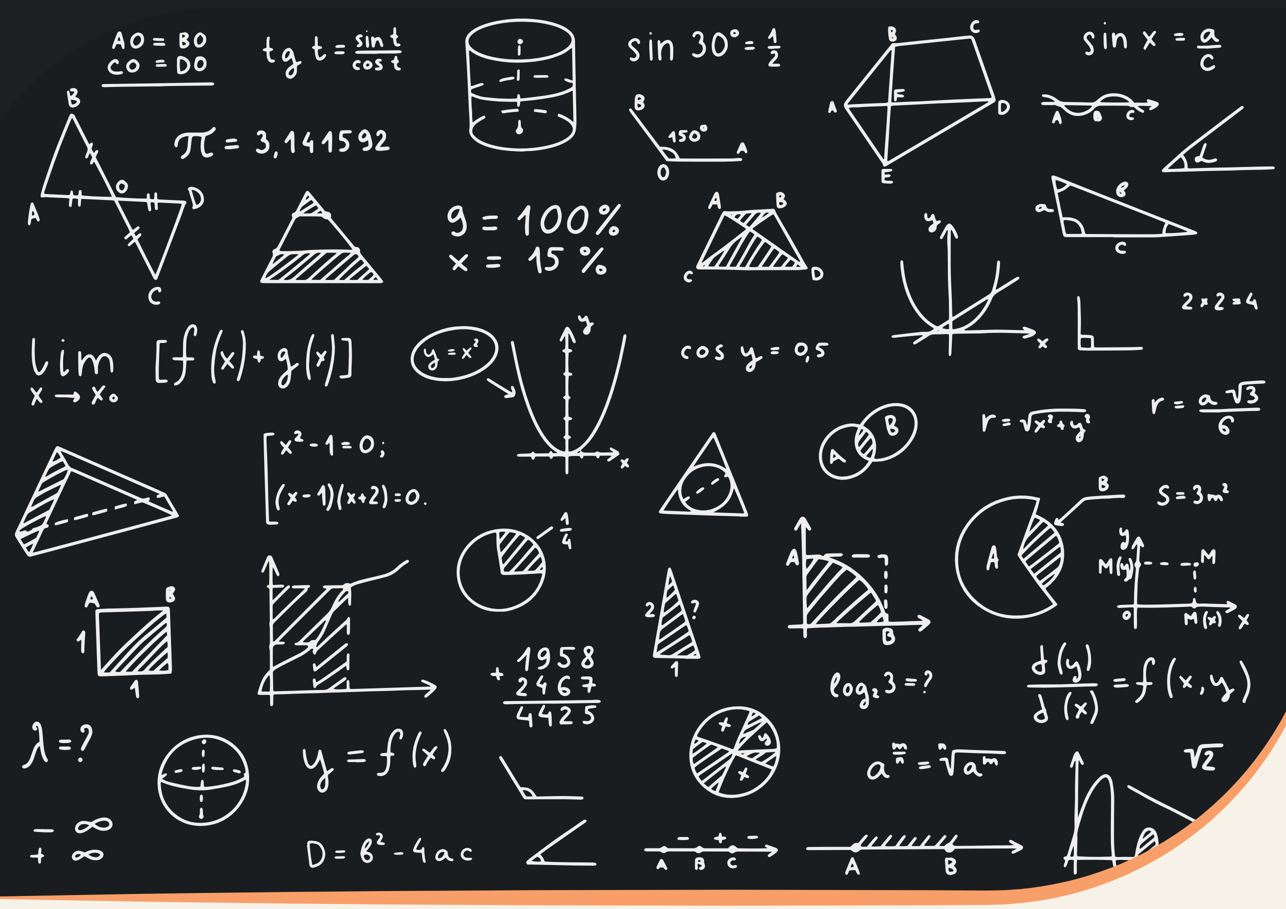
CÍCERO NACHTIGALL
ALEXANDRE MOLTER
MAURÍCIO ZAHN

CONJUNTOS E FUNÇÕES

Com aplicações



Blucher

Cícero Nachtigall

Alexandre Molter

Maurício Zahn

CONJUNTOS E FUNÇÕES

com aplicações

Conjuntos e funções: com aplicações

Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher
Editor Eduardo Blücher
Coordenação editorial Jonatas Eliakim
Produção editorial Isabel Silva
Diagramação Autores
Revisão de texto Gabriela Castro
Capa Leandro Cunha
Imagem da capa iStockphoto

Editora Blucher
Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Nachtigall, Cícero

Conjuntos e funções : com aplicações / Cícero Nachtigall, Alexandre Molter, Maurício Zahn. – São Paulo : Blucher, 2021.

332 p.: il.

ISBN 978-65-5506-147-5 (impresso)

ISBN 978-65-5506-148-2 (eletrônico)

1. Matemática 2. Teoria dos conjuntos 3. Funções (matemática) I. Título II. Molter, Alexandre III. Zahn, Maurício

21-3619 CDD 511.3

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática

Conteúdo

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Neste primeiro capítulo, revisaremos resumidamente alguns tópicos do Ensino Médio que servirão de base para os próximos capítulos. Caso o leitor esteja bem familiarizado com estes conceitos, recomendamos que o mesmo visite ao menos alguns destes exercícios e migre em seguida para o capítulo seguinte.

1.1 Expressões numéricas

Relembramos abaixo algumas *propriedades da potenciação*:

(1) $a^1 = a$

(2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

(4) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

(5) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

(7) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

(8) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

(9) $a^0 = 1$

Além destas, relembramos algumas *propriedades da radiciação*:

(1) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

(2) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

(3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

(4) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(5) $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[n \cdot q]{a^{q \cdot m + p \cdot n}}$

Vejamos exemplos de aplicação destas propriedades.

Exemplo 1.1 Calcule o valor das expressões numéricas abaixo:

(a) $12 - [2 - 3^2 - 4(\sqrt[3]{27} - 3^0) + 5] - 7^1$

(b) $\dfrac{(-2)^4 + 2^4 - (-3)^3 \cdot (-7)^0 + \sqrt[3]{-27}}{5^0 + \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} - (-5)^1}$

(c) $\dfrac{\dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{2}}{\dfrac{5}{2^3} - \dfrac{3 \cdot \sqrt[5]{32}}{\sqrt[3]{-8}}}$

(d) $\dfrac{\sqrt[3]{25} \cdot (-27)^{\frac{2}{3}} \cdot (5)^{\frac{1}{3}} + \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2}}{\sqrt[3]{\sqrt{64}} - 25^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-1}}$

Solução:

(a)

$$12 - [2 - 3^2 - 4(\sqrt[3]{27} - 3^0) + 5] - 7^1 = 12 - [2 - 9 - 4(\sqrt[3]{3^3} - 1) + 5] - 7$$

$$12 - [-7 - 4(3 - 1) + 5] - 7 = 12 - [-7 - 8 + 5] - 7 = 12 - (-10) - 7 = 15.$$

(b)

$$\frac{(-2)^4 + 2^4 - (-3)^3 \cdot (-7)^0 + \sqrt[3]{-27}}{5^0 + \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} - (-5)^1} = \frac{16 + 16 - (-27) \cdot 1 + \sqrt[3]{(-3^3)}}{1 + \sqrt[4]{16} + 5} =$$

$$= \frac{32 + 27 + (-3)}{1 + \sqrt[4]{2^4} + 5} = \frac{56}{8} = 7.$$

(c)

$$\frac{\dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{2}}{\dfrac{5}{2^3} - \dfrac{3 \cdot \sqrt[5]{32}}{\sqrt[3]{-8}}} = \frac{\dfrac{7-2}{4}}{\dfrac{5}{8} - \dfrac{3 \cdot \sqrt[5]{2^5}}{\sqrt[3]{(-2)^3}}} = \frac{\dfrac{5}{4}}{\dfrac{5}{8} - \dfrac{3 \cdot 2}{-2}} = \frac{\dfrac{5}{4}}{\dfrac{5}{8} + 3} = \frac{\dfrac{5}{4}}{\dfrac{5 + 24}{8}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{29} = \frac{10}{29}.$$

(d)

$$\frac{\sqrt[3]{25} \cdot (-27)^{\frac{2}{3}} \cdot (5)^{\frac{1}{3}} + \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2}}{\sqrt[3]{\sqrt{64}} - 25^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-1}} = \frac{\sqrt[3]{5^2} \cdot [(-3)^3]^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{5} + (7)^2}{\sqrt[3]{8} - \sqrt{25} \cdot \dfrac{1}{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{5^2} \cdot (-3)^2 \cdot \sqrt[3]{5} + 49}{\sqrt[3]{2^3} - \dfrac{5}{5}} = \frac{9\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5} + 49}{2 - 1} = 9\sqrt[3]{5^3} + 49 = 45 + 49 = 94.$$

Exemplo 1.2 Racionalize as seguintes expressões:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}}$ **(c)** $-\dfrac{1}{2\sqrt[5]{9}}$ **(d)** $\dfrac{2}{\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{7}}$ **(e)** $\dfrac{12}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{4}}$

Solução:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

(b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}} \times \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt[3]{4}}{2}.$

(c) $-\dfrac{1}{2\sqrt[5]{9}} = -\dfrac{1}{2\sqrt[5]{3^2}} \times \dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = -\dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{2\sqrt[5]{3^5}} = -\dfrac{\sqrt[5]{27}}{2\cdot 3} = -\dfrac{\sqrt[5]{27}}{6}.$

(d) $\dfrac{2}{\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{7}} = \dfrac{2}{7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{2}{7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}} = \dfrac{2}{7^{\frac{5}{6}}} = \dfrac{2}{\sqrt[6]{7^5}} = \dfrac{2}{\sqrt[6]{7^5}} \times \dfrac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{7}} = \dfrac{2\sqrt[6]{7}}{7}.$

(e) $\dfrac{12}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{4}} = \dfrac{12}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{12}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{2^2}} \times \dfrac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}} \times \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{12\sqrt[4]{27}\sqrt[3]{2}}{3\cdot 2} = 2\sqrt[4]{27}\sqrt[3]{2}.$

Exercícios

1. Calcule o valor das expressões numéricas abaixo:

   (a) $(-1)^{1001} - \{\pi^0 + \sqrt[4]{81} + 2[10 - (-2)^5 - (\sqrt[3]{-64} + (0,02)^{-1}) + 3]\}$

   (b) $$\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{64}} - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-2} + 3\left(\dfrac{8}{\sqrt[5]{2}}\right)^0}{\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} - \sqrt{\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{4}{3}}}}$$

2. Racionalize as seguintes expressões:

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{6}{\sqrt[5]{9}}$

(d) $\dfrac{2}{3\sqrt[4]{25}}$

(e) $\dfrac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}}$

(f) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[3]{9}}$

3. Racionalize as seguintes expressões:

(a) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ (b) $\dfrac{2+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ (c) $\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{5}}$ (d) $\dfrac{\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{16}}}$

Respostas

1. (a) -3 (b) $-\dfrac{36}{7}$

2. (a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (c) $2\sqrt[5]{27}$ (d) $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$ (e) $2\sqrt[6]{5}$ (f) $\dfrac{\sqrt[20]{2}\sqrt[3]{3}}{3}$

3. (a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{3}$ (b) $2+\sqrt{2}$ (c) $\dfrac{\sqrt[3]{75}-\sqrt{2}\sqrt[3]{25}}{5}$ (d) $1-3\sqrt[3]{4}$

1.2 Expressões algébricas

1.2.1 Fatoração e produtos notáveis

De maneira geral, *fatorar* uma expressão significa escrevê-la como um produto de dois ou mais fatores.

A seguir, estudaremos alguns casos de fatoração de expressões algébricas.

Fatoração por fator comum

Quando os termos da expressão possuem um fator comum, podemos colocá-lo em evidência e obter a forma fatorada.

Se a expressão é dada por $ax+ay$, por exemplo, podemos colocar o fator comum a em evidência e escrevê-la como

$$ax + ay = a(x + y)$$

Exemplo 1.3 Fatore as seguintes expressões:

(a) $5x+5y$ **(b)** $2x+4$ **(c)** $9-3x$ **(d)** $2x+2y-6$

Solução:

(a) $5x + 5y = 5(x + y)$

(b) $2x + 4 = 2(x + 2)$

(c) $9 - 3x = 3(3 - x)$

(d) $2x + 2y - 6 = 2(x + y - 3)$

Exemplo 1.4 Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^2 + x^4$

(b) $y^3 - 2y^2$

(c) $16x^3 - 8x^4 + 12x^6$

(d) $x^3y^2 + x^2y^3 - xy$

Solução: Note que, em cada um dos itens, é possível colocar fatores em evidência. Fatorando cada um deles, obtemos:

(a) $x^2 + x^4 = x^2(1 + x^2)$

(b) $y^3 - 2y^2 = y^2(y - 2)$

(c) $16x^3 - 8x^4 + 12x^6 = 4x^3(4 - 2x + 3x^3)$

(d) $x^3y^2 + x^2y^3 - xy = xy(x^2y + xy^2 - 1)$

Fatoração por agrupamento

A fatoração por agrupamento consiste em agrupar os termos de uma expressão algébrica utilizando os fatores comuns.

Se a expressão é dada por $ax + ay + bx + by$, por exemplo, podemos colocar o fator comum a em evidência na primeira parte e o fator comum b em evidência na segunda parte e escrever

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$

Note que, na expressão acima, é possível colocar o fator comum $x+y$ em evidência e se obter uma forma fatorada ainda mais reduzida que a anterior.

$$ax + ay + bx + by = (a + b)(x + y)$$

Exemplo 1.5 Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^2 + 2x + 6xy + 12y$ **(b)** $x^3 + x^2 + x + 1$

Solução: Note que todo os itens podem ser fatorados utilizando o agrupamento. Fatorando cada um deles, obtemos:

(a) $(x + 6y)(x + 2)$ **(b)** $(x^2 + 1)(x + 1)$

Os próximos casos de fatoração são também chamados de *produtos notáveis*.

Fatoração da diferença de dois quadrados

A expressão $a^2 - b^2$ pode ser fatorada como o produto de $(a + b)$ por $(a - b)$, isto é,

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Este também é um caso de fatoração chamado de *diferença de dois quadrados*, onde $a^2 - b^2$ é o que chamamos de diferença de dois quadrados e o produto $(a + b)(a - b)$ de *produto da soma pela diferença*.

Assim, dizemos que $(a + b)(a - b)$ é a forma fatorada de $a^2 - b^2$.

Exemplo 1.6 Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^2 - 16$ **(b)** $y^2 - 1$ **(c)** $x^2y^2 - 4$ **(d)** $4x^2 - 25$

Solução: Note que todos os itens são diferenças de dois quadrados. Fatorando cada um deles, obtemos:

(a) $(x + 4)(x - 4)$ **(c)** $(xy + 2)(xy - 2)$

(b) $(y + 1)(y - 1)$ **(d)** $(2x + 5)(2x - 5)$

Fatoração do trinômio quadrado perfeito

As expressões $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$ podem ser desenvolvidas, respectivamente, como

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{e} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Estes também são considerados casos de fatoração, chamados de *trinômios quadrados perfeitos*.

Dizemos que $(a+b)^2$ é a forma fatorada de $a^2+2ab+b^2$ e que $(a-b)^2$ é a forma fatorada de $a^2-2ab+b^2$.

Exemplo 1.7 Fatore as seguintes expressões algébricas:

(a) x^2+2x+1 **(b)** $x^2-8x+16$ **(c)** $x^2y^2-4xy+4$ **(d)** $y^4+2y^2x+x^2$

Solução: Note que todos os itens são trinômios quadrados perfeitos. Fatorando cada um deles, obtemos:

(a) $(x+1)^2$ **(b)** $(y-4)^2$ **(c)** $(xy-2)^2$ **(d)** $(y^2+x)^2$

Fatoração da soma e diferença de dois cubos

A expressão a^3+b^3 pode ser fatorada como o produto de $(a+b)$ por (a^2-ab+b^2), isto é,

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Este também é um caso de fatoração chamado de *soma de dois cubos*, onde "a^3+b^3" é o que estamos chamando de soma de dois cubos.

Se diz que $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ é a forma fatorada de a^3+b^3.

Da mesma forma, expressão a^3-b^3 pode ser fatorada como o produto de $(a-b)$ por (a^2+ab+b^2), isto é,

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Este também é um caso de fatoração chamado de *diferença de dois cubos*, onde a^3-b^3 é o que estamos chamando de diferença de dois cubos.

Dizemos que $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ é a forma fatorada de a^3-b^3.

Exemplo 1.8 Fatore os seguintes polinômios:

(a) $x^3 + 27$ **(b)** $y^3 - 8$ **(c)** $8x^3 + 125$ **(d)** $64 - y^3$

Solução:

(a) $(x+3)(x^2 - 3x + 9)$

(c) $(2x+5)(4x^2 - 10x + 25)$

(b) $(y-2)(y^2 + 2y + 4)$

(d) $(4-y)(16 + 4y + y^2)$

Observacão. As fatorações obtidas para a diferença de dois quadrados $(a^2 - b^2)$ e a diferença de dois cubos $(a^3 - b^3)$ podem ser generalizadas para potências maiores que 2 e 3.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a expressão $a^n - b^n$ pode ser fatorada como

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Note que, para a diferença de dois quadrados $(n = 2)$ e de dois cubos $(n = 3)$, a expressão acima resulta em

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

De forma semelhante, para $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$, por exemplo, obtém-se:

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

1.2.2 Simplificação de frações algébricas

De maneira simplificada, uma fração algébrica é um quociente que mostra expressões algébricas no numerador ou no denominador.

Simplificar uma fração algébrica corresponde a efetuar sobre ela fatorações em seu numerador e denominador, com o intuito de cancelar fatores múltiplos presentes em numerador e denominador.

Exemplo 1.9 Simplifique as seguintes frações algébricas:

(a) $\dfrac{16}{4x}$ (b) $\dfrac{x^2y}{2x}$ (c) $\dfrac{4x^2y^3z}{20xy^2z^3}$

Solução: Utilizando propriedades da simplificação de frações, obtemos:

(a) $\dfrac{16}{4x} = \dfrac{4 \cdot 4}{4 \cdot x} = \dfrac{4}{x}$

(b) $\dfrac{x^2y}{2x} = \dfrac{x \cdot x \cdot y}{2 \cdot x} = \dfrac{xy}{2}$

(c) $\dfrac{4x^2y^3z}{20xy^2z^3} = \dfrac{4 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z}{4 \cdot 5 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z} = \dfrac{xy}{5z^2}$, ou, de uma forma mais rápida,

$$\frac{4x^2y^3z}{20xy^2z^3} = \frac{4 \cdot x^{2-1}y^{3-2}}{4 \cdot 5 \cdot z^{3-1}} = \frac{xy}{5z^2}$$

Os casos de fatoração e os produtos notáveis são muito utilizados para fazer simplificações de frações algébricas.

Exemplo 1.10 Simplifique as seguintes frações algébricas:

(a) $\dfrac{2x+10}{x+5}$ (c) $\dfrac{t^2-9}{t+3}$ (e) $\dfrac{m^2-n-m+mn}{m^2+2mn+n^2}$

(b) $\dfrac{y-3}{xy-3x+2y-6}$ (d) $\dfrac{y^2-2y+1}{2y-2}$ (f) $\dfrac{z^4-16}{z^2+4z+4}$

Solução:

(a) Utilizando o fator comum em evidência para fatorar $2x + 10$ como $2(x + 5)$, obtemos:

$$\frac{2x+10}{x+5} = \frac{2(x+5)}{x+5} = 2$$

(b) Utilizando a fatoração por agrupamento para fatorar $xy - 3x + 2y - 6$ como $(x + 2)(y - 3)$, obtemos:

$$\frac{y-3}{xy-3x+2y-6} = \frac{y-3}{(x+2)(y-3)} = \frac{1}{x+2}$$

(c) Utilizando a diferença de dois quadrados para fatorar $t^2 - 9$ como $(t + 3)(t - 3)$, obtemos:

$$\frac{t^2-9}{t+3} = \frac{(t+3)(t-3)}{t+3} = t-3$$

(d) Escrevendo $y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2$ e $2y - 2 = 2(y-1)$, obtemos:

$$\frac{y^2 - 2y + 1}{2y - 2} = \frac{(y-1)^2}{2(y-1)} = \frac{y-1}{2}$$

(e) Escrevendo $m^2 - n - m + mn = (m+n)(m-1)$ e $m^2 + 2mn + n^2 = (m+n)^2$, obtemos:

$$\frac{m^2 - n - m + mn}{m^2 + 2mn + n^2} = \frac{(m+n)(m-1)}{(m+n)^2} = \frac{m-1}{m+n}$$

(f) Escrevendo $z^4 - 16 = (z^2 - 4)(z^2 + 4) = (z+2)(z-2)(z^2+4)$ e $z^2 + 4z + 4 = (z+2)^2$, obtemos:

$$\frac{z^4 - 16}{z^2 + 4z + 4} = \frac{(z+2)(z-2)(z^2+4)}{(z+2)^2} = \frac{(z-2)(z^2+4)}{z+2}$$

Exemplo 1.11 Racionalize e simplifique ao máximo as seguintes frações algébricas:

(a) $\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ **(b)** $\dfrac{b}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$ **(c)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{a^2}}$ **(d)** $\dfrac{2\sqrt{x}y^2 z w^{\frac{5}{3}}}{x^2 \sqrt[5]{y^2} z^2 w}$

Solução: Racionalizando cada uma das expressões, obtemos:

(a) $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{\sqrt{x}} \times \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{x \cdot \sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$

(b) $\dfrac{b}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \dfrac{b}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \times \dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \dfrac{b \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{a \cdot b} = \dfrac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{a}$

(c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{a^2}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[5]{a^2}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[5]{a^2}} \times \dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{a^3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{a^3}}{2a} = \dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{a^3}}{a}$

(d) $\dfrac{2\sqrt{x}y^2 z w^{\frac{5}{3}}}{x^2 \sqrt[5]{y^2} z^2 w} = \dfrac{2x^{\frac{1}{2}} y^2 z w^{\frac{5}{3}}}{x^2 y^{\frac{2}{5}} z^2 w} = \dfrac{2y^{2-\frac{2}{5}} w^{\frac{5}{3}-1}}{x^{2-\frac{1}{2}} z^{2-1}} = \dfrac{2y^{\frac{8}{5}} w^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{2}} z} = \dfrac{2\sqrt[5]{y^8}\sqrt[3]{w^2}}{z\sqrt{x^3}}$

Exemplo 1.12 Racionalize as seguintes frações algébricas:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ **(b)** $\dfrac{t}{\sqrt{t} + 3}$ **(c)** $\dfrac{1}{\sqrt{xy} - 2}$ **(d)** $\dfrac{6\sqrt{x}}{\sqrt{2x} - \sqrt{2y}}$

Solução:

(a) Neste caso, multiplica-se o numerador e o denominador por $\sqrt{x}+\sqrt{2}$ para efetuar a racionalização.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})}=$$
$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{x-2}$$

De forma semelhante ao item (a), obtém-se:

(b) $$\frac{t}{\sqrt{t}+3}=\frac{t}{\sqrt{t}+3}\times\frac{\sqrt{t}-3}{\sqrt{t}-3}=\frac{t(\sqrt{t}-3)}{(\sqrt{t}+3)(\sqrt{t}-3)}=\frac{t\sqrt{t}-3t}{t-9}$$

(c) $$\frac{1}{\sqrt{xy}-2}=\frac{1}{\sqrt{xy}-2}\times\frac{\sqrt{xy}+2}{\sqrt{xy}+2}=\frac{\sqrt{xy}+2}{(\sqrt{xy}-2)(\sqrt{xy}+2)}=\frac{\sqrt{xy}+2}{xy-4}$$

(d) $$\frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}}=\frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}}\times\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}}{\sqrt{2x}-\sqrt{2y}}=\frac{6\sqrt{x}(\sqrt{2x}-\sqrt{2y})}{2x-2y}$$
$$=\frac{3\sqrt{x}(\sqrt{2x}-\sqrt{2y})}{x-y}=\frac{3x\sqrt{2}-3\sqrt{2xy}}{x-y}$$

1.2.3 Operações com frações algébricas

Vejamos a seguir algumas operações com frações algébricas.

Exemplo 1.13 Efetue as seguintes operações:

(a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{2x}$ **(b)** $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}$ **(c)** $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2x}{x+3}$

Solução:

(a) Neste caso, o mínimo múltiplo comum dos denominadores é $2x$. Sendo assim, tem-se:

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}=\frac{2+3}{2x}=\frac{5}{2x}$$

(b) Neste caso, o mínimo múltiplo comum dos denominadores é $2x^3$. Sendo assim, tem-se:

$$\frac{1}{x^3}+\frac{x-1}{x}+\frac{5}{2x^2}=\frac{2+2x^2(x-1)+5x}{2x^3}=\frac{2x^3-2x^2+5x+2}{2x^3}$$

(c) Neste caso, os denominadores não possuem fatores comuns, portanto o mínimo múltiplo comum será o produto dos denominadores, ou seja, será o produto $(x-1)(x+3)$. Sendo assim, tem-se:

$$\frac{2}{x-1} - \frac{2x}{x+3} = \frac{2(x+3) - 2x(x-1)}{(x-1)(x+3)} = -\frac{2x^2 - 4x - 6}{(x-1)(x+3)}$$

Exemplo 1.14 Efetue as seguintes operações:

(a) $\dfrac{y}{x+2} - \dfrac{3}{2x+4}$ **(b)** $\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{5}{x^2-1}$ **(c)** $\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2+2x+1}$

Solução:

(a) Neste caso, o mínimo múltiplo comum dos denominadores é $2x+4$. Sendo assim, tem-se:

$$\frac{y}{x+2} - \frac{3}{2x+4} = \frac{2y-3}{2x+4}$$

(b) Neste caso, lembrando que $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, o mínimo múltiplo comum dos denominadores é $x^2 - 1$. Sendo assim, tem-se:

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x(x+1) - 5}{x^2-1} = \frac{2x^2 + 2x - 5}{x^2-1}$$

(c) Neste caso, lembrando que $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, o mínimo múltiplo comum dos denominadores é $(x+1)^2$. Sendo assim, tem-se:

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+2x+1} = \frac{x-1}{x+1} - \frac{2x}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x+1)^2}$$

Exercícios

1. Fatore as seguintes expressões:

   (a) $12x^2 - 24x + 18$ (c) $5xy - 2y^3zx$ (e) $-2z^3 - 8z^6$

(b) $x^5 + x^4 + x^3$ (d) $3xw^4 + 12x^3w^2$ (f) $3x^3y^2 + 6x^2y^5$

2. Fatore as seguintes expressões, utilizando a fatoração por agrupamento:

(a) $x^3 + x^2 - x - 1$ (c) $x^3 - x^2 - x + 1$ (e) $x^2 - 3x + 2xy - 6y$

(b) $x^3 - x^2 + x - 1$ (d) $x^8 - x^7 + x - 1$ (f) $6x^2 - 8xy - 9ax + 12ay$

3. Fatore o numerador e o denominador e simplifique:

(a) $\dfrac{x + ax + y + ay}{x + y}$ (c) $\dfrac{yx^2 + 2x + 2xy + 4}{xy + x^2 + 2y + 2x}$

(b) $\dfrac{2x - 2}{x^4 - x^3 - x^2 + x}$ (d) $\dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

4. Fatore as seguintes expressões:

(a) $4x^2 - 1$ (c) $x^4 - 16$ (e) $x^2y + x^2 - 49y - 49$

(b) $36x^2 - 25y^2$ (d) $x^6 - 9x^4$ (f) $x^6 - 81x^2 - y^2x^4 + 81y^2$

5. Fatore o numerador e o denominador e simplifique:

(a) $\dfrac{x^2 - 36}{x + 6}$ (c) $\dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x + 2}$

(b) $\dfrac{2x - 4}{x^4 - 16}$ (d) $\dfrac{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1}{xy - x + y - 1}$

6. Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^2 - 12x + 36$ (d) $x^4 + 4x^2 + 4$

(b) $4x^2 + 12x + 9$ (e) $x^3 - 6x^2 + 9x$

(c) $9y^2 - 30y + 25$ (f) $x^2y + 2xy - 3x^2 - 6x + y - 3$

7. Fatore o numerador e o denominador e simplifique:

(a) $\dfrac{x^2+8x+16}{x+4}$ (c) $\dfrac{x^2+x}{x^2+2x+1}$

(b) $\dfrac{3x-9}{x^2-6x+9}$ (d) $\dfrac{x^4-x^3-x^2+x}{x^3-2x^2+x}$

8. Fatore as seguintes expressões:

(a) x^3+1 (c) $27x^3+1$ (e) $x^3y+2x^3-64y-128$

(b) x^3-1 (d) x^4-8x (f) x^6-y^6

9. Em cada caso, fatore e simplifique:

(a) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$ (b) $\dfrac{3x+6}{x^3+8}$ (c) $\dfrac{x^3+125}{x^2-25}$ (d) $\dfrac{y^3x+y^3-8x-8}{y^2+2y+4}$

10. Em cada caso, faça a racionalização do quociente e simplifique ao máximo:

(a) $\dfrac{2x^2}{\sqrt{3x}}$ (d) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[3]{b^2}}$ (g) $\dfrac{2}{\sqrt{y}-\sqrt{3}}$

(b) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[3]{x}}$ (e) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ (h) $\dfrac{3-t}{\sqrt{t}-\sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{2a}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}}$ (f) $\dfrac{y^2-2}{y-\sqrt{2}}$ (i) $\dfrac{m-4\sqrt{m}+4}{\sqrt{m}-2}$

11. Efetue as seguintes operações:

(a) $\dfrac{4}{3x^3}+\dfrac{5}{4x^2}-\dfrac{8}{x^4}$ (c) $\dfrac{3x}{x+2}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{x-1}{x+1}$ (e) $\dfrac{2x+3}{x^2-6x+9}-\dfrac{3x-1}{x^2-9}$

(b) $\dfrac{2}{x-4}-\dfrac{3}{2x}+2$ (d) $\dfrac{5x+1}{x+2}-\dfrac{2x^3}{x^2-4}$ (f) $\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{3x}{x^3+x^2+2x+2}$

12. Simplifique a seguinte expressão: $\dfrac{\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x}{x+2}}$.

13. Simplifique cada expressão ao máximo possível:

(a) $\dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ (b) $\dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ (c) $\dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

Respostas

1. (a) $6(2x^2 - 4x + 3)$ (c) $xy(5 - 2y^2 z)$ (e) $-2z^3(1 + 4z^3)$

   (b) $x^3(x^2 + x + 1)$ (d) $3xw^2(w^2 + 4x^2)$ (f) $3x^2y^2(x + 2y^3)$

2. (a) $(x^2 - 1)(x + 1)$ (c) $(x^2 - 1)(x - 1)$ (e) $(x + 2y)(x - 3)$

   (b) $(x^2 + 1)(x - 1)$ (d) $(x^7 + 1)(x - 1)$ (f) $(2x - 3a)(3x - 4y)$

3. (a) $a + 1$ (b) $\dfrac{2}{x^3 - x}$ (c) $\dfrac{yx + 2}{y + x}$ (d) $\dfrac{x + 1}{x - 1}$

4. (a) $(2x + 1)(2x - 1)$ (d) $x^4(x + 3)(x - 3)$

   (b) $(6x + 5y)(6x - 5y)$ (e) $(x + 7)(x - 7)(y + 1)$

   (c) $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$ (f) $(x + y)(x - y)(x + 3)(x - 3)(x^2 + 9)$

5. (a) $x - 6$ (c) $(x + 1)(x - 2)$

   (b) $\dfrac{2}{(x^2 + 4)(x + 2)}$ (d) $(x - 1)(y + 1)$

6. (a) $(x - 6)^2$ (c) $(3y - 5)^2$ (e) $x(x - 3)^2$

   (b) $(2x + 3)^2$ (d) $(x^2 + 2)^2$ (f) $(y - 3)(x + 1)^2$

7. (a) $x + 4$ (b) $\dfrac{3}{x - 3}$ (c) $\dfrac{x}{x + 1}$ (d) $x + 1$

8. (a) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ (d) $x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

   (b) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ (e) $(y + 2)(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

   (c) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$ (f) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

9. (a) x^2+x+1 (b) $\dfrac{3}{x^2-2x+4}$ (c) $\dfrac{x^2-5x+25}{x-5}$ (d) $(y-2)(x+1)$

10. (a) $\dfrac{2x\sqrt{3x}}{3}$ (d) $\dfrac{\sqrt[3]{3b}\sqrt[5]{a^4}}{ab}$ (g) $\dfrac{2(\sqrt{y}+\sqrt{3})}{y-3}$

(b) $\dfrac{(\sqrt{2}+1)\sqrt[3]{x^2}}{x}$ (e) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$ (h) $-\sqrt{t}-\sqrt{3}$

(c) $2\sqrt[6]{a^5}$ (f) $y+\sqrt{2}$ (i) $\sqrt{m}-2$

11. (a) $\dfrac{15x^2+16x-96}{12x^4}$ (d) $-\dfrac{2x^3-5x^2+9x+2}{x^2-4}$

(b) $\dfrac{4x^2-15x+12}{2x^2-8x}$ (e) $-\dfrac{x^2-19x-6}{x^3-3x^2-9x+27}$

(c) $\dfrac{4x^4+4x^3-7x^2-15x-10}{x^4+3x^3+2x^2}$ (f) $\dfrac{2x^3+7x}{x^3+x^2+2x+2}$

12. x

13. (a) $2x+h$ (b) $3x^2+3xh+h^2$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

1.3 Polinômios em uma variável

Os polinômios representam um importante estudo dentro da matemática e permeiam vários assuntos em diversas áreas do conhecimento científico. Nesta seção, faremos um estudo resumido sobre alguns aspectos dos polinômios de uma variável.

Definição 1.15

Um *polinômio na variável* x é uma expressão algébrica do tipo

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1x + a_0$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são números reais, tais que $a_n \neq 0$.

O número n é chamado de *grau do polinômio.*

Os números $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são chamados de *coeficientes do polinômio.*

O número a_n é chamado de *coeficiente dominante do polinômio.*

Exemplo 1.16 O polinômio $x^2 - 5x + 6$ é um polinômio de grau 2 e coeficientes $a_2 = 1$, $a_1 = -5$ e $a_0 = 6$.

Os polinômios de grau 0 são chamados de *polinômios constantes*, os de grau 1 de *polinômios de primeiro grau*, os de grau 2 de *polinômios de segundo grau*, e assim por diante.

As expressões $a_n x^n$, $a_{n-1}x^{n-1}$, ..., $a_1 x$ e a_0 que formam um polinômio são chamadas de *monômios* ou *termos do polinômio*.

O monômio a_0 é chamado de *termo constante*.

Exemplo 1.17 O polinômio $-2x^5 + x^4 + 3x^2 - x$ é um polinômio de quinto grau formado pelos monômios $-2x^5$, x^4, $3x^2$ e $-x$.

Um polinômio formado apenas por dois monômios é chamado de *binômio*, e um polinômio formado apenas por três monômios é chamado de *trinômio*.

1.3.1 Operações com polinômios

As operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de dois polinômos estão diretamente relacionadas às operações com os monômios que formam esses polinômios.

Soma e subtração

Lembre que só se pode somar *monômios semelhantes*, isto é, que têm o mesmo grau.

O resultado da soma de dois monômios semelhantes é um monômio cujo coeficiente é a soma dos coeficientes dos dois monômios (exemplo: $4x^3 + 2x^3 = 6x^3$). A subtração também só vale para monômios semelhantes.

A soma (ou subtração) de polinômios será a soma (ou subtração) dos monômios que formam os polinômios dados.

Exemplo 1.18 Determine a soma dos polinômios

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \qquad \text{e} \qquad x^4 - x^2 - 2x + 5$$

Solução: Para obter a soma $(3x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1) + (x^4 - x^2 - 2x + 5)$, somamos os coeficientes dos monômios de mesmo grau, ou seja,

$$\begin{array}{rr} & 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \\ + & \underline{x^4 + 0x^3 - x^2 - 2x + 5} \\ & 4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 0x + 6 \end{array}$$

Portanto, o polinômio resultante da soma é $4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6$.

Exemplo 1.19 Dados os polinômios

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \qquad \text{e} \qquad x^4 - x^2 - 2x + 5$$

determine a subtração do primeiro pelo segundo.
Solução. Para obter a subtração

$$(3x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1) - (x^4 - x^2 - 2x + 5)$$

subtraímos os coeficientes dos monômios de mesmo grau, ou seja,

$$\begin{array}{rr} & 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \\ - & \underline{x^4 + 0x^3 - x^2 - 2x + 5} \\ & 2x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 4x - 4 \end{array}$$

Portanto, o polinômio resultante da subtração é $2x^4 + 2x^3 + 4x - 4$.

Multiplicação

Lembre que o resultado da multiplicação de dois monômios é um monômio cujo coeficiente é o produto dos coeficentes dos dois monômios multiplicados e cujo grau é a soma dos graus. Por exemplo: $(3x^2)(2x^5) = 6x^7$.

Para efetuar o multiplicação de dois polinômios, deve-se multiplicar cada monômio do primeiro polinômio por todos os monômios do segundo polinômio. O produto será o polinômio resultante destes produtos.

Exemplo 1.20 Efetue o produto dos polinômios: $x^2 - 3x + 2$ e $3x - 1$.

Solução: Utilizando um método semelhante ao utilizado para a multiplicação de números inteiros, obtemos:

$$\begin{array}{rr} & x^2 - 3x + 2 \\ \times & \underline{3x - 1} \\ & 3x^3 - x^2 \qquad\quad \\ & -9x^2 + 3x \quad \\ + & \underline{\qquad\qquad 6x - 2} \\ & 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 \end{array}$$

Portanto, o polinômio resultante da multiplicação é $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$.

Divisão

Analisando a sequência de passos a seguir, certamente você se lembrará do *algorítmo da divisão* utilizado para realizar a divisão de números naturais.

$$\begin{array}{r|l} \widehat{17}3 & \underline{12} \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 173 & \underline{12} \\ -12 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 173 & \underline{12} \\ \underline{-12} & 1 \\ 53 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 173 & \underline{12} \\ \underline{-12} & 14 \\ 53 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 173 & \underline{12} \\ \underline{-12} & 14 \\ 53 & \\ -48 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 173 & \underline{12} \\ \underline{-12} & 14 \\ 53 & \\ \underline{-48} & \\ 5 & \end{array}$$

Utilizando o algorítmo da divisão, podemos escrever:

$$\underbrace{173}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{12}_{\text{Divisor}} \times \underbrace{14}_{\text{Quociente}} + \underbrace{5}_{\text{Resto}}$$

A divisão de polinômios será realizada de forma muito similar ao desenvolvimento acima, mas utilizando monômios ao invés de algarismos.

Lembre que o resultado da divisão de dois monômios é um monômio cujo coeficiente é o quociente dos coeficentes dos dois monômios multiplicados e cujo grau é a subtração dos graus. Por exemplo: $(4x^6) \div (3x^4) = \frac{4}{3}x^2$.

Exemplo 1.21 Efetue a divisão $(x^2 + 3x + 4) \div (x + 1)$.

Solução: Neste exercício, vamos detalhar cada passo da divisão. Podemos reescrevê-la na forma

$$x^2 + 3x + 4 \,\underline{|\; x + 1 \;}$$

onde o polinômio $x^2 + 3x + 4$ é o *dividendo* e o polinômio $x + 1$ é o *divisor*.

Note que os monômios do dividendo e do divisor devem ser escritos com os graus em ordem decrescente.

Primeiramente, dividimos o monômio de maior grau do dividendo pelo monômio de maior grau do divisor, ou seja, $x^2 \div x$. Como o resultado é x, então x será o primeiro monômio do *quociente* da divisão, e escrevemos:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x + 4 & \underline{\ x + 1\ } \\ & \ x \end{array}$$

Agora multiplicamos x por $x+1$ para obter x^2+x. Este passa a subtrair o dividendo, ou seja,

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x + 4 & \underline{\ x + 1\ } \\ -(x^2 + x) \quad & \ x \end{array}$$

Efetuando a subtração, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x + 4 & \underline{\ x + 1\ } \\ \underline{-x^2 - x \qquad} & \ x \\ 2x + 4 & \end{array}$$

Desta forma, o processo de divisão realizado até agora deixou um quociente igual a x e um resto (parcial) igual a $2x + 4$.

Note que o procedimento acima é válido sempre que o grau do dividendo é maior ou igual ao grau do divisor. Continuaremos o processo agora considerando $2x + 4$ como dividendo e $x + 1$ como divisor.

Repetimos este processo até que o quociente tenha grau menor que o grau do divisor. Como $2x + 4$ tem grau 1 e o quociente $x + 1$ também tem grau 1, prosseguimos com a divisão. Da mesma forma, dividimos o monômio de maior grau do dividendo, que agora é $2x + 4$ pelo monômio de maior grau do divisor, ou seja, $2x \div x$. Como o resultado desta divisão é 2, então somamos 2 ao quociente que havíamos obtido no passo anterior, ou seja,

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x + 4 & \underline{\ x + 1\ } \\ \underline{-x^2 - x \qquad} & \ x + 2 \end{array}$$

$$2x+4$$
$$-(2x+2)$$

Efetuando a subtração, obtemos:

$$\begin{array}{rl} x^2+3x+4 & \underline{|\ x+1\ } \\ \underline{-x^2-x\qquad} & \ x+2 \\ 2x+4 & \\ \underline{-2x-2} & \\ 2 & \end{array}$$

Como o polinômio contante 2 tem grau menor que o grau do quociente $(x+1)$, então a operação de divisão foi finalizada.

Portanto, podemos reescrever o polinômio dado na forma:

$$\underbrace{x^2+3x+4}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(x+1)}_{\text{Divisor}}\ \underbrace{(x+2)}_{\text{Quociente}} + \underbrace{2}_{\text{Resto}}$$

Ou podemos escrever que:

$$\frac{x^2+3x+4}{x+1} = x+2+\frac{2}{x+1}$$

Exemplo 1.22 Efetue a divisão $(x^2-5x+6) \div (x-2)$.

Solução: Vamos proceder exatamente como no exemplo 1.21, porém de forma mais resumida. Os passos foram numerados para facilitar a compreensão.

Primeiro passo

$$\begin{array}{rl} x^2-5x+6 & \underline{|\ x-2\ } \\ & \ x \end{array}$$

Segundo passo

$$\begin{array}{rl} x^2-5x+6 & \underline{|\ x-2\ } \\ -x^2+2x\qquad & \ x \end{array}$$

Terceiro passo

$$\begin{array}{rl} x^2-5x+6 & \underline{|\ x-2\ } \\ \underline{-x^2+2x\qquad} & \ x \\ -3x+6 & \end{array}$$

Quarto passo

$$\begin{array}{rl} x^2-5x+6 & \underline{|\ x-2\ } \\ \underline{-x^2+2x\qquad} & \ x-3 \\ -3x+6 & \end{array}$$

Quinto passo

$$\begin{array}{rl} x^2-5x+6 & \underline{|\ x-2\ } \\ \underline{-x^2+2x\qquad} & \ x-3 \\ -3x+6 & \\ 3x-6 & \end{array}$$

Sexto passo

$$\begin{array}{rl} x^2-5x+6 & \underline{|\ x-2\ } \\ \underline{-x^2+2x\qquad} & \ x-3 \\ -3x+6 & \\ \underline{3x-6} & \\ 0 & \end{array}$$

Portanto, podemos reescrever o polinômio dado na forma:

$$\underbrace{x^2-5x+6}_{\text{Dividendo}}=\underbrace{(x-2)}_{\text{Divisor}}\;\underbrace{(x-3)}_{\text{Quociente}}$$

No exemplo 1.22, temos uma *divisão exata*, ou seja, o resto é igual a zero.

Nestes casos, se diz que o polinômio x^2-5x+6 é *divisível* por $x-2$, ou ainda que o polinômio $x-2$ *divide* o polinômio x^2-5x+6. Assim, podemos escrever:

$$\frac{x^2-5x+6}{x-2}=x-3$$

Exemplo 1.23 Efetue a divisão $(x^4+x^3-5x^2-4x+4)\div(x^2-4)$.

Solução: Descrevendo detalhadamente cada passo da divisão, temos:

Primeiro passo

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +x^3 & -5x^2 & -4x & +4 & x^2-4 \\ \cline{6-6} & & & & & x^2 \end{array}$$

Segundo passo

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +x^3 & -5x^2 & -4x & +4 & x^2-4 \\ \cline{6-6} -x^4 & & +4x^2 & & & x^2 \end{array}$$

Terceiro passo

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +x^3 & -5x^2 & -4x & +4 & x^2-4 \\ \cline{6-6} -x^4 & & +4x^2 & & & x^2 \\ \cline{1-5} & x^3 & -x^2 & -4x & +4 & \end{array}$$

Quarto passo

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +x^3 & -5x^2 & -4x & +4 & x^2-4 \\ \cline{6-6} -x^4 & & +4x^2 & & & x^2+x \\ \cline{1-5} & x^3 & -x^2 & -4x & +4 & \end{array}$$

Quinto passo

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +x^3 & -5x^2 & -4x & +4 & x^2-4 \\ \cline{6-6} -x^4 & & +4x^2 & & & x^2+x \\ \cline{1-5} & x^3 & -x^2 & -4x & +4 & \\ & -x^3 & & +4x & & \end{array}$$

Sexto passo

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +x^3 & -5x^2 & -4x & +4 & x^2-4 \\ \cline{6-6} -x^4 & & +4x^2 & & & x^2+x \\ \cline{1-5} & x^3 & -x^2 & -4x & +4 & \\ & -x^3 & & +4x & & \\ \cline{2-5} & & -x^2 & & +4 & \end{array}$$

Sétimo passo

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +x^3 & -5x^2 & -4x & +4 & x^2-4 \\ \cline{6-6} -x^4 & & +4x^2 & & & x^2+x-1 \\ \cline{1-5} & x^3 & -x^2 & -4x & +4 & \\ & -x^3 & & +4x & & \\ \cline{2-5} \end{array}$$

Oitavo passo

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +x^3 & -5x^2 & -4x & +4 & x^2-4 \\ \cline{6-6} -x^4 & & +4x^2 & & & x^2+x-1 \\ \cline{1-5} & x^3 & -x^2 & -4x & +4 & \\ & -x^3 & & +4x & & \\ \cline{2-5} \end{array}$$

$$-x^2+4$$

$$\begin{array}{r} -x^2+4 \\ \underline{x^2-4} \\ 0 \end{array}$$

Portanto, podemos reescrever o polinômio dado na forma:

$$\underbrace{x^4+x^3-5x^2-4x+4}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(x^2-4)}_{\text{Divisor}}\underbrace{(x^2+x-1)}_{\text{Quociente}}$$

No exemplo 1.23, temos novamente uma divisão exata, que pode ser escrita como

$$\frac{x^4+x^3-5x^2-4x+4}{x^2-4} = x^2+x-1$$

Exemplo 1.24 Efetue a divisão $(x^3+7x^2+11x-4) \div (x^2+3x-1)$.

Solução. Destacando apenas os passos principais da divisão, temos:

Pimeiro passo

$$\begin{array}{r|l} x^3+7x^2+11x-4 & x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3-3x^2+x} & x \\ 4x^2+12x-4 & \end{array}$$

Segundo passo

$$\begin{array}{r|l} x^3+7x^2+11x-4 & x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3-3x^2+x} & x+4 \\ 4x^2+12x-4 & \\ \underline{-4x^2-12x+4} & \\ 0 & \end{array}$$

Portanto, podemos reescrever o polinômio dado na forma fatorada:

$$x^3+7x^2+11x-4 = (x^2+3x-1)(x+4)$$

Exemplo 1.25 Efetue a divisão $(x^5-2x^4+5x^3-8x^2+5x-3) \div (x^2+4)$.

Solução. Os três principais passos da divisão são:

Primeiro passo

$$\begin{array}{r|l} x^5-2x^4+5x^3-8x^2+5x-3 & x^2+4 \\ \cline{2-2} \underline{-x^5-4x^3} & x^3 \\ -2x^4+x^3-8x^2+5x-3 & \end{array}$$

Segundo passo

$$\begin{array}{r|l} x^5-2x^4+5x^3-8x^2+5x-3 & x^2+4 \\ \cline{2-2} \underline{-x^5-4x^3} & x^3-2x^2 \\ -2x^4+x^3-8x^2+5x-3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{2x^4 \qquad + 8x^2 \qquad} \\ \qquad x^3 + 5x - 3 \end{array}$$

Terceiro passo

$$\begin{array}{rl|l} & x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 5x - 3 & x^2 + 4 \\ \cline{3-3} & \underline{-x^5 \qquad - 4x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad} & x^3 - 2x^2 + x \\ & -2x^4 + x^3 - 8x^2 + 5x - 3 & \\ & \underline{2x^4 \qquad + 8x^2 \qquad\qquad} & \\ & x^3 + 5x - 3 & \\ & \underline{-x^3 - 4x \qquad} & \\ & x - 3 & \end{array}$$

Uma vez que o grau do polinômio $x - 3$ é menor que o grau de $x^2 + 4$ (quociente), a divisão deve ser encerrada.

Portanto, podemos reescrever o polinômio dado na forma:

$$x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 5x - 3 = (x^2 + 4)(x^3 - 2x^2 + x) + x - 3$$

Um caso especial de divisão de polinômios ocorre quando o divisor é um binômio de primeiro grau. Esses casos são particularmente úteis em disciplinas de cálculo, no conteúdo de limites, e daremos um enfoque especial a eles. Para isso, começaremos com a definição de raiz de um polinômio.

Definição 1.26

Um número real a é *raiz* do polinômio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ se

$$a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots a_1 a + a_0 = 0.$$

Exemplo 1.27 O número 1 é raiz do polinômio $x^2 - 4x + 3$. De fato, basta notar que $(1)^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$.

Exemplo 1.28 O número -2 é raiz do polinômio $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. De fato, basta notar que $(-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 2 = -8 + 12 - 6 + 2 = 0$.

Proposição 1.29

Um polinômio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1x + a_0$ é divisível pelo binômio $x - a$ se, e somente se, a for raiz deste polinômio.

Exemplo 1.30 O polinômio $x^2 - 4x + 3$ é divisível pelo binômio $x - 1$, pois o número 1 é raiz do polinômio dado.

Exemplo 1.31 Verifique se o polinômio $x^3 + 3x^2 + 2x$ é divisível pelo binômio $x + 1$ e, em caso afirmativo, fatore o polinômio dado.

Solução: Note primeiramente que -1 é raiz do polinômio $x^3 + 3x^2 + 2x$.

De fato, perceba que $(-1)^3 + 3(-1)^2 + 2(-1) = -1 + 3 - 2 = 0$, portanto, $x^3 + 3x^2 + 2x$ é divisível por $x + 1$. Efetuando a divisão, pode-se obter a forma fatorada do polinômio como $x^3 + 3x^2 + 2x = (x + 1)(x^2 + 2x)$.

Exemplo 1.32 Verifique se o polinômio $x^4 - 8x^2 - 4x + 3$ é divisível pelo binômio $x - 3$ e, em caso afirmativo, fatore o polinômio dado.

Solução: Substituindo x por 3 no polinômio $x^4 - 8x^2 - 4x + 3$, obtemos:

$$(3)^4 - 8(3)^2 - 4(3) + 3 = 81 - 72 - 12 + 3 = 0$$

Portanto, $x^4 - 8x^2 - 4x + 3$ é divisível por $x - 3$.

Efetuando a divisão, pode-se obter a forma fatorada do polinômio como $x^4 - 8x^2 - 4x + 3 = (x^3 + 3x^2 + x - 1)(x - 3)$.

Exemplo 1.33 **(a)** Prove que o polinômio $x^4 + 2x^3 + 3x + 6$ é divisível pelo binômio $x + 2$. Escreva este polinômio na forma fatorada.

(b) Prove que o polinômio $x^3 - 3x + 2$ é divisível pelo binômio $x + 2$. Escreva este polinômio na forma fatorada.

(c) Utilize os itens anteriores para simplificar a seguinte fração algébrica:

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 3x + 6}{x^3 - 3x + 2}$$

Solução: **(a)** Substituindo x por -2 no polinômio $x^4 + 2x^3 + 3x + 6$, obtemos:

$$(-2)^4 + 2(-2)^3 + 3(-2) + 6 = 16 - 16 - 6 + 6 = 0$$

Portanto, $x^4 + 2x^3 + 3x + 6$ é divisível por $x + 2$.

Efetuando a divisão, pode-se obter a forma fatorada do polinômio como $x^4 + 2x^3 + 3x + 6 = (x^3 + 3)(x + 2)$.

(b) Substituindo x por -2 no polinômio $x^3 - 3x + 2$, obtemos:

$$(-2)^3 - 3(-2) + 2 = -8 + 8 = 0$$

Portanto, $x^3 - 3x + 2$ é divisível por $x + 2$.

Efetuando a divisão, pode-se obter a forma fatorada do polinômio como $x^3 - 3x + 2 = (x^2 - 2x + 1)(x + 2)$.

(c) Simplificando a fração algébrica dada, obtemos:

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 3x + 6}{x^3 - 3x + 2} = \frac{(x^3 + 3)(x + 2)}{(x^2 - 2x + 1)(x + 2)} = \frac{x^3 + 3}{x^2 - 2x + 1}$$

1.3.2 Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Uma ferramenta bastante prática para efetuar a divisão de um polinômio

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots a_1 x + a_0$$

por um monômio da forma $x - a$ é denominda como o *dispositivo prático de Briot-Ruffini*.

Note que, ao efetuar esta divisão, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\underbrace{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x - a)}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{(b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1)}_{\text{quociente}} + \underbrace{r}_{\text{resto}}$$

O dispositivo Briot-Ruffini consiste em um método prático para encontrar o quociente e o resto na divisão acima.

A utilização deste dispositivo consiste basicamente em dispor o número a e os coeficientes do polinômio dado e seguir os seguintes passos:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Primeiro passo: na segunda linha, logo abaixo de a_n, reescreva o coeficiente a_n. Este será o primeiro coeficiente do quociente, ou seja, $a_n = b_{n-1}$.

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
	$\underbrace{a_n}_{b_{n-1}}$					

Segundo passo: logo abaixo de a_{n-1}, escreva $b_{n-1} \cdot a + a_{n-1}$. Este será o segundo coeficiente do quociente, ou seja, $b_{n-2} = b_{n-1} \cdot a + a_{n-1}$.

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
	b_{n-1}	$\underbrace{b_{n-1} \cdot a + a_{n-1}}_{b_{n-2}}$				

Terceiro passo: logo abaixo de a_{n-2}, escreva $b_{n-2} \cdot a + a_{n-2}$. Este será o terceiro coeficiente do quociente, ou seja, $b_{n-3} = b_{n-2} \cdot a + a_{n-2}$.

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	$\underbrace{b_{n-2} \cdot a + a_{n-2}}_{b_{n-3}}$			

Continuando este procedimento até o passo n, obtemos o passo $n+1$, como segue:

Passo $n+1$: na segunda linha, logo abaixo de a_0, escreva $a_1 \cdot a + a_0$.

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0	$\underbrace{b_0 \cdot a + a_0}_{r}$

Os números $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots b_0$ encontados na segunda linha serão os coeficientes do polinômio resultante da fatoração.

O termo $b_0 \cdot a + a_0$ é o resto da divisão. Desta forma, se $b_0 \cdot a + a_0 = 0$, a divisão é exata.

Exemplo 1.34 Utilize o dispositivo Briot-Ruffini para efetuar a divisão do polinômio $x^3 - 2x^2 - 9x + 6$ pelo binômio $x - 4$.

Solução: Neste caso, tem-se $a = 4$, $a_3 = 1$, $a_2 = -2$, $a_1 = -9$ e $a_0 = 6$.

O dispositivo Briot-Ruffini possibilita determinar os coeficientes b_2, b_1 e b_0 e o resto r na expressão abaixo:

$$\underbrace{x^3 - 2x^2 - 9x + 6}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x-4)}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{(b_2x^2 + b_1x + b_0)}_{\text{quociente}} + \underbrace{r}_{\text{resto}}$$

Dispondo o número 4 e os coeficientes do polinômio dado, tem-se:

$$\begin{array}{c|ccc|c} a & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -2 & -9 & 6 \\ \hline & & & & \end{array}$$

Primeiro passo

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -2 & -9 & 6 \\ \hline & \underbrace{1}_{b_2} & & & \end{array}$$

Segundo passo

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -2 & -9 & 6 \\ \hline & \underbrace{1}_{b_2} & \underbrace{2}_{b_1 = 1 \cdot 4 - 2} & & \end{array}$$

Terceiro passo

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -2 & -9 & 6 \\ \hline & \underbrace{1}_{b_2} & \underbrace{2}_{b_1} & \underbrace{-1}_{b_0 = 2 \cdot 4 - 9} & \end{array}$$

Quarto passo

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -2 & -9 & 6 \\ \hline & \underbrace{1}_{b_2} & \underbrace{2}_{b_1} & \underbrace{-1}_{b_0} & \underbrace{2}_{r = -1 \cdot 4 + 6} \end{array}$$

Portanto, $b_2 = 1$, $b_1 = 2$, $b_0 = -1$ e $r = 2$. Podemos escrever a divisão de polinômios da seguinte forma:

$$\underbrace{x^3 - 2x^2 - 9x + 6}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x-4)}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{(x^2 + 2x - 1)}_{\text{quociente}} + \underbrace{2}_{\text{resto}}$$

Exemplo 1.35 Utilize o dispositivo Briot-Ruffini para efetuar a divisão do polinômio $2x^4 + 6x^3 - 5x - 15$ pelo binômio $x + 3$.

Solução: Dispondo o número -3 e os coeficientes do polinômio dado, tem-se:

$$\begin{array}{c|cccc|c} a & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc|c} -3 & 2 & 6 & 0 & -5 & -15 \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Primeiro passo

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 & 2 & 6 & 0 & -5 & -15 \\ \hline & \underbrace{2}_{b_3} & & & & \end{array}$$

Segundo passo

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 & 2 & 6 & 0 & -5 & -15 \\ \hline & \underbrace{2}_{b_3} & \underbrace{0}_{b_2 = 2(-3)+6} & & & \end{array}$$

Terceiro passo

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 & 2 & 6 & 0 & -5 & -15 \\ \hline & \underbrace{2}_{b_3} & \underbrace{0}_{b_2} & \underbrace{0}_{b_1 = 0(-3)+0} & & \end{array}$$

Quarto passo

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 & 2 & 6 & 0 & -5 & -15 \\ \hline & \underbrace{2}_{b_3} & \underbrace{0}_{b_2} & \underbrace{0}_{b_1} & \underbrace{-5}_{b_0 = 0(-3)-5} & \end{array}$$

Quinto passo

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 & 2 & 6 & 0 & -5 & -15 \\ \hline & \underbrace{2}_{b_3} & \underbrace{0}_{b_2} & \underbrace{0}_{b_1} & \underbrace{-5}_{b_0} & \underbrace{0}_{r = -5(-3)+15} \end{array}$$

Neste caso, o resto da divisão é igual a zero, portanto a divisão é exata. Pode-se escrever a divisão de polinômios da seguinte forma:

$$\underbrace{2x^4 + 6x^3 - 5x - 15}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x+3)}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{(2x^3 - 5)}_{\text{quociente}}.$$

Exercícios

1. Efetue as seguintes divisões de polinômios:

   (a) $(x^2 + 2x + 5) \div (x - 1)$

   (b) $(x^2 - x - 12) \div (x + 3)$

   (c) $(x^3 + 6x^2 + 2x - 5) \div (x - 2)$

   (d) $(x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1) \div (x^2 - x + 1)$

   (e) $(x^4 - 3x^2 - 4) \div (x^2 - 4)$

   (f) $(x^4 - 2x^2 - x + 9) \div (x^2 + x)$

(g) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \div x^2$

(h) $(x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1) \div (-x^3 - 2x + 3)$

(i) $(-x^5 - 2x^3 + 4x^2 + 2x + 6) \div (4 - x^3)$

(j) $(2x^5 + 4x^4 - x^3 - 1) \div (x^3 + 2x^2 + 1)$

2. Em cada caso, utilize o dispositivo Briot-Ruffini para efetuar a divisão do polinômio pelo binômio:

(a) polinômio: $x^2 - x + 2$; binômio: $x - 2$

(b) polinômio: $x^3 - 8x + 3$; binômio: $x + 3$

(c) polinômio: $x^3 + 3x^2 + 3x$; binômio: $x + 2$

(d) polinômio: $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 2x + 3$; binômio: $x - 4$

Respostas

1. (a) $x^2 + 2x + 5 = (x - 1)(x + 3) + 8$

(b) $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$

(c) $x^3 + 6x^2 + 2x - 5 = (x - 2)(x^2 + 8x + 18) + 31$

(d) $x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + 6x + 2) - 2x - 1$

(e) $x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 - 4)(x^2 + 1)$

(f) $x^4 - 2x^2 - x + 9 = (x^2 + x)(x^2 - x - 1) + 9$

(g) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 + x^2 + x + 1) + x + 1$

(h) $x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1 = (-x^3 - 2x + 3)(-x^2 + x) + 6x^2 - 4x + 1$

(i) $-x^5 - 2x^3 + 4x^2 + 2x + 6 = (4 - x^3)(x^2 + 2) + 2x - 2$

(j) $2x^5 + 4x^4 - x^3 - 1 = (x^3 + 2x^2 + 1)(2x^2 - 1)$

2. (a) $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) + 4$

(b) $x^3 - 8x + 3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 1)$

(c) $x^3 + 3x^2 + 3x = (x + 2)(x^2 + x + 1) - 2$

(d) $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = (2x^3 - x^2 - 2)(x - 4) - 5$

1.4 Exercícios extras para fixação

Nesta seção, lançaremos alguns exercícios para o leitor retomar e fixar os assuntos abordados neste capítulo.

1. Calcule:

   (a) $(-2)^2$ (b) $(-2)^3$ (c) $(-2)^{2^3}$ (d) $[(-2)^2]^3$ (e) 7^0 (f) 3^{-2} (g) $4^{\frac{3}{2}}$ (h) $8^{-\frac{2}{3}}$

2. Calcule:

   (a) $\sqrt{144}$ (b) $\sqrt[3]{-216}$ (c) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ (d) $\sqrt[3]{0,125}$ (e) $\sqrt{3}\sqrt{12}$ (f) $\sqrt{3}\sqrt{7}\sqrt{21}$ (g) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$ (h) $\frac{\sqrt{3}\sqrt{12}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}}$

3. Desenvolva os produtos notáveis abaixo:

   (a) $(\sqrt{2}+2)^2$ (b) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ (c) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

4. Calcule: (a) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (b) $\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{4+\sqrt{17}}$.

5. Racionalize o denominador das seguintes expressões:

   (a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ (c) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ (d) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$ (e) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5^3}}$ (f) $\dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[2]{3}}$

6. Racionalize o denominador das seguintes expressões:

   (a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ (b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+3}$ (c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ (d) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

7. Calcule: (a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}$ (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}$.

8. Classifique cada afirmação abaixo como *verdadeira* ou *falsa*:

(a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ (c) $\dfrac{x^7}{x^3} = x^4$ (e) $(-x)^3 = -x^3$

(b) $x^7 \cdot x^2 = x^{14}$ (d) $(-x)^2 = -x^2$ (f) $x^2 \cdot y^2 = (xy)^2$

9. Simplifique as expressões:

(a) $\dfrac{x^7y^2}{x^3y}$ (c) $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ (e) $\dfrac{x^2-xy}{x-y}$

(b) $\dfrac{x^2y^3z^4w}{x^3y^4w^2}$ (d) $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$ (f) $\dfrac{xz+xw+yz+yw}{x+y}$

10. Mostre que $(x^m)^n \neq x^{m^n}$.

Respostas

1. (a) 4 (b) -8 (c) 256 (d) 64 (e) 1 (f) $\frac{1}{9}$ (g) 8 (h) $\frac{1}{4}$

2. (a) 12 (b) -6 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) 6 (f) 21 (g) $\frac{2}{3}$ (h) 3

3. (a) $6+4\sqrt{2}$ (b) $5-2\sqrt{6}$ (c) -1

4. (a) $\sqrt{2}$ (b) -1

5. (a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ (d) $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ (e) $\frac{2\sqrt[4]{5}}{5}$ (f) $\frac{\sqrt[10]{3^7}}{3}$

6. (a) $\sqrt{3}-1$ (b) $\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{10}}{7}$ (c) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$ (d) $5+2\sqrt{6}$

7. (a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{3+2\sqrt{6}}{3}$ (c) $\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-3)}{2}$

8. (a) F (b) F (c) V (d) F (e) V (f) V

9. (a) x^4y (b) $\frac{z^4}{xyw}$ (c) $x-y$ (d) $x+1$ (e) x (f) $w+z$

10. Isso pode ser mostrado com um contraexemplo.

Este livro é fruto de diversas experiências dos autores com a docência envolvendo os assuntos de conjuntos e funções. Ele foi cuidadosamente escrito, utilizando uma linguagem simples, porém precisa, que visa alcançar leitores de diversos contextos educacionais, sejam do ensino médio ou do superior, com variados interesses em relação à matemática.

A obra contempla uma grande quantidade de exercícios propostos e diversos exercícios resolvidos, além de muitas aplicações dos conteúdos abordados, em vários contextos. Na maioria dos assuntos apresentados, há explicações incluindo gráficos, o que auxilia na sua compreensão e dá um enfoque ilustrativo na abordagem dos conteúdos.

Alunos, professores e admiradores da matemática, principiantes ou não, encontrarão neste livro uma oportunidade de leitura organizada e agradável.

ISBN 978-65-5506-147-5
9 786555 061475
www.blucher.com.br
Blucher