NEWTON LANDI GRILLO

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS

Blucher

Newton Landi Grillo

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS

Introdução ao estudo de vibrações mecânicas

Publisher Edgard Blücher
Editor Eduardo Blücher
Coordenação editorial Jonatas Eliakim
Produção editorial Lidiane Pedroso Gonçalves
Preparação de texto Maurício Katayama
Diagramação Taís do Lago
Revisão de texto Ana Lúcia dos Santos
Capa Leandro Cunha
Imagem da capa iStockphoto

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4° andar
04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Grillo, Newton Landi
Introdução ao estudo de vibrações mecânicas / Newton Landi Grillo. -- São Paulo : Blucher, 2021.
205 p.

Bibliografia
ISBN 978-65-5506-145-1 (impresso)
ISBN 978-65-5506-144-4 (eletrônico)

1. Engenharia mecânica 2. Vibração 3. Sistemas oscilatórios 4. Energias cinéticas I. Título

21-3664 CDD 620.11248

Índices para catálogo sistemático:
1. Engenharia mecânica – Vibração – Modelos matemáticos

CONTEÚDO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO E CONCEITOS BÁSICOS DE SISTEMAS OSCILATÓRIOS

1.1 INTRODUÇÃO

Quando um sistema, isto é, um corpo, um elemento de máquina ou uma máquina, está vibrando, significa que ele apresenta deformações e que sua condição é dinâmica, e tal condição induz ao problema de tensões variáveis; estas, por sua vez, causam o problema de fadiga de materiais. Por essa razão, o estudo da vibração deve levar em consideração alguns conceitos básicos da engenharia. Um deles nos remete à resistência dos materiais, mais precisamente ao estudo de deformações e às equações dele decorrentes.

Além do problema de fadiga, se um sistema vibra ou oscila com amplitudes altas ou perigosas, há o problema de o material sair de sua fase elástica e passar para a fase plástica, deformando-se permanentemente ou atingindo a ruptura. Paralelamente às questões envolvendo condições impostas aos materiais, a vibração pode induzir movimentos indesejáveis em peças ou em máquinas, afetando o rendimento, a precisão de funcionamento ou a realização de tarefas, assim como causar desconforto aos seres humanos.

O estudo do movimento vibratório é baseado nas leis da dinâmica e pressupõe, para se escreverem as equações que regem o movimento de sistemas, a modelagem, que consiste na representação massa-mola-amortecedor. A massa do sistema é representada em um bloco; a mola contém as características de rigidez; e o amortecedor, a dissipação de energia.

A rigidez representa o inverso da flexibilidade, e esses conceitos estão descritos na mecânica e resistência dos materiais, dizendo respeito às dimensões de uma peça ou sistema, às características do material definidas pela sua densidade e ao módulo de elasticidade (Young).

O amortecedor caracteriza a dissipação de energia devido à resistência ao movimento, e a modelagem massa-mola-amortecedor é a maneira simples de se representar, por meio do diagrama de corpo livre, as forças decorrentes do movimento, utilizando-se das equações de Newton.

O estudo das vibrações pressupõe analisar sistemas oscilantes, passando pela posição de equilíbrio estático, estando ele sob a ação ou não de forças externas aplicadas. Dessa forma, o corpo ou sistema adquire velocidade e aceleração, transformando as energias cinética e potencial inerentes. Um sistema pode estar representando uma máquina, seus elementos componentes, um elemento estrutural etc.

Para iniciar a compreensão do assunto, o melhor recurso é o entendimento do movimento harmônico simples, visto em disciplinas de física, e, na aplicação do assunto, é necessário trabalhar sistemas com um ou vários graus de liberdade e interpretar as forças e os comportamentos decorrentes.

A interpretação do comportamento de sistemas oscilatórios dá-se por meio das equações de Newton, basicamente pela aplicação da segunda lei, como também das equações de Lagrange, de álgebra linear, e, para as características físicas dimensionais, é necessário o cálculo diferencial e integral.

Percebe-se, portanto, que vibrações mecânicas são um assunto que abrange os conceitos básicos de engenharia. É uma disciplina de fundamental importância na formação do engenheiro.

1.2 MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

DEFINIÇÕES

Um movimento que se repete em um intervalo de tempo é denominado *movimento oscilatório* ou *vibratório*. Nele, o sistema armazena energia potencial por meio de sua elasticidade, como em uma mola deformada, por exemplo; ou por meio de sua massa disposta a uma certa altura de sua posição de equilíbrio, como um pêndulo: ao ser solto, e considerando-se que a energia do sistema se conserva, a energia potencial máxima se transformará em energia cinética devido ao movimento da massa ou da inércia, adquirindo velocidade e aceleração.

Ao passar pela posição de equilíbrio, a energia cinética, então máxima, será transformada em energia potencial devido à condição dinâmica do sistema, e o fenômeno se repetirá. Portanto, a vibração envolve a transferência da energia potencial para a energia cinética, e vice-versa. Sendo amortecida, a energia do sistema é não conservativa, e uma quantidade de energia é dissipada em cada ciclo de oscilação, tendendo ao equilíbrio estático. Para que a vibração permaneça, é necessária a ação de uma fonte externa.

Portanto, um sistema vibratório inclui um meio para armazenar energia potencial pela mola ou elasticidade, pela altura; um meio para armazenar energia cinética (massa ou inércia); e um meio de dissipação de energia (amortecedor).

Os movimentos vibratórios resultantes da ação de uma fonte de excitação podem ser classificados como determinísticos e não determinísticos. Os movimentos determinísticos podem ser descritos por uma relação matemática explícita, sendo conhecidas as fontes de excitação como força ou deslocamento enquanto fontes geradoras de excitação do sistema vibratório. Dentro dos movimentos determinísticos, temos o movimento periódico não harmônico e o movimento harmônico.

Figura 1.1 – Movimento não determinístico.

Os movimentos não determinísticos ou aleatórios são caracterizados pela falta de um padrão temporal de repetição, por exemplo a vibração das asas de um avião.

O movimento periódico é um movimento que se repete após a ocorrência de um intervalo de tempo, podendo, porém, não ser harmônico, pois, para este, a função temporal é uma senoide ou uma cossenoide.

Figura 1.2 – Movimento periódico não harmônico.

Figura 1.3 – Movimento periódico harmônico.

O ciclo de um movimento oscilatório ocorre quando o movimento parte de uma posição, como o repouso, percorre todas as posições ou fases e retorna à posição equivalente de partida, sucedendo-se outros ciclos.

A amplitude (X) corresponde ao deslocamento máximo, tomado em relação à posição de equilíbrio.

A frequência de oscilação (f) corresponde ao número de ciclos decorridos por unidade de tempo, de unidade ciclos por segundo (cps) ou Hertz (Hz). A frequência circular (ω) é dada por $\omega = 2\pi f$ [rad/s].

O período de oscilação (T) é o tempo necessário para se descrever um ciclo. O período é o inverso da frequência: $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ [s].

Na frequência natural (fn), quando um corpo é deformado e solto, ele vibra, oscila sem a necessidade de uma fonte externa de excitação. Essa frequência com que ele oscila naturalmente é chamada de frequência natural, constituindo-se em um fenômeno a ele intrínseco, próprio do corpo, devido às características de seu material, sua forma, dimensão etc.

Na ressonância, quando um corpo é excitado por uma fonte cuja frequência de ação coincide com sua frequência natural, ele se desestabiliza e passa a ter grandes amplitudes, que podem ser limitadas pelo amortecimento.

No ângulo de fase (φ), quando dois movimentos harmônicos possuem a mesma frequência, são denominados síncronos, porém, ambos não precisam apresentar mesma amplitude, ou seja, não atingem as máximas extremidades ou cristas da onda senoidal ou cossenoidal ao mesmo tempo; eles estão defasados de um ângulo de fase φ. O ângulo de fase representa, por isso, sua posição em um determinado tempo em relação à sua posição inicial.

1.3 MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

Considere um ponto S partindo de A e movendo-se em sentido anti-horário (sah), percorrendo uma trajetória circular com velocidade constante (MCU), e, acima dele, uma fonte de luz que o acompanha, projetando sua sombra P em um eixo X, onde se localiza A.

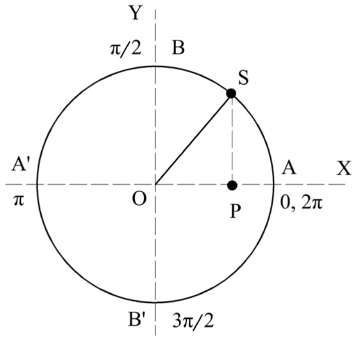

Figura 1.4 – Ponto S em movimento circular uniforme.

Na medida em que o ponto S parte de A percorrendo o semicírculo e atinge A', a sombra projetada P percorre o diâmetro do círculo, retornando à posição inicial A quando o ponto S percorrer o outro semicírculo. Dizemos que o ponto P descreveu um movimento harmônico simples, cujo período é o tempo para percorrer o ciclo A-A'-A; a frequência com que percorre o ciclo é f; e o raio OS varia sua posição angular com uma frequência circular ω.

Na Figura 1.5, a posição do ponto S em relação à sua posição inicial A define o chamado ângulo de fase, o qual corresponde a $\varphi = \omega t$, ou seja, o ângulo de fase corresponde ao produto entre a frequência circular e o tempo necessário para que o ponto S percorra a distância de sua posição inicial A até a posição onde se encontra.

Considera-se agora o ponto S iniciando seu movimento circular no sentido anti-horário (sah) a partir de A, e definem-se as posições de nosso interesse entre So, de onde se iniciam nossas análises, sendo t = 0, e a posição S no tempo decorrido t.

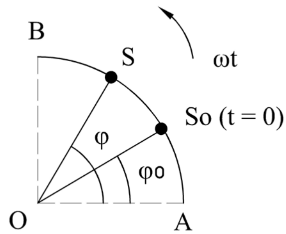

Figura 1.5 – Ponto S em movimento circular uniforme.

Definimos dois deslocamentos angulares do raio OS em relação à origem OA: φ e φo.

O deslocamento angular φo é chamado ângulo de fase inicial do MHS, e o deslocamento angular φ é chamado ângulo de fase no instante t. A equação horária de um ponto móvel é dada por

$$S = So + Vot,$$

onde:

So = posição inicial;

V = velocidade do deslocamento; e

t = tempo.

Das relações trigonométricas, podemos escrever:

$$\varphi OS = \varphi oOS + \omega OSt,$$

eliminando o termo comum OS:

$$\varphi = \varphi o + \omega t$$

Nas mesmas condições dadas, o ponto S desloca-se com velocidade constante, projetando sua sombra P no eixo X. Representando na Figura 1.6, teremos:

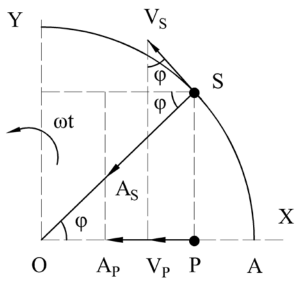

Figura 1.6 – Posição, velocidade e aceleração de S.

A posição de P em relação à origem O,

$$PO = OScos\varphi = OScos(\omega t + \varphi o).$$

A velocidade de P em relação à origem O,

$$V_P = -V_S sen\varphi = -\omega OSsen\varphi = -\omega OSsen(\omega t + \varphi o).$$

A aceleração de P em relação à origem O,

$$A_P = -Ascos\varphi = -\omega^2 OScos\varphi = -\omega^2 OScos(\omega t + \varphi o).$$

Da trigonometria,

$$-sen\varphi = cos(\varphi + \pi/2) = cos(\omega t + \varphi o + \pi/2)$$

$$-\cos\varphi = \cos(\varphi + \pi) = \cos(\omega t + \varphi o + \pi).$$

As expressões de posição, velocidade e aceleração também podem ser escritas como

$$PO = OS\cos(\omega t + \varphi o)$$

$$V_P = V_{PO} = \omega OS\cos(\omega t + \varphi o + \pi/2)$$

$$A_P = A_{PO} = \omega^2 OS\cos(\omega t + \varphi o + \pi)$$

1.4 VIBRAÇÕES LIVRES – SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

Vamos considerar um oscilador harmônico, um sistema não amortecido em vibração livre, composto de uma mola fixa em uma extremidade, e de um bloco de massa m preso na outra, podendo oscilar sem atrito, e, em um dado instante, t_2, encontra-se deslocada uma medida de grandeza x de sua posição de equilíbrio (PE), instante t_1.

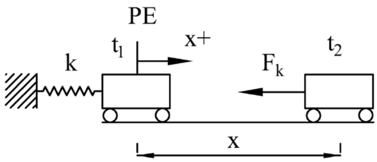

Figura 1.7 – Sistema massa-mola em oscilação.

Uma vez que o sistema está na condição dinâmica, a equação que o rege é a segunda lei de Newton, F = ma, e a força de reação ao movimento é a que surge na mola, sendo dada por Fk = -kx, onde k é chamado constante de rigidez, e a força tem sentido oposto ao deslocamento. Escrevemos:

$$-kx = m\ddot{x}$$

A equação diferencial do movimento fica:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1.0}$$

Temos: deslocamento = x, velocidade = $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, aceleração = $\frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x}$.

Dividindo-se a equação diferencial (1.0) por m,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1.1}$$

Vimos que o movimento harmônico é descrito por uma função senoidal ou cossenoidal. Vamos escrever a equação do movimento em função da amplitude (X), da frequência natural de oscilação no tempo (ωnt), tomando a forma de onda cossenoidal.

$x(t) = X\cos(\omega nt)$, equação de posição;

$\dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -\omega nX\text{sen}(\omega nt)$, equação de velocidade;

$\dfrac{d\dot{x}(t)}{dt} = \ddot{x}(t) = -\omega n^2X\cos(\omega nt)$, equação de aceleração.

Substituindo-se as equações de posição e aceleração em (1.1),

$$-\omega n^2X\cos(\omega nt) + \frac{k}{m}X\cos(\omega nt) = 0.$$

Cancelando-se os termos comuns,

$$-\omega n^2 + \frac{k}{m} = 0$$

Portanto, $\omega n^2 = \dfrac{k}{m}$, $\omega n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ rad/s, m = massa, kg.

Transformação de unidades:

$a = \omega^2.r$ [(rad²/s²).m], k = [N/m], N = força = (massa x aceleração), [kg(rad²/s²).m], m = metro.

$k = \dfrac{N}{m} = \dfrac{kg\dfrac{rad^2}{s^2}m}{m}$, cancelando-se m e expressando-se a raiz: $\omega n = \sqrt{\dfrac{kg\dfrac{rad^2}{s^2}}{kg}}$,

cancelando-se kg,

ωn [rad/s].

A Equação (1.1) fica escrita:

$$\ddot{x} + \omega n^2x = 0 \tag{1.2}$$

Vamos considerar agora o bloco deslocado em sua máxima posição (X) em relação à posição de equilíbrio (PE) e solto; sua forma de onda, portanto, será cossenoidal. No instante em que o bloco for solto é que o tempo começa a ser medido, e as condições iniciais de análise são deslocamento e velocidade, para o tempo inicial igual a zero, $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ para $t = 0$, e tomando-se o ângulo de fase inicial também igual a zero ($\varphi_0 = 0$).

As soluções em cosseno ou seno que representam o movimento permanente do sistema são chamadas soluções particulares. Escrevendo-se a equação de posição máxima:

$x(t) = X\cos(\omega nt)$, para $t = 0$, $x(t) = X$ (máximo deslocamento = amplitude)

No momento em que o bloco é solto, sua velocidade é zero, energia cinética zero.

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega nX\text{sen}(\omega nt),\ \text{para } t = 0,\ v(t) = \text{zero}.$$

Nesta condição inicial, a energia potencial da mola é máxima, e o bloco parte com máxima aceleração.

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega n^2X\cos(\omega nt),\ \text{para } t = 0,\ a(t) = -\omega n^2X.$$

O sinal é negativo, pois a aceleração tem sentido oposto ao deslocamento, defasada de π radianos.

Quando o bloco passa pela posição de equilíbrio, há uma defasagem de $\frac{\pi}{2}$ rad (90^0) em relação à posição inicial. Podemos analisar seu movimento a partir da posição de equilíbrio, tomada, agora, como a condição inicial, e a forma de onda será senoidal.

$x(t) = X\text{sen}(\omega nt)$, para $t = 0$, $x(t) = 0$, pois o bloco está na posição de equilíbrio. Nela, sua velocidade será máxima, energia cinética máxima.

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega nX\cos(\omega nt),\ \text{para } t = 0,\ v(t) = X\omega n.$$

Na posição de equilíbrio, a aceleração será zero:

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega n^2X\text{sen}(\omega nt),\ \text{para } t = 0,\ a(t) = 0.$$

Na primeira condição inicial, o movimento inicia-se com deslocamento e aceleração máximos e velocidade zero, e, passando pela PE, na segunda condição inicial, a posição e a aceleração serão zero, com velocidade máxima.

Queremos escrever a equação geral do movimento harmônico.

A solução $x(t) = X\cos(\omega nt + \varphi_o)$ pode ser escrita como:

$$x(t) = X[\cos(\varphi_o)\cos(\omega nt) - \text{sen}(\omega nt)\text{sen}(\varphi_o)]$$

$$x(t) = X\cos(\varphi_o)\cos(\omega nt) - X\text{sen}(\varphi_o)\text{sen}(\omega nt)$$

Chamando de $B = X\cos(\varphi_o)$ e $A = -X\text{sen}(\varphi_o)$, escrevemos:

$$x(t) = A\text{sen}(\omega nt) + B\cos(\omega nt)$$

A e B são grandezas arbitrárias, sendo B relacionada à posição e à aceleração, e o termo A, com a velocidade somente. Não são grandezas fixas; variam de zero até a grandeza da amplitude. Considere a Figura 1.8.

Na primeira condição inicial do movimento, ou seja, deslocamento máximo, linha vertical, $\varphi o = 0$ e $t = 0$, $B = X$ e A = zero.

Na segunda condição inicial do movimento, ou seja, passando pela posição de equilíbrio, linha horizontal, $\varphi o = \pi/2$ e $t = 0$, B = zero e $A = X$.

Podemos escrever a Figura 1.8 como

$$X^2 = A^2 + B^2\,, \quad \varphi = tg^{-1}\frac{A}{B}$$

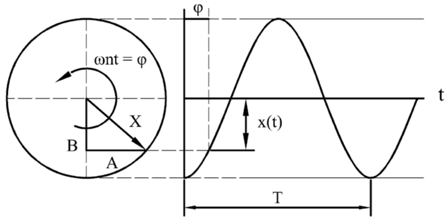

Figura 1.8 – Interpretação geométrica das grandezas A e B.

Exemplo 1.1

Um sistema massa-mola oscila em MHS com frequência de 0,5 ciclo por segundo. O bloco é deslocado 40 mm à direita de sua posição de equilíbrio, tomado como positivo, e solto. Determinar o período de oscilação, velocidade e aceleração máximas, o tempo para o bloco atingir a distância de 60 mm a partir do deslocamento máximo, a velocidade e a aceleração nesse instante. Desconsidera-se o atrito.

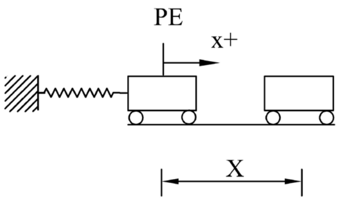

Figura 1.9 – Sistema massa-mola oscilando.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi.0{,}5 = 3{,}1416 \text{ rad/s; período: } T = \frac{2\pi}{3{,}1416} = 2{,}0 \text{ s.}$$

$$x(t) = X\cos(\omega nt + \varphi_o),$$

para $t = 0$, $\varphi_o = 0$, pois fazendo $\varphi_o = \pi$, a amplitude será negativa.

$x(t) = X = 40$ mm $= 0{,}04$ m. Amplitude do movimento, seu deslocamento inicial.

$v(t) = -\omega X\text{sen}(\omega nt + \varphi_o)$, $v(t) = 0$, sua velocidade inicial,

$a(t) = -\omega^2 X\cos(\omega nt + \varphi_o) = -3{,}1416^2.40 = -394{,}8$ [mm/s²] $= -0{,}3948$ [m/s²], aceleração inicial máxima.

À esquerda da PE, sua posição será negativa, e tomando $\varphi o = 0$.

Deslocar 60 mm para a esquerda significa –20 mm a partir da PE, ou interpretar que se deslocou 40 mm para a direita a partir da PE e deslocou –60 mm à esquerda.

$$-20 = 40\cos(\omega nt),\ -0{,}5 = \cos(\omega nt),\ \cos^{-1}(-0{,}5) = \omega nt,\ 120^0 = 2{,}094 \text{ rad} = \omega nt$$

t = 2,094/3,1416 = 0,666 s para atingir 20 mm após a PE a partir do deslocamento máximo.

A velocidade nesse instante, sendo φo = 0:

$$v(t) = -\omega nX\text{sen}(\omega nt) = -108{,}8\ [\text{mm/s}] = -0{,}1088\ [\text{m/s}],$$

A aceleração nesse instante, sendo φo = 0:

$$a(t) = -\omega n^2X\cos(\omega nt) = -197{,}4\ [\text{mm/s}^2] = -0{,}1974\ [\text{m/s}^2]$$

Fazendo a análise a partir da posição de equilíbrio, o ângulo de fase inicial (φo) será $\frac{\pi}{2}$, e o tempo corresponde a 0,166 segundo (0,666 – 0,5), sendo 0,5 = 1/4 do período.

$$v(t) = -\omega nX\text{sen}(\omega nt + \varphi_o) = -\ 3{,}1416.40\text{sen}(2{,}094) = -108{,}8\ [\text{mm/s}] = -0{,}1088\ [\text{m/s}]$$

$$a(t) = -\omega n^2X\cos(\omega nt + \varphi_o) = -3{,}1416^2.40\cos(2{,}094) = -197{,}4\ [\text{mm/s}^2] = -0{,}197\ [\text{m/s}^2]$$

Considerando-se a solução geral x(t) = Asen(ωnt) + Bcos(ωnt):

a grandeza B está relacionada à posição do bloco em relação a PE. B = 20 mm;

a grandeza A está relacionada à velocidade. $A = \frac{v}{\omega n} = \frac{108{,}8}{3{,}1416} = 34{,}63$ mm;

amplitude $X = \sqrt{34{,}63^2 + 20^2} = 40$ mm, 0,04 m.

$$x(t) = 34{,}63\text{sen}(120^0) + 20\cos(120^0) = 20\ [\text{mm}] = 0{,}02\ \text{m}$$

$$v(t) = \omega nA\cos(120^0) - \omega nB\text{sen}(120^0) = -108{,}8\ [\text{mm/s}] = -0{,}1088\ \text{m/s}$$

$$a(t) = -\omega n^2A\text{sen}(120^0) - \omega n^2B\cos(120^0) = -197{,}4\ [\text{mm/s}] = -0{,}1974\ \text{m/s}^2$$

Podemos descrever o sistema oscilatório massa-mola na notação complexa.

A função x(t) = Xcos(ωt) representa a resposta a uma vibração harmônica, e a fórmula de Euler relaciona a função exponencial às funções cosseno e seno no plano complexo.

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i\text{sen}(\omega t)$$

Os sinais positivo e negativo indicam os sentidos anti-horário e horário da frequência circular ω do vetor unitário representado na função exponencial $e^{i\omega}$.

A equação diferencial do sistema massa-mola é da forma $m\ddot{x} + kx = 0$, tomando a solução como $x(t) = e^{st}$, sendo que s contém as raízes da equação. Derivando duas vezes em relação ao tempo, a velocidade e a aceleração ficam

$$v(t) = \dot{x}(t) = se^{st}\ ,\ \ a(t) = \ddot{x}(t) = s^2e^{st}\ ,$$

a equação diferencial fica escrita

$$ms^2e^{st} + ke^{st} = 0 \text{ ou } ms^2 + k = 0,$$

e as raízes serão

$$s_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega n \qquad (1.3)$$

São raízes complexas, imaginárias puras. Aplicando-se Euler e escrevendo-se a solução em função trigonométrica,

$x(t) = C_1e^{i\omega nt} + C_2e^{-i\omega nt}$, C_1 e C_2 são constantes arbitrárias;

$x(t) = C_1[\cos(\omega nt) + i\text{sen}(\omega nt)] + C_2[\cos(\omega nt) - i\text{sen}(\omega nt)]$

$x(t) = (C_1 + C_2)\cos(\omega nt) + i(C_1 - C_2)\text{sen}(\omega nt)$,

fazendo $C_1 + C_2 = B$ e $i(C_1 - C_2) = A$, a equação geral,

$$x(t) = A\text{sen}(\omega nt) + B\cos(\omega nt) \qquad (1.4)$$

1.5 COORDENADAS GENERALIZADAS

Coordenadas generalizadas são um conjunto de coordenadas ou parâmetros que descrevem a configuração de um sistema no plano ou no espaço. Para definir o estado do sistema, essas coordenadas são tomadas em relação à posição de equilíbrio e são chamadas coordenadas independentes.

Considere o pêndulo simples como constituído de uma esfera ligada em uma haste inextensível de comprimento L, a qual está fixa em uma extremidade.

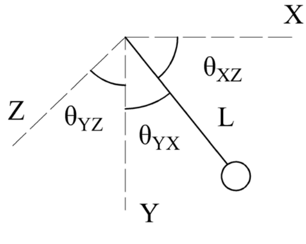

Figura 1.10 – Pêndulo simples no espaço.

Seu movimento pode ser descrito no espaço por meio de três coordenadas generalizadas qx(X), qy(Y) e qz(Z), nas quais x, y e z são as coordenadas cartesianas, e, pelas coordenadas relativas aos ângulos diretores formados pela haste e aos respectivos eixos cartesianos, qyx(θyx), qxz(θxz) e qyz(θyz).

Notemos que, ao considerarmos a haste inextensível, o movimento da esfera fica limitado a trajetórias circulares com o mesmo raio (L); portanto, a rigidez da haste é uma restrição também chamada vínculo, imposta ao movimento do sistema.

Os chamados graus de liberdade (GDL) correspondem ao número mínimo de coordenadas *independentes* necessárias para especificar a posição de uma partícula, de um corpo, de um sistema mecânico, no plano ou no espaço, e podem ser expressos por

$$\text{GDL}\ (n) = N - c,$$

onde:

N = número de coordenadas;

c = restrições.

Em nosso exemplo, o pêndulo pode descrever movimentos circulares no espaço, e sua posição pode ser expressa pelas seis coordenadas generalizadas qi. Queremos restringir seu movimento ao plano x-y e, para tanto, impomos três restrições relativas às coordenadas,

$$qz(Z),\ qxz(\theta xz)\ \text{e}\ qyz(\theta yz).$$

Dessa forma, o pêndulo oscila no plano x-y, e sua posição pode ser representada pelas três coordenadas generalizadas, qx(X), qy(Y), qyx(θyx). Queremos determinar o número de graus de liberdade desse sistema. Analisam-se as duas coordenadas cartesianas x e y relativas às duas coordenadas generalizadas, qx e qy. Em relação à coordenada de restrição L, podemos escrever:

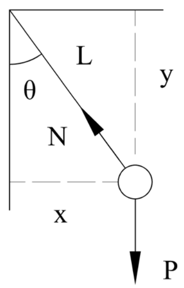

Figura 1.11 – Pêndulo simples no plano.

$$L^2 = x^2 + y^2\ ,$$

onde $x^2 = L^2 - y^2$, ou $y^2 = L^2 - x^2$.

Isso significa que a coordenada x depende de y, e vice-versa, indicando que essas coordenadas não são independentes; dessa forma, serão duas restrições que imporemos ao sistema, e o número de graus de liberdade fica

$$n = 3 - 2 = 1.$$

O pêndulo simples possui um grau de liberdade, sendo que a única coordenada independente será θyx, ou simplesmente θ, a qual é tomada em relação à posição de equilíbrio.

O vínculo L, ou seja, a haste rígida, inextensível, uma restrição, pode ser expresso por uma força de vínculo, a tensão na haste (N), devido à ação da força peso relativa à massa da esfera, a qual restringe o espaço de atuação do sistema físico. Como outro exemplo, o bloco movendo-se em x possui uma força de vínculo, a normal N, restringindo seu movimento em y, como mostra a Figura 1.12.

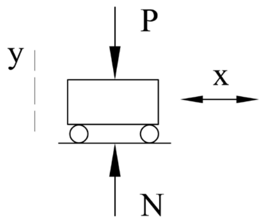

Figura 1.12 – Restrição ao movimento do bloco.

1.6 EQUAÇÕES QUE REGEM O SISTEMA MASSA-MOLA

ANÁLISE ESTÁTICA

Na modelagem, a mola possui somente rigidez, e a massa está concentrada no bloco.

Mola indeformada bloco acoplado diagrama de corpo livre

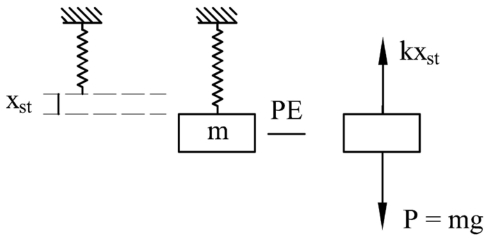

Figura 1.13 – Forças estáticas no sistema massa-mola.

xst = deformação estática, P = peso do bloco, k = rigidez da mola.

Da condição de equilíbrio, $\Sigma F = 0$, $P - kxst = 0$, $P = kxst$, $k = \dfrac{P}{xst}$.

Na condição de linearidade, reportamo-nos ao limite de proporcionalidade, e, nesse limite, temos, pela Lei de Hooke:

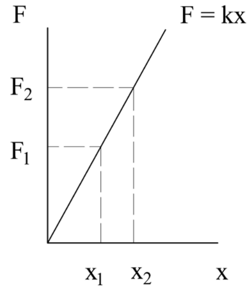

Figura 1.14 – Linearidade entre força e deformação.

F = força ou carga aplicada ao corpo;

x = deformação apresentada pelo corpo devido à aplicação de F;

k = constante de rigidez ou de proporcionalidade, ou de mola.

Exemplo 1.2

Um bloco, ao ser acoplado em uma mola, produz deformação estática de 0,005 m. Sendo a massa do bloco 2,0 kg, queremos determinar a rigidez da mola.

$$k = P/xst = mg/xst = 2.9{,}81/0{,}005 = 3924 \text{ N/m}$$

ANÁLISE DINÂMICA

Na análise dinâmica, reportamos-nos à segunda lei de Newton: $\Sigma F = ma$.

Considere o bloco oscilando, deslocado x da posição de equilíbrio (PE). Da figura (c), temos:

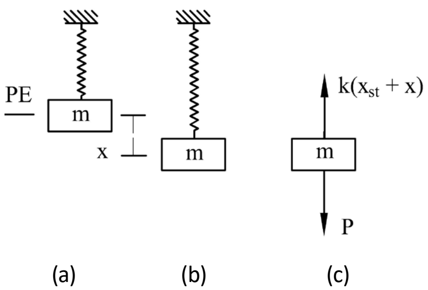

Figura 1.15 – Condição dinâmica do sistema massa-mola.

$\Sigma F = ma$: $P - k(xst + x) = m\ddot{x}$, $P - kxst = 0$; portanto, $m\ddot{x} + kx = 0$.

A frequência também pode ser escrita como:

$$\omega n = \sqrt{\frac{g}{xst}}$$

P = mg, m = P/g, P =kxst, k = P/xst

$\omega n^2 = k/m = \dfrac{\frac{P}{xst}}{\frac{P}{g}}$, cancelando-se P e rearranjando-se, comprova-se.

Exemplo 1.3

Um sistema com massa variável consiste em uma mesa cuja massa é desconhecida, sendo suportada por molas, e, esta, ao ser deslocada e solta, oscila com período de 1,0 s. Quando uma caixa de massa 5 kg é posta sobre a mesa, o sistema passa a oscilar com período de 1,4 s. Determinar a massa da mesa e a rigidez das molas.

$$\omega n_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{1} = 6{,}283 \text{ rad/s} - \text{frequência do sistema sem a caixa.}$$

$$\omega n_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{1{,}4} = 4{,}488 \text{ rad/s} - \text{frequência do sistema com a caixa.}$$

A rigidez das molas não varia; portanto, é o termo da igualdade nas duas condições.

$$k = \omega n^2 m,\ \omega n_1^2\, m_{mesa} = \omega n_2^2\, (m_{mesa} + m_{caixa})$$

$$6{,}283^2.m_{mesa} = 4{,}488^2.(m_{mesa} + 5)$$

$$m_{mesa} = 5{,}2 \text{ kg},\ \ k = 205{,}27 \text{ N/m}$$

Pêndulo simples

Considere o pêndulo oscilando no plano, passando sucessivamente pela posição de equilíbrio (linha vertical). A massa é considerada pequena; a haste, inextensível; e θ, um ângulo pequeno.

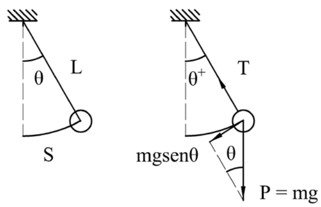

Figura 1.16 – Pêndulo simples em oscilação.

S = trajetória da esfera. S = θ.L;

aceleração tangencial da esfera $\ddot{S} = \ddot{\theta}.L$;

T = tensão na haste, desconsiderado;

P = peso da esfera;

$mgsen\theta$ = força restauradora tangente à trajetória; equivale à força de mola ($-kx$) no sistema massa-mola.

A restauração do pêndulo à posição de equilíbrio dá-se no sentido horário: ($-\theta$)

$Ft = -mgsen\theta$, para pequenos ângulos, $sen\theta \sim \theta$. $Ft = -mg\theta$.

Da segunda lei de Newton, $-mg\theta = m\ddot{\theta}L$ igualando a zero e dividindo por mL:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

A frequência natural de oscilação é dada pela raiz do termo que multiplica o deslocamento θ.

$$\omega n = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Pêndulo de torção

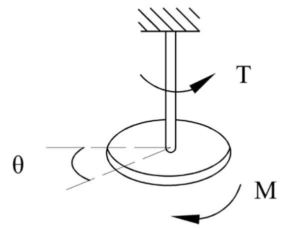

Figura 1.17 – Pêndulo de torção em oscilação.

Devido ao momento torçor (M) aplicado, haverá o torque restaurador (T) atuando no eixo. Da condição de equilíbrio ($\Sigma M = 0$), $M = -T$ ou $M + T = 0$.

Como veremos no Capítulo 2, $T = k\theta$, lei de Hooke para a torção, sendo θ o ângulo de torção.

M = momento torçor: $M = F^t.r$, $F^t = ma^t$, $a^t = mr\alpha$; portanto, $M = mr^2\alpha$, $\alpha = \ddot{\theta}$.

$I = mr^2$: momento de inércia de massa; portanto, $M = I\ddot{\theta}$.

A equação $M + T = 0$ fica: $I\ddot{\theta} + k\theta = 0$. dividindo-se por I: $\ddot{\theta} + \frac{k}{I}\theta = 0$.

A frequência natural é dada pela raiz do termo que multiplica o deslocamento angular θ.

$\omega n = \sqrt{\frac{k}{I}}$ para um cilindro maciço, $I = \frac{1}{2} mr^2$.

Este livro apresenta de forma didática e detalhada uma introdução ao estudo de vibrações mecânicas, abrangendo tópicos de vibrações livres e forçadas, sem e com amortecimento em modelagem, com um e vários graus de liberdade e o comportamento modal.

No texto são abordadas as equações de respostas de sistemas sob a ação de forças periódicas e não periódicas, equações de Laplace, coeficientes de influência de flexibilidade, sistemas contínuos e a técnica de elementos finitos. Portanto, este livro é um excelente material introdutório para estudantes de Engenharia Mecânica, profissionais da área e demais interessados que desejam alargar os seus conhecimentos sobre o tema.

ISBN 978-65-5506-145-1

9 786555 061451

www.blucher.com.br

Blucher

Clique aqui e:

VEJA NA LOJA

Introdução ao Estudo de Vibrações Mecânicas

Newton Landi Grillo

ISBN: 9786555061451
Páginas: 206
Formato: 17 x 24 cm
Ano de Publicação: 2022
