

MAGNO ENRIQUE MENDOZA MEZA

CONTROLE DE SISTEMAS POR COMPUTADOR

Projeto e identificação



Blucher

Controle de sistemas por computador: projeto e
identificação

Magno Enrique Mendoza Meza

Controle de sistemas por computador: projeto e identificação

© Magno Enrique Mendoza Meza

Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher

Editor Eduardo Blücher

Coordenação editorial Jonatas Eliakim

Produção editorial Kedma Marques

Revisão de texto Danilo Villa

Capa Leandro Cunha

Editora Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar

CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

contato@blucher.com.br

www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da*

Língua Portuguesa, Academia Brasileira de Letras, março de 2009. É proibida a

reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Meza, Magno Enrique Mendoza

Controle de sistemas por computador: projeto e identificação / Magno Enrique Mendoza Meza.– São Paulo: Blucher, 2022.

500 p.,

ISBN 978-65-5506-141-3 (impresso)

ISBN 978-65-5506-142-0 (eletrônico)

1. Engenharia de controle computadorizado 2. Análise de sistemas 3. Sistemas de tempo discreto 4. Computadores digitais 5. Microcontroladores I. Título.

21-4109

CDD 629.8

Índice para catálogo sistemático: I. Engenharia de controle computadorizado

Conteúdo

1	Introdução	17
1.1	Relação entre a transformada de Laplace e a transformada z	18
1.2	Definição da transformada z	21
1.3	Propriedades da transformada z	22
1.4	Teoremas da transformada z	24
1.5	Transformada z inversa	25
1.5.1	Método da série de potências ou método de divisão direta	25
1.5.2	Método da expansão em frações parciais	26
1.6	Solução de equações diferenças com coeficientes constantes .	28
1.7	Métodos de análise de estabilidade	32
1.7.1	Critério de estabilidade de Jury-Marden	33
1.7.2	Critério de estabilidade de Schur-Cohn	35
1.7.3	Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz com a transformação bilinear	36
1.8	Erro de estado estacionário	38
1.9	Exercícios resolvidos	41
2	Método de projeto via resposta em frequência	63
2.1	Resposta em frequência de sistema em tempo discreto	64
2.2	Transformação bilinear e o plano w	67
2.3	Procedimento de projeto no plano w	71

2.4	Compensadores discretos no domínio da frequência	73
2.4.1	Projeto de compensador por atraso de fase	76
2.4.2	Projeto de compensador por avanço de fase	84
2.4.3	Projeto de compensador por atraso-avanço de fase	90
2.5	Procedimento de projeto no plano w - controlador da família proporcional, integral e diferencial	101
2.5.1	Projeto de controlador PI	106
2.5.2	Projeto de controlador PD	113
2.5.3	Projeto de controlador PID	120
2.6	Estudo de caso: circuito RLC	125
2.7	Exercícios resolvidos	133
2.8	Vantagens e desvantagens das técnicas de compensação	175
3	Análise no espaço de estados	179
3.1	Equações no espaço de estados	179
3.2	Formas canônicas para equações no espaço de estado	181
3.2.1	Forma canônica controlável	182
3.2.2	Forma canônica observável	186
3.2.3	Forma canônica diagonal	189
3.2.4	Forma canônica de Jordan	192
3.3	Solução das equações de estado em tempo discreto	196
3.3.1	Matriz de transição de estado	196
3.3.2	Método da transformada z para a solução das equações de estado em tempo discreto	197
3.3.3	Método para calcular $(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1}$	198
3.4	Matriz da função de transferência pulsada	205
3.5	Discretização no espaço de estado de sistemas contínuos	207
3.6	Estudo de caso: circuito RLC	213
3.7	Exercícios resolvidos	220

4	Método de projeto via realimentação de estados	235
4.1	Controlabilidade	235
4.2	Observabilidade	237
4.3	Transformações úteis na análise e projeto no espaço de estados	238
4.3.1	Forma canônica controlável	239
4.3.2	Forma canônica observável	242
4.3.3	Forma canônica diagonal	243
4.3.4	Forma canônica de Jordan	245
4.4	Método de projeto via alocação de polos	247
4.4.1	Alocação de polos: procedimento igualando coeficientes	247
4.4.2	Alocação de polos: procedimento utilizando fórmula de Ackermann	254
4.5	Método de projeto via alocação de polos na origem - controle <i>deadbeat</i>	256
4.6	Método de projeto via alocação de polos com entrada de re- ferência	262
4.7	Método de projeto via alocação de polos e controle integral discreto	266
4.8	Método de projeto de controle ótimo	271
4.8.1	Controle ótimo para o problema de regulação	271
4.8.2	Controle ótimo para o problema de seguimento de sinal	274
4.9	Método de projeto de controle preditivo por modelo	283
4.10	Estudo de caso: circuito RLC	296
4.11	Exercícios resolvidos	301
5	Observadores de estado	327
5.1	Introdução	327
5.2	Projeto de observador de estados de ordem plena	329
5.3	Projeto de observador de estados de ordem reduzida	341
5.4	Projeto do filtro de Kalman como observador de estados	352

5.5	Projeto de observador MPC de ordem plena	364
5.6	Estudo de caso: circuito RLC	372
5.6.1	Realimentação de estados com observador de estados de ordem plena e controle <i>feedforward</i>	372
5.6.2	Realimentação de estados com observador de estados de ordem plena e controle integral	375
5.6.3	Realimentação de estados com observador de estado de ordem reduzida e controle <i>feedforward</i>	377
5.6.4	Realimentação de estados com observador de estado de ordem reduzida e controle integral	380
5.7	Exercícios resolvidos	382
6	Identificação de sistemas lineares	415
6.1	Identificação de sistemas em tempo discreto	415
6.2	Identificação de parâmetros por mínimos quadrados em ba- telada	417
6.3	Identificação de parâmetros por mínimos quadrados recursivo	422
6.4	Exercícios resolvidos	427
A	Tabela de transformadas z	445
B	Parâmetros de desempenho	453
B.1	Erro de estado estacionário	453
B.1.1	Entrada degrau	453
B.1.2	Entrada rampa	454
B.1.3	Entrada parabólica	455
B.2	Relação entre a resposta transitória em malha fechada e a resposta em frequência em malha fechada	455
B.2.1	Localização dos polos	456
B.2.2	Instante de pico	456
B.2.3	Relação de amortecimento	456

B.2.4	Ultrapassagem percentual	456
B.2.5	Tempo de assentamento	457
B.2.6	Amplitude de pico de ressonância	457
B.2.7	Frequência de ressonância	457
B.2.8	Fase na frequência de ressonância	457
B.2.9	Velocidade de resposta da resposta em frequência em malha fechada	458
B.2.10	Relação de amortecimento a partir da margem de fase	458
B.2.11	Relação frequência de cruzamento e largura de banda	459
C	Scripts no Arduino	461
C.1	Script Arduino: caso de estudo seção 2.6	461
C.2	Script Arduino: caso de estudo seção 5.6	464
C.3	Script Arduino: caso de estudo seção 5.6	468
C.4	Script Arduino: caso de estudo seção 5.6	472
C.5	Script Arduino: caso de estudo seção 5.6	476
	Referências	481
	Lista de figuras	485
	Lista de tabelas	493
	Índice remissivo	495

Capítulo 1

Introdução

O surgimento dos computadores digitais possibilitou o desenvolvimento das variadas aplicações práticas da teoria de controle discreto em sistemas industriais por meio de microcontroladores e computadores digitais. Nas últimas décadas, o preço dos computadores digitais caiu consideravelmente, o que permitiu a ampla aplicação prática da teoria de controle discreto, principalmente devido ao baixo custo dos microcontroladores; à grande flexibilidade de configuração que é realizada via software; à grande capacidade de armazenamento; à adequação a aplicação, a que são mais robustas à variações ambientais, e possui maior imunidade a ruídos.

Sendo os sistemas discretos amplamente utilizados, uma das ferramentas usadas para análise e projeto é a transformada z , a mesma que foi proposta na teoria de probabilidade como função geradora por Moivre (1730), conforme se discute em Jury e outros (JURY, 1964; POULARIKAS, 2010; HAZEWINKEL, 2012).

Neste capítulo, serão introduzidas as definições e propriedades da transformada z . Para mais detalhes, o leitor pode consultar as obras relevantes nas referências bibliográficas (KUO, 1992; OGATA, 1995; PHILLIPS; NAGLE, 1995; FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998; FADALI; VISIOLI, 2009).

A escolha da frequência de amostragem é importante para poder recuperar a informação do sinal original. Na vasta literatura de sistemas de controle discreto, são propostos diversos métodos para calcular a frequência de amostragem (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1990; OGATA, 1995; FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998; LANDAU; ZITO, 2006; FADALI; VISIOLI, 2009; GOPAL, 2009; FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013).

Neste livro, adotaremos a regra proposta em Meza (2020) para escolha do período de amostragem T_s .

Definição 1.0.1 *O período de amostragem T_s ficará no seguinte intervalo:*

$$\frac{\pi}{40\omega_1} \leq T_s \leq \frac{\pi}{4\omega_1}. \quad (1.1)$$

na qual ω_1 corresponde à maior frequência presente no sistema em análise.

1.1 Relação entre a transformada de Laplace e a transformada z

Supõe-se que se tem um trem de impulsos conforme mostrado na Figura 1.1a e que existe um sinal contínuo conforme mostrado na Figura 1.1b. A função representada na Figura 1.1a é denominada o pente de Dirac, também conhecida como função de amostragem, e é uma função generalizada obtida a partir da função Delta de Dirac. Amostrar um sinal contínuo, como o da Figura 1.1b, é realizar o produto do sinal da Figura 1.1a com o sinal da Figura 1.1b, o que resulta no sinal amostrado da Figura 1.1c.

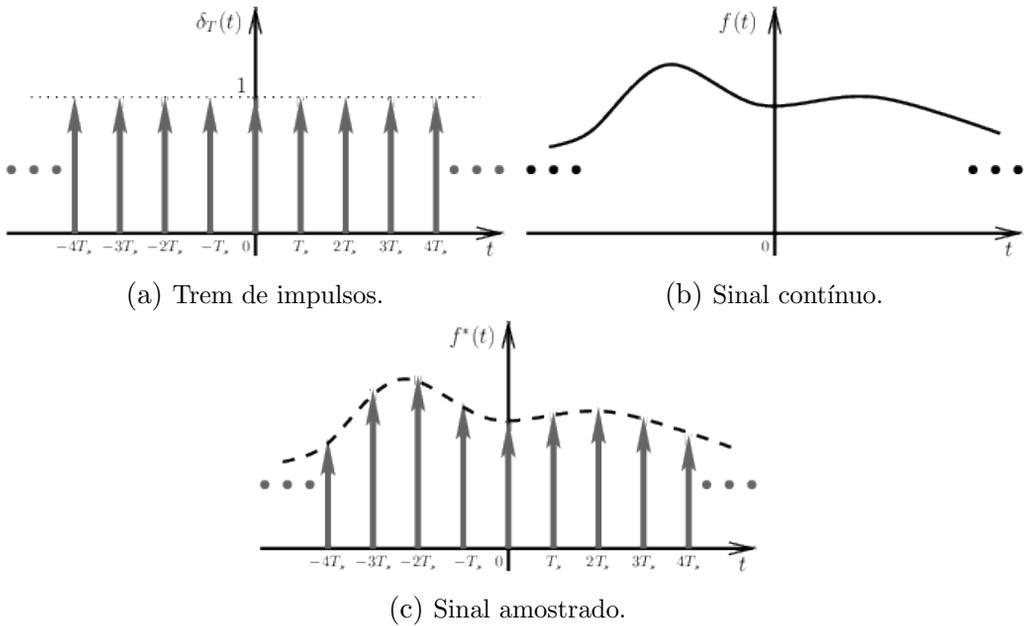


Figura 1.1: Relação entre a transformada de Laplace e a transformada z .

O trem de impulsos ou pente de Dirac é definido como um conjunto infinito de funções delta de Dirac espaçados em múltiplos inteiros de T_s , como segue:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

no qual $\delta(t)$ é a função delta de Dirac e k é um número inteiro.

Sejam representados o sinal contínuo (ou sinal analógico) como $f(t)$ e o sinal amostrado como $f^*(t)$. Defina-se o sinal amostrado como o produto de $f(t)$ e $\delta_T(t)$ como segue:

$$f^*(t) = f(t) \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - kT_s),$$

Determine-se a transformada de Laplace de $f^*(t)$:

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \mathcal{L}\{f^*(t)\} \\ &= \mathcal{L}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - kT_s)\right\} \end{aligned}$$

se sabe que $f^*(t)$ é constante no instantes kT_s assim:

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_s) \mathcal{L}\{\delta(t - kT_s)\}$$

se sabe que $\mathcal{L}\{\delta(t - kT_s)\}$ é e^{-skT_s} se segue:

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_s) e^{-skT_s}$$

Desta maneira:

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_s) e^{-skT_s} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_s) (e^{sT_s})^{-k} \end{aligned}$$

Realiza-se a seguinte mudança de notação:

$$z = e^{sT_s} \tag{1.2}$$

Obtém-se:

$$F^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_s) z^{-k}$$

e, realizando a substituição de $F^*(s)$ por $F(z)$, temos:

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_s) z^{-k}. \tag{1.3}$$

A equação (1.3) é a definição da transformada z bilateral e a equação (1.2) mostra a relação de transformação entre o plano s (plano contínuo) e o plano z (plano discreto).

1.2 Definição da transformada z

Neste livro, consideraremos que todos os sinais são causais, isto é, que, em instantes de tempo negativos, os sinais são nulos. Para os sinais causais, é definida a transformada z unilateral. Seja $f(t)$ um função contínua definida para $t \geq 0$ e seja $f(kT_s)$ o sinal amostrado de $f(t)$ para $k = 0, 1, 2, \dots$, o que pode ser representado como uma sequência $\{f(kT_s)\}$.

Definição 1.2.1 *A transformada z de $f(t)$ é definida como:*

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = \mathcal{Z}\{f(kT_s)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s) z^{-k} \quad (1.4)$$

onde $F(z)$ é a transformada z de $f(t)$.

A Definição 1.2.1 é utilizada para determinar a transformada z de qualquer função ou sequência. A Tabela 1.1 mostra algumas funções comumente utilizadas e suas respectivas transformadas z .

Tabela 1.1: Transformadas z .

$F(s)$	$f(t)$	$f(kT_s)$ ou $f(k)$	$F(z)$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	kT_s	$\frac{T_s z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT_s}	$\frac{z}{z-e^{-aT_s}}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\text{sen}(\omega t)$	$\text{sen}(\omega kT_s)$	$\frac{z \text{sen}(\omega T_s)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_s) + 1}$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\text{cos}(\omega t)$	$\text{cos}(\omega kT_s)$	$\frac{z^2 - z \cos(\omega T_s)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_s) + 1}$

$F(s)$	$f(t)$	$f(kT_s)$ ou $f(k)$	$F(z)$
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \text{sen}(\omega t)$	$e^{-akT_s} \text{sen}(\omega kT_s)$	$\frac{e^{-aT_s} z \text{sen}(\omega T_s)}{z^2 - 2e^{-aT_s} z \cos(\omega T_s) + e^{-2aT_s}}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \text{cos}(\omega t)$	$e^{-akT_s} \text{cos}(\omega kT_s)$	$\frac{z^2 - e^{-aT_s} z \text{cos}(\omega T_s)}{z^2 - 2e^{-aT_s} z \cos(\omega T_s) + e^{-2aT_s}}$
		a^k	$\frac{z}{z-a}$
		$a^{k-1}, k \geq 1$	$\frac{1}{z-a}$

No Apêndice A, Tabela A.1, é mostrada uma lista com maior número de funções contínuas e discretas com suas transformadas de Laplace e/ou transformadas z , respectivamente.

Outro método para determinar a transformada z de uma função é o método da integral de convolução. A transformada z inversa de $F(z)$ dá como resultado uma sequência no tempo $f(kT_s)$. Os métodos para determinar a transformada z inversa de uma função são: (i) a divisão direta, (ii) a computacional, (iii) a expansão em frações parciais, (iv) a integral de contorno. Para exercícios exemplo desses conceitos e como determinar a transformada z de diversas funções, o leitor pode consultar as referências bibliográficas (KUO, 1992; OGATA, 1995; PHILLIPS; NAGLE, 1995; FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998; FADALI; VISIOLI, 2009; MEZA, 2020).

1.3 Propriedades da transformada z

1. **Linearidade.** Sejam $F(z)$ e $G(z)$ as transformadas z de $f(k)$ e $g(k)$, respectivamente, e sejam a e b duas constantes reais, então a função $h(k)$ que é a combinação linear de $f(k)$ e $g(k)$:

$$h(k) = a f(k) + b g(k)$$

tem a transformada z :

$$H(z) = a F(z) + b G(z).$$

2. **Deslocamento real (avanço ou atraso de tempo).** Se $\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(z)$, então:

$$\mathcal{Z}\{f(t + m T_s)\} = z^m \left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k T_s) z^{-k} \right]$$

assim como:

$$\mathcal{Z}\{f(t - m T_s)\} = z^{-m} F(z).$$

3. **Multiplicação por a^k ou escalonamento de tempo.** Se $F(z)$ é a $\mathcal{Z}\{f(k)\}$, então a transformada z de $a^k f(k)$ pode ser dada por $F(a^{-1} z)$, isto é:

$$\mathcal{Z}[a^k f(k)] = F(a^{-1} z).$$

4. **Diferenciação complexa.** Se $F(z)$ é a $\mathcal{Z}\{f(k)\}$, então:

$$\mathcal{Z}[k^m f(k)] = (-z)^m \frac{d^m F(z)}{dz^m}.$$

5. **Multiplicação complexa (convolução real).** Se f_1 e f_2 têm as transformadas z $F_1(z)$ e $F_2(z)$, respectivamente, então:

$$F_1(z) F_2(z) = \mathcal{Z} \left[\sum_{k=0}^n f_1(k T_s) f_2((n - k) T_s) \right].$$

1.4 Teoremas da transformada z

1. **Teorema do valor inicial.** Se $f(t)$ tem a $\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(z)$ e se o $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ existe, então o valor inicial $f(0)$ de $f(t)$ ou $f(k)$ pode ser dado por:

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} (1 - z^{-1})F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z).$$

2. **Teorema do valor final.** Se $f(k) = 0$ para $k < 0$ e $f(k)$ tende a um valor constante, assim como k tende a infinito, então tal valor constante pode ser determinado da seguinte maneira:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1}) F(z)].$$

3. **Teorema de diferenciação parcial.** Seja a transformada z da função $f(t, a)$ representada por $F(z, a)$, na qual a é uma variável independente ou uma constante. A transformada z da derivada parcial de $f(t, a)$ com relação a a é dada por:

$$\mathcal{Z} \left[\frac{\partial}{\partial a} [f(t, a)] \right] = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a).$$

4. **Teorema de translação complexa.** Se $f(t)$ tem $F(z)$ por transformada z , então a transformada z de $e^{\mp at} f(t)$ está dada por $F(z e^{\pm a T_s})$.
5. **Teorema de multiplicação por t ou diferenciação complexa por t .** Se $f(t)$ tem $F(z)$ por transformada z , então a transformada z de $t f(t)$ está dada por $-z T \frac{d}{dz} [F(z)]$.

6. **Valor limite da segunda variável independente.**

$$\mathcal{Z} \left[\lim_{a \rightarrow a_0} f(t, a) \right] = \lim_{a \rightarrow a_0} F(z, a).$$

7. Integração em relação à segunda variável independente.

$$\mathcal{Z} \left[\int_{a_0}^{a_1} f(t, a) da \right] = \int_{a_0}^{a_1} F(z, a) da.$$

1.5 Transformada z inversa

A função discreta $f(k T_s)$ pode ser determinada de $F(z)$ por meio de um processo chamado de transformada z inversa, que é denotada como:

$$f(k T_s) = \mathcal{Z}^{-1} [F(z)]$$

na qual $F(z)$ é a transformada z de $f(k T_s)$. Serão apresentados alguns métodos para determinar $f(k T_s)$ a partir de $F(z)$, isto é, a transformada z .

1.5.1 Método da série de potências ou método de divisão direta

Da equação (1.4), é possível observar que:

$$F(z) = f(0 T_s) + f(T_s) z^{-1} + f(2 T_s) z^{-2} + \dots + f(k T_s) z^{-k} + \dots$$

Desse modo, nota-se que $f(k T_s)$ pode ser obtido dos coeficientes de z^{-k} .

Se $F(z)$ é dada como a razão de dois polinômios em potências de z^{-1} , os coeficientes $f(0 T_s)$, $f(1 T_s)$, $f(2 T_s)$, \dots são obtidos como:

$$F(z) = \frac{b_m z^{-(n-m)} + b_{m-1} z^{-(n-m+1)} + \dots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}}$$

Assim, é possível observar que $f(k T_s)$ pode ser obtida da divisão direta do numerador pelo denominador.

1.5.2 Método da expansão em frações parciais

O procedimento é muito semelhante ao utilizado na transformada de Laplace inversa. Muitas funções $F(z)$ tem o termo z no numerador e é conveniente fazer a expansão de $F(z)/z$ ao invés de $F(z)$. A expansão em frações parciais nos permite expressar $F(z)$ como uma somatória simples de transformadas z que procedem de funções discretas no tempo conhecidas. Seja a função $F(z)$ como segue:

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \quad (m \leq n).$$

O procedimento para obter a transformada z inversa é:

1. Fatorar o polinômio do denominador em fatores de primeira e/ou segunda ordem.
2. Expressar $F(z)/z$ ou $F(z)$ em frações parciais.
3. Obter a transformada z inversa $f(k)$ utilizando Tabelas de Transformada z .

Consideremos três casos de $F(z)$: funções com raízes reais simples de multiplicidade 1, funções com raízes complexas e reais e funções com raízes com multiplicidade maior que 1.

Raízes reais simples

Segundo o método dos resíduos, o resíduo de uma função complexa $F(z)$ em uma raiz simples z_i é dado por:

$$a_i = (z - z_i) F(z) \Big|_{z=z_i}.$$

Desse modo, $F(z)$ pode ser expressada da seguinte maneira:

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{z - z_i}.$$

Raízes complexas conjugadas

Considere que $F(z)$ tem um polinômio no denominador cujas raízes são complexas conjugadas. É possível obter a expansão em frações parciais de $F(z)$ como segue:

$$F(z) = \frac{a z}{z - p} + \frac{a^* z}{z - p^*}.$$

na qual p e p^* são raízes complexas conjugadas e a e a^* são os resíduos complexos conjugados. A transformada z inversa é obtida como:

$$\begin{aligned} f(k) &= a p^k + a^* p^{*k} \\ &= |a| |p|^k \{ e^{j(\omega k + \theta)} + e^{-j(\omega k + \theta)} \} \\ &= 2 |a| |p|^k \cos(\omega k + \theta) \end{aligned}$$

na qual ω é a fase do polo p , $\omega = \angle p$, e θ é a fase do coeficiente a , $\theta = \angle a$.

Raízes com multiplicidade maiores que um

Supõe-se que $F(z)$ tem uma raiz com multiplicidade q , dessa maneira q frações parciais estarão associadas com as raízes repetidas.

De maneira geral, a expansão em frações parciais tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{(z - z_1)^q \prod_{j=q+1}^n (z - z_j)} \\ &= \sum_{i=1}^q \frac{a_i}{(z - z_1)^{q+1-i}} + \sum_{j=q+1}^n \frac{b_j}{z - z_j} \end{aligned}$$

Os coeficientes das raízes repetidas são determinados como:

$$a_i = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} (z - z_1)^q F(z) \Big|_{z=z_1}, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Os coeficientes das raízes simples e complexas conjugadas podem ser obtidos como foi mostrado acima.

1.6 Solução de equações diferenças com coeficientes constantes

Com o intuito de obter a solução analítica, $f(k)$, de equações diferenças com coeficientes constantes é necessário utilizar o método da transformada z . Considere um sistema de controle de tempo discreto, linear e invariante no tempo, representado pela seguinte equação diferença:

$$f(k) + a_{n-1} f(k-1) + \dots + a_0 f(k-n) = \dots \quad (1.5)$$

$$\dots b_m u(k) + b_{m-1} u(k-1) + \dots + b_0 u(k-m) \quad (1.6)$$

no qual $u(k)$ é a entrada do sistema e $f(k)$ é a saída do sistema na k -ésima amostragem. Essa equação diferença pode ser representada no plano z , aplicando a transformada z em ambos lados da igualdade. Seja $\mathcal{Z}[f(k)] = F(z)$ e é possível expressar $f(k+1)$, $f(k+2)$, $f(k+3)$, ... em termos de $F(z)$ e as respectivas condições iniciais, e $f(k-1)$, $f(k-2)$, $f(k-3)$, ... em termos de $F(z)$ e potências negativas de z .

Função de transferência pulsada em malha aberta

Assim, aplicando a transformada z na equação (1.6), obtém-se:

$$F(z) + a_{n-1} z^{-1} F(z) + \dots + a_0 z^{-n} F(z) = \dots \\ \dots b_m U(z) + b_{m-1} z^{-1} U(z) + \dots + b_0 z^{-m} U(z)$$

e, então, representamos a equação anterior como:

$$\frac{F(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_m + b_{m-1} z^{-1} + \dots + b_0 z^{-m}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}}$$

Essa é a função de transferência pulsada em malha aberta, que relaciona a transformada z da saída, $F(z)$, com a transformada z da entrada, $U(z)$, como na Figura 1.2 a seguir.

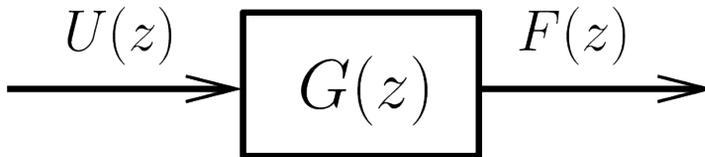


Figura 1.2: Função de transferência pulsada em malha aberta.

Exemplo 1.6.1 Considere o sistema mostrado na Figura 1.3:

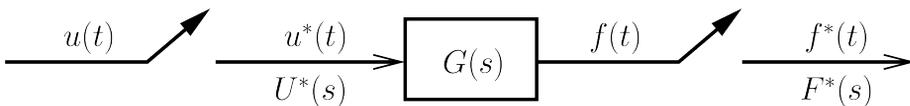


Figura 1.3: Sistema discreto em malha aberta.

Obtenha a função de transferência pulsada $G(z)$.

Solução 1.6.1 Da Figura 1.3, obtemos as seguintes relações:

$$F(s) = G(s)U^*(s)$$

se aplicamos a transformada estrela ou transformada de Laplace para sinais amostrados, obtêm-se:

$$F^*(s) = G^*(s)U^*(s), \text{ e daqui:}$$

$$G^*(s) = \frac{F^*(s)}{U^*(s)}$$

Assim:

$$G(z) = \frac{F(z)}{U(z)}$$

Função de transferência pulsada em malha fechada

A função de transferência pulsada em malha fechada pode ser obtida da Figura 1.4:

$$T(z) = \frac{F(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \quad (1.7)$$

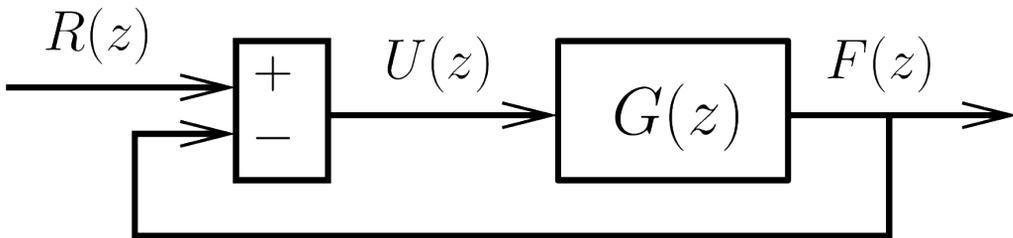


Figura 1.4: Função de transferência pulsada em malha fechada.

Exemplo 1.6.2 Considere o sistema mostrado na Figura 1.5.

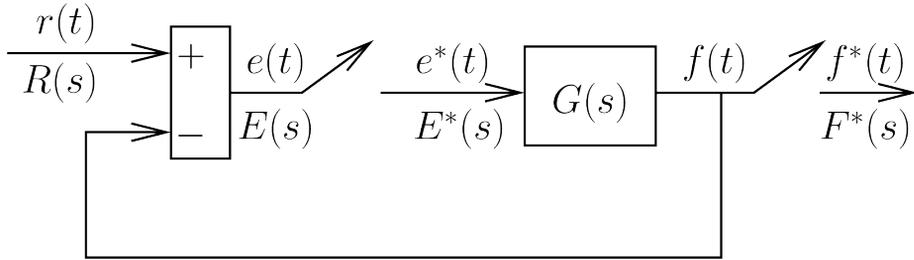


Figura 1.5: Sistema discreto em malha fechada.

Obtenha a função de transferência pulsada em malha fechada $T(z) = \frac{F(z)}{R(z)}$.

Solução 1.6.2 Da Figura 1.5, obtemos as seguintes relações:

$$F(s) = G(s) E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - F(s)$$

se aplicamos a transformada estrela ou transformada de Laplace para sinais amostrados, obtêm-se:

$$E^*(s) = R^*(s) - F^*(s)$$

$$F^*(s) = G^*(s) E^*(s)$$

substituindo $E^*(s)$ em $F^*(s)$ teremos:

$$F^*(s) = G^*(s) (R^*(s) - F^*(s))$$

assim:

$$T^*(s) = \frac{F^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1 + G^*(s)}$$

e, finalmente:

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

1.7 Métodos de análise de estabilidade

Equação característica

A equação característica está definida pelo denominador da função de transferência pulsada em malha fechada (1.7), como segue:

$$P(z) = 1 + G(z) = z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + c_{n-3} z^{n-3} + \dots + c_0 = 0 \quad (1.8)$$

A equação característica pode ser expressada da seguinte maneira:

$$P(z) = 1 + G(z) = (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n) = 0$$

na qual p_1, p_2, \dots, p_n são as raízes da equação característica, que por sua vez são os polos da função de transferência pulsada em malha fechada. A localização dos polos de malha fechada determinam a estabilidade do sistema.

Métodos de análise de estabilidade em malha fechada

A estabilidade do sistema definido pela equação (1.7) pode ser determinada pela localização dos polos em malha fechada no plano z ou pelas raízes da equação característica. Para que o sistema seja estável, os polos de malha fechada ou as raízes da equação característica devem ficar dentro do círculo unitário no plano z . Qualquer polo de malha fechada fora do círculo unitário torna o sistema instável.

A estabilidade é um tópico muito importante no projeto de sistemas de controle. A estabilidade de sistemas discretos no tempo pode ser verificada utilizando um dos testes ou critérios de estabilidade (ANTONIOU, 2006; ELAYDI, 2005).

Três testes de estabilidade podem ser aplicados diretamente à equação característica sem determinar as raízes ou polos de malha fechada,

1. Critério de estabilidade de Jury-Marden;
2. Critério de estabilidade de Schur-Cohn; e
3. Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz com a transformação bilinear.

1.7.1 Critério de estabilidade de Jury-Marden

O critério Jury-Marden deriva do critério Schur-Cohn com a simplificação de que todos os coeficientes da equação característica do sistema dinâmico discreto são reais (ANTONIOU, 2006; JURY, 1964; JURY, 1974).

Considere-se que a equação característica de um sistema seja dada pela equação (1.8), sendo $c_n = 1$ e n a ordem do sistema. Com base na equação (1.8), constrói-se a Tabela de Jury, a Tabela 1.2, como segue:

Tabela 1.2: Tabela de Jury

Etapas	Coeficientes							
1	c_0	c_1	c_2	c_3	\cdots	c_{n-2}	c_{n-1}	1
2	1	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	\cdots	c_2	c_1	c_0
3	d_0	d_1	d_2	d_3	\cdots	d_{n-2}	d_{n-1}	
4	d_{n-1}	d_{n-1}	d_{n-2}	d_{n-3}	\cdots	d_2	d_0	
5	e_0	e_1	e_2	e_3	\cdots	e_{n-2}		
6	e_{n-2}	e_{n-1}	e_{n-2}	e_{n-3}	\cdots	e_0		
	\vdots	\vdots	\vdots	\cdots				
	\vdots	\vdots	\vdots	\cdots				
$2n-5$	p_0	p_1	p_2	p_3				
$2n-4$	p_3	p_2	p_1	p_0				
$2n-3$	q_0	q_1	q_2					

Os elementos das linhas pares são os mesmos das linhas ímpares em ordem inversa. Os elementos das linhas ímpares a partir da linha 3 são determinados como:

$$d_k = \det \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-k} \\ c_{n-k} & c_0 \end{vmatrix}$$

$$e_k = \det \begin{vmatrix} d_0 & d_{n-1-k} \\ d_{n-1-k} & d_0 \end{vmatrix}$$

$$q_k = \det \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix}$$

Após realizados os cálculos dos elementos até a linha $2n-3$, continuamos com a análise dos coeficientes segundo o critério de Shur-Cohn-Jury.

Para verificar se as raízes da equação característica $P(z) = 0$ têm módulo menor ou igual à unidade, as seguintes condições devem ser verificadas:

$$P(1) > 0 \tag{1.9}$$

$$(-1)^n P(-1) > 0 \tag{1.10}$$

$$|c_0| < c_n \tag{1.11}$$

$$|d_0| > |d_{n-1}| \tag{1.12}$$

$$|e_0| > |e_{n-2}| \tag{1.13}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$|q_0| > |q_2| \tag{1.14}$$

As primeiras três condições são de verificação, equações (1.9), (1.10) e (1.11). Se qualquer uma dessas condições não for satisfeita, então pare a verificação, pois o sistema é instável. Caso contrário, continue com a verificação das outras condições.

1.7.2 Critério de estabilidade de Schur-Cohn

O critério de estabilidade de Schur-Cohn foi estabelecido em 1922 e discutido por Fujiwara em 1924 (COHN, 1922; FUJIWARA, 1926), quando ainda não existiam computadores digitais. A principal aplicação do critério é estabelecer se um polinômio geral em z tinha ou não raízes dentro do círculo unitário no plano z . Esse critério foi substituído nos últimos anos por outros mais eficientes, mas é a base de alguns dos critérios modernos (ANTONIOU, 2006).

O critério de estabilidade de Schur-Cohn fornece um teste alternativo para a estabilidade de sistemas dinâmicos discretos e é expresso em termos dos coeficientes da equação característica (1.8) (LI et al., 2011).

Para esse critério, considerem-se os seguintes determinantes:

$$D_i^\pm = \left| \begin{array}{ccccc} 1 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_{n-i+1} \\ 0 & 1 & c_{n-1} & \cdots & c_{n-i+2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & c_{n-i+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right| \pm \left| \begin{array}{ccccc} c_{i-1} & c_{i-2} & \cdots & c_1 & c_0 \\ c_{i-2} & c_{i-3} & \cdots & c_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right|$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

A equação característica (1.8) tem todas as suas raízes dentro do círculo unitário se e somente se:

1. $P(1) > 0$ e $(-1)^n P(-1) > 0$
2. $D_1^\pm > 0, D_3^\pm > 0, \dots, D_{n-3}^\pm > 0, D_{n-1}^\pm > 0$, quando n for par ou
3. $D_2^\pm > 0, D_4^\pm > 0, \dots, D_{n-3}^\pm > 0, D_{n-1}^\pm > 0$, quando n for ímpar.

1.7.3 Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz com a transformação bilinear

No plano z , não é possível aplicar diretamente o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz. Para que seja possível aplicar o critério, é necessário o mapeamento do interior do círculo unitário no plano z no semiplano esquerdo no novo plano w , similar ao plano s . A transformação bilinear está definida por:

$$z = \frac{1 + w}{1 - w} \tag{1.15}$$

e o mapeamento do plano w para o plano z é realizado por:

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{1.16}$$

O mapeamento do plano z no plano w é realizado substituindo a equação (1.15) na equação característica (1.8). A equação característica no plano w fica:

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^n + c_{n-1} \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-1} + \dots \\
 &\quad \dots + c_{n-2} \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-2} + c_{n-3} \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-3} + \dots + c_0 = 0 \\
 Q(w) &= (1-w) P(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} \\
 Q(w) &= (1+w)^n + c_{n-1} (1+w)^{n-1} (1-w) + \dots \\
 &\quad \dots + c_{n-2} (1+w)^{n-2} (1-w)^2 + \dots \\
 &\quad \dots + c_{n-3} (1+w)^{n-3} (1-w)^3 + \dots + c_0 (1-w)^n = 0
 \end{aligned}$$

Realizando a redução de termos semelhantes, obtém-se:

$$Q(w) = d_n w^n + d_{n-1} w^{n-1} + d_{n-2} w^{n-2} + d_{n-3} w^{n-3} + \dots + d_0 = 0 \quad (1.17)$$

1. Dada a equação característica no plano w , conforme a equação (1.17), estrutura-se a tabela de Routh como segue:

w^n	d_n	d_{n-2}	d_{n-4}	\dots
w^{n-1}	d_{n-1}	d_{n-3}	d_{n-5}	\dots
w^{n-2}	e_1	e_2	e_3	\dots
\vdots	f_1	f_2	f_3	\dots
w^1	p_1			
w^0	q_1			

2. As duas primeiras linhas da tabela são obtidas da equação característica, as demais são calculadas da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rcl}
 e_1 = \frac{d_{n-1}d_{n-2} - d_n d_{n-3}}{d_{n-1}} & f_1 = \frac{e_1 d_{n-3} - d_{n-1} e_2}{e_1} \\
 e_2 = \frac{d_{n-1}d_{n-4} - b_n d_{n-5}}{d_{n-1}} & f_2 = \frac{e_1 d_{n-5} - d_{n-1} e_3}{e_1} \\
 e_3 = \frac{d_{n-1}d_{n-6} - b_n d_{n-7}}{d_{n-1}} & \vdots
 \end{array}$$

3. Uma vez que a tabela foi obtida, o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz estabelece que o número de raízes da equação característica com parte real positiva é igual ao número de mudanças do sinal dos coeficientes da primeira coluna da tabela.

1.8 Erro de estado estacionário

O erro atuante da Figura 1.5 é definido como:

$$e(t) = r(t) - f(t)$$

e o erro atuante discreto pode ser determinado como:

$$E(s) = R(s) - F(s)$$

aplicando a transformada estrela, obtém-se:

$$E^*(s) = R^*(s) - F^*(s)$$

$$E^*(s) = R^*(s) - G^*(s) E^*(s)$$

assim:

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + G^*(s)}$$

e, finalmente:

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)}$$

O valor do erro atuante discreto nos instantes de amostragem é determinado utilizando o Teorema do Valor Final, como segue:

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} e(k T_s) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + G(z)} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} R(z) \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

Constante de erro estático de posição

Considere-se uma entrada degrau unitária $\mathbf{1}(k)$ cuja transformada z é:

$$R(z) = \mathcal{Z}\{\mathbf{1}(k)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

substituindo essa expressão na equação (1.18), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} e(k T_s) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} R(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} \frac{1}{1 - z^{-1}} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G(z)}.
 \end{aligned}$$

Definamos a constante de erro estático de posição como:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z),$$

dessa maneira, o erro de estado permanente em resposta a uma entrada degrau unitária é:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + K_p}.$$

Constante de erro estático de velocidade

Considere-se uma entrada rampa unitária $(k T_s) \mathbf{1}(k)$ cuja transformada z é:

$$R(z) = \mathcal{Z}\{k T_s \mathbf{1}(k)\} = \frac{T_s z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

substituindo essa expressão na equação (1.18), obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e(k T_s) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} R(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} \frac{T_s z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T_s}{(1 - z^{-1})G(z)}. \end{aligned}$$

Definamos a constante de erro estático de velocidade como:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})G(z)}{T_s},$$

dessa maneira, o erro de estado permanente em resposta a uma entrada degrau unitária é:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{K_v}.$$

Constante de erro estático de aceleração

Considere-se uma entrada de aceleração unitária $(k T_s)^2 \mathbf{1}(k)/2$ cuja transformada z é:

$$R(z) = \mathcal{Z}\{(k T_s)^2 \mathbf{1}(k)/2\} = \frac{T_s^2 (1 + z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3}$$

substituindo essa expressão na equação (1.18), obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e(k T_s) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} R(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} \frac{T_s^2 (1 + z^{-1}) z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T_s^2}{(1 - z^{-1})^2 G(z)}. \end{aligned}$$

Definamos a constante de erro estático de aceleração como:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})^2 G(z)}{T_s^2},$$

dessa maneira, o erro de estado permanente em resposta a uma entrada de aceleração unitária é:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{K_a}.$$

1.9 Exercícios resolvidos

Exemplo 1.9.1 *Determine a transformada z da função degrau unitária:*

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Utilize a definição de transformada z .

Solução 1.9.1 Utilizaremos a equação (1.4) para determinar a transformada z do degrau unitário:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k T_s) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}(k T_s) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots \end{aligned}$$

é uma progressão geométrica com primeiro elemento 1 e com razão z^{-1} , dessa maneira, obtêm-se:

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Exemplo 1.9.2 Determine a transformada z da função rampa unitária:

$$f(t) = t.$$

Utilize a definição de transformada z .

Solução 1.9.2 Utilizaremos a equação (1.4) para determinar a transformada z da rampa unitária:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k T_s) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (k T_s) z^{-k} = T_s \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k}$$

$$= 0 + T_s z^{-1} + 2 T_s z^{-2} + 3 T_s z^{-3} + 4 T_s z^{-4} + 5 T_s z^{-5} + \dots$$

fatorando o termo $T_s z^{-1}$, da expressão anterior, obtém-se

$$F(z) = T_s z^{-1} \left\{ 1 + 2 z^{-1} + 3 z^{-2} + 4 z^{-3} + 5 z^{-4} + \dots \right\}$$

multiplicando ambos membros da expressão anterior por z^{-1} e introduzindo dito elemento dentro da expressão entre chaves, obteremos:

$$z^{-1} F(z) = T_s z^{-1} \left\{ z^{-1} + 2 z^{-2} + 3 z^{-3} + 4 z^{-4} + 5 z^{-5} + \dots \right\}$$

realizando a diferença entre ambos os lados das expressões de $F(z)$ e $z^{-1} F(z)$, temos:

$$(1 - z^{-1}) F(z) = T_s z^{-1} \underbrace{\left\{ 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \dots \right\}}_{\text{esta expressão é equivalente a } \frac{1}{1-z^{-1}}}$$

resolvendo para $F(z)$, obtém-se:

$$F(z) = \frac{T_s z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

Exemplo 1.9.3 Determine a transformada z da função exponencial:

$$f(t) = e^{-at}.$$

Utilize a definição de transformada z .

Solução 1.9.3 Utilizaremos a equação (1.4) para determinar a transformada z da função exponencial:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k T_s) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a k T_s} z^{-k}$$

utilizamos uma das propriedades do função exponencial, como segue:

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{a T_s} \right)^{-k} z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(z e^{a T_s} \right)^{-k} \end{aligned}$$

consideremos uma mudança de notação $\bar{z} = z e^{a T_s}$ então:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}^{-k}$$

a expressão anterior representa a definição da transformada z de uma função degrau unitária, resultando em:

$$= \frac{1}{1 - \bar{z}^{-1}} = \frac{1}{1 - (z e^{a T_s})^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-a T_s}}$$

Exemplo 1.9.4 Determine a transformada z da seguinte função:

$$f(t) = t e^{-at}.$$

Utilize a definição de transformada z .

Solução 1.9.4 Procedimento 1: Utilizaremos a equação (1.4) para determinar a transformada z da função:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k T_s) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} k T_s e^{-a k T_s} z^{-k} \\ &= T_s \sum_{k=0}^{\infty} k \left(z e^{a T_s} \right)^{-k} \end{aligned}$$

consideremos uma mudança de notação $\bar{z} = z e^{a T_s}$, obtém-se:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \bar{z}^{-k}$$

a expressão anterior representa a definição da transformada z de uma função rampa unitária, resultando em:

$$\begin{aligned} &= \frac{T_s \bar{z}^{-1}}{\left(1 - \bar{z}^{-1}\right)^2} = \frac{T_s \left(z e^{a T_s}\right)^{-1}}{\left(1 - \left(z e^{a T_s}\right)^{-1}\right)^2} \\ &= \frac{T_s z^{-1} e^{-a T_s}}{\left(1 - z^{-1} e^{-a T_s}\right)^2}. \end{aligned}$$

Procedimento 2: Utilizando o teorema de translação complexa, seja $f(t)$ a função rampa unitária, isto é:

$$f(t) = t, \quad t \geq 0,$$

cuja transformada z é como segue:

$$F(z) = \frac{T_s z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}.$$

A transformada z de $e^{-at} f(t)$, isto é:

$$e^{-at} f(t) = e^{-at} t$$

tem como transformada z , segundo o teorema de translação complexa $F(z e^{aT_s})$, assim, teremos:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{t e^{-at}\} = \frac{T_s z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \Big|_{z=ze^{aT_s}} = \frac{T_s z^{-1} e^{-aT_s}}{(1 - z^{-1} e^{-aT_s})^2}.$$

Exemplo 1.9.5 Determine a transformada z da função seno:

$$f(t) = \text{sen}(\omega t).$$

Solução 1.9.5 Para determinar a transformada z da função seno utilizaremos a transformada z da função exponencial. Lembremos as identidades de Euler:

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos(\omega t) + j \text{sen}(\omega t), \\ e^{-j\omega t} &= \cos(\omega t) - j \text{sen}(\omega t). \end{aligned}$$

Assim, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(\omega t) &= \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \\
 \mathcal{Z}\{\operatorname{sen}(\omega t)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right\} \\
 &= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{j\omega t}}{2j}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{-j\omega t}}{2j}\right\} \\
 &= \frac{1}{2j}\mathcal{Z}\{e^{j\omega t}\} - \frac{1}{2j}\mathcal{Z}\{e^{-j\omega t}\} \\
 &= \frac{1}{2j}\left[\mathcal{Z}\{e^{j\omega t}\} - \mathcal{Z}\{e^{-j\omega t}\}\right]
 \end{aligned}$$

utilizando a transformada z da função exponencial:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1 - e^{j\omega T_s} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T_s} z^{-1}}\right] \\
 &= \frac{1}{2j}\left[\frac{1 - e^{-j\omega T_s} z^{-1} - (1 - e^{j\omega T_s} z^{-1})}{(1 - e^{j\omega T_s} z^{-1})(1 - e^{-j\omega T_s} z^{-1})}\right] \\
 &= \frac{1}{2j}\left[\frac{z^{-1}(e^{j\omega T_s} - e^{-j\omega T_s})}{1 - z^{-1}(e^{j\omega T_s} + e^{-j\omega T_s}) + z^{-2}}\right] \\
 &= \frac{1}{2j}\left[\frac{z^{-1} 2j \operatorname{sen}(\omega T_s)}{1 - z^{-1} 2 \cos(\omega T_s) + z^{-2}}\right] \\
 &= \frac{\operatorname{sen}(\omega T_s) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\omega T_s) z^{-1} + z^{-2}}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 1.9.6 Determine a transformada z da seguinte função:

$$f(t) = e^{-at} \operatorname{sen}(\omega t).$$

Solução 1.9.6 Procedimento 1: Utilizaremos a equação (1.4) para determinar a transformada z da função:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k T_s) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a k T_s} \operatorname{sen}(k \omega T_s) z^{-k} \\ &= T_s \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{sen}(k \omega T_s) \left(z e^{a T_s} \right)^{-k} \end{aligned}$$

consideremos uma mudança de notação $\bar{z} = z e^{a T_s}$ obtém-se:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{sen}(k \omega T_s) \bar{z}^{-k}$$

a expressão anterior representa a definição da transformada z de uma função seno, resultando em:

$$\begin{aligned} &= \frac{\operatorname{sen}(\omega T_s) \bar{z}^{-1}}{1 - 2 \cos(\omega T_s) \bar{z}^{-1} + \bar{z}^{-2}} \Bigg|_{\bar{z}=z e^{a T_s}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\omega T_s) (z e^{a T_s})^{-1}}{1 - 2 \cos(\omega T_s) (z e^{a T_s})^{-1} + (z e^{a T_s})^{-2}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\omega T_s) z^{-1} e^{-a T_s}}{1 - 2 \cos(\omega T_s) z^{-1} e^{-a T_s} + z^{-2} e^{-2 a T_s}} \end{aligned}$$

Procedimento 2: Utilizando o teorema de translação complexa. Seja $f(t)$ a função seno cuja transformada z é como segue:

$$F(z) = \frac{\operatorname{sen}(\omega T_s) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\omega T_s) z^{-1} + z^{-2}}.$$

A transformada z de $e^{-at} f(t)$, isto é:

$$e^{-at} f(t) = e^{-at} \operatorname{sen}(\omega t)$$

tem como transformada z , segundo o teorema de translação complexa, $F(z e^{aT_s})$, assim, obtém-se:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{e^{-at} \operatorname{sen}(\omega T_s)\} = \frac{\operatorname{sen}(\omega T_s) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\omega T_s) z^{-1} + z^{-2}} \Bigg|_{z=ze^{aT_s}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\omega T_s) z^{-1} e^{-aT_s}}{1 - 2 \cos(\omega T_s) z^{-1} e^{-aT_s} + z^{-2} e^{-2aT_s}}.$$

Exemplo 1.9.7 Determine a solução da seguinte equação diferença:

$$f(k + 2) - f(k + 1) + 0,25f(k) = u(k + 2),$$

na qual as condições iniciais são $f(0) = 1$ e $f(1) = 2$. A entrada $u(k)$ é uma função degrau unitária, definida como segue:

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, 1, 2, \dots \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

Resolva a equação diferença analiticamente e computacionalmente.

Solução 1.9.7 Solução analítica: Para resolver a equação diferença, utilizaremos os itens 3 e 5 da Tabela A.2. Aplicando a transformada z a ambos os lados da equação diferença, obtemos:

$$z^2 F(z) - z^2 f(0) - z f(1) - (z F(z) - z f(0)) + 0,25 F(z) = \dots$$

$$\dots z^2 U(z) - z^2 u(0) - z u(1)$$

$$z^2 F(z) - z^2 - z - z F(z) + z + 0,25 F(z) = z^2 U(z) - z^2 - z$$

eliminando os termos, temos:

$$(z^2 - z + 0,5)F(z) = z^2 U(z)$$

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 0,25}U(z)$$

sabemos que a transformada z do degrau unitário é:

$$U(z) = \frac{z}{z - 1}, \text{ assim:}$$

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 0,25} \left(\frac{z}{z - 1} \right)$$

Para determinar $f(k)$ podemos utilizar a transformada z inversa e expressar $F(z)$ em frações parciais. Podemos obter as frações parciais de $F(z)/z$ ou de $F(z)$. As expressões matemáticas correspondentes serão diferentes, mas os valores numéricos devem ser iguais quando avaliados nos mesmo instantes de amostragem.

Determinemos as frações parciais de $F(z)/z$, como segue:

$$\begin{aligned}\frac{F(z)}{z} &= \frac{z^2}{(z^2 - z + 0,25)(z - 1)} = \frac{z^2}{(z - 0,5)^2(z - 1)} \\ &= \frac{a}{(z - 0,5)^2} + \frac{b}{z - 0,5} + \frac{c}{z - 1}\end{aligned}$$

para obter os coeficientes a, b, c utilizaremos:

$$a = \left. \frac{F(z)}{z} (z - 0,5)^2 \right|_{z=0,5} = -0,5$$

$$b = \left. \frac{d}{dz} \left(\frac{F(z)}{z} (z - 0,5)^2 \right) \right|_{z=0,5} = -3$$

$$c = \left. \frac{F(z)}{z} (z - 1) \right|_{z=1} = 4$$

Assim:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{-0,5}{(z - 0,5)^2} + \frac{-3}{z - 0,5} + \frac{4}{z - 1}$$

multiplicando por z ambos os lados da igualdade anterior, obtêm-se:

$$F(z) = -0,5 \frac{z}{(z - 0,5)^2} - 3 \frac{z}{z - 0,5} + 4 \frac{z}{z - 1}$$

utilizando os item 1, 19 e 21 da Tabela A.1, é possível obter a

transformada z inversa de $F(z)$, assim:

$$f(k) = -0,5 k (0,5)^{k-1} - 3(0,5)^k + 4 \cdot \mathbf{1}(k)$$

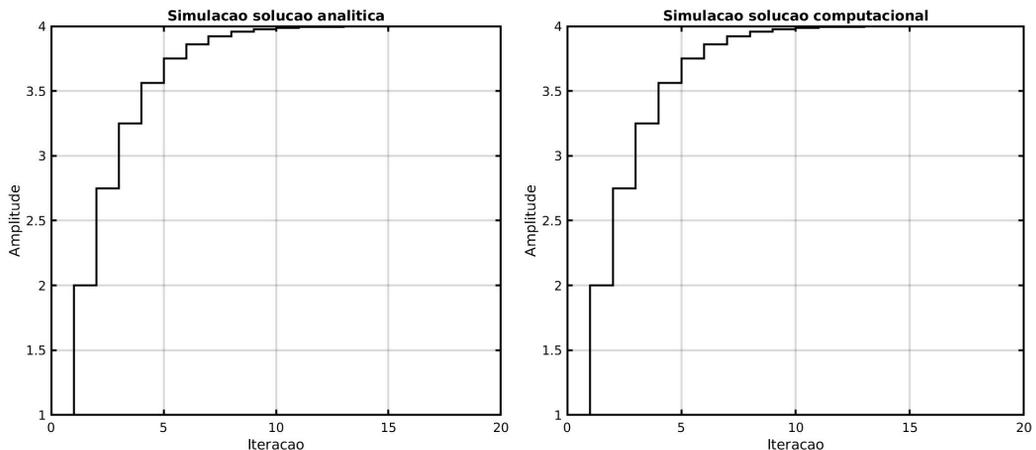
e, finalmente:

$$f(k) = -k (0,5)^k - 3(0,5)^k + 4 \cdot \mathbf{1}(k) = -(k + 3)(0,5)^k + 4 \cdot \mathbf{1}(k)$$

Solução computacional: A solução computacional é realizada através do script mostrado em  A Figura 1.6a mostra a simulação da solução analítica, isto é:

$$f(k) = -k(0,5)^k - 3(0,5)^k + 4 \cdot \mathbf{1}(k) = -(k+3)(0,5)^k + 4 \cdot \mathbf{1}(k), \quad \forall i = 1, 2, 3 \dots$$

A Figura 1.6b mostra a simulação da solução computacional, isto é, a simulação do algoritmo computacional iterativo que resolve a equação do Exemplo 1.9.7.



(a) Simulação da solução analítica.

(b) Simulação da solução computacional.

Figura 1.6: Comparação das soluções analítica e computacional, exemplo 1.9.7.

Os scripts `size_font.m` e `size_font_2.m` encontram-se em  para o Matlab.

Exemplo 1.9.8 Considere a seguinte equação característica:

$$P(z) = z^4 - 0,7z^3 - 0,78z^2 + 0,76z - 0,16.$$

Determine a estabilidade da equação característica. Utilize os três critérios de estabilidade.

Solução 1.9.8 Identifiquemos os coeficientes da equação característica: $a_4 = 1$, $a_3 = -0,7$, $a_2 = -0,78$, $a_1 = 0,76$, $a_0 = -0,16$. Iniciaremos a verificação da estabilidade pelo critério de Jury-Marden.

Critério de Jury-Marden

Verifiquemos as condições de estabilidade:

1. $|a_0| = |-0,16| < a_4 = 1$, essa condição é satisfeita.
2. $P(1) > 0$, isto é, $P(1) = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 - 0,7 - 0,78 + 0,76 - 0,16 = 0,12 > 0$, essa condição é satisfeita.
3. $(-1)^n P(-1) > 0$, isto é, $(-1)^4 P(-1) = 1 + 0,7 - 0,78 - 0,76 - 0,16 = 0$, essa condição não é satisfeita e isso nos afirma que a equação característica tem uma raiz em $z = -1$. Dessa maneira, continuamos com a verificação das condições remanescentes.
4. Constrói-se a tabela de Jury-Marden para verificar as condições remanescentes:

Etapa	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	
	-0,16				1	= $b_0 = -0,9744$
	1				-0,16	
	-0,16			-0,7		= $b_1 = 0,5784$
	1			0,76		
	-0,16		-0,78			= $b_2 = 0,9048$
	1		-0,78			
1	-0,16	0,76				= $b_3 = -0,6480$
2	1	-0,7				
	-0,9744			-0,6480		= $c_0 \approx 0,52955$
	-0,6480			-0,9744		
	-0,9744		0,9048			= $c_1 \approx 0,022717$
	-0,6480		0,5784			
3	-0,9744	0,5784				= $c_2 \approx -0,50683$
4	-0,6480	0,9048				
5	0,52955	0,022717	-0,50683			

Da Tabela, obtemos que:

$$\begin{aligned} |b_0| = 0,9744 > |b_3| = 0,6480, \quad \text{essa condição é satisfeita, e} \\ |c_0| = 0,52955 > |c_2| = 0,50683, \quad \text{essa condição é satisfeita.} \end{aligned}$$

Todas as condições são satisfeitas com exceção da condição 3, a partir da qual podemos afirmar que a equação característica tem um polo em $z = -1$. Portanto, no máximo, o sistema é criticamente estável.

Critério de Schur-Cohn

Verifiquemos as condições para esse critério. Consideremos que os coeficientes da equação característica são: $a_4 = 1$, $a_3 = -0,7$, $a_2 = -0,78$, $a_1 = 0,76$, $a_0 = -0,16$.

1. $P(1) > 0$ já foi verificada e satisfeita no critério de Jury-Marden e $(-1)^n P(-1) = 0$ para essa condição. Concluimos que a equação característica tem uma raiz em $z = -1$.
2. Agora, temos que verificar se as seguintes determinantes são positivas. No caso em que $n = 4$ é par:

$$\begin{aligned} D_1^\pm &= |a_4 \pm a_0| > 0 \\ D_3^\pm &= \left| \begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| > 0 \end{aligned}$$

substituindo valores dos coeficientes, obtemos:

$$\begin{aligned} D_1^+ &= |1 + -0,16| = |0,84| > 0 \\ D_1^- &= |1 - (-0,16)| = |1,16| > 0 \end{aligned}$$

Assim, ambas as determinantes D_1^+ e D_1^- são positivas.

Verifiquemos os demais determinantes:

$$D_3^+ = \left| \begin{pmatrix} 1 & -0,7 & -0,78 \\ 0 & 1 & -0,7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,78 & 0,76 & -0,16 \\ 0,76 & -0,16 & 0 \\ -0,16 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 0,22 & 0,06 & -0,94 \\ 0,76 & 0,84 & -0,7 \\ -0,16 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0,019584 > 0,$$

essa condição é satisfeita,

$$D_3^- = \left| \begin{pmatrix} 1 & -0,7 & -0,78 \\ 0 & 1 & -0,7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,78 & 0,76 & -0,16 \\ 0,76 & -0,16 & 0 \\ -0,16 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1,78 & -1,46 & -0,62 \\ -0,76 & 1,6 & -0,7 \\ 0,16 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1,2338 > 0,$$

essa condição é satisfeita,

Assim, as determinantes D_3^+ e D_3^- são positivas.

Portanto, a equação característica será criticamente estável, já que possui uma raiz em $z = -1$.

Critério de Routh-Hurwitz e transformação bilinear

A equação característica no plano z tem a seguinte forma:

$$P(z) = z^4 - 0,7z^3 - 0,78z^2 + 0,76z - 0,16.$$

utilizaremos a seguinte transformação bilinear:

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

e a equação característica no plano w fica como segue:

$$\begin{aligned}
 Q(w) &= P(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = 0 \\
 &= \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^4 - 0,7 \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 - 0,78 \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + 0,76 \left(\frac{1+w}{1-w}\right) - 0,16 \\
 &= (1+w)^4 - 0,7(1+w)^3(1-w) - 0,78(1+w)^2(1-w)^2 + \dots \\
 &\dots + 0,76(1+w)(1-w)^3 - 0,16(1-w)^4 \\
 &= 0,12w^4 + 1,72w^3 + 6,6w^2 + 7,56w = 0 \\
 &= w(0,12w^3 + 1,72w^2 + 6,6w + 7,56)
 \end{aligned}$$

Podemos observar que $Q(w)$ tem uma raiz na origem. Verifiquemos se o polinômio:

$$0,12w^3 + 1,72w^2 + 6,6w + 7,56 = 0$$

tem raízes no semiplano esquerdo do plano w . Identificamos os coeficientes do polinômio como: $d_3 = 0,12$, $d_2 = 1,72$, $d_1 = 6,6$ e $d_0 = 7,56$.

Construindo a Tabela de Routh-Hurwitz como segue:

$$\begin{array}{c|cc}
 w^3 & d_3 & d_1 \\
 w^2 & d_2 & d_0 \\
 w^1 & e_1 & 0 \\
 w^0 & q_1 &
 \end{array}$$

e

$$e_1 = \frac{d_2 d_1 - d_3 d_0}{d_2} \quad q_1 = \frac{e_1 d_0 - d_2 \cdot 0}{e_1}$$

Assim, obtemos a seguinte tabela:

w^3	0,12	6,6
w^2	1,72	7,56
w^1	6,0726	0
w^0	7,56	

Observamos que todos os elementos da primeira coluna são positivos e não existe mudança de sinal, isto é, que a equação característica não tem raízes no semiplano direito do plano w . Lembrando que a equação característica tem uma raiz na origem. Portanto, a equação característica é, no máximo, criticamente estável.

Exemplo 1.9.9 Considere o sistema da Figura 1.7.

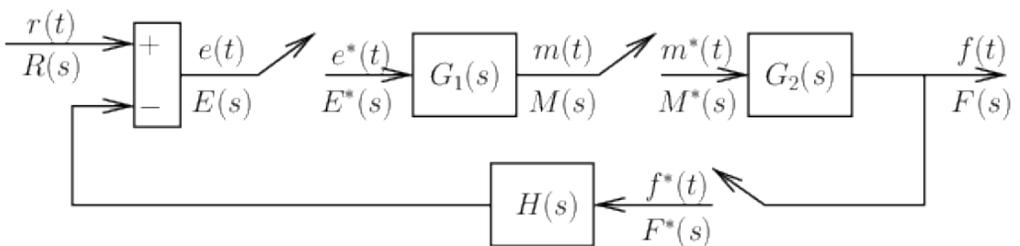


Figura 1.7: Sistema em tempo discreto em malha fechada.

Determine a função de transferência pulsada em malha fechada, isto é,

$$T(z) = \frac{F(z)}{R(z)}.$$

Solução 1.9.9 Da Figura 1.7, obtêm-se as seguintes relações:

$$F(s) = G_2(s) M^*(s)$$

$$M(s) = G_1(s) E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s) F^*(s)$$

aplicando a transformada estrela em todas as relações anteriores,

obtemos:

$$F^*(s) = G_2^*(s) M^*(s)$$

$$M^*(s) = G_1^*(s) E^*(s)$$

$$E^*(s) = R^*(s) - H^*(s) F^*(s)$$

substituindo $E^*(s)$ em $M^*(s)$ e $M^*(s)$ em $F^*(s)$, obtêm-se:

$$M^*(s) = G_1^*(s) (R^*(s) - H^*(s) F^*(s))$$

$$F^*(s) = G_2^*(s) G_1^*(s) (R^*(s) - H^*(s) F^*(s))$$

assim:

$$F^*(s) = \frac{G_1^*(s) G_2^*(s)}{1 + G_1^*(s) G_2^*(s) H^*(s)}$$

finalmente:

$$F(z) = \frac{G_1(z) G_2(z)}{1 + G_1(z) G_2(z) H(z)}.$$

Exercícios

1. Utilize os três critérios para examinar a estabilidade das seguintes equações características:

(a) $P(z) = z^4 + 2,8z^3 + 2,79z^2 + 1,172z + 0,176 = 0$

(b) $P(z) = z^4 + 0,9z^3 - 0,8z^2 - 0,9z - 0,2 = 0$

(c) $P(z) = z^4 + 1,9z^3 + 0,48z^2 - 0,37z - 0,04 = 0$

(d) $P(z) = z^5 + 1,5z^4 + 0,1z^3 - 0,84z^2 - 0,4736z - 0,0768 = 0$

$$(e) P(z) = z^5 + 3,65z^4 + 5,285z^3 + 3,7915z^2 + 1.34625z + 0,189 = 0$$

2. Utilizando a definição de transformada z de:

$$(a) t^2$$

$$(b) t^3$$

3. Determine a transformada z inversa pelo método de expansão de frações parciais das seguintes funções de transferência:

$$(a) F(z) = \frac{z}{(z + 0,4)(z + 0,5)(z + 0,6)}$$

$$(b) F(z) = \frac{1}{z(z + 0,8)^2(z + 0,6)(z + 0,1)}$$

$$(c) F(z) = \frac{z}{(z + 1)(z + 2)(z + 3)}$$

$$(d) F(z) = \frac{z^2}{(z + 1)(z + 2)(z + 3)}$$

4. Resolva as seguintes equações diferenças:

$$(a) x(k + 2) + 2x(k + 1) + x(k) = 0 \text{ com condições iniciais } x(0) = 2 \text{ e } x(10) = 5.$$

$$\text{Solução: } 0,3k(-1)^k + 2(-1)^k.$$

$$(b) y(k + 2) - 2y(k + 1) + y(k) = 4 \text{ com condições iniciais } y(0) = 1, y(1) = 2.$$

$$\text{Solução: } -7k - 3 + 4(k + 1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right).$$

$$(c) y(k + 2) + y(k + 1) - 2y(k) = 1 \text{ com condições iniciais } y(0) = 0, y(1) = 1.$$

$$\text{Solução: } \frac{2}{9} - \frac{2}{9}(-2)^k + \frac{k}{3}.$$

$$(d) y(k + 2) - 3y(k + 1) + 2y(k) = 1 \text{ com condições iniciais } y(0) = 0, y(1) = 1.$$

$$\text{Solução: } 2^{k+1} - 2 - k.$$

- (e) $y(k+2) + 5y(k+1) + 6y(k) = 1$ com condições iniciais $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Solução: $\frac{(-3)^{k+1}}{4} - \frac{(-2)^{k+1}}{3} + \frac{1}{12}$.

- (f) $3y(k+2) - 7y(k+1) + 2y(k) = k$ com condições iniciais $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

Solução: $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{4} - \frac{k}{2}$.

- (g) $y(k+2) - 9y(k) = 2k$ com condições iniciais $y(0) = 1$, $y(1) = 1$.

Solução: $\frac{5}{16}(-3)^k + \frac{(3)^k}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{4}k$.

- (h) $y(k+2) + 2y(k) = 0$ com condições iniciais $y(0) = 1$, $y(1) = \sqrt{2}$

Solução: $2^{\frac{k}{2}} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right)$.

- (i) $y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) = 0$ com condições iniciais $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Solução: k .

- (j) $y(k+2) - 8y(k+1) - 9y(k) = 0$ com condições iniciais $y(0) = 2$, $y(1) = 1$.

Solução: $\frac{17}{10}(-1)^k + \frac{3}{10}(9)^k$.

- (k) $y(k+2) - y(k+1) - y(k) = 0$ com condições iniciais $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Solução: $\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right]$

- (l) $2y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) = 1$ com condições iniciais $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

Solução: $1 - (2)^{-k/2} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - (2)^{-k/2} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.

5. Dado o sistema da Figura 1.8, determine a faixa de ganho de K para a estabilidade do sistema, usando o critério de Jury, a transformação bilinear e critério de Routh-Hurwitz e o critério Schur-Cohn, para:

$$(a) G(z) = \frac{K(z + 0,8)}{(z - 1)(z - 0,6)}.$$

$$(b) G(z) = \frac{K(0,1z + 0,06)}{(z - 1)(z - 0,7)}.$$

$$(c) G(z) = \frac{K(0,1z + 0,06)}{z(z - 1)(z - 0,7)}.$$

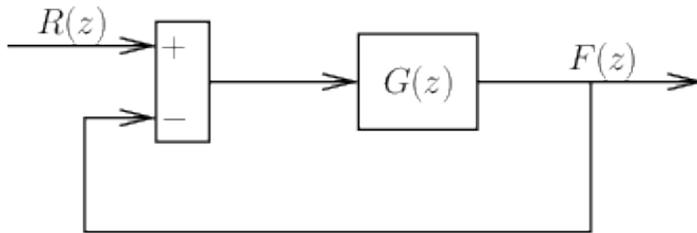


Figura 1.8: Sistema de controle em tempo discreto, exercício 5.

Este livro apresenta conceitos sobre sistemas de controle discretos no tempo para o projeto de controladores, observadores e identificação de sistemas lineares.

A transformada Z é apresentada de maneira resumida por ser a ferramenta essencial para análise dos sistemas de controle em tempo discreto. Os métodos de projeto de controladores abordados são: a resposta em frequência, a realimentação de estados com o controle ótimo, o controle preditivo por modelo, entre outros. Mostram-se exemplos práticos de implementação de alguns controladores e observadores em um microcontrolador Arduino para um circuito RLC série.



www.blucher.com.br

Blucher



Clique aqui e:

[VEJA NA LOJA](#)

Controle de Sistemas por Computador

Projeto e identificação

Magno Enrique Mendoza Meza

ISBN: 9786555061413

Páginas: 500

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2022
