



SBA
PRESS 

JOSÉ JAIME DA CRUZ

INTRODUÇÃO AO PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE ROBUSTOS

Blucher



sociedade brasileira de
AUTOMÁTICA

José Jaime da Cruz

**INTRODUÇÃO AO PROJETO DE SISTEMAS
DE CONTROLE ROBUSTOS**

Introdução ao projeto de sistemas de controle robustos

© 2022 José Jaime da Cruz

Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher

Editor Eduardo Blücher

Coordenação editorial Jonas Eliakim

Produção editorial Isabel Silva

Diagramação José Jaime da Cruz

Revisão de texto Gabriela Castro

Capa Leandro Cunha

Imagem da capa iStockphoto

Editora Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4^o andar

CEP 04531-934 – São Paulo – SP – Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

contato@blucher.com.br

www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009. É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Cruz, José Jaime

Introdução ao projeto de sistemas de controle robustos / José Jaime da Cruz – São Paulo :
Blucher, 2022.

248 p.: il.

Bibliografia

ISBN 978-65-5506-128-4 (impresso)

ISBN 978-65-5506-129-1 (eletrônico)

1. Engenharia de controle 2. Controle automático 3. Sistemas lineares de controle I. Título
21-4664 CDD 629.8

Índices para catálogo sistemático:

1. Engenharia de controle

Conteúdo

I	FUNDAMENTOS	19
1	Introdução	21
1.1	Prolegômenos	21
1.2	Pontos a considerar no projeto	25
1.3	Considerações preliminares	27
1.3.1	Gráficos de resposta em frequência	27
1.3.2	Ressonâncias	28
1.3.3	Diagrama de blocos canônico	31
1.3.4	Análise qualitativa preliminar do desempenho	34
1.3.5	Graus de liberdade de um sistema de controle	39
2	Estabilidade e desempenho nominais	41
2.1	Introdução	41
2.2	Estabilidade nominal	42
2.3	Acompanhamento do sinal de referência	44
2.4	Rejeição de perturbação	48
2.5	Rejeição do erro de medida	54
2.5.1	Condição de rejeição do erro de medida	55
2.5.2	O conjunto Ω_n	58
2.6	Limitação do esforço de controle	62
2.7	Sistemas com dois graus de liberdade	65
2.7.1	O pré-filtro e a malha fechada	66
2.7.2	Escolha do pré-filtro para compatibilidade com a malha fechada	71
2.7.3	Projeto do controlador para compatibilidade entre a malha fechada e o pré-filtro	72
2.8	Resumo dos requisitos de projeto no domínio da frequência	74
2.9	Erro estacionário	76

2.9.1	Entrada degrau	77
2.9.2	Entrada rampa	78
3	Erros de modelagem	79
3.1	Introdução	79
3.2	Incertezas não estruturadas	81
3.3	Incertezas estruturadas	87
3.4	Conservadorismo da representação da incerteza na forma multiplicativa	91
4	Robustez da estabilidade	93
4.1	O resultado fundamental	93
4.2	Condição de robustez da estabilidade para incerteza multiplicativa	96
5	Robustez do desempenho	105
5.1	Acompanhamento do sinal de referência	106
5.1.1	Incerteza multiplicativa	106
5.1.2	Incerteza representada por <i>templates</i>	111
5.2	Rejeição de perturbação	112
5.3	Rejeição do erro de medida	113
5.3.1	Incerteza multiplicativa	113
5.3.2	Incerteza representada por <i>templates</i>	116
5.4	Limitação do esforço de controle	116
5.4.1	Incerteza multiplicativa	116
5.4.2	Incerteza representada por <i>templates</i>	118
5.5	Sistemas com dois graus de liberdade	119
5.5.1	Escolha do pré-filtro para compatibilidade com a malha fechada	120
5.5.2	Projeto do controlador para compatibilidade entre a malha fechada e o pré-filtro	122
5.6	Erro estacionário	125
5.6.1	Incerteza multiplicativa	126
5.6.2	Incerteza representada por <i>templates</i>	129
5.7	Em que ponto estamos? Para onde vamos?	131
II	TÉCNICAS DE PROJETO	133
6	Loop shaping utilizando controle clássico	135

6.1	A planta	135
6.2	Exemplo - Sistema de controle com 1 grau de liberdade	136
6.3	Exemplo - Escolha do pré-filtro para compatibilidade com a malha fechada	141
6.4	Exemplo - Projeto da malha fechada para compatibilidade com o pré-filtro	147
6.5	Exemplo - Limitação do esforço de controle	148
7	Projeto via QFT	155
7.1	Introdução	155
7.2	Porque o nome “ <i>templates</i> ”	157
7.3	Estabilidade robusta	158
7.4	Acompanhamento do sinal de referência	162
7.5	Rejeição de perturbação	163
7.6	Rejeição do erro de medida	164
7.7	Limitação do esforço de controle	165
7.8	Sistemas com dois graus de liberdade	166
7.8.1	Escolha do pré-filtro para compatibilidade com a malha fechada	166
7.8.2	Projeto do controlador para compatibilidade entre a malha fechada e o pré-filtro	167
7.9	Construção do controlador	168
7.9.1	Integradores	169
7.9.2	Ganho simples	169
7.9.3	Polos e zeros reais simples	170
7.9.4	Avançadores e atrasadores de fase	171
7.9.5	Polos e zeros complexos conjugados	173
7.10	Exemplo	173
8	Projeto via H_∞	187
8.1	Preliminares	188
8.2	Robustez da estabilidade	190
8.3	Robustez do desempenho em baixas frequências	191
8.4	Robustez da rejeição do erro de medida	192
8.5	Compromisso entre os requisitos de projeto em baixas e altas frequências	193
8.6	Limitação do esforço de controle	195
8.7	O problema H_∞ sub-ótimo	196

8.7.1	Robustez do desempenho em baixas frequências	197
8.7.2	Limitação do esforço de controle	198
8.7.3	Robustez da estabilidade e rejeição do erro de medida	198
8.7.4	A formulação da sensibilidade mista	198
8.8	Um novo paradigma – A planta generalizada	200
8.9	Uma solução do problema H_∞ sub-ótimo	204
8.10	Escolha das funções de ponderação	206
8.11	Exemplo	211
A	Modelo “real” do sistema de acionamento	219
A.1	Modelo na forma de resposta em frequência	219
A.2	Modelo na forma de estados	222
B	Robustez do desempenho em baixas frequências	225
B.1	Análise em baixas frequências	227
B.2	Análise em altas frequências	228
B.3	Condição expressa por meio da sensibilidade mista	228
C	Robustez da rejeição do erro de medida	231
D	Barreiras exatas no plano de Nichols	233
D.1	Barreiras de baixas frequências	233
D.2	Barreiras de altas frequências	234
E	Norma H_∞	237
F	Existência da solução do problema H_∞ sub-ótimo	241
	Referências	243
	Índice remissivo	245

Capítulo 1

Introdução

1.1 Prolegômenos

O estudo de sistemas de controle a realimentação tem como propósito desenvolver uma ciência da engenharia que permita atingir objetivos com uma precisão dada *a priori*, a despeito da existência de incertezas no comportamento do sistema.

Neste texto será estudado o problema de projeto de *sistemas de controle lineares e invariantes no tempo de uma entrada e uma saída (SISO)* por meio de uma abordagem no domínio da frequência. Este enfoque está baseado no fato de que uma classe ampla de sinais pode ser decomposta em suas componentes senoidais.

O tratamento do problema de projeto de sistemas de controle no domínio da frequência tem algumas vantagens importantes. Talvez a maior delas seja a clareza com que ficam estabelecidos os compromissos de projeto. Assim, é possível responder questões como as seguintes:

- A qualidade do modelo de projeto é compatível com as especificações?
- Em que regiões de frequências é viável acompanhar sinais de referência? E rejeitar perturbações?
- Qual é a qualidade do sensor apropriada para utilização no problema?

Considere o caso de uma antena cuja posição angular deve ser controlada de maneira a acompanhar um ponto que se move no espaço. Há duas situações em que o uso da realimentação é interessante:

- **Quando há incertezas no comportamento do sistema**

Considere um sistema de acionamento da antena que seja baseado em um motor CC o qual, por meio de um redutor de velocidade por engrenagens, aciona o eixo da antena. Normalmente, há diversas incertezas presentes no modelo desse sistema. Como exemplos típicos podem ser mencionadas as seguintes:

- i) os parâmetros do motor nunca são conhecidos com absoluta precisão;
- ii) os componentes que se movem podem fazê-lo sob a ação de atrito significativo – linear e não linear –, em geral modelado de forma simplificada;
- iii) muitas vezes pode também haver folgas nas engrenagens do redutor;
- iv) o próprio movimento do ponto no espaço que se deseja acompanhar com a antena pode ser desconhecido *a priori*.

Em face de tantas incertezas, é claro que, se o sistema de controle operar em malha aberta, certamente o desempenho da antena não será satisfatório.

- **Quando há perturbações agindo sobre o sistema**

Admita-se, por simplicidade, que as incertezas no modelo mencionadas acima não sejam significativas, mas que a antena esteja sujeita à ação de ventos. Se estes pudessem ser medidos com exatidão – tanto em intensidade como em direção – e se estivesse disponível um modelo matemático para avaliar com precisão seu efeito sobre a antena, então o acionamento do motor em malha aberta poderia dar resultados satisfatórios. Contudo, na prática, é improvável que se disponha de tais medidas e nível de conhecimento do modelo, de maneira que o desempenho do sistema em malha aberta deixará a desejar.

Se for projetado adequadamente, um sistema de controle em malha fechada poderá produzir bons resultados, ainda que as incertezas no modelo e as perturbações externas estejam presentes, sem que seja necessário medir estas últimas.

Um diagrama de blocos para este caso é representado esquematicamente na Figura 1.1. O sensor é o elemento utilizado para medir a posição angular da antena. O atuador é o elemento de potência, cuja entrada é um sinal de controle de baixa potência e cuja saída é o torque aplicado à antena. O controlador é o bloco que, com base no desvio entre a posição angular desejada e a posição angular medida, determina o valor do sinal de controle adequado para corrigir a posição da antena.

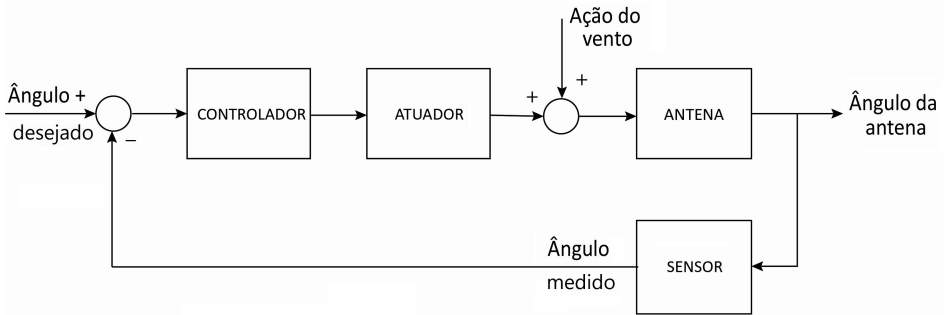


Figura 1.1 – Diagrama de blocos de um sistema de controle automático de posição de uma antena.

É de se esperar que o controlador requerido para atender às especificações de um dado problema deva depender tanto da extensão das incertezas presentes no processo quanto das especificações referentes ao desempenho do sistema.

Este texto tem por objetivo estudar a questão do projeto de sistemas de controle robustos. O que se pretende é apresentar técnicas de projeto que permitam garantir tanto a estabilidade como o desempenho de acordo com as especificações dadas, ainda que o modelo da planta não seja conhecido com absoluta precisão e que sobre ela atuem perturbações externas.

• Nota 1.1 – Malha aberta *versus* Malha fechada

Para complementar a discussão sobre a utilidade da realimentação, considere o sistema de controle em malha aberta representado na Figura 1.2, em que $K(s)$ e $G(s)$ são as funções de transferência do controlador e da planta, respectivamente, enquanto $r(s)$, $u(s)$ e $y(s)$ são os sinais de entrada do controlador, controle e saída da planta, respectivamente.

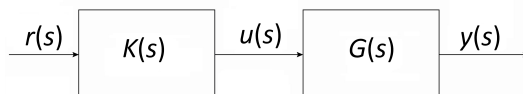


Figura 1.2 – Diagrama de blocos do sistema de controle em malha aberta.

O problema é escolher o controlador $K(s)$ de maneira que a saída $y(s)$ acompanhe a entrada $r(s)$.

Para atingir esse objetivo, é imediato que basta escolher

$$K(s) = \frac{1}{G(s)},$$

de maneira que, no caso ideal,

$$\frac{y(s)}{r(s)} = 1.$$

Há, contudo, alguns inconvenientes com essa escolha, entre outros:

- como, em geral, $G(s)$ é estritamente própria, $K(s)$ resultará imprópria;
- $G(s)$ normalmente apresenta incertezas de modelagem;
- quando $G(s)$ é instável, o sistema em malha aberta também é instável.

Embora de fundamental relevância, deixem-se de lado por um momento essas questões. Considere-se então que a planta esteja sujeita à ação de uma perturbação externa $d_i(s)$, conforme ilustrado na Figura 1.3.

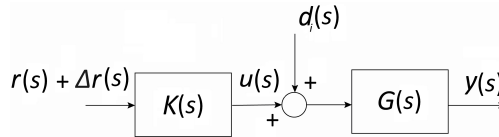


Figura 1.3 – Diagrama de blocos do sistema de controle em malha aberta sujeito à ação de uma perturbação.

A despeito da presença da perturbação, o objetivo continua sendo fazer com que a saída $y(s)$ acompanhe $r(s)$. A questão que se coloca é a possibilidade de adicionar uma correção $\Delta r(s)$ ao sinal $r(s)$ de maneira a atingir esse objetivo.

Do diagrama da Figura 1.3 tem-se que

$$y(s) = G(s)[u(s) + d_i(s)],$$

em que

$$u(s) = K(s)[r(s) + \Delta r(s)]$$

e, portanto,

$$y(s) = G(s)K(s)[r(s) + \Delta r(s)] + G(s)d_i(s).$$

Considerando que, mesmo na ausência da perturbação, é necessário acompanhar o sinal de referência, novamente escolhe-se

$$K(s) = \frac{1}{G(s)}.$$

Em seguida, impondo que

$$y(s) = r(s),$$

resulta que

$$\Delta r(s) = -G(s)d_i(s).$$

Esta solução pode ser representada pelo diagrama de blocos da Figura 1.4, em que o termo de pré-alimentação (feedforward) é responsável por eliminar o efeito da perturbação sobre a saída.

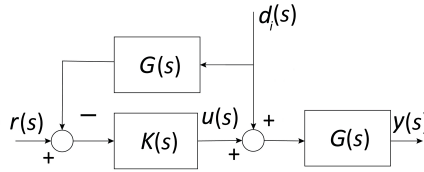


Figura 1.4 – Diagrama de blocos do sistema de controle em malha aberta sujeito à ação de uma perturbação e com o termo de pré-compensação.

Além dos problemas associados ao caso anterior, a rejeição da perturbação apresenta adicionalmente os seguintes inconvenientes:

- a dependência do modelo da planta $G(s)$ e, portanto, a fragilidade em relação aos erros de modelagem;
- a necessidade de se dispor de uma medida precisa da perturbação $d_i(s)$.

Fica claro então que a estrutura de controle em malha aberta, por si só, não é satisfatória para aplicações práticas.

Conforme se verá adiante, o uso da realimentação poderá fornecer um sistema com boas características de desempenho mesmo que a planta seja instável e que $G(s)$ apresente erros de modelagem significativos; além disso, não será necessário que a perturbação $d_i(s)$ seja medida.

1.2 Pontos a considerar no projeto

Quando projetados apropriadamente, os sistemas de controle em malha fechada podem apresentar vantagens importantes em relação aos em malha aberta. Entretanto, na prática, a realimentação pode introduzir problemas sérios se o controlador não for bem projetado. Assim, por exemplo, tendo-se uma planta estável, o sistema em malha fechada pode resultar instável se o controlador for mal projetado.

Os itens a seguir devem ser considerados no projeto de sistemas de controle em malha fechada [Sidi, 2001].

- **Especificações de projeto**

A realimentação é utilizada para conseguir características de desempenho que não podem ser obtidas pela operação em malha aberta. Entre essas características podem ser citados o atendimento, dentro de uma precisão preestabelecida,

i) do acompanhamento (ou rastreamento) de um sinal de referência pela saída do sistema e/ou

ii) da atenuação dos efeitos de perturbações externas e dos erros de medida sobre a saída da planta.

- **Incertezas nos parâmetros da planta e dinâmicas não modeladas**

É óbvio que sempre há uma incerteza nos valores dos parâmetros do modelo da planta, sendo que, muitas vezes, tem-se conhecimento apenas de uma faixa em que eles se situam. Se as variações dos valores dos parâmetros são pequenas, normalmente a saída da planta não varia significativamente; no entanto, quando as variações não são pequenas, podem ocorrer problemas indesejáveis com o comportamento do sistema, inclusive a instabilidade.

Os modelos matemáticos adotados para representar o comportamento dos sistemas físicos contêm ainda simplificações associadas a dinâmicas de alta ordem desprezadas. Isso significa que os modelos normalmente são fiéis em uma região de baixas frequências, apresentando erros crescentes à medida que a frequência aumenta. Para exemplificar, considere novamente o caso do sistema de posicionamento da antena. É comum utilizar um modelo para o projeto em que, por exemplo, a dinâmica do circuito de armadura introduzida pela indutância de armadura é desprezada, assim como desprezam-se a flexibilidade do conjunto eixo-redutor de velocidade e a própria flexibilidade da antena. Todos esses efeitos constituem dinâmicas de ordem elevada que causam discrepâncias entre o comportamento do sistema real e do modelo matemático utilizado para representá-lo.

A estabilidade e o desempenho de acordo com especificações dadas devem ser garantidas a despeito de todas essas incertezas no modelo da planta. Este é o problema conhecido como *controle robusto*.

- **Capacidade dos atuadores**

Parece intuitivo que, quando as especificações de desempenho são severas demais, os esforços de controle exigidos dos atuadores podem ultrapassar suas capacidades. Naturalmente, essa situação deve ser evitada, porque saturações dos atuadores podem provocar o surgimento de oscilações ou mesmo instabilidades no sistema.

De forma um tanto vaga, uma diretriz que deve nortear a definição das especificações de um sistema de controle é *não exigir que ele apresente acompanhamento de referências nem rejeição de perturbações em uma região de frequências em que ele próprio atenua significativamente os sinais*. Este ponto será abordado adiante com mais cuidado.

- **Amplificação do erro de medida**

Os sistemas de controle a realimentação necessitam, em geral, de um sensor para medir a variável que se deseja controlar. Ao medi-la, o sensor tipicamente introduz erros de alta frequência, representados tanto por distorções causadas por sua própria dinâmica, quanto por ruídos de natureza elétrica. Os efeitos desses erros de medida podem se fazer sentir tanto sobre a saída do sistema, quanto sobre a variável de controle. Por isso, é necessário levá-los em conta no procedimento de projeto, de maneira que eles sejam mantidos dentro de limites pré-especificados.

1.3 Considerações preliminares

1.3.1 Gráficos de resposta em frequência

Supõem-se aqui que sejam suficientemente conhecidos pelo leitor tanto o conceito de resposta em frequência, quanto as suas representações gráficas usuais, a saber, por meio dos diagramas de Bode ou nos planos de Nyquist (gráficos polares) e de Nichols. Admite-se também familiaridade com os conceitos de Margens de Ganho e de Fase, assim como com suas visualizações nas representações mencionadas.

O uso do plano de Nichols apresenta algumas vantagens em relação ao uso dos diagramas de Bode. Em primeiro lugar, apenas uma curva parametrizada na frequência é utilizada no plano de Nichols, enquanto duas curvas (de ganho e fase) são necessárias nos diagramas de Bode. Adicionalmente, representando-se na Carta de Nichols a resposta em frequência de malha aberta, pode-se ler diretamente a resposta em frequência do sistema em malha fechada com realimentação

unitária, o que não é possível com os diagramas de Bode. Por fim, como será visto adiante, a Carta de Nichols é a ferramenta ideal a ser utilizada pela técnica QFT para o projeto de sistemas de controle com grandes incertezas paramétricas (veja o Capítulo 7).

Talvez a principal vantagem dos diagramas de Bode em relação à representação no plano de Nichols seja a facilidade de construção das aproximações assintóticas. Nos planos de Nichols e de Nyquist, por outro lado, a construção do gráfico e a sua parametrização em função da frequência só podem ser feitas numericamente, ponto a ponto.

Os diagramas de Bode e os gráficos de Nichols têm uma vantagem evidente em relação aos diagramas de Nyquist: a simplicidade de obter os gráficos de resposta em frequência de $G(j\omega)K(j\omega)$ a partir dos gráficos individuais de $G(j\omega)$ e de $K(j\omega)$. Note que, tanto no plano de Nichols quanto no gráfico de Bode, os ganhos são medidos em escala logarítmica (dB) e, por isso, se somam.

$$20 \log_{10} |G(j\omega)K(j\omega)| = 20 \log_{10} |G(j\omega)| + 20 \log_{10} |K(j\omega)| \quad (1.1)$$

Obviamente, isso não ocorre nos gráficos de Nyquist, uma vez que

$$|G(j\omega)K(j\omega)| = |G(j\omega)||K(j\omega)|. \quad (1.2)$$

Por outro lado, a operação com as fases é igualmente simples nos três casos, já que

$$\angle G(j\omega)K(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle K(j\omega).$$

De maneira análoga, os valores das Margens de Ganho e de Fase podem ser lidos diretamente de gráficos de Bode ou de Nichols. Quando se trata de diagramas de Nyquist, a extração da Margem de Ganho requer o cálculo do inverso de um número real, enquanto a da Margem de Fase requer a medida de um ângulo.

Por fim, conforme se verá mais adiante na Seção 7.3, na Carta de Nichols é possível avaliar de imediato a eventual existência de ressonâncias, juntamente com as frequências em que estas ocorrem.

1.3.2 Ressonâncias

Nesta seção, é analisada a relação entre a ocorrência de ressonâncias e a proximidade entre o diagrama de Nyquist e o ponto crítico $-1 + j0$. Por essa razão, valores pequenos da Margem de Ganho e da Margem de Fase indicam a ocorrência de ressonâncias. Para a verificação, considere o sistema com realimentação

unitária representado na forma de diagrama de blocos na Figura 1.5 e suposto estável.

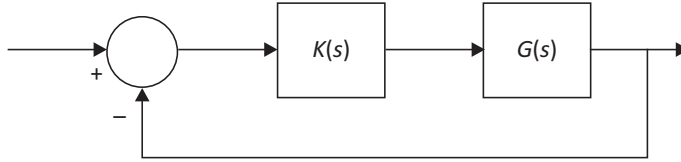


Figura 1.5 – Diagrama de blocos de um sistema com realimentação unitária.

- **Margem de Ganho pequena**

A Margem de Ganho pode ser representada esquematicamente no diagrama de Nyquist conforme mostra a Figura 1.6.

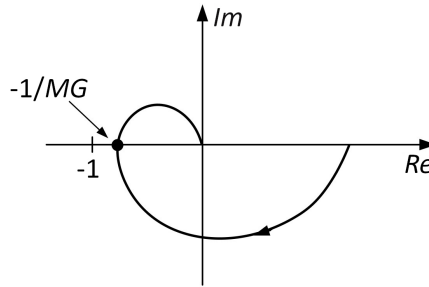


Figura 1.6 – Margem de Ganho no diagrama de Nyquist.

Designando por ω_g a frequência em que a fase de $G(j\omega)K(j\omega)$ é -180° e por MG o valor da Margem de Ganho, é imediato que

$$G(j\omega_g)K(j\omega_g) = -\frac{1}{MG}. \quad (1.3)$$

Então, para a função de transferência de malha fechada $T(s)$ vale que

$$\begin{aligned} |T(j\omega_g)| &= \frac{|G(j\omega_g)K(j\omega_g)|}{|1 + G(j\omega_g)K(j\omega_g)|} \\ &= \frac{1}{|MG - 1|}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Portanto, se a Margem de Ganho MG é pequena ($MG \simeq 1$), tem-se a ocorrência de uma ressonância em ω_g :

$$|T(j\omega_g)| \gg 1. \quad (1.5)$$

- **Margem de Fase pequena**

Para o mesmo sistema da Figura 1.5, a Margem de Fase pode ser visualizada esquematicamente conforme a Figura 1.7.

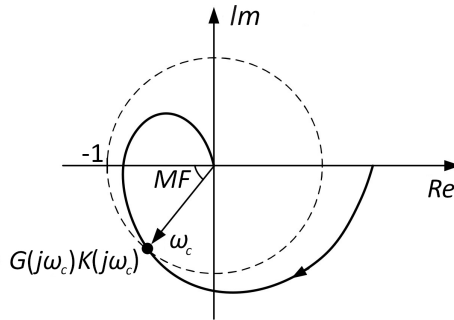


Figura 1.7 – Margem de Fase no diagrama de Nyquist.

Denotando por ω_c a frequência em que o ganho de $G(j\omega)K(j\omega)$ é unitário (*frequência de cruzamento do ganho – crossover frequency*, em inglês), isto é,

$$|G(j\omega_c)K(j\omega_c)| = 1 \quad (1.6)$$

e por MF o valor da Margem de Fase, é simples verificar geometricamente que

$$|1 + G(j\omega_c)K(j\omega_c)| = 2 \operatorname{sen}(MF/2). \quad (1.7)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} |T(j\omega_c)| &= \frac{|G(j\omega_c)K(j\omega_c)|}{|1 + G(j\omega_c)K(j\omega_c)|} \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{sen}(MF/2)}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Portanto, se a Margem de Fase MF é pequena ($MF \ll 1$), há uma ressonância em ω_c :

$$|T(j\omega_c)| \gg 1. \quad (1.9)$$

- **Caso geral**

De maneira mais geral, para uma frequência qualquer ω , tem-se que

$$|T(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)K(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)K(j\omega)|}. \quad (1.10)$$

Portanto, se o diagrama de Nyquist é próximo do ponto $-1 + j0$ na frequência ω (veja a Figura 1.8), então ocorre uma ressonância, pois se $|1 + G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1$ então $|G(j\omega)K(j\omega)| \simeq 1$ e, por consequência,

$$|T(j\omega)| \gg 1. \quad (1.11)$$

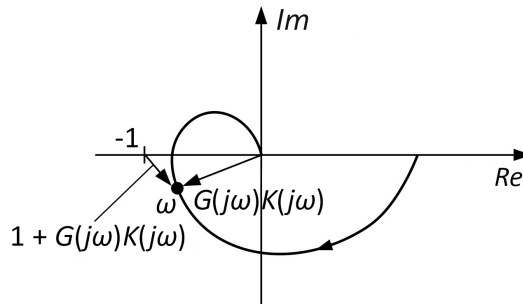


Figura 1.8 – Diagrama de Nyquist com a frequência ω destacada.

Definição 1.1 – Margem de Módulo

Define-se Margem de Módulo (MM) como sendo a mínima distância do gráfico de Nyquist ao ponto crítico $-1 + j0$. A saber,

$$MM = \min_{\omega} |1 + G(j\omega)K(j\omega)|. \quad (1.12)$$

As ressonâncias, como se sabe, estão associadas à existência de polos pouco amortecidos, situados próximos do eixo imaginário. O que se viu acima é que, de maneira equivalente, as ressonâncias estão associadas à proximidade entre o diagrama de Nyquist e o ponto crítico $-1 + j0$. Sob qualquer um dos pontos de vista, é intuitivo que pequenas incertezas no modelo do sistema com ressonância podem levá-lo à instabilidade: seja porque se visualize um par de polos deslocando-se para o semiplano direito, seja porque se visualize o diagrama de Nyquist mudando o número de envoltimentos do ponto crítico.

1.3.3 Diagrama de blocos canônico

A Figura 1.9 mostra o diagrama de blocos canônico de um sistema de controle em malha fechada com realimentação unitária que será considerado neste texto. A presença do bloco F , denominado *pré-filtro*, será discutida mais adiante, na Seção 1.3.5.

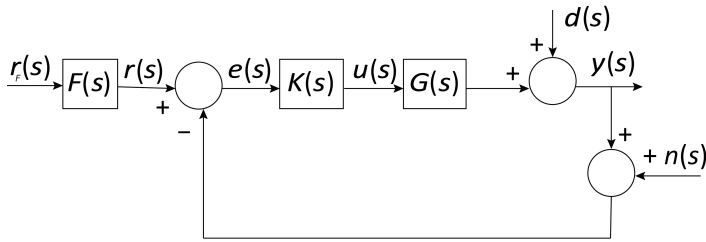


Figura 1.9 – Diagrama de blocos canônico para realimentação unitária.

Nesse diagrama, $G(s)$, $K(s)$ e $F(s)$ representam, respectivamente, as funções de transferência da planta¹, do controlador e do pré-filtro. Definindo

$$L(s) = G(s)K(s), \quad (1.13)$$

$$T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (1.14)$$

e

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = \frac{1}{1 + L(s)}, \quad (1.15)$$

do diagrama de blocos canônico resulta de imediato que

$$\frac{y(s)}{r_F(s)} = F(s) \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = F(s)T(s), \quad (1.16)$$

$$\frac{y(s)}{r(s)} = -\frac{y(s)}{n(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = T(s), \quad (1.17)$$

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = S(s), \quad (1.18)$$

e

$$\frac{u(s)}{r(s)} = -\frac{u(s)}{n(s)} = -\frac{u(s)}{d(s)} = \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)} = K(s)S(s) = \frac{1}{G(s)}T(s). \quad (1.19)$$

Com base nas definições anteriores, é oportuno exprimir os sinais de saída $y(s)$ e de entrada $u(s)$ da planta em função dos sinais externos à malha $r(s)$, $d(s)$ e $n(s)$.

$$\boxed{y(s) = T(s)r(s) + S(s)d(s) - T(s)n(s)}, \quad (1.20)$$

¹Na prática, é usual considerar o atuador como parte da planta.

$$u(s) = K(s)S(s)r(s) - K(s)S(s)d(s) - K(s)S(s)n(s). \quad (1.21)$$

Essas duas equações estão entre as *mais importantes* deste texto, pois, de uma observação mais atenta delas, é possível deduzir algumas diretrizes fundamentais para o projeto do controlador $K(s)$.

Definição 1.2 – Função de transferência de malha

A função de transferência $L(s)$ (equação 1.13) é chamada de função de transferência de malha (loop transfer function).

Definição 1.3 – Sensibilidade

A função de transferência $S(s)$ (equação 1.15) é chamada de sensibilidade.

• Nota 1.2 – O porquê da denominação “sensibilidade”

Para entender a denominação sensibilidade, considere o sistema representado na Figura 1.5 e admita que o sinal de referência seja r e que o sinal de saída seja y . Obviamente,

$$y = \frac{GK}{1 + GK}r.$$

Admita que a planta G sofra uma variação e passe a $G + \Delta G$. Em correspondência, a saída y passará a $y + \Delta y$. Uma medida adequada da sensibilidade da saída a variações na planta é

$$\frac{\Delta y/y}{\Delta G/G}.$$

Se a ΔG é suficientemente pequena, pode-se aproximar

$$\frac{\Delta y/y}{\Delta G/G} \simeq \frac{\partial y}{\partial G} \frac{G}{y},$$

de onde resulta que

$$\frac{\Delta y/y}{\Delta G/G} \simeq \frac{1}{1 + GK} = S.$$

Ou seja, S mede a sensibilidade da saída com respeito a variações na planta.

A sensibilidade também está diretamente ligada ao erro estacionário para entrada degrau.

Seja

$$r(s) = \frac{1}{s}$$

e seja e_{ss} o valor do erro estacionário. Do Teorema do Valor Final resulta de imediato a propriedade a seguir:

Propriedade 1.1

$$e_{ss} = S(0) \quad (1.22)$$

Note que as funções $S(s)$ e $T(s)$, sendo esta última definida pela equação 1.14, são tais que para elas vale a seguinte propriedade:

Propriedade 1.2

$$S(s) + T(s) \equiv 1 \quad (1.23)$$

Como consequência dessa identidade, tem-se a definição a seguir:

Definição 1.4 – Sensibilidade complementar

A função de transferência $T(s)$ (equação 1.14) é chamada de sensibilidade complementar.

Definição 1.5 – Diferença de retorno A função de transferência $1 + G(s)K(s)$ é chamada de função de transferência diferença de retorno.

Note que a função de transferência diferença de retorno é o inverso da sensibilidade. Sendo assim, o valor da Margem de Módulo (veja equação 1.12) é igual ao valor mínimo do ganho da função de transferência diferença de retorno ou (o que é o mesmo) igual ao inverso do valor máximo do ganho da sensibilidade. Em outras palavras, o inverso da sensibilidade máxima é uma medida da proximidade entre o gráfico de Nyquist de $G(j\omega)K(j\omega)$ e o ponto $-1 + j0$.

• Nota 1.3 – Teorema de Bode da Integral da Sensibilidade

Neste ponto é oportuno lembrar que, em sua forma estendida, o Teorema de Bode da Integral da Sensibilidade assegura que o valor máximo do módulo da sensibilidade é maior do que 1 em grande parte dos sistemas de controle (veja [Skogestad and Postlethwaite, 2005] para maiores detalhes). Sendo assim, nesses casos a Margem de Módulo é menor do que 1.

1.3.4 Análise qualitativa preliminar do desempenho

A principal consequência da propriedade 1.2 é a seguinte:

Propriedade 1.3 Para qualquer frequência ω , as funções $|S(j\omega)|$ e $|T(j\omega)|$ não podem ser pequenas simultaneamente.

Da identidade 1.23 e da Desigualdade Triangular

$$1 = |S(j\omega) + T(j\omega)| \leq |S(j\omega)| + |T(j\omega)|, \quad (1.24)$$

observe de imediato que é impossível $|S(j\omega)| \ll 1$ e $|T(j\omega)| \ll 1$ simultaneamente.

De maneira alternativa, essa propriedade pode ser visualizada geometricamente. Para isso, considere a equação 1.23, que, para $s = j\omega$, pode ser ilustrada pela Figura 1.10. Portanto, fica evidente que $S(j\omega)$ e $T(j\omega)$ não podem ser simultaneamente pequenas, pois devem ter 1 por soma.

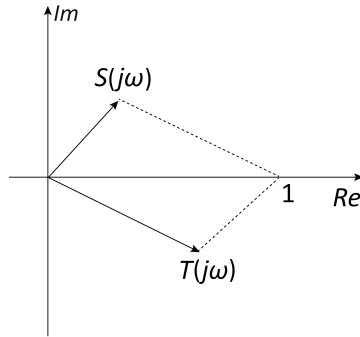


Figura 1.10 – Ilustração da relação entre $S(j\omega)$ e $T(j\omega)$.

Como se verá adiante, isto terá importantes implicações, estabelecendo compromissos de projeto.

• **Ganho de Malha Aberta pequeno**

Note que se, para certa frequência ω , o Ganho de Malha Aberta é pequeno, isto é,

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1, \quad (1.25)$$

então

$$T(j\omega) \simeq G(j\omega)K(j\omega) \quad (1.26)$$

e, portanto,

$$|T(j\omega)| \ll 1. \quad (1.27)$$

Assim, se o Ganho de Malha Aberta é pequeno, o valor da resposta em frequência de malha aberta praticamente se confunde com o valor de malha fechada. Além disso,

$$S(j\omega) \simeq 1. \quad (1.28)$$

- **Ganho de Malha Aberta grande**

Por outro lado, se em uma certa frequência ω , o Ganho de Malha Aberta é grande, isto é,

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1, \quad (1.29)$$

então

$$S(j\omega) \simeq \frac{1}{G(j\omega)K(j\omega)}. \quad (1.30)$$

Portanto,

$$|S(j\omega)| \ll 1 \quad (1.31)$$

e

$$T(j\omega) \simeq 1. \quad (1.32)$$

Observando a equação 1.20, é possível perceber, de forma intuitiva, algumas características do Ganho de Malha necessárias para o desempenho do sistema em malha fechada, a saber:

- **Acompanhamento do sinal de referência**

Admita que se deseje que o sinal de saída acompanhe o sinal de referência $r(j\omega)$ em uma dada região de frequências de interesse (normalmente em baixas frequências). A equação 1.20 mostra que, para isso, $T(j\omega)$ deve ser próximo de 1 nessa região, o que ocorre quando o Ganho de Malha Aberta é grande. Portanto, a sensibilidade é pequena.

- **Atenuação das perturbações externas**

Para atenuar os efeitos da perturbação externa $d(j\omega)$ sobre a saída $y(j\omega)$, $S(j\omega)$ deve ser pequeno na faixa de frequências em que a energia da perturbação é mais significativa. Isto normalmente ocorre em baixas frequências. Note novamente que, se o Ganho de Malha é grande, a sensibilidade é pequena.

- **Atenuação do erro de medida**

Para que o efeito do erro de medida $n(j\omega)$ sobre a saída $y(j\omega)$ seja pequeno, $T(j\omega)$ deve ser pequeno na região de frequências em que o erro de medida tem maior energia. Felizmente, os erros mais significativos introduzidos pelos sensores são de alta frequência, de maneira que é possível que a banda de $T(s)$ seja suficientemente larga para permitir boas características de acompanhamento do sinal de referência e de rejeição de perturbação. Observe

que, se o Ganho de Malha é pequeno, a sensibilidade complementar também o é, enquanto a sensibilidade é próxima de 1.

Com base nessa análise qualitativa preliminar, uma conclusão a que se chega neste ponto é a necessidade lidar com compromissos no projeto. Por exemplo, se por um lado valores pequenos de $S(j\omega)$ (ou, equivalentemente, valores de $T(j\omega)$ próximos de 1) são necessários para atenuar os efeitos das perturbações externas sobre a saída e para acompanhar o sinal de referência, por outro lado valores de $S(j\omega)$ próximos de 1 (ou, equivalentemente, valores pequenos de $T(j\omega)$) são necessários para atenuar os efeitos do erro de medida sobre a saída. Felizmente, na prática, as perturbações e os sinais de referência têm maior energia em baixas frequências, enquanto os erros de medida a têm em altas, de maneira que é possível atender às exigências de projeto.

Em poucas palavras, o problema de projeto que será tratado neste texto se resumirá em determinar $K(s)$ (e, eventualmente, $F(s)$) de maneira a garantir a estabilidade do sistema e a atender a especificações de desempenho.

• **Nota 1.4 – Margens de estabilidade e sensibilidade**

Nesta nota, são estabelecidos limitantes inferiores para os valores das margens de estabilidade com base na sensibilidade [Sidi, 2001], que podem ser úteis no contexto do Controle H_∞ , onde, conforme se verá adiante no Capítulo 8, a função sensibilidade desempenha papel central para exprimir as condições de projeto.

Por simplicidade, como é usual², admita que

$$MG > 1.$$

Da equação 1.3 e da definição de sensibilidade (equação 1.15), tem-se que

$$\frac{1}{S(j\omega_f)} = 1 - \frac{1}{MG}. \quad (1.33)$$

De início, note que desta equação decorre que

$$S(j\omega_f) > 1$$

²Quando $MG < 1$, pode-se mostrar que

$$MG \leq \frac{S_{max}}{S_{max} + 1},$$

o que não é de grande utilidade para fins de projeto, porque normalmente se deseja garantir que MG seja maior do que um dado valor.

como consequência da hipótese de que $MG > 1$. Além disso, para números reais, vale a desigualdade

$$|S(j\omega_f)| \geq S(j\omega_f).$$

Seja S_{max} o valor máximo de $|S(j\omega)|$ para $\omega \in \mathbb{R}^+$, ou seja,

$$S_{max} \geq |S(j\omega)| \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^+. \quad (1.34)$$

Então,

$$S_{max} \geq |S(j\omega_f)| \geq S(j\omega_f) > 1$$

e, portanto,

$$\frac{1}{S_{max}} \leq \frac{1}{|S(j\omega_f)|} \leq \frac{1}{S(j\omega_f)}.$$

Da equação 1.33 resulta então que

$$\frac{1}{S_{max}} \leq 1 - \frac{1}{MG},$$

da qual se conclui de imediato que

$$\boxed{MG \geq \frac{S_{max}}{S_{max} - 1}.} \quad (1.35)$$

Quanto à margem de fase, das equações 1.7 e 1.15 tem-se

$$2 \operatorname{sen}(MF/2) = \frac{1}{|S(j\omega_c)|},$$

a qual, em vista da equação 1.34, permite concluir de imediato que

$$\boxed{\operatorname{sen}(MF/2) \geq \frac{1}{2 S_{max}}.} \quad (1.36)$$

As desigualdades 1.35 e 1.36 representam relações entre a sensibilidade máxima e os valores das margens de estabilidade.

Cabe lembrar, contudo, que as Margens de Ganho e Fase são medidas rudimentares de robustez da estabilidade que, como se sabe, podem não ser adequadas em certos casos – por exemplo, quando a mínima distância do diagrama de Nyquist ao ponto crítico é pequena, embora as Margens de Ganho e Fase não o sejam. Neste sentido, a Margem de Módulo parece ser um indicador mais apropriado, uma vez que a definição 1.1 (veja equação 1.12) mostra que

$$\boxed{MM = \frac{1}{S_{max}}.} \quad (1.37)$$

1.3.5 Graus de liberdade de um sistema de controle

Considere novamente o sistema representado na Figura 1.9.

Definição 1.6 – Sistema de controle com dois graus de liberdade

A presença do bloco F na Figura 1.9 caracteriza o sistema como sendo de dois graus de liberdade.

Definição 1.7 – Sistema de controle com um grau de liberdade

Quando o bloco F está ausente na Figura 1.9, o sistema é dito de um grau de liberdade.

A introdução do pré-filtro na entrada da malha de controle normalmente é decorrente da necessidade de o sistema em malha fechada apresentar uma saída temporal desejada em resposta a um sinal de referência.


Neste ponto, é importante lembrar que existe uma relação aproximada entre a resposta em frequência de uma dada função de transferência e sua resposta temporal. Deve lembrar-se, por exemplo, das respostas a degrau de sistemas de segunda ordem e das suas respectivas respostas em frequência. Inversamente, isso significa que a escolha adequada da resposta em frequência pode permitir que se obtenha uma resposta temporal desejada. Veja, por exemplo, [Houpis and Rasmussen, 1999] para maiores detalhes.

Para exemplificar com um caso clássico, admita que o sistema da Figura 1.9 represente um sistema de controle de voo de um avião. Neste caso, normalmente o controlador $K(s)$ é projetado de forma a atender a especificações de rejeição de perturbação, erro estacionário, margens de estabilidade etc. Com isso, a função de transferência $T(s)$ obtida pode não estar em conformidade com o comportamento em malha fechada desejado pelo piloto.

Entretanto, como neste sistema o pré-filtro $F(s)$ pode ser implementado fisicamente, então $F(j\omega)$ pode ser utilizado pelo projetista de maneira a produzir a relação $y(j\omega)/r_F(j\omega)$ conforme desejado pelo piloto. O pré-filtro $F(s)$ provê o sistema de um segundo grau de liberdade já que, usando $K(s)$ e $F(s)$, a função de transferência $y(s)/r_F(s)$ e uma das funções de transferência das equações 1.17-1.19 podem ser especificadas e realizadas independentemente.

Diferentemente do exemplo anterior, admita que o pré-filtro não possa ser implementado fisicamente. Nesse caso, há apenas um grau de liberdade, ou seja, apenas uma das funções de transferência das equações 1.17-1.19 pode ser especificada e realizada independentemente.

Esta situação ocorre, por exemplo, em um sistema de rastreamento por radar, em que: a entrada $r(t)$ é a cinemática de movimento de um corpo que se desloca no espaço e que, em geral, não é medida (ou, em outros termos, que pode ter um alto custo de medida); $y(t)$ é a posição da antena; e $e(t)$ é o erro de apontamento da antena em relação ao objeto no sistema de referência da antena. Neste caso, como apenas o erro $e(t)$ é medido, somente $K(s)$ pode ser implementado e utilizado com a finalidade de projeto, ou seja, apenas $K(s)$ pode ser usada para manipular $T(s)$.



QUASE TODAS AS
OBRAS QUE TRATAM DE
SISTEMAS DE CONTROLE
ROBUSTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
O FAZEM PARA SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS,
O QUE REQUER FERRAMENTAS MATEMÁTICAS
RELATIVAMENTE SOFISTICADAS E ABSTRATAS. NESTE TEXTO
PARA SISTEMAS MONOVARIÁVEIS, O AUTOR OPTOU POR UTILIZAR
ARGUMENTOS SIMPLES E INTUITIVOS, SENDO NECESSÁRIOS PARA O SEU
ENTENDIMENTO APENAS CONHECIMENTOS BÁSICOS DE CONTROLE DE
SISTEMAS DESCRITOS POR MEIO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA.

Dessa maneira, o livro é acessível não apenas para alunos de graduação, mas também para engenheiros envolvidos com a prática de projeto. Além disso, pode ser útil como leitura preliminar para um curso de controle robusto multivariável.

O objetivo central desta obra é estudar problemas de projeto, tanto no que se refere à estabilidade quanto ao desempenho, considerando explicitamente a presença de incertezas no modelo da planta. Para isso, três técnicas são apresentadas: *loop shaping* utilizando as ferramentas de controle clássico, QFT e H_∞ .

Também são abordadas algumas questões práticas fundamentais, como se a qualidade do modelo de projeto é compatível com as especificações; em quais regiões de frequências é viável acompanhar sinais de referência e rejeitar perturbações; se a qualidade do sensor é apropriada para utilização em um dado problema; e se a largura de banda do controlador é adequada para o uso de um determinado sensor.



www.blucher.com.br

Blucher



Clique aqui e:

[VEJA NA LOJA](#)

Introdução ao Projeto de Sistemas de Controle Robustos

José Jaime da Cruz

ISBN: 9786555061284

Páginas: 248

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2022

Peso: 0.415 kg
