Matemática com Aplicações Tecnológicas

Geometria Analítica | **Volume 5**

Ayrton Barboni

Walter Paulette

Dirceu D'Alkmin Telles,
Seizen Yamashiro,
Suzana Abreu de Oliveira Souza
(organizadores)

Blucher

Fatec
São Paulo

FUNDAÇÃO FAT

DIRCEU D'ALKMIN TELLES
Organizador

AYRTON BARBONI
WALTER PAULETTE
Autores

MATEMÁTICA

com Aplicações Tecnológicas

Geometria Analítica | **Volume 5**

Matemática com Aplicações Tecnológicas, Volume 5: Geometria analítica

Publisher Edgard Blücher
Editor Eduardo Blücher
Coordenação editorial Jonatas Eliakim
Produção editorial Lidiane Pedroso Gonçalves
Preparação de texto Ana Maria Fiorini
Diagramação Claudia Fatel Lino
Revisão de texto Maurício Katayama
Capa Leandro Cunha
Imagem da capa Roberto Barboni

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-012 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, julho de 2021.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Barboni, Ayrton

Matemática com aplicações tecnológicas: geometria analítica / Ayrton Barboni, Walter Paulette ; organização de Dirceu D'alkmin Telles. - São Paulo: Blucher, 2023.

474 p. (vol. 5)

Bibliografia
ISBN 978-65-5506-103-1

1. Matemática - matrizes, determinantes, sistemas lineares. Geometria analítica I. Título II. Paulette, Walter III. Telles, Dirceu D'alkmin

21-5320 CDD 516.3

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática - Problemas, questões, exercícios.

CONTEÚDO

1 MATRIZES

- Identificar e classificar matrizes.
- Contextualizar as operações com matrizes.
- Determinar a matriz inversa.

1.1 INTRODUÇÃO

Uma editora produz revistas de esportes (E), científica (C) e religiosa (R) para público adolescente e adulto. Verificou-se que a produção realizada num determinado dia foi descrita pela tabela:

Revistas / **Público**	E	C	R
Adolescente	200	30	40
Adulto	300	150	80

Os dados da tabela costumam ser apresentados na forma simplificada:

$$\begin{bmatrix} 200 & 30 & 40 \\ 300 & 150 & 80 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{Vmatrix} 200 & 30 & 40 \\ 300 & 150 & 80 \end{Vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 200 & 30 & 40 \\ 300 & 150 & 80 \end{pmatrix}$$

Essas formas de dispor os dados são conhecidas como **matriz**.

O problema apresenta uma matriz com duas linhas (público) e três colunas (revistas).

$$\begin{array}{cc} & \text{colunas} \\ & \begin{array}{ccc} 1^a & 2^a & 3^a \end{array} \\ \text{linhas} \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \end{array} & \begin{bmatrix} 200 & 30 & 40 \\ 300 & 150 & 80 \end{bmatrix} \end{array}$$

Outras matrizes:

Identificamos as matrizes por letras maiúsculas do alfabeto latino.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 15 & 8\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 8\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 7\\ 2\end{bmatrix}\quad G=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad H=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\\ 7 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

Os números apresentados na matriz são denominados **elementos da matriz**.

Entendemos, pela disposição dos elementos, que as matrizes têm forma retangular. Contudo, as que possuem apenas uma linha são denominadas **matriz linha**, as que possuem apenas uma coluna são denominadas **matriz coluna** e aquelas em que o número de linhas é igual ao de colunas são denominadas **matriz quadrada**.

Vê-se, nos exemplos, que A e D são matrizes linha, D e F são matrizes coluna e as matrizes C, D e E são quadradas.

1.1.1 REPRESENTAÇÃO DE MATRIZES

Uma matriz é, em geral, representada por letra maiúscula do alfabeto latino, e os seus elementos são indicados por letras minúsculas indexadas: $a_{i,j}$, sendo que i informa a linha e j a coluna de sua localização na matriz.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1j} & \ldots\ldots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2j} & \ldots\ldots & a_{2m}\\ \ldots\ldots & & & & & & \ldots\ldots\\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{ij} & \ldots\ldots & a_{im}\\ \ldots\ldots & & & & & & \ldots\ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nj} & \ldots\ldots & a_{nm}\end{bmatrix}$$

Entende-se que o elemento a_{23} está posicionado na 2ª linha e 3ª coluna da matriz A, que possui $\boldsymbol{n}$ linhas e $\boldsymbol{m}$ colunas.

Notação: $A=\left(a_{ij}\right)_{n \times m}$, com $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le m$.

A **ordem** de uma matriz se refere ao seu número de linhas e colunas. Assim, a matriz A é de ordem $n \times m$ (lemos: ordem n por m). Diz-se, caso $m = n$, que a matriz é quadrada e de ordem n e pode ser representada por A_n .

Nota: Podemos deixar de indicar a ordem de uma matriz se não houver dúvidas sobre tal fato.

1.2 TIPOS DE MATRIZES

Apresentaremos, agora, algumas matrizes importantes para nosso estudo.

1.2.1 MATRIZ IDENTIDADE E MATRIZ NULA

Uma matriz quadrada é denominada **matriz identidade** de ordem n se possuir os elementos da **diagonal principal**: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ todos iguais a **1** e os demais elementos iguais a zero.

Seguem algumas matrizes identidade:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonal secundária *diagonal principal*

Se todos os elementos de uma matriz forem iguais a zero ela é denominada **matriz nula**. Nesse caso, não é necessário que a matriz seja quadrada.

$$\bar{0}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\text{x}2}, \quad \bar{0}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\text{x}3} \quad \text{e} \quad \bar{0}_{2x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x4}$$

1.2.2 MATRIZ TRANSPOSTA

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 15 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}_{3\text{x}2} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 15 & 8 \end{bmatrix}_{2\text{x}3}$$

Vemos que os elementos da primeira coluna de A coincidem com os da primeira linha de B e, também, que os da segunda coluna de A coincidem com os da segunda linha de B e, certamente, o mesmo ocorre ao consideramos as colunas de B e linhas de A.

Nesse caso, dizemos que B é matriz transposta de A (notação: $B = A^t$) ou que A é a transposta de B (notação: $A = B^t$).

Uma matriz B é denominada transposta da matriz A se os seus elementos que ocupam as posições $(i\ j)$ são iguais aos elementos de A que ocupam, respectivamente, as posições $(j\ i)$, com $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ e $j \in \{1, 2, 3, ..., m\}$.

1.3 IGUALDADE DE MATRIZES

Duas matrizes de mesma ordem são iguais se os elementos que ocupam as mesmas posições nestas matrizes forem iguais.

Exemplo 1.1:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \text{ e } \mathrm{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \text{ ou } \mathrm{F} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \text{ e } \mathrm{G} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

Vemos, pelas considerações acima, que A = B e, também, que F = G.

As matrizes $\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não são iguais. Por quê?

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 1.1

1. Construa matrizes (tabelas) que apresentem as seguintes situações:
   a) As notas das avaliações em Matemática e Física do aluno João nos quatro bimestres de um determinado ano letivo foram, respectivamente, 8, 9, 7, 10 e 9, 7, 8, 9.
   b) A indústria B produz, por dia, 500 canetas com tinta na cor azul, 1.000 na preta e 300 na vermelha.
2. Indique a ordem das matrizes do exercício 1 obtidas em a) e b).
3. Quantos elementos possui uma matriz de ordem 10×10? E de ordem 12×6?
4. Quais devem ser os valores de x e y reais para que a matriz A seja igual à matriz B?

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} x+1 & 3 \\ 1 & y+2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ x-1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Determine os valores de x, y e z reais para que a matriz A seja identidade.

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} x-y-z & z-1 & x-2y \\ x-y-2z & 1 & 0 \\ y-2z & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Construa uma matriz $\mathrm{A}=(a_{ij})_{n\ m}$ considerando que:

a) $\begin{cases} n=m=3 \\ a_{ij}=(-i)^3+2j \end{cases}$ b) $\begin{cases} n=2 \text{ e } m=3 \\ a_{ij}=i^3-j \end{cases}$ c) $\begin{cases} n=m=3 \\ a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases} \end{cases}$

1.4 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Apresentaremos, a seguir, algumas operações com matrizes.

1.4.1 ADIÇÃO DE MATRIZES

Considere as matrizes A e B, ambas de mesma ordem. A matriz soma A + B é obtida adicionando-se os elementos das matrizes A e B que ocupam posições correspondentes em relação às linhas e colunas.

Exemplo 1.2:

A loja Gente Feliz vende os artigos V, X, Y e Z para o público masculino (M) e feminino (F). O gerente resolveu aumentar o seu estoque com a compra dos produtos V e Y, conforme descrevem as tabelas a seguir:

$$\overset{\text{Estoque Inicial}}{\begin{array}{c} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{F} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{V} & \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 10 & 35 & 12 \\ 12 & 20 & 54 & 28 \end{bmatrix} \end{array}} + \overset{\text{Compras}}{\begin{array}{c} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{F} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{V} & \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix} \end{array}} = \overset{\text{Estoque Final}}{\begin{array}{c} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{F} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{V} & \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9 & 10 & 40 & 12 \\ 20 & 20 & 67 & 28 \end{bmatrix} \end{array}}$$

Entendemos, assim, que cada uma das posições correspondentes nas tabelas (matrizes) indicam as quantidades de um mesmo tipo de produto, e a matriz Estoque Final é a soma das matrizes Estoque Inicial e Compras.

1.4.1.1 Propriedades da adição

Consideremos as matrizes A, B e C de mesma ordem $n \times m$.

A) Comutativa: A + B = B + A

Sejam as matrizes $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times m}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{n \times m}$.

Por definição, temos $A + B = \left[a_{ij}\right]_{n \times m} + \left[b_{ij}\right]_{n \times m} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{n \times m}$ (1)

E, também, que $B + A = \left[b_{ij}\right]_{n \times m} + \left[a_{ij}\right]_{n \times m} = \left[b_{ij} + a_{ij}\right]_{n \times m}$ (2)

Visto que $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, propriedade comutativa dos números reais, segue de (1) e (2) que

$$A + B = B + A$$

Observação 1.1

Entendemos, no Exemplo 1.2, que o Estoque Final será o mesmo independentemente de adicionarmos as matrizes Compras e Estoque Inicial ou vice-versa.

B) Associativa: (A + B) + C = A + (B + C)

Suponha que, no Exemplo 1.2, o gerente resolva adquirir mais produtos e realiza uma Nova Compra.

$$\text{Nova Compra}$$
$$\begin{array}{c} \\ M \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V & X & Y & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 11 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Chamando de A a matriz do Estoque Inicial, de B a de Compras e de C a Nova Compra, veremos que a matriz do Estoque Final será a mesma, independente da ordem em que as matrizes forem adicionadas. Isto é, (A + B) + C = A + (B + C).

$$(A+B)+C = \left(\underset{\text{Estoque Inicial}}{\begin{bmatrix} 8 & 10 & 35 & 12 \\ 12 & 20 & 54 & 28 \end{bmatrix}} + \underset{\text{Compras}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}} \right) + \underset{\text{Nova Compra}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 11 & 6 \end{bmatrix}} =$$

$$= \left(\underset{\text{Estoque Inicial} \; + \; \text{Compras}}{\begin{bmatrix} 8+1 & 10+0 & 35+5 & 12+0 \\ 12+8 & 20+0 & 54+13 & 28+0 \end{bmatrix}} \right) + \underset{\text{Nova Compra}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 11 & 6 \end{bmatrix}} = \underset{\text{Estoque Final}}{\begin{bmatrix} 9 & 12 & 46 & 14 \\ 24 & 20 & 78 & 34 \end{bmatrix}}$$

$$A+(B+C)=\overset{\text{Estoque Inicial}}{\begin{bmatrix} 8 & 10 & 35 & 12 \\ 12 & 20 & 54 & 28 \end{bmatrix}}+\left(\overset{\text{Compras}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}}+\overset{\text{Nova Compra}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 11 & 6 \end{bmatrix}}\right)=$$

$$=\overset{\text{Estoque Inicial}}{\begin{bmatrix} 8 & 10 & 35 & 12 \\ 12 & 20 & 54 & 28 \end{bmatrix}}+\left(\overset{\text{Compras + Nova Compra}}{\begin{bmatrix} 1+0 & 0+2 & 5+6 & 0+2 \\ 8+4 & 0+0 & 13+11 & 0+6 \end{bmatrix}}\right)=\overset{\text{Estoque Final}}{\begin{bmatrix} 9 & 12 & 46 & 14 \\ 24 & 20 & 78 & 34 \end{bmatrix}}$$

Mostremos, de modo geral, que a propriedade associativa é verdadeira:

Sejam as matrizes:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m},\quad B=\left[b_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}\quad \text{e}\quad C=\left[c_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}.$$

Então,

$$(A+B)+C=\left(\left[a_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}+\left[b_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}\right)+\left[c_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}=$$

$$=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}+\left[c_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}=$$

$$=\left[\left(a_{ij}+b_{ij}\right)+c_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m} \tag{3}$$

E, também, que

$$A+(B+C)=\left[a_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}+\left(\left[b_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}+\left[c_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}\right)=$$

$$=\left[a_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}+\left[b_{ij}+c_{ij}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}=$$

$$=\left[a_{ij}+\left(b_{ij}+c_{ij}\right)\right]_{n\,\mathrm{x}\,m} \tag{4}$$

Visto que $\left(a_{ij}+b_{ij}\right)+c_{ij}=a_{ij}+\left(b_{ij}+c_{ij}\right)$, propriedade associativa dos números reais, segue de (3) e (4) que

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

C) Existência do elemento neutro:

Mostremos que: $A + \bar{0} = \bar{0} + A = A$

Suponha, no exemplo da loja Gente Feliz, que a indústria responsável pelo abastecimento não tenha enviado o pedido feito pelo gerente, devido a problemas no transporte.

Considerando que os elementos da matriz $\bar{0}$ (zero produtos enviados) correspondam, respectivamente, aos elementos da matriz A, que representam as quantidades estocadas, entendemos que ambas, A e $\bar{0}$, devam ter a mesma ordem.

$$\text{Assim,}\quad \overset{\text{Estoque Inicial}}{A = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 35 & 12 \\ 12 & 20 & 54 & 28 \end{bmatrix}} \quad \text{e} \quad \overset{\text{Pedido Enviado}}{\bar{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Temos:

$$A + \bar{0} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 35 & 12 \\ 12 & 20 & 54 & 28 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 35 & 12 \\ 12 & 20 & 54 & 28 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\bar{0} + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 10 & 35 & 12 \\ 12 & 20 & 54 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 35 & 12 \\ 12 & 20 & 54 & 28 \end{bmatrix},$$

$$\text{portanto},\ A + \bar{0} = \bar{0} + A$$

Generalizando:

Sejam as matrizes $A = \left[a_{ij}\right]_{n\,x\,m}$ e $\bar{0} = \left[0\right]_{n\,x\,m}$, teremos:

$$A + \bar{0} = \left[a_{ij}\right]_{n\,x\,m} + \left[0\right]_{n\,x\,m} = \left[a_{ij} + 0\right]_{n\,x\,m} = \left[a_{ij}\right]_{n\,x\,m} = A \text{ ou}$$

$$\bar{0} + A = \left[0\right]_{n\,x\,m} + \left[a_{ij}\right]_{n\,x\,m} = \left[0 + a_{ij}\right]_{n\,x\,m} = \left[a_{ij}\right]_{n\,x\,m} = A$$

Observe que $a_{ij} + 0 = a_{ij}$ e, também, que $0 + a_{ij} = a_{ij}$, pois se trata da propriedade do elemento neutro da adição de reais.

Vemos que o estoque inicial dado pela matriz A continua inalterado.

Portanto, $A + \bar{0} = \bar{0} + A = A$.

D) Elemento oposto (inverso aditivo): $A + (-A) = (-A) + A = \overline{0}$.

Imagine que a loja Gente Feliz, não tendo recebido produtos da indústria que a abastece, vendeu todo o seu estoque no dia.

Assim, as prateleiras da loja ficaram com quantidade zero de produtos, isto é, a matriz $\overline{0}$ deve representar o novo estoque.

Portanto,

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 35 & 12 \\ 12 & 20 & 54 & 28 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -10 & -35 & -12 \\ -12 & -20 & -54 & -28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \overline{0}$$

Entendemos que toda matriz A possui sua *oposta* (-A) e que a adição de duas matrizes opostas resulta sempre na matriz nula de mesma ordem que elas.

Generalizando:

Sejam as matrizes $A = \left[a_{i\,j}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}$ e sua oposta $A' = \left[-a_{i\,j}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}$.

Temos: $A + A' = \left[a_{i\,j}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m} + \left[-a_{i\,j}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m} = \left[a_{i\,j} + (-a_{i\,j})\right]_{n\,\mathrm{x}\,m} = \left[\,0\,\right]_{n\,\mathrm{x}\,m} = \overline{0}$.

Segue, pelo fato de a adição de matrizes ser comutativa, que:

$$A + A' = A' + A = \overline{0}.$$

1.4.2 SUBTRAÇÃO

Supondo que A seja a matriz estoque inicial da loja e B a matriz das vendas num certo dia, então a matriz (A – B) representará o novo estoque. Isto é, a matriz do novo estoque é obtida subtraindo-se os elementos da matriz das vendas efetuadas pelos correspondentes elementos da matriz do estoque inicial da loja.

Podemos entender que a matriz diferença (A – B) seja dada por A + (–B).

Generalizando:

Sendo $A = \left[a_{i\,j}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}$ e $B = \left[b_{i\,j}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}$, então

$$A - B = \left[a_{i\,j}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m} - \left[b_{i\,j}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m} = \left[a_{i\,j}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m} + \left[-b_{i\,j}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m} = \left[a_{i\,j} + (-b_{i\,j})\right]_{n\,\mathrm{x}\,m} =$$

$$= \left[a_{i\,j} - b_{i\,j}\right]_{n\,\mathrm{x}\,m}$$

Observação 1.2

A subtração de matrizes **não** possui as propriedades comutativa, associativa e elemento neutro. Entendemos que $\overline{0}$ possa ser elemento neutro apenas à direita de A, isto é, $A - \overline{0} = A$, pois, no caso da loja, vemos que é impossível retirar do estoque vazio $\overline{0}$ os elementos de uma matriz A não nula.

1.4.3 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZ POR NÚMERO REAL

Dobrar ou triplicar o estoque de uma loja significa dobrar ou triplicar a quantidade de cada um dos produtos comercializados pela loja. Desse modo, entendemos que multiplicar uma matriz A por um número real k é multiplicar todos os elementos desta matriz pelo número k .

Então, dados $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times m}$ e $k \in$, teremos $k.A = k.\left[a_{ij}\right]_{n \times m} = \left[k.a_{ij}\right]_{n \times m}$.

Exemplo 1.3:

$$2.A = 2.\begin{bmatrix} 8 & 10 & 35 & 12 \\ 12 & 20 & 54 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 20 & 70 & 24 \\ 24 & 40 & 108 & 56 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 1.2

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ determinar:

1. $A + B$ 2. $A - B$ 3. $A - 2B$ 4. $3A - 2B + C$

1.4.4 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Jonas e Pedro farão uma viagem e precisam comprar: **P**aletó, **C**amisa e **G**ravata, conforme descreve a tabela **Produtos**. Eles procuram pelas marcas "Sol" e "Lua", cujos preços em reais constam da tabela **Marcas/Preços**.

$$\text{Produtos} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P & C & G \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Jonas} \\ \text{Pedro} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{Marcas/Preços} \quad \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} \text{"}Sol\text{"} & \text{"}Lua\text{"} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 100 & 110 \\ 50 & 40 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} P \\ C \\ G \end{array} \end{array}$$

a) Quais seriam os seus gastos em relação a cada uma das marcas?

b) Qual seria a compra mais econômica para eles?

Solução:

As respostas serão obtidas adicionando-se os produtos das possíveis compras pelos respectivos preços estabelecidos pelas marcas "Sol" e "Lua" para cada um dos amigos.

$$\begin{array}{c} \text{Produtos} \\ \begin{array}{c|ccc} & P & C & G \\ \hline \text{Jonas} & 1 & 2 & 1 \\ \text{Pedro} & 2 & 1 & 3 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Marcas/Preços} \\ \begin{array}{cc|c} "Sol" & "Lua" & \\ \hline 100 & 110 & P \\ 50 & 40 & C \\ 20 & 20 & G \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} "Sol" & "Lua" \\ \left[\begin{array}{c} 1.100+2.50+1.20 \\ 2.100+1.50+3.20 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 1.110+2.40+1.20 \\ 2.110+1.40+3.20 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Jonas}= \\ \text{Pedro}= \end{array} \begin{array}{cc} "Sol" & "Lua" \\ \left[\begin{array}{c} 220 \\ 310 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 210 \\ 320 \end{array}\right] \end{array}$$

Gastos pela compra dos produtos

a) Jonas gastará R$ 220,00 com produtos da marca "Sol" e R$ 210,00 com os da marca "Lua", e Pedro gastará R$ 310,00 com os da marca "Sol" e R$ 320,00 com os da marca "Lua".

b) Jonas economizará comprando produtos da marca "Lua" e Pedro da marca "Sol".

Consideremos, conforme ilustra o exemplo acima, as matrizes A e B, tal que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B.

A matriz produto (A.B) é obtida multiplicando-se, ordenadamente, os elementos de cada linha de A pelos elementos correspondente em cada coluna de B e adicionando os produtos obtidos em cada uma dessas operações de linha por coluna e os posicionando em (A.B), de acordo com a indicação da linha de A e da coluna de B operadas.

Generalizando:

Cada elemento da matriz (A.B) de linha $i(L_i)$ e coluna $j(C_j)$, indicado por L_i/C_j, é obtido pela soma algébrica dos produtos dos elementos da linha i da matriz $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times m}$ pelos correspondentes elementos da coluna j da matriz $B = \left[b_{ij}\right]_{m \times s}$.

Temos que $L_i / C_j = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj}$, sendo m o número de colunas de A e de linhas de B.

Observação 1.3

O exemplo mostra que o produto das matrizes só é possível se o número de colunas da primeira matriz for igual ao de linhas da segunda matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2x3} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 100 & 110 \\ 50 & 40 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}_{3x2} \quad \text{e} \quad A.B = \begin{bmatrix} 220 & 210 \\ 310 & 320 \end{bmatrix}_{2x2}$$

Vemos que a matriz produto A.B tem o mesmo número de linhas (*2*) da primeira matriz e o mesmo número de colunas (*2*) da segunda matriz B. No caso, 2×2.

Exemplo 1.4:

Três máquinas I, II e III de uma indústria produzem os artigos R, S, T e U nas quantidades descritas na tabela A. Sabendo-se que os custos, em real, de produção dos artigos são dados pela tabela B, determine os custos de produção em cada máquina.

Solução:

$$\text{Supondo que} \quad A = \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{R} & \text{S} & \text{T} & \text{U} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 20 & 6 & 15 \\ 12 & 10 & 8 & 0 \\ 15 & 9 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{3x4} \end{array} \quad \text{e} \quad B = \begin{array}{c} \\ \text{R} \\ \text{S} \\ \text{T} \\ \text{U} \end{array} \begin{array}{c} \text{Custo} \\ \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{4x1} \end{array} \quad \text{teremos:}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 6 & 15 \\ 12 & 10 & 8 & 0 \\ 15 & 9 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{3x4} . \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{4x1} = \begin{bmatrix} 10.5+20.3+6.1+15.2 \\ 12.5+10.3+8.1+0.2 \\ 15.5+9.3+3.1+5.2 \end{bmatrix}_{3x1} = \begin{bmatrix} 146 \\ 98 \\ 115 \end{bmatrix}_{3x1} \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}$$

O custo de produção da máquina I é R$ 146,00, da máquina II é R$ 98,00 e da máquina III é R$ 115,00.

1.4.4.1 Propriedades da multiplicação

Apresentaremos exemplos para facilitar o entendimento das propriedades, pois suas demonstrações devem ser vistas de forma generalizada e, por isso, geralmente são trabalhosas. Contudo, é mais fácil provarmos a **não** validade de uma propriedade, pois basta apresentarmos um contraexemplo de sua veracidade.

A) Não é comutativa:

O **contraexemplo** a seguir mostra que o produto de matrizes não é comutativo. Utilizaremos matrizes de ordem 2 para exemplificar o fato.

Exemplo 1.5:

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, segue que

$$A.B = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.0 + 3.3 & 8.2 + 3.(-1) \\ 2.0 + 1.3 & 2.2 + 1.(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 + 2.2 & 0.3 + 2.1 \\ 3.8 + (-1).2 & 3.3 + (-1).1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 22 & 8 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$A \,.\, B \neq B \,.\, A$$

B) Associativa: (A . B) . C = A . (B . C)

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{2x2}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2x2}$ e $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$

Temos:

$$(A.B).C = \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} \right) . \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2x3} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 3.2 + 1.1 & 3.(-1) + 1.0 \\ 2.2 + 0.1 & 2.(-1) + 0.0 \end{bmatrix}_{2x2} \right) . \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2x3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}_{2x2} . \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2x3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7.4 + (-3).2 & 7.1 + (-3).0 & 7.1 + (-3).4 \\ 4.4 + (-2).2 & 4.1 + (-2).0 & 4.1 + (-2).4 \end{bmatrix}_{2x3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 7 & -5 \\ 12 & 4 & -4 \end{bmatrix}_{2x3} \qquad (5)$$

$$A.(B.C)=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}_{2x2}.\left(\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}_{2x2}.\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix}_{2x3}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}_{2x2}.\left(\begin{bmatrix}2.4+(-1).2 & 2.1+(-1).0 & 2.1+(-1).4\\ 1.4+0.2 & 1.1+0.0 & 1.1+0.4\end{bmatrix}_{2x3}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}_{2x2}.\begin{bmatrix}6 & 2 & -2\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}_{2x3}=\begin{bmatrix}3.6+1.4 & 3.2+1.1 & 3.(-2)+1.1\\ 2.6+0.4 & 2.2+0.1 & 2.(-2)+0.1\end{bmatrix}_{2x3}=$$

$$=\begin{bmatrix}22 & 7 & -5\\ 12 & 4 & -4\end{bmatrix}_{2x3} \qquad (6)$$

Comparando (5) e (6), vemos que (A . B) . C **=** A. (B . C).

Genericamente:

Considerando $A=\left[a_{ri}\right]_{m\,x\,n}$, $B=\left[b_{is}\right]_{n\,x\,p}$ e $C=\left[c_{sj}\right]_{p\,x\,k}$, temos:

$$A\,.\,(B\,.\,C)\;=\;\left[a_{ri}\right]_{m\,x\,n}.\left(\left[b_{is}\right]_{n\,x\,p}.\left[c_{sj}\right]_{p\,x\,k}\right)$$

$$=\left[a_{ri}\right]_{m\,x\,n}.\left[\sum_{s=1}^{p}b_{is}\,c_{sj}\right]_{n\,x\,k}=\left[\sum_{i=1}^{n}a_{ri}.\sum_{s=1}^{p}b_{is}\,c_{sj}\right]_{m\,x\,k}$$

Pelas propriedades distributiva e associativa do produto de reais, segue que:

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}.\sum_{s=1}^{p}a_{ri}\;(b_{is}\,c_{sj})\right]_{m\,x\,k}=\left[\sum_{s=1}^{p}.\sum_{i=1}^{n}(a_{ri}\;b_{is})\,c_{sj}\right]_{m\,x\,k}$$

Novamente pela propriedade distributiva de reais, tem-se:

$$=\left[\sum_{s=1}^{p}.\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ri}\,b_{is}\right)c_{sj}\right]_{m\,x\,k}=\left[\sum_{i=1}^{n}a_{ri}\,b_{is}\right]_{m\,x\,p}.\left[c_{sj}\right]_{p\,x\,k}$$

e, pela definição de produto de matrizes, obtemos:

$$= \left(\left[a_{ri}\right]_{m\,\mathrm{x}\,n} . \left[b_{ri}\right]_{n\,\mathrm{x}\,p}\right) . \left[c_{sj}\right]_{p\,\mathrm{x}\,k} = (\mathrm{A} . \mathrm{B}) . \mathrm{C}$$

C) Elemento neutro:

Se a matriz A for quadrada de ordem n, então existirá a matriz identidade I, de mesma ordem que A, sendo que a multiplicação de A por I é comutativa. Isto é, $\mathrm{A} . \mathrm{I} = \mathrm{I} . \mathrm{A} = \mathrm{A}$. Entendemos que a matriz I é elemento neutro da multiplicação.

Exemplo 1.6:

Considerando $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\mathrm{x}3}$ e $\mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\mathrm{x}3}$, temos que:

$$\mathrm{A} . \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{A} \tag{7}$$

$$\mathrm{I}_3 . \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{A} \tag{8}$$

Comparando (7) e (8), segue que $\mathrm{A} . \mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3 . \mathrm{A} = \mathrm{A}$.

Curiosidade:

1. Se a matriz A não for quadrada ($\mathrm{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\,\mathrm{x}\,n}$, com $m \neq n$), então não existirá uma matriz identidade quadrada que, multiplicando A pela esquerda e pela direita, resulte A. Haverá, nesse caso, uma matriz identidade I_m que, multiplicando A pela esquerda, resulta A e outra I_n, distinta de I_m, que, multiplicando A pela direita, também resulta A. As ordens dessas matrizes identidades quadradas são correspondentes ao número m de linhas e n de colunas da matriz A.

Exemplo 1.7:

Considerando $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$, $I \ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$ e $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$, temos que:

a) $I_2 . A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2x3} = A$

b) $A . I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2x3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2x3} = A$

Vemos que as matrizes identidade à esquerda e à direita de uma matriz A (não quadrada) são distintas.

2. A multiplicação de duas matrizes quadradas de mesma ordem pode resultar na matriz nula sem que pelo menos uma delas seja nula.

Exemplo 1.8:

1. Uma das matrizes é nula:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.0+b.0+c.0 & a.0+b.0+c.0 & a.0+b.0+c.0 \\ d.0+e.0+f.0 & d.0+e.0+f.0 & d.0+e.0+f.0 \\ g.0+h.0+i.0 & g.0+h.0+i.0 & g.0+h.0+i.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Nenhuma das matrizes é nula:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0+0.1+0.0 & 1.0+0.1+0.0 & 1.0+0.1+0.0 \\ 0.0+0.1+1.0 & 0.0+0.1+1.0 & 0.0+0.1+1.0 \\ 1.0+0.1+0.0 & 1.0+0.1+0.0 & 1.0+0.1+0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 1.3

Efetue as multiplicações indicadas:

1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine o produto $A.B^t$ (sendo B^t a matriz transposta de B).

7) Um lava-jato atende carros populares e de luxo. O carro popular necessita de 0,25 hora para lavagem externa, 0,1 hora para aspirar o pó e 0,5 hora para limpeza do teto e bancos internos. O carro de luxo necessita de 0,30 hora para lavagem externa, 0,15 hora para aspirar o pó e 0,6 hora para limpeza do teto e bancos. Supondo que em um dia foram atendidos 21 carros populares e 10 carros de luxo, apresente a solução matricial do número de horas gastas em cada tipo de serviço. Sugestão: multiplique a matriz “Tipo/serviço × hora/unidade” pela “Tipo/carro × carro/atendido”.

1.4.5 INVERSÃO DE MATRIZ

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Chamamos $B = (b_{ij})_{n \times n}$ de **matriz inversa de A** se o produto (A.B) for a matriz identidade.

Assim, $A.B = B.A = I_n$ e a notação utilizada é $B = A^{-1}$.

Exemplo 1.9:

A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, pois

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observação 1.4

1. Uma matriz só é inversível se for quadrada.
2. Nem toda matriz quadrada é inversível. (Veremos no Capítulo 2, item 2.2.10, que o determinante da matriz deve ser diferente de zero para que seja inversível.)
3. A inversa de uma matriz é única.

Exemplo 1.10:

Obtenha a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução:

Suponhamos que a inversa de A seja a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Aplicando a definição acima, devemos ter:

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuando a multiplicação, segue

$$\begin{bmatrix} 3a - 5c & 3b - 5d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Estabelecendo a igualdade dos elementos das matrizes, segue que:

$$\begin{cases} 3a-5c=1 \\ -a+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3b-5d=0 \\ -b+2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ d=3 \end{cases}$$

Portanto, a matriz inversa de A é $A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

1.4.5.1 Procedimento para obter a inversa de uma matriz

Seja A uma matriz quadrada, tal que **não** possua:

a) filas cujos elementos sejam todos iguais a zero;

b) filas paralelas proporcionais; ou

c) fila que seja a soma de outras filas paralelas multiplicadas por números reais.

Mostraremos, de modo prático, um procedimento para se obter a matriz inversa: A^{-1}.

Exemplo 1.11:

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

1º) Escrever a matriz identidade de mesma ordem ao lado direito de A:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

2º) Multiplicar a linha L_1 das matrizes justapostas por 1/6, obtendo o número 1 como primeiro elemento da primeira linha:

$$(1/6)L_1\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

3º) Multiplicar L_1 por (-1) e adicioná-la a L_2 e, também, L_1 por (-2) e adicioná-la a L_3, obtendo zero como primeiro elemento da segunda e da terceira linha:

$$\begin{array}{r} \\ (-1)L_1+L_2 \\ (-2)L_1+L_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & -4/3 & 3/2 \\ 0 & 4/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ -1/6 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

4º) Multiplicar L_2 por (-3/4), objetivando obter 1 como segundo elemento da segunda linha da primeira matriz:

$$\begin{array}{r} \\ (-3/4)L_2 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 1 & -9/8 \\ 0 & 4/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 1/8 & -3/4 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

5º) Multiplicar L_2 por (-1/3) e adicioná-la a L_1, obtendo zero como segundo elemento da primeira linha. Multiplicar L_2 por (-4/3) e adicioná-la a L_3, obtendo zero como segundo elemento da terceira linha:

$$\begin{array}{r} (-1/3)L_2+L_1 \\ \\ (-4/3)L_2+L_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1 & -9/8 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/8 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & -3/4 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

6º) Multiplicar L_3 por (2/3), objetivando obter 1 como terceiro elemento da terceira linha da primeira matriz:

$$\begin{array}{r} \\ \\ (2/3)L_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1 & -9/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/8 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & -3/4 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

7º) Multiplicar L_3 por (1/8) e adicioná-la a L_1, obtendo zero como terceiro elemento da primeira linha. Multiplicar L_3 por (9/8) e adicioná-la a L_2, obtendo zero como terceiro elemento da segunda linha:

$$\begin{array}{r} (1/8)L_3+L_1 \\ (9/8)L_3+L_2 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/12 & 1/3 & 1/12 \\ -1/4 & 0 & 3/4 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

A matriz à direita da identidade é a inversa de A:

$$\begin{bmatrix} 1/12 & 1/3 & 1/12 \\ -1/4 & 0 & 3/4 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Observação 1.5

Este procedimento pode ser utilizado para obter a inversa de matrizes quadradas de maior ordem.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 1.4

1. A matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ é inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$?

2. A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ possui inversa?

3. Obtenha a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Obtenha a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

A matemática é considerada a ciência do raciocínio e do abstrato, base de todas as ciências. É usada como ferramenta essencial em praticamente todas as áreas do conhecimento, como engenharia, medicina, física, química, biologia e sociais. Resultados e teorias milenares se mantêm válidos e úteis e, ainda assim, a matemática continua a se desenvolver permanentemente.

Apresentaremos a coleção Matemática com aplicações tecnológicas, que foi concebida e organizada por experientes professores da Faculdade de Tecnologia de São Paulo (FATEC-SP) em cinco volumes, respectivamente: Matemática Básica, Calculo I, Cálculo II, Matemática Financeira e Geometria Analítica.

Este livro, quinto volume da coleção, apresenta a Geometria analítica de forma simples e objetiva com textos, ilustrações, exemplos resolvidos e propostos com os respectivos resultados. A proposta do livro visa conduzir o aprendizado de modo prático e objetivo e, também, o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Destina-se a alunos e professores de cursos superiores de Tecnologia, Engenharia, bacharelado em Matemática e em Física, Ciência da computação e áreas afins.

ISBN 978-65-5506-103-1
9 786555 061031

www.blucher.com.br

Blucher