VALDEMAR W. SETZER

A MATEMÁTICA *PODE SER* INTERESSANTE...

E LINDA!

ESPIRAIS, FIBONACCI, RAZÃO ÁUREA, CRESCIMENTO PROPORCIONAL E A NATUREZA

Blucher

Valdemar W. Setzer

Professor Titular Sênior
Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Universidade de São Paulo (USP)
www.ime.usp.br/~vwsetzer

A MATEMÁTICA *PODE SER* INTERESSANTE... E LINDA!

Espirais, Fibonacci, razão áurea, crescimento proporcional e a natureza

A matemática pode ser *interessante... e linda!: Espirais, Fibonacci, razão áurea, crescimento proporcional e a natureza*

Editora Edgard Blücher Ltda.

Imagem da capa: iStockphoto (trata-se de um girassol; as espirais logarítmicas foram adicionadas à figura original)

Na versão em e-book, muitas figuras e todas as fotos estão coloridas.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Setzer, Valdemar W.
A matemática pode ser interessante... e linda! Espirais, Fibonacci, razão áurea, crescimento proporcional e a natureza / Valdemar W. Setzer.– São Paulo : Blucher, 2020.
334 p. il.

Bibliografia
ISBN 978-65-5506-022-5 (impresso)
ISBN 978-65-5506-023-2 (eletrônico)

1. Matemática. I. Título.

20-0392 CDD 510

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática

Sumário

CAPÍTULO 1
Introdução

A matemática revela seus segredos
somente aos que dela se aproximam com puro amor,
pela sua própria beleza.

Arquimedes

Aprender é como nadar contra a corrente:
parando, retrocede-se.[1]

Caro/a leitor/a *não familiarizado/a com matemática*: não se assuste se folhear este livro e encontrar fórmulas matemáticas complicadas; elas estão em seções de formalismos matemáticos no fim de cada capítulo – seções essas que podem ser puladas sem prejuízo do restante do texto.

Este é um livro de divulgação da matemática elementar, voltado para alunos e professores do ensino médio, universitários e público em geral com conhecimentos de matemática em nível de ensino médio. Ele cobre, de maneira unificada, vários tópicos que deveriam ser aprendidos nesse nível escolar, mas também aborda tópicos que não são normalmente cobertos pelos currículos de matemática. A sua intenção é mostrar como a matemática pode ser interessante e fascinante. Mostra também como a matemática ocorre em vários entes da natureza e como pode ter aplicações práticas, ajudando também a compreender vários fenômenos que são comumente observados.

Este livro foi motivado pelo conteúdo e resultados da palestra "A sequência e a espiral de Fibonacci, a razão e a espiral áureas e suas ocorrências na natureza" (ver na seção Referências) dada, na data do encerramento deste livro, mais de 40 vezes, em geral dentro do projeto Embaixadores da Matemática que introduzi no Instituto de

1 Inspirada na frase do poeta polonês Stanisław Jerzy Lec, "Aquele que quer chegar à fonte deve nadar contra a corrente" (em tradução livre do inglês).

Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP) em 2015. Ao escrever estas linhas, esse projeto já promoveu mais de 100 palestras para mais de 5.000 participantes de escolas de ensino médio, professores e alunos de faculdades. Com ele, eu e colegas do IME vamos a escolas de ensino médio e a faculdades, sem nenhum custo para a instituição, para dar uma palestra sobre alguns tópicos matemáticos e mostrar aos alunos como a matemática pode ser interessante... e linda! Aliás, a expressão "A matemática é linda!" foi parte de uma avaliação que recebi de uma aluna que assistiu a minha palestra (v. seção 29.1). O 'pode ser' é por que a matemática pode se tornar interessante dependendo da maneira como é apresentada; espero ter tido sucesso nesse objetivo.

A matemática é em geral a matéria mais problemática para alunos do ensino médio e de faculdades. Este livro tem como objetivo principal a popularização da matemática elementar, para despertar um interesse e admiração por ela. Ele quer mostrar que a matemática pode ser interessante, fascinante e até mesmo linda. Além disso, as várias relações matemáticas na natureza aqui apresentadas têm a intenção secundária de ajudar a pessoa a admirar e a venerar esta última, pelo menos impressionando-se com a sabedoria e a perfeição intrínsecas a ela.

O raciocínio matemático é essencial hoje em dia, pois quem o domina pode exercer um pensamento claro e lógico. Se o/a leitor/a olhar ao seu redor na sala em que está, verá que, fora as pessoas, algum bichinho de estimação e alguma planta, tudo foi pensado: a forma da sala, a cor das paredes e como as suas tintas foram preparadas, os aparelhos, as lâmpadas, o formato dos móveis etc. Hoje em dia, o ser humano, especialmente o que vive em cidades, está imerso em resultados de pensamentos humanos. Portanto, a capacidade de pensar clara e logicamente é essencial para a vida moderna. A matemática desenvolve justamente essa capacidade, e ainda outro aspecto fundamental: a capacidade de concentração mental. De fato, até mesmo uma conta de soma armada (isto é, com parcelas de vários algarismos) exige muita concentração. Se, enquanto se faz tal soma, pensa-se em outras coisas, o resultado será errado. Assim, a matemática pode servir de instrumento para se desenvolver a concentração mental, que está sendo extremamente prejudicada hoje em dia pelo uso da TV, dos *video games*, do computador, dos celulares e *tablets*, que são altamente 'distrativos' e até mesmo viciam as pessoas em se distrair, especialmente crianças e adolescentes. Em particular, o desenvolvimento de concentração mental em tarefas intelectuais é essencial para se poder ler um texto longo e para estudar. Por isso foi adicionado nesta obra o capítulo (cap.) 28, com alguns exercícios de concentração mental baseados em objetos da matemática, parte da oficina que dou sobre o assunto.

Não se pense que sou racionalista. Citei que considero um pensamento claro e lógico algo essencial hoje em dia, mas também considero que os sentimentos e impulsos de vontade têm que ser levados em conta, pois é impossível fazer o pensamento usual abranger a totalidade da realidade, especialmente do ser humano. No entanto, as ações frutos daqueles impulsos não devem ser baseadas apenas neles e nos sentimentos. O ideal seria agir com serenidade, sem ser levado somente por aqueles impulsos e por sentimentos e sensações, como de medo, raiva, prazer, ódio, paixão etc. Para isso, sensações e sentimentos devem passar pelo pensamento, por exemplo, pensando-se nas consequências dos próprios atos. Os exercícios de concentração mental citados no parágrafo anterior ajudam nesse sentido.

Como mencionado, o conteúdo deste livro é dirigido para alunos do ensino médio ou superior e para o público em geral. Não há pré-requisitos, pois todos os formalismos matemáticos são expostos e deduzidos no texto, em seções nos fins dos capítulos. Para seguir esses formalismos, é bom ter alguma desenvoltura com a matemática, mas, se não a tiver, leitor ou leitora, não desanime, acredite nas fórmulas apresentadas, pule as seções de formalismos matemáticos e aproveite todo o resto, que é muito interessante. Mas tente de vez em quando mergulhar nos formalismos para relembrar o que já estudou e, eventualmente, aprender algo mais da matemática, bem como novas técnicas para treinar seu pensamento formal matemático.

Pensando em um público o mais geral possível, são apresentadas deduções de elementos matemáticos que deveriam ser conhecidos, mas talvez não tenham sido aprendidos ou já foram esquecidos, por exemplo, a maneira de se deduzir a fórmula das raízes de uma equação de 2º grau (pois, em palestras em várias classes de ensino médio, os alunos tiveram dificuldades com essas raízes), a soma de progressões aritméticas e geométricas, triângulos semelhantes, provas do teorema de Pitágoras, noções de trigonometria e de logaritmos etc. Em particular, nas palestras citadas também foram observadas algumas dificuldades com desenho geométrico, de modo que foram colocados vários exercícios simples dessa área.

O desenho geométrico apresenta um aspecto da matemática que pode ser visualizado e imaginado pictoricamente e que contém estética – principalmente se as figuras forem coloridas –, ausente na matemática algébrica, que é feita exclusivamente com símbolos formais, como as letras e números. É uma lástima que a geometria e o desenho geométrico praticamente desapareceram dos currículos escolares. Quando fui estudante nos antigos ginásio e colégio, de 1951 a 1958, todos os alunos em todo o Brasil tinham 7 anos dessas matérias, se o currículo oficial fosse respeitado. Talvez daí advenha minha admiração e atração pela geometria.

Em várias seções são expostos conceitos que não têm diretamente a ver com o assunto principal do livro. Isso foi feito para que as/os leitoras/es que não conhecem ou não se lembram desses conceitos e gostam de matemática possam recordar ou ampliar seus conhecimentos. Assim, este livro procurou abordar vários aspectos da matemática; obviamente, muitos deles não são mencionados na palestra citada, mas podem ser úteis para os interessados se aprofundarem e para professores organizarem um curso com várias aulas sobre os assuntos em pauta, introduzindo ou abordando vários conceitos matemáticos de maneira unificada. As deduções e as demonstrações são minhas; espero tê-las simplificado em relação às usuais. Mas não são abordados apenas conceitos matemáticos. Aproveitei para cobrir também aspectos históricos e biográficos, e alguns assuntos de física qualitativa, que têm a ver com a vida do dia a dia, por exemplo, por que os aviões voam, por que o céu é azul etc. Além disso, foram abordadas várias questões filosóficas. Não estou querendo convencer ninguém, apenas exponho minhas ideias com a esperança de que provoquem reflexões sobre assuntos que considero importantes; essas ideias são baseadas em uma concepção de mundo especial, apoiada em uma teoria consistente e abrangente e com várias aplicações práticas de sucesso, inclusive na educação, desde 1919.

Adotei em geral um tom coloquial, e não seco e formal, como é comum acontecer em livros de matemática.

No cap. 29 são abordados aspectos da palestra citada que a tornam interessante, como as avaliações dos participantes têm mostrado. Espero, com isso, dar impulsos didáticos aos professores de matemática para tentarem interessar mais seus alunos pelas suas aulas. Algumas das técnicas descritas também servem para aulas de outras matérias. Ao contrário, no cap. 30 são dados ingredientes negativos de uma aula de matemática – aqueles que fazem os alunos se desinteressarem pela matéria.

Foram inseridas muitas referências da internet, pois hoje em dia esse é um excelente meio para se obter informações, para quem a usa com muito critério e consciência – o que não é o caso para grande parte dos usuários, especialmente crianças e adolescentes, por falta de maturidade e autocontrole. Cada endereço é precedido do assunto tratado. Muitas vezes são dadas apenas versões em inglês, por serem as mais completas em relação às versões em português, especialmente da Wikipedia. As referências a artigos de revistas científicas e a livros com autor, mesmo as que foram localizadas na rede, precedem as referências a artigos na rede de caráter geral, como os da Wikipedia. Como as figuras ficaram todas em tons de cinza, para diminuir os custos de impressão e o preço final deste livro, é interessante seguir os vínculos (*links*) de internet para ver os originais coloridos.

Os nomes de elementos matemáticos e físicos estão grafados também em inglês, para facilitar uma busca na internet nessa língua, na qual em geral se encontra mais informação do que em português. No entanto, as versões em inglês não foram colocadas no índice remissivo. Hoje em dia, todos deveriam ser capazes de ler em inglês, pelo menos para aproveitar o extenso material da internet existente apenas nessa língua. Em minha *home page* (v. ref.) há o artigo “Meu método para aprender línguas estrangeiras”, que pode ser útil para aprender inglês ou outras línguas, especialmente a leitura. É muito importante dominar pelo menos uma língua estrangeira, para nós, lusófonos, especialmente se for uma língua não latina, pois a estrutura gramatical muda muito, e isso produz uma flexibilidade mental – pensa-se de maneira diferente sobre as mesmas coisas.

As/os leitoras/es são convidadas/os a fazer à mão livre alguns desenhos de espirais. Para isso, é necessário dispor de uma folha de papel almaço (isto é, de folha dupla, sem cortá-la ao meio) quadriculado, preferivelmente com quadradinhos de 0,5 cm de lado, usando lápis e borracha.

Cada capítulo está dividido no que é denominado de *seções* (por exemplo, no cap. 7, as seções 7.4, 7.4.1 etc.). Para referência posterior fora da seção onde são apresentadas, certas fórmulas serão anotadas na forma [*m*:*n*], em que *m* é o capítulo ou seção de um capítulo (como 7.1) e *n* é o número da fórmula dentro do capítulo ou seção (por exemplo, [7.1:1]). Foram inseridas muitas dessas menções a seções e a fórmulas; se simplesmente acreditar na validade do que está expresso, em geral não é preciso consultar essas menções, em que se encontram definições, detalhes ou provas.

Para saber se um capítulo contém algum tópico de especial interesse para o/a leitor/a, recomendo que ele seja folheado e se leiam os títulos das várias seções. Uma outra maneira é dar uma olhada no índice remissivo (cap. 31). Propositalmente, ele é muito extenso e detalhado, com várias entradas para um mesmo item, por exemplo, 'teorema de Pitágoras' e também 'Pitágoras, teorema de'. Com isso espero não provocar uma frustração bem comum de minha parte: ao procurar algum item no índice remissivo de um livro, não o encontro, pois não sei como procurá-lo.

São propostos exercícios, também com numeração semelhante, precedida por 'Exr.'. Quando cabem soluções, elas estão na seção 'Resolução dos exercícios' no fim dos capítulos. Exercícios únicos no meio de seções serão denotados por Exr.

O símbolo → será usado para representar a expressão 'implica' (implicação lógica). Assim, por exemplo, a = b e c = d → a + c = b + d.

No cap. 31, índice remissivo, os símbolos e abreviaturas usados precedem o índice remissivo. Neste último foi colocado o nome completo de cada autor citado, o que também ocorre no texto, mas não nas referências.

Agradecimentos

Agradeço a minha esposa Sonia Annette Lanz Setzer por uma cuidadosa revisão da redação da primeira versão deste livro; a meu colega de faculdade Amadeu Aleixo Machado e a meus antigos alunos Nemer Zaguir e Roberto Hirata por algumas sugestões; ao professor de matemática de ensino médio Eduardo M. Marcic pela revisão técnica, pela sugestão da expansão de alguns tópicos e pela indicação de alguns trabalhos; a meu genro Matthias Blonski, professor da Universidade de Frankfurt, por sugestões quanto ao problema dos coelhos (v. seção 3.5); a meu sobrinho, o eng. naval Alexandre Lanz, por algumas interessantes discussões sobre a *sustentação* em aviões (v. seção 22.1); a meu irmão Alberto W. Setzer, pesquisador do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe), por uma cuidadosa revisão do cap. 22; e a Thomas Culbertson pela citação de Arquimedes na abertura deste capítulo. Finalmente, aos revisores da editora Blucher pelo cuidadoso trabalho.

Referências

- Arquimedes. A citação no início deste capítulo. Acesso em 7/1/20: https://www.goodreads.com/quotes/652564-mathematics-reveals-its-secrets--only-to-those-who-approach-it
- Lec, S.J. Acesso em 18/7/20: https://best-quotations.com/authquotes.php?auth=1152

- Projeto Embaixadores da Matemática. Acesso em 7/1/19: http://embaixadores.ime.usp.br/
- Setzer, V.W. Lista de palestras dadas e programadas (aguardando convites!), ver também as avaliações de participantes de cada uma. Idem: www.ime.usp.br/~vwsetzer/pals/pals-cursos.html
  - Método para aprender línguas estrangeiras. Idem: www.ime.usp.br/~vwsetzer/linguas-estrangeiras.html
  - Resumo da palestra sobre o assunto deste livro. Idem: www.ime.usp.br/~vwsetzer/pals/Fibonacci-resumo.html
  - Idem, no projeto Embaixadores da Matemática. Idem: http://embaixadores.ime.usp.br/palestra/view/5

CAPÍTULO 2
Duas espirais

2.1 Desenho de uma espiral

Convido o/a leitor/a a desenhar uma espiral. Para isso, use uma folha de papel ou o espaço abaixo, mas sem virar a página para ver a seguinte!

Em minhas palestras, chamo um/a participante que gosta de desenhar e peço para desenhar uma espiral (*spiral* em inglês) no quadro-negro. Às vezes o resultado é algo parecido com a fig. 2.1.

Fig. 2.1 Linha helicoidal

Obviamente, a inspiração para essa figura (no caso, uma mola) deve ter vindo do assim chamado 'caderno espiral'. Tenho então que explicar que isso não é uma espiral, mas uma 'linha helicoidal', palavra que vem de 'hélice', pois a ponta de uma hélice em rotação cujo eixo se movimenta uniformemente em linha reta traça essa curva.

Se a primeira espiral foi desenhada como na figura anterior, em seguida peço para outro participante desenhar uma espiral. O resultado em geral é algo semelhante ao da fig. 2.2.

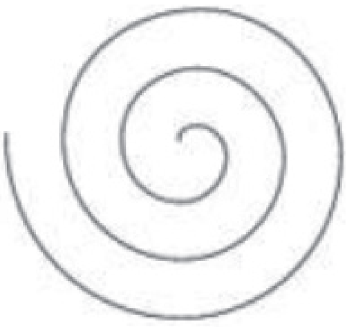


Fig. 2.2 Uma espiral

Chamo então a atenção para o fato de que essa é uma espiral particular, pois seu passo é constante: traçando-se segmentos de reta a partir do *foco*, isto é, a origem ou ponto inicial da espiral (em inglês, *pole* ou *center*), eles interceptam a espiral em distâncias iguais, que serão denominadas de p, como se vê na fig. 2.3.

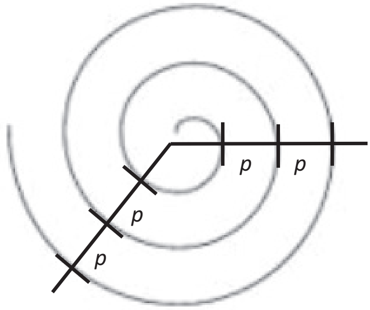


Fig. 2.3 Espiral de Arquimedes

A sua espiral era semelhante, também com passo mais ou menos constante?

Ver na seção 2.4.3 uma fórmula matemática para se traçar analiticamente uma espiral dessas. Note que a espiral tem um foco, onde ela começa, e que não está claramente desenhado na fig. 2.3.

Tome-se algum segmento de reta que, saindo do foco, intercepta a espiral em vários pontos, determinando o que será chamado aqui de *braço* da espiral, por exemplo, a horizontal à direita do foco, como na fig. 2.3. A cada volta completa de 360° da espiral, o seu *período*, ela intercepta esse braço em um ponto com uma distância *p* a mais do foco, isto é, a cada volta completa soma-se *p* à distância do ponto anterior da espiral; *p* será denominado de *passo* da espiral. Isso ocorre com qualquer braço; a fig. 2.3 mostra dois deles. Dado um ponto *P* da espiral, o segmento de reta que liga *P* ao foco da espiral será denominado aqui de *raio* da espiral. Cada ponto de uma espiral tem outro raio de tamanho diferente de todos os outros raios, ao contrário de uma circunferência, em que o raio é de tamanho sempre constante. De certa maneira, uma circunferência é uma espiral com raio de tamanho constante!

Essa espiral tem um nome: *espiral de Arquimedes* (em inglês, *Archimedes spiral*). Em grego, Arquimedes escreve-se Ἀρχιμήδης, pronunciado em sua época provavelmente como 'Arkhimédes', kh como o j em espanhol, ou o ch em alemão, ou o x em russo. Ele era grego, nascido em Siracusa, na atual Itália, em 287 a.C., e faleceu em 212 a.C. Foi um grande matemático e físico, considerado um dos expoentes da ciência e o maior matemático de sua época, um dos primeiros a aplicar a matemática para modelar fenômenos físicos. A mais conhecida historieta sobre ele é que descobriu o chamado 'princípio de Arquimedes', que determina que o empuxo (pressão) sofrido por um corpo dentro de um líquido, que faz com que seu peso diminua, é devido ao peso do volume que ele desloca do líquido (pode estar parcialmente submerso), e não à massa do corpo. Essa descoberta foi feita, segundo a historieta, numa banheira, enquanto tomava banho, e ele teria exclamado "Eureca!" (ευρηκα), "Achei!" Ele escreveu o tratado *Sobre as espirais* (Περι ελικων, *Peri Elicon*), mais ou menos em 225 a.C., no qual estudou a espiral que leva seu nome e deu várias aplicações dela, inclusive em três dimensões em forma de parafuso, ou helicoide, com o eixo inclinado, para elevar a água, o denominado parafuso de Arquimedes (v. ref.).

Enrolando-se uma corda sobre uma mesa, bem justa, obtém-se aproximadamente uma espiral de Arquimedes, pois o diâmetro da corda é razoavelmente constante. A corda faz o papel dos espaços em branco na espiral da fig. 2.2.

2.2 Outra espiral

Agora vamos aprender a fazer uma espiral que não é de passo constante.

Para isso, tome uma folha dupla de papel almaço quadriculado, aberta, isto é, desdobrada. Posicione a folha com a parte mais larga na horizontal. Nela estão desenhados o que será chamado de *quadradinhos.* Se estes tiverem 0,5 cm de lado, localize e desenhe (à mão livre; pode desenhar fraquinho, desde que seja visível), o quadradinho que fica 22 quadradinhos para cima da *borda inferior* da folha, e 29 quadradinhos à esquerda da *borda direita* da folha. Se os quadradinhos forem de 0,6 cm de lado, localize o quadradinho distante, respectivamente, 16 e 22 quadradinhos das bordas; se eles forem de 0,7 cm de lado, localize o quadradinho com 13 e 17 quadradinhos, respectivamente. Para a folha de quadradinhos de 0,5 cm de lado, o resultado é o da fig. 2.4, mas não a olhe antes de fazer sua própria localização do quadradinho descrito; depois disso, veja se acertou (faço essa sugestão pois, em minhas palestras, alguns participantes têm mostrado dificuldade de fazer essa localização). Se não tiver uma folha de papel almaço, use o quadriculado da página seguinte, posicionada com o lado maior na horizontal. Nesse caso, localize o quadradinho 15 a partir da margem maior inferior, e 20 a partir da margem menor direita.

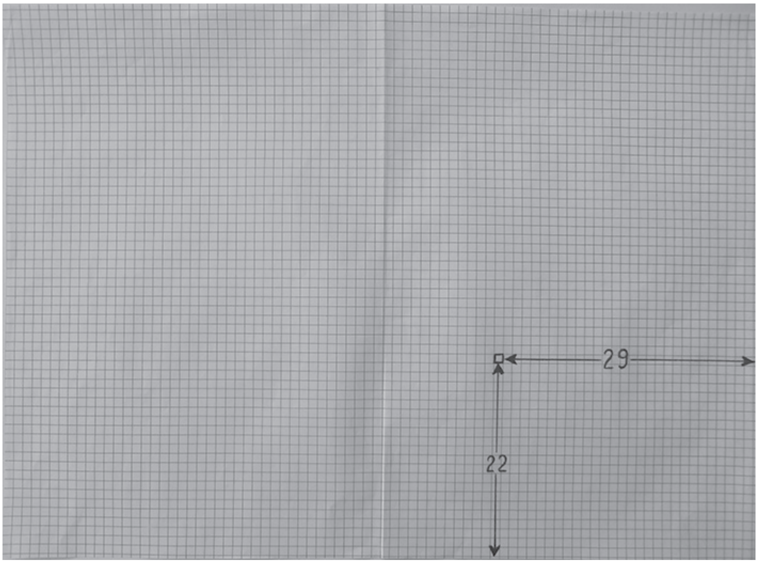


Fig. 2.4 Início do desenho da outra espiral

Agora, desenhe o quadradinho imediatamente *abaixo* do anterior. Em seguida, desenhe um terceiro quadrado, agora encostado nos dois anteriores, à *direita* deles, isto é, o tamanho do lado desse terceiro quadrado deve ser a soma dos lados dos dois anteriores. Será usada a denominação de *quadrado* ao desenho de um quadrado que engloba vários quadradinhos da folha.

Atenção: desenhe sem contar os lados desse quadrado; tente olhar bem e ver se é mesmo um quadrado ou se ficou um retângulo. Se aí tiver dúvida, conte o número de quadradinhos de cada lado dele. Note como o ser humano é capaz de ver se uma figura como essa é a ideal (um quadrado) ou se não acertou o que queria executar (ficou um retângulo). Nesse caso, a aritmética deve ser usada somente para conferir; treine sua intuição visual antes de fazer contas! Fazendo contas, emprega-se um pensamento abstrato; verificando visualmente, desenvolve-se um pensamento intuitivo, que pode ser imensamente rico e dar sugestões ao pensamento abstrato, usado posteriormente para verificar se a intuição estava correta. Esse procedimento deverá ser seguido daqui para a frente. Depois de traçar o terceiro quadrado, verifique se acertou comparando com a fig. 2.5.

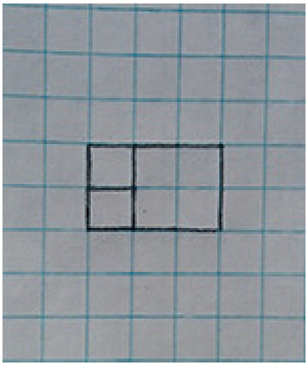


Fig. 2.5 Quadrados consecutivos

Em seguida trace o quarto quadrado *acima* do primeiro e do terceiro, encostando seu lado inferior no lado superior de cada um dos outros dois, isto é, abrangendo precisamente os lados daqueles dois. Novamente, trace à mão livre, sem contar os quadradinhos, e olhe o resultado. Parece um quadrado ou um retângulo? Se for um retângulo, corrija o desenho e verifique visualmente novamente. Quando achar que chegou ao quadrado desejado, conte os quadradinhos dos lados dos dois quadrados sobre os quais desenhou esse quarto, e confira com um lado vertical dele para ver se sua intuição visual funcionou bem.

Vamos para o próximo quadrado, o quinto. Antes de desenhá-lo, procure observar os quadrados anteriores e descobrir a regra de formação e deduzir a localização desse quinto quadrado. Tente também deduzir qual será o tamanho de seu lado no desenho, expresso em relação aos lados dos outros, sem contar os quadradinhos, indicando o tamanho do lado; exprima esse tamanho em termos de lados de quadrados já existentes. Depois de fazer a descoberta da localização e do tamanho desse quinto quadrado, desenhe-o, sempre à mão livre. Novamente, verifique se é um quadrado mesmo ou se parece um retângulo e, se necessário, corrija o desenho; depois, conte os quadradinhos para ver se sua intuição funcionou. Note como começa a ficar mais difícil distinguir um quadrado de um retângulo com uma só fileira de quadradinhos sobrando ou faltando.

O quinto quadrado deve ficar do lado esquerdo das bordas do quarto, do primeiro e do segundo quadrados. O tamanho do seu lado é a soma do tamanho dos lados do quarto e do terceiro quadrado (verifique!).

Em seguida, usando a regra de formação, trace o sexto e, depois, o sétimo e o oitavo quadrado, que devem caber na folha, pois o primeiro quadradinho foi localizado justamente para isso. Desenhe-os seguindo as orientações dadas para os anteriores (sempre usando a intuição para ver se são quadrados mesmo). O resultado final está na próxima página, mas tente desenhar todos os quadrados antes de examinar a fig. 2.6.

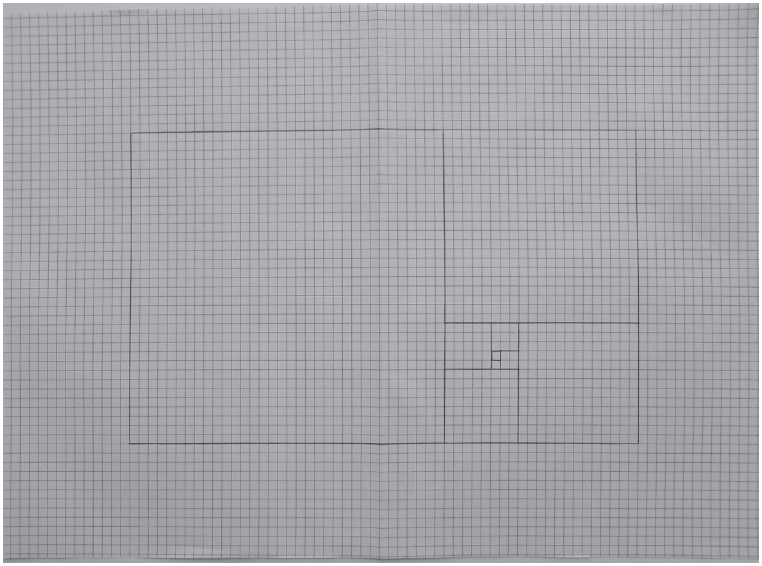


Fig. 2.6 Sequência de quadrados

Agora vamos usar os quadrados, a partir do segundo, para traçar uma espiral. Para isso, trace arcos de circunferência de 90° inscritos nos quadrados, isto é, unindo vértices opostos dos quadrados, como na fig. 2.7, tudo à mão livre! Tente caprichar, de modo que os arcos fiquem bem próximos dos que seriam traçados com um compasso. Comece desenhando os arcos bem de leve, para poder apagar e desenhar arcos cada vez mais redondos e bonitos, e só quando tiverem essas características passe o lápis mais forte.

Note que, se tivessem sido usados uma régua para traçar os quadrados e um compasso para os arcos de círculo, quem teria caprichado não teria sido o desenhista, e sim a régua e o compasso, e a beleza e a harmonia do desenho não seriam obra dele! Note ainda que, quanto mais bonitos e harmônicos forem os arcos e a transição de cada um para o próximo, mais perto o desenho estará daquele feito com compasso. Assim, veja uma capacidade fantástica do ser humano: quanto mais bonito ele achar um desenho geométrico feito à mão, mais o desenho aproxima-se do ideal feito com régua, esquadro (que não foi necessário, pois foi usado um papel quadriculado) e compasso. Por isso, na medida do possível, que é o caso neste exercício em questão, deve-se fazer desenhos à mão livre. Desse modo desenvolvem-se o capricho e a sensibilidade para o que é bonito e perfeito. O resultado deve ser próximo daquele da fig. 2.7, em que são mostrados apenas dois arcos, do quarto e do quinto quadrados da fig. 2.6.

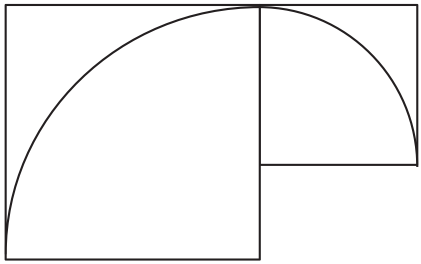


Fig. 2.7 Trecho da espiral

Foi mencionada a transição de um arco para o seguinte. Ela se dá ou na vertical ou na horizontal. Quando dois arcos combinam direitinho, isto é, um é a continuação do outro sem que se forme um ângulo na junção dos dois, diz-se que houve *concordância* entre eles. Formalmente, duas curvas que têm apenas um ponto em comum, seu ponto de junção, têm concordância nesse ponto se as tangentes às curvas nesses pontos fazem parte de uma mesma reta. Na fig. 2.7, os dois arcos têm que passar pelo vértice comum dos dois quadrados onde eles estão desenhados, e nesse ponto suas tangentes coincidem com os lados desses quadrados, que estão em uma mesma reta.

Por outro lado, os arcos não devem ser muito fechados (o que, nas palestras, eu denomino de 'arcos magros' nem muito abertos, 'arcos gordos') como na fig. 2.8, para os quadrados da direita e da esquerda, respectivamente. Costumo ir percorrendo as carteiras dos participantes de minhas palestras que estão desenhando os arcos e apontando para os arcos 'magros', os mais comuns, ou 'gordos'.

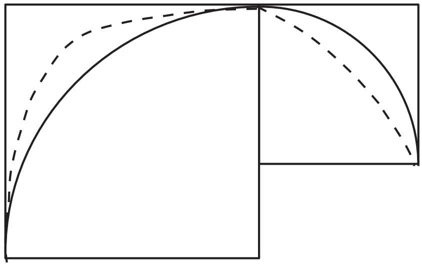


Fig. 2.8 Trechos 'gordo' (esq.) e 'magro' (dir.)

Note-se que os arcos 'magros' sempre formam, na sua junção, ângulos menores do que 180°, e os 'gordos' tangenciam os lados dos quadrados por uma extensão em geral exagerada (a rigor, deveria haver apenas um ponto de tangenciamento).

O resultado ideal está na fig. 2.9 – uma bonita espiral!

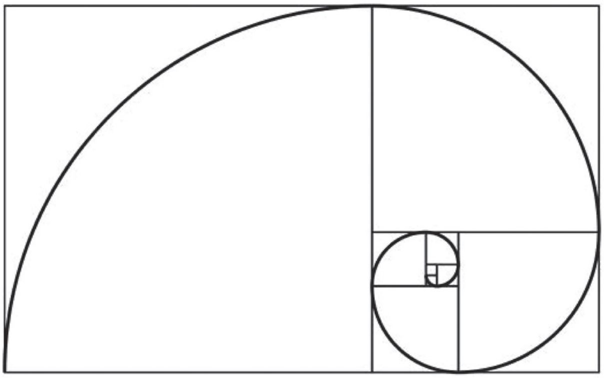


Fig. 2.9 A outra espiral completa

Observe-se que na espiral da fig. 2.9 o passo não é constante como na espiral de Arquimedes das figs. 2.2 e 2.3. De fato, traçando-se um braço dessa espiral a partir do que poderia ser o foco, analogamente à fig. 2.3, os tamanhos dos raios determinados por esse braço vão aumentando de um passo que não é constante. Na seção 24.2, será visto que esse aumento pode ser aproximadamente (mas não exatamente!) expresso por meio de uma proporção matemática numérica. Mas já é possível observar o seguinte: o aumento dos raios depende dos tamanhos dos lados dos quadrados onde os arcos de círculo foram inscritos.

2.3 Uma sequência de números

Os tamanhos dos lados dos quadrados consecutivos podem ser escritos formando uma sequência de números naturais (isto é, números inteiros positivos). O primeiro tem lado de tamanho 1 (isto é, o lado de um quadradinho), o segundo também de 1, e o terceiro tem lado de tamanho 2. Agora tente completar essa sequência para todos os quadrados da fig. 2.9. Depois disso, confira com a que está na próxima página.

1 1 2 3 5 8 13 21 34

Essa sequência segue uma regra de formação. Tente descobrir que regra é essa e em seguida continuar a sequência, antes de ver a regra a seguir, e também uma extensão dessa sequência.

A regra de formação é muito simples: *cada termo da sequência depois dos dois primeiros é a soma dos dois anteriores*. Observe o desenho da espiral da fig. 2.9: cada quadrado depois do segundo tem o tamanho de seu lado igual à soma dos tamanhos dos lados dos dois quadrados anteriores. Não se preocupe com os quadrados adjacentes; use realmente os dois anteriores.

Usando essa regra, a sequência será um pouco continuada, pois será usada mais tarde:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610

Essa sequência tem um nome: *sequência de Fibonacci* (em inglês, *Fibonacci sequence*), pronunciado no italiano de hoje como 'Fibonátchi'. Ela não foi devida ao matemático de mesmo nome, pois já era conhecida por matemáticos hindus desde o séc. VI. Em um livro de sua autoria, datado do ano de 1202, Fibonacci (1170-1250?) escreveu a sequência até o 13º termo, 233, e por isso ela ficou conhecida com seu nome. Na seção 3.3 será visto como isso ocorreu. Tanto ele quanto sua sequência ficaram famosíssimos, pelas razões que serão expostas.

Note a expressão usada: Fibonacci 'escreveu' o livro (ou ele foi escrito por escribas), pois naquela época todos os livros eram escritos à mão; a imprensa com tipos móveis foi inventada por volta de 1439 pelo ourives Johannes Gutenberg (1398-1468). O primeiro livro que ele imprimiu foi uma Bíblia, em 1455, com 180 cópias, muito elogiada pela qualidade da impressão. Em 1469 foi impresso em latim o primeiro livro com letras romanas, parecidas com as que são usadas hoje. Para os que acham que hoje há uma brutal aceleração do desenvolvimento tecnológico, é interessante saber que em 1500 já havia cerca de 1.000 gráficas na Europa ocidental, e no séc. XVI foram impressos cerca de 200 milhões de livros!

Cada termo da sequência mostrada anteriormente é denominado um *número de Fibonacci* (*Fibonacci number*); a regra de formação (cada termo dela é a soma dos dois anteriores) é chamada de *regra de Fibonacci* (*Fibonacci rule*); a espiral da fig. 2.9, construída com arcos de circunferência ligando vértices de quadrados cujos tamanhos dos lados seguem a sequência de Fibonacci, é chamada de *espiral de Fibonacci*.

A sequência de Fibonacci é também representada iniciando por 0 e 1 em lugar de 1 e 1. (Verificar que os termos restantes não mudam.) Neste livro será usada a segunda forma.

As/os leitoras/es que estão cursando ou já cursaram o ensino médio (antigo colegial) já devem ter estudado as *progressões aritmética* e *geométrica* (*arithmetic and geometric progressions*), em geral abreviadas por P.A. e P.G. Na primeira, cada termo é obtido pela *soma do anterior por uma constante*. Por exemplo,

```
3  5  7  9  11 ...
```

Isto é, cada termo é a soma do anterior com 2. Diz-se que uma P.A. *cresce linearmente*, ou tem *crescimento linear*.

Na segunda, cada termo é obtido pela *multiplicação do anterior por uma constante*, por exemplo,

```
3  6  12  24  48 ...
```

Isto é, cada termo é a multiplicação do anterior por 2.

Inversamente, pode-se dizer que uma P.G. é caracterizada pelo fato de que qualquer elemento é o seguinte dividido por uma constante, a *razão* da P.G. (2, no exemplo acima). Uma outra maneira de escrever a P.G. acima salientando a razão é

$$3,\ 2 \times 3,\ 2 \times 2 \times 3,\ 2 \times 2 \times 2 \times 3,\ \ldots \text{ ou } 2^0 \times 3,\ 2^1 \times 3,\ 2^2 \times 3,\ 2^3 \times 3,\ \ldots$$

As potências da razão indicam que uma P.G. tem *crescimento exponencial*.

Essas progressões são determinadas pelo termo inicial e pela constante. Uma *progressão* é uma sequência de números com alguma regra de formação. Nesse sentido, a sequência de Fibonacci também poderia ser chamada de ‘progressão’, mas, como ela é comumente chamada de ‘sequência’, essa é a denominação que continuará a ser usada aqui.

Mas quem era Fibonacci e qual o motivo da fama dele e de sua sequência? Isso será visto no próximo capítulo.

2.4 Formalismos matemáticos

(Esta seção pode ser pulada por leitoras/es não interessadas/os em formulações matemáticas.)

2.4.1 Coordenadas cartesianas

Um sistema de *coordenadas cartesianas* (*Cartesian coordinates*), introduzido por René Descartes (1596-1650) em 1637, especifica, para cada ponto *P* de um plano, duas coordenadas numéricas que constituem as distâncias, com sinal, de *P* a duas retas ortogonais, os eixos do sistema. Com isso, Descartes revolucionou a matemática, pois forneceu um meio de associar a geometria euclidiana à álgebra; seu sistema tornou-se a base para a geometria analítica (*analytical geometry*). O ponto de encontro dessas retas é a *origem* do sistema. A reta horizontal que passa por essa origem é denominada de *eixo das abcissas* (*axis of abcissas*), e a vertical que passa pela origem é denominada de *eixo das ordenadas* (*axis of ordinates*). A fig. 2.10 mostra um exemplo de um desses sistemas. Cada ponto P do plano é expresso por meio de suas coordenadas, por exemplo, $P(x_1,y_1)$. Nela é mostrado o ponto (-3,2); a origem é o ponto (0,0); a abcissa de P é -3, e a ordenada é 2.

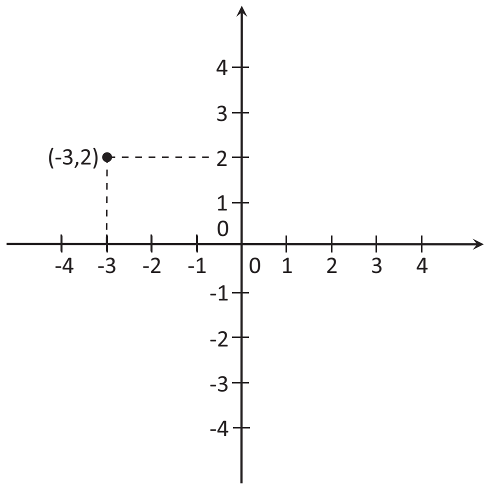


Fig. 2.10 Coordenadas cartesianas

2.4.2 Coordenadas polares

Há outro sistema de coordenadas muito prático para certas aplicações que, em lugar das coordenadas cartesianas, usa outra maneira de determinar a posição de um ponto no plano: o sistema de *coordenadas polares* (*polar coordinates*). Para um ponto $P(x_1,y_1)$, em lugar de se usar os valores x_1 e y_1 das coordenadas cartesianas, são usadas a distância r de P à origem $O(0,0)$ do sistema, e o ângulo θ (a letra grega *teta*) que faz a reta que passa pela origem O do sistema e por P com o eixo das abcissas, como na fig. 2.11.

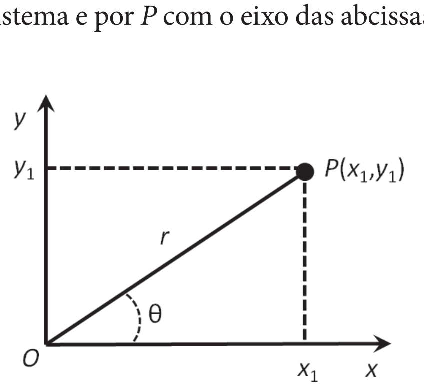


Fig. 2.11 Coordenadas polares

Na fig. 2.11, o ponto P pode ser determinado por suas coordenadas cartesianas $P(x_1,y_1)$ ou pelas polares $P(r,\theta)$.

Dado um ponto P de coordenadas polares $P(r,\theta)$, para transformarem-se essas últimas em cartesianas, deve-se inicialmente notar que o triângulo OPx_1 é retângulo (Px_1 é perpendicular a x), tendo r como hipotenusa e Ox_1 e $x_1P = Oy_1$ como catetos, com tamanhos x_1 e y_1, respectivamente. Agora é necessário usar um pouco de trigonometria. Como, por definição, o *seno* (abreviado como *sen*) de um ângulo agudo θ de um triângulo retângulo é o (tamanho do) cateto (lado) oposto a θ dividido pela hipotenusa, e o *cosseno* (abreviado como *cos*) de θ é o cateto adjacente dividido pela hipotenusa, tem-se

$$cos\theta = x_1/r \text{ e } sen\theta = y_1/r$$

Portanto

$$x_1 = r\, cos\theta \text{ e } y_1 = r\, sen\theta \quad [2.4.2:1]$$

2.4.3 A espiral de Arquimedes em coordenadas polares e cartesianas

A equação da espiral de Arquimedes em coordenadas polares, com foco na origem O, que dá a posição de todos os seus pontos, é extremamente simples:

$$r = p\theta/T \quad [2.4.3:1]$$

onde r é a distância de um ponto P qualquer da espiral até o foco F dela (que fica na origem das coordenadas polares), isto é, o raio (cf. seção 2.1) da espiral que passa por P, p é um número positivo indicando o passo de crescimento da espiral, θ é o ângulo que o segmento que une P a F faz com o eixo das abcissas e T é o *período* da espiral, isto é, o intervalo angular tal que o raio aumenta de p (v. fig. 2.12).

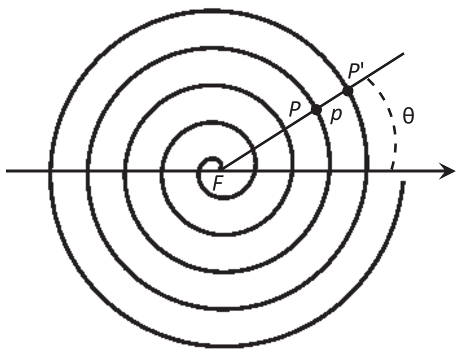


Fig. 2.12 Período de uma espiral

Usando o passo p da fig. 2.12, para essa espiral tem-se

$$r = p\theta/360$$

com θ medido em graus, e

$$r = p\theta/2\pi$$

com θ medido em radianos (v. próximo parágrafo). Isto é, como mostra a fig. 2.12, a partir de qualquer ponto P da espiral, a cada 360° (2π radianos) o tamanho do raio aumenta de p levando a P'. Portanto, o período dessa espiral (e a da fig. 2.3) para um aumento p do raio é 360° ou 2π. Se $360/T$ for um número inteiro, esse número indica que a cada giro de um ângulo $\theta = T$ o raio aumenta de p. Por exemplo, se $T = 90°$, o raio aumenta de p a cada quarto de volta, ou de $4p$ a cada 360°. Obter-se-ia a mesma espiral se se tomasse $p' = 4p$ e $T = 360°$ (por quê?).

Sobre a medida de ângulos em *radianos*: essa palavra vem do fato de que uma parte de uma circunferência (ou um setor circular) determina um ângulo formado pelos raios que delimitam aquela parte. Ocorre que o comprimento total de uma circunferência é $2\pi r$, onde r é o raio da circunferência. Mas esse comprimento total corresponde a uma volta completa na circunferência, isto é, a um ângulo de 360°. Dividindo $2\pi r$ por r (pois, afinal, o ângulo não depende do raio da circunferência!) tem-se 2π, a medida de 360° em radianos. Por exemplo, um ângulo de 90° corresponde, portanto, a $360°/4 = \pi/2$ radianos.

Com a equação [2.4.3:1] podem-se traçar mais pontos da espiral além dos marcados no eixo das abcissas, como na fig. 2.3. É só atribuir um valor a θ, traçar um braço (cf. seção 2.1) passando pelo foco F que deve coincidir com a origem O do sistema de coordenadas, braço esse formando um ângulo θ com o eixo das abcissas, calcular r com a fórmula acima e marcar o ponto desejado nesse braço a uma distância r de O.

A seguir é mostrado como traçar progressivamente uma espiral dessas usando coordenadas cartesianas.

Usando as equações [2.4.2:1] da seção anterior tem-se, para um ponto $P(x,y)$,

$$r = x/cos\theta \quad \text{e} \quad r = y/sen\theta$$

Como visto, em coordenadas polares a equação da espiral de Arquimedes é $r = p\theta$, portanto

$$p\theta/T = x/cos\theta \quad \text{e} \quad p\theta/T = y/sen\theta$$

Então

$$x = (p\theta cos\theta)/T \quad \text{e} \quad y = (p\theta sen\theta)/T$$

Assim, essas equações permitem, dado um valor de θ, deduzir as coordenadas cartesianas de um ponto da espiral.

Os programas gráficos de computador que traçam pontos a partir de suas coordenadas cartesianas podem usar essas duas equações e traçar a espiral dando-se valores crescentes de θ e calculando-se a posição (x,y) de cada ponto da espiral, fazendo-a desenvolver-se em rotação.

2.4.4 Somatória de uma progressão aritmética

Já que na seção 2.3 foram mencionadas as progressões aritmética (P.A.) e geométrica (P.G.), vejamos como se calcula a soma de todos os seus termos, também denominada de *somatória* (*summation*).

Seja uma P.A. de n termos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, com a constante de progressão c, isto é, $p_{i+1} = p_i + c$, $1 \le i \le n - 1$ (isto é, i varia entre 1 e n – 1). É fácil notar que $p_1 + p_n = p_2 + p_{n-1}$ etc., pois para passar de p_1 para p_2 deve-se somar c, e para passar de p_n para p_{n-1} deve-se subtrair c. Por exemplo, na P.A. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 temos 2 + 20 = 5 + 17 = 22, pois, para passar de 2 a 5, deve-se somar 3 e, de 20 para 17, deve-se subtrair 3. Portanto, a soma de termos da progressão simétricos em relação ao termo do meio dela é sempre a mesma, e igual a $p_1 + p_n$. Mas quantas somas desses elementos simétricos existem na progressão inteira? São $n/2$ somas, pois cada soma envolve dois termos da progressão. Isso é bem claro quando n é par. E quando n for ímpar? O termo do meio da progressão será somado duas vezes, como no exemplo da P.A. mencionada (o 11 será somado duas vezes), de modo que nos dois casos (n par ou ímpar) deve-se dividir as somas por 2, ficando tudo correto. Portanto, a soma de uma P.A. é

$$n(p_1 + p_n)/2 \quad [1]$$

Exr. 2.4.4:1 Testar essa fórmula para pelo menos duas progressões, uma com n par e outra com n ímpar. Note que a constante c não aparece na fórmula! (Por quê?)

É conhecida a historieta do famoso matemático alemão Gauss (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855), de que, aos 10 anos, numa aula de matemática na escola, a classe estava muito irrequieta, e o professor resolveu passar um problema para os aluninhos sossegarem: somar todos os números de 1 a 100, achando que eles iriam levar um tempão para chegar ao resultado. Depois de alguns segundos, Gauss mostra o resultado; ele tinha percebido a propriedade da soma dos extremos, deduzido a fórmula e dado o resultado (quanto é?).

Em particular, uma P.A. muito comum é

`1, 2, 3, ... , n`

Por [1], sua soma será

$$n(n + 1)/2$$

Na historieta de Gauss, $n = 100$. Note-se que ou n ou $n + 1$ é par, de modo que um deles é divisível por 2 (isto é, a divisão por 2 não deixa resto) e, assim, o resultado dessa fórmula é sempre um número inteiro, como não podia deixar de ser, pois se estão somando números naturais.

Com a somatória dessa P.A. pode-se calcular a soma de uma P.A. qualquer usando-se, em lugar de p_n na fórmula [1], o primeiro termo p_1 e o número de termos n. Se a constante da progressão for c,

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = p_1 + p_1 + c + p_1 + 2c + \ldots + p_1 + (n\text{-}1)c = np_1 + c(1 + 2 + \ldots +(n\text{-}1))$$

Portanto, usando o símbolo usual para somatória, o Σ (*sigma*, em grego) mostrando a variação do índice

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = np_1 + c(n-1)n/2 = n\left(p_1 + c(n-1)/2\right)$$

Exr. 2.4.4:2 Verificar essa fórmula para alguma P.A. com, por exemplo, 5 termos.

É interessante notar que se faz uma distinção entre sequência e série. A primeira é um conjunto ordenado de termos; em geral a ordenação segue alguma regra, como qualquer termo ser maior do que o anterior. Uma *série* é a somatória dos termos de uma sequência. Ambas podem ter um número infinito de termos.

2.4.5 Somatória de uma progressão geométrica

Como é comum nos textos de matemática, a constante que multiplica cada termo de uma P.G. para se obter o termo seguinte será denotada por q. O q vem de 'quociente' de cada um pelo anterior, a operação inversa da multiplicação, também chamada de *razão* de uma P.G. (cf. seção 2.3). Obviamente, numa P.G., o quociente também é uma constante. Os termos de uma P.G. são então

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

com

$$p_{i+1} = qp_i,\ 1 \le i \le n\text{-}1$$

O primeiro termo, p_1, é o *valor inicial* da P.G. Seja a soma S dos n termos:

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n \quad [1]$$

ou

$$S = p_1 + qp_1 + qp_2 \; \ldots \; + qp_{n-1} = p_1 + q\left(p_1 + p_2, + \; \ldots + p_{n-1}\right) = p_1 + q\sum_{i=1}^{n-1} p_i \quad [2]$$

Aqui pode-se usar um truque matemático: exprimir o S em função dele mesmo. Para isso, de [1] tem-se

$$p_1 + p_2, + \ldots + p_{n-1} = S - p_n$$

Portanto [2] fica

$$S = p_1 + q(S - p_n)$$

Mas

$$p_2 = qp_{1;}\, p_3 = qp_2 = q^2p_1; \ldots; p_n = q^{n-1}p_1 \;\; \rightarrow \;\; S = p_1 + q(S - q^{n-1}p_1) = p_1 + qS - q^np_1)$$

Portanto

$$S - qS = p_1 - q^np_1 \quad [3] \;\; \rightarrow \;\; S(1 - q) = p_1(1 - q^n)$$

Multiplicando ambos os membros por –1 obtém-se

$$S(q - 1) = p_1(q^n - 1)$$

Finalmente,

$$S = p_1(q^n - 1)/(q - 1) \quad [2.4.5:1]$$

Em muitos textos encontra-se

$$S = p_1(1 - q^n)/\,(1 - q)$$

Que parece ser menos intuitiva, pois muitas vezes a razão q é maior que 1.

Exercícios

Exr. 2.4.5:1 Conferir a fórmula [2.4.5:1] para alguma P.G.

Exr. 2.4.5:2 Em lugar do truque usado acima, pode-se substituir em [1] cada termo usando-se $p_{i+1} = qp_i$ e em seguida multiplicar os dois lados por q. Deduza a fórmula [2.4.5:1] por esse método.

Uma soma interessante de uma progressão geométrica particular é a das potências de 2:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad [2.4.5:2]$$

que será provada na seção 2.4.7, e também a soma de infinitos elementos da sequência de inversos das potências de 2, com um resultado que pode parecer surpreendente, pois se está somando sempre mais um pouquinho (∞ é o símbolo usado para 'infinito'):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1 \quad [2.4.5:3]$$

Por essa fórmula, que será provada na seção 2.4.6, vê-se que jamais se chega no valor total 1 com um número finito de termos da série, pois dado um termo $\frac{1}{2^n}$ sempre se pode somar o termo seguinte, com a potência n + 1, isto é, $\frac{1}{2^{n+1}}$.

Exr. 2.4.5:3 Usando a fórmula [2.4.5:1], provar o valor das somatórias [2.4.5:2] e [2.4.5:3]. Na primeira, cuidado com o índice n; na segunda, observar que $\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$.

A fórmula [2.4.5:2] dá uma solução para a conhecida lenda da origem do jogo de xadrez que, aparentemente, apareceu no *Livro dos Reis*, um épico da Pérsia do ano 1101. Segundo essa lenda, um homem chamado Sissa Ibn (filho de) Dahir inventou o jogo para o rei da Índia, que gostou tanto dele que encomendou um tabuleiro e peças para cada templo na Índia. Querendo agradecer Sissa com um presente, o rei disse-lhe para pedir o que quisesse. Sissa respondeu que gostaria de receber um total de grãos calculado com 1 na primeira casa, 2 na segunda, 4 na terceira, e assim por diante, dobrando a cada nova casa. O rei achou que ele estava pedindo muito pouco, e mandou atendê-lo. Quando verificou-se que o total era maior do que toda a quantidade de grãos de trigo do mundo, declarou que Sissa era ainda mais inteligente do que parecia por ter inventado o jogo (v. ref., também com outras histórias).

Trata-se da P.G. iniciando em 1 com razão 2, com 64 termos; da fórmula 2.4.5:2:

$$\sum_{i=0}^{63} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

Ocorre que 2^{64} equivale aproximadamente a um número decimal com 19 dígitos, da ordem de um sextilhão!

2.4.6 Uma prova geométrica

Para a somatória da fórmula [2.4.5:3] há uma prova geométrica muito simples e interessante. A fig. 2.13 mostra um quadrado externo de lado de comprimento unitário (1), portanto de área unitária, dividido em duas partes (retângulos), em que só a da esquerda está anotada como ½, indicando a metade da área unitária total. Por sua vez, a outra metade foi dividida em dois, tendo sido anotada só a parte inferior com a área ¼, e assim por diante. Pode-se notar que, à medida que a potência de ½ vai aumentando, nunca se passa da área unitária do quadrado inicial, e sempre vai se aproximando cada vez mais dela.

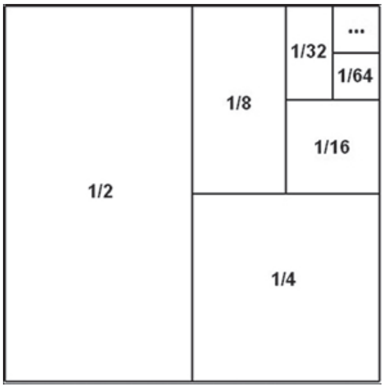


Fig. 2.13 Bipartições consecutivas de um quadrado

A fig. 2.13 mostra também que os dois últimos quadrados são iguais, com área 1/64. Portanto, generalizando o 64 para algum *n*,

$$\frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1$$

O que pode ser comprovado também algebricamente, pois

$$\frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}} + 2\frac{1}{2^n}$$

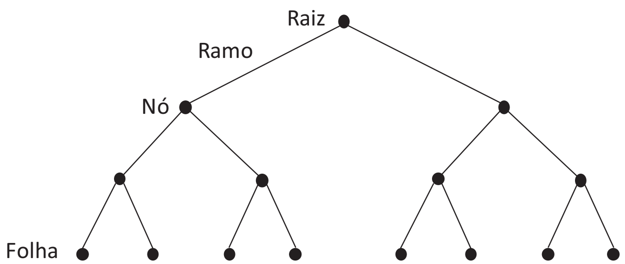
No entanto, o último termo $2\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ é igual ao penúltimo, gerando o dobro dele. E assim por diante, caminhando-se na fórmula para a esquerda até chegar-se a $2\frac{1}{2^1}$, que é igual a 1. Esse mesmo procedimento vale para infinitos elementos ou retângulos.

2.4.7 Árvores matemáticas binárias

A somatória da fórmula [2.4.5:2] pode ser deduzida de uma forma interessante, usando-se uma estrutura abstrata muito importante na ciência da computação e que, com uma forma especial, tem algo a ver com a sequência de Fibonacci.

Uma árvore binária matemática é um conjunto de *nós* e de *ramos*, como os das figs. 2.13, 2.14 e 2.16. Cada nó é representado graficamente por uma bolinha e cada ramo por um segmento de reta ligando dois nós distintos, representados em cada ponta do ramo. Cada nó N é um nó isolado (nesse caso o conjunto de ramos é vazio) ou é a extremidade de um ramo que o liga a um outro nó denominado de *ascendente*, ou (inclusivo) é a extremidade de no máximo dois ramos distintos que ligam N a dois outros nós distintos N' e N'', denominados de nós *descendentes*. Um nó que não tem um ou dois descendentes é denominado de *nó folha*. Cada árvore matemática tem um nó especial, sem nenhum ascendente, denominado *raiz*.

As figs. 2.13 e 2.17 mostram duas árvores binárias, sendo que na fig. 2.17 os nós são rotulados como descrito adiante. Nota-se que as raízes são representadas como o nó mais acima das árvores, e as folhas mais abaixo, isto é, essas árvores são comumente representadas ao contrário do normal e como se veem árvores reais. Como veremos, essas árvores são usadas na ciência da computação; vê-se uma das razões por que os 'computatas' são muitas vezes pessoas estranhas: não só falam uma língua que ninguém mais compreende, mas ainda pensam em árvores de cabeça para baixo...



Nível	Nº nós	Total
0	1	1
1	2	3
2	4	7
3	8	15

Fig. 2.14 Árvore binária completa

A *altura* de uma árvore *relativa a uma folha* é o número de nós que estão entre a raiz, inclusive, e essa folha, inclusive, percorrendo-se os ramos entre ambos. Se cada nó fora os nós folhas tem dois nós descendentes e a altura é a mesma para todas as folhas, a árvore é dita *completa*, como a da fig. 2.14, que tem altura 4. Em caso contrário, isto é, algum nó não folha tem um só descendente e as alturas da árvore relativas a duas folhas distintas diferem entre si, a árvore é dita *incompleta*, como a da fig. 2.17.

Como se pode ver na coluna 'Nº nós' da tabela da fig. 2.14, em cada nível n de nós de uma árvore binária completa tem-se o dobro do número de nós do que o nível anterior $(n - 1)$, isto é, 2^n nós, sendo que o primeiro é o nível 0, que contém um único nó, a raiz da árvore, pois $2^0 = 1$. (Por isso os níveis começam em 0.) Além disso, em cada nível n a soma de todos os nós desse nível e dos anteriores, isto é, o número total de nós (coluna 'Total') até o nível n é o número de nós no nível seguinte $n + 1$ menos 1, isto é, $2^{n+1} - 1$, visto na fórmula [2.4.5:2]. Por exemplo, no caso de $n = 3$ tem-se Total = $15 = 2^4 - 1 = 16 - 1$. Isso pode ser provado formalmente usando-se indução finita (cf. será visto na propr. – propriedade – 4 da seção 7.3).

As árvores binárias têm importância fundamental na ciência da computação; muitas estruturas de dados em várias aplicações seguem essa disposição. Por exemplo, uma árvore binária completa de busca é uma árvore em que cada nó n contém um dado, de tal modo que o valor do dado de n é maior do que (ou sucede alfabeticamente) o valor do dado do nó descendente imediatamente à sua esquerda e tem valor menor do que (ou precede alfabeticamente) o valor do nó descendente imediatamente à sua direita – como na fig. 2.15, uma árvore com os nomes de pessoas. Cada nome serve para se construir a árvore, mas ao seu lado podem ser colocados os dados que interessam sobre cada pessoa (nome completo, endereço etc.), ou um endereço de onde estão os dados dessa pessoa, numa unidade de armazenamento de um computador (v. 'ponteiro' adiante).

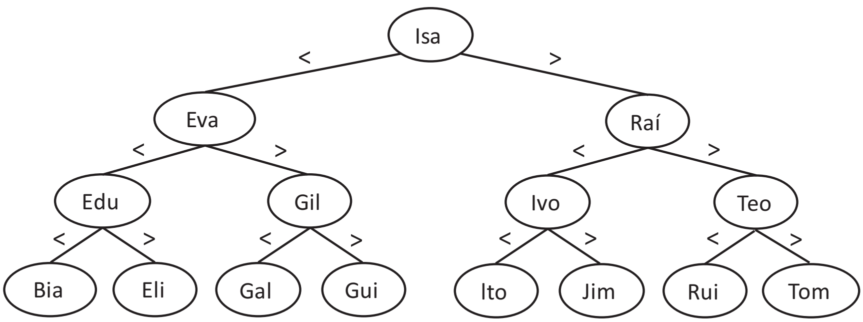


Fig. 2.15 Árvore binária de busca

Um exemplo de busca seria pelo nome Gal. Inicialmente, comparando com o valor da raiz, Isa, vê-se que Gal é alfabeticamente menor do que (precede alfabeticamente) Isa, de modo que deve ser tomado em seguida o ramo da esquerda, assinalado com <, indo-se para o nó com Eva. Gal é maior do que (segue) Eva, de modo que é tomado o ramo da direita, assinalado com >, indo-se para o nó com Gil. Mas Gal é menor do que (precede) Gil, de modo que se vai para o ramo da esquerda de Gil atingindo-se o nó desejado com Gal.

Portanto, partindo-se da raiz da árvore é feita uma única comparação para cada nível, progredindo-se exponencialmente no número de termos já descartados, isto é, que não são o valor procurado, pois, tendo-se chegado a um nível n sem encontrar o valor procurado, foram descartados $2^{n+1} - 1$ nós sem aquele valor. No entanto, isso exige a manutenção da ordenação numérica ou alfabética dos dados nos nós, para se colocar os valores adequados em cada nó descendente à esquerda ou à direita. Uma grande desvantagem desse tipo de árvore de busca é que a inserção de um novo dado, por exemplo, Lia na fig. 2.15, exige um rearranjo da árvore com a introdução de um novo nível, o que pode ter um custo bem alto. Um rearranjo também é necessário pela eliminação de um dado qualquer, como Gil. Em ambos os casos haverá nós vazios, sem nenhum dado. Mais adiante será mostrado como resolver o problema de nós vazios.

Na ciência da computação é usada a seguinte nomenclatura: um nó qualquer, fora a raiz, tem um só ascendente, denominado de *pai*. Os nós descendentes de um determinado nó são denominados de *filhos* do último. Os descendentes de um mesmo nó ('pai') são denominados de *irmãos*. Pessoalmente, não gosto de denominações antropomórficas para as máquinas, por exemplo 'memória', para a unidade central de armazenamento de um computador. Não se sabe como nossa memória funciona, mas se sabe muito bem como funciona aquela unidade de um computador. Parece-me que as denominações antropomórficas elevam a concepção que se faz das máquinas ao nível humano e degradam ao nível subnatural das máquinas a concepção elevada que se deveria ter dos seres humanos. Outros exemplos de nomenclaturas erradas: 'inteligência artificial' (*artificial intelligence* – não se sabe o que é inteligência humana); 'aprendizado de máquina' (*machine learning* – máquinas não aprendem, elas armazenam dados e calculam parâmetros que alteram os algoritmos); os computadores tomam decisões (o que eles fazem são escolhas lógicas; só seres humanos tomam decisões) etc. *ad nauseam*. Mas reconheço que essas denominações já fazem parte da linguagem comum e, por isso, são práticas. No entanto, gostaria que as pessoas se conscientizassem de que elas estão erradas, preservando assim a distinção entre seres humanos e máquinas. Só para salientar, a denominação *informática* está errada, pois os computadores e suas redes não processam informações, e sim dados, de modo que o correto deveria ser 'dadótica'. Um dado só se transforma em informação se é compreendido por uma pessoa receptora do mesmo, isto é, se ela associa um significado a ele. Por exemplo, um texto em uma língua desconhecida é simplesmente um monte de dados, não transmite nenhuma informação, mas pode ser processado mudando-se o tipo das letras, os tipos e posições de parágrafos etc., exatamente como um computador processa dados, sem compreender absolutamente nada. Computadores são máquinas puramente sintáticas, seguindo estritamente regras formais, matemáticas (mesmo quando processam símbolos, pois estes são necessariamente representados numericamente), ao passo que o ser humano contém semântica. Para mais detalhes, ver meu artigo nas referências deste capítulo.

Falando em computadores, uma pergunta pode ter surgido no/a leitor/a: mas como essas árvores são representadas nas unidades de armazenamento dos computadores? Para isso é necessário introduzir a noção de *ponteiro* (*pointer*): na unidade central de armazenamento ou nas auxiliares, como os discos magnéticos (*hard drives*, HDs – discos magnéticos, discos rígidos), que um dia vão desaparecer totalmente, pois é uma aberração haver uma unidade mecânica no meio de circuitos puramente eletrônicos. Hoje os HDs já são substituídos pelos dispositivos SSDs (*solid state drive*), de estado sólido como os *pen drives*, muito mais rápidos; é tudo uma questão de preço. Cada unidade de dados armazenada tem um *endereço*, um número que indica o local na unidade onde começa o dado e por meio do qual é feito o acesso a esse dado. Se o endereço de um dado estiver armazenado, ele torna-se também um dado: o ponteiro para aquele dado.

Pois bem, para representar uma árvore binária numa unidade de armazenamento de um computador, cada nó da árvore contém o dado (os nomes na fig. 2.15) e, ao lado dele, dois ponteiros: um para o descendente ('filho') mais à esquerda e outro para o próximo descendente do mesmo nó imediatamente ascendente (isto é, para o 'irmão'). Na fig. 2.16 é mostrada a árvore da fig. 2.15 com esses ponteiros: cada seta indica um ponteiro. Em um nó, quando não há um nó descendente (como nos nós folhas) ou um nó 'irmão' (como no nó raiz), o ponteiro correspondente fica 'vazio', isto é, contém um endereço fictício padronizado, como 00...0.

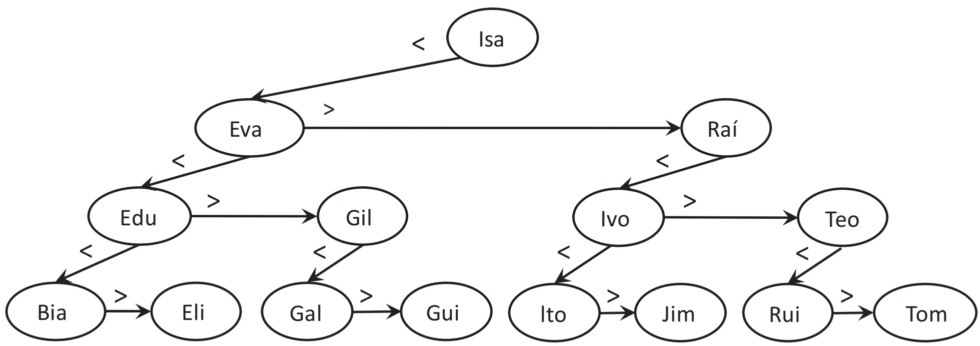


Fig. 2.16 Árvore como estrutura de dados

Havendo dados além do conteúdo de cada nó, por exemplo, o CPF e o endereço físico das pessoas cujos nomes constam da fig. 2.16, mais um ponteiro pode ser adicionado a cada nó para a localização desses dados, como já citado. Assim, a árvore fica o mais compacta possível, podendo eventualmente estar por inteiro na unidade central de armazenamento, que é de acesso muitíssimo mais rápido que os discos magnéticos.

Uma tal organização ou estrutura de dados é denominada de índice (*index*) dos dados armazenados.

Exr. 2.4.7:1 Além dos ponteiros vazios nos nós folhas e na raiz, como descrito, há outros ponteiros vazios na fig. 2.16?

Pode parecer que uma tal árvore de busca só vale para um número total de dados que seja uma potência de 2 menos 1, como mostrado na coluna 'Total' da fig. 2.14 (15 na fig. 2.15), mas um pequeno truque resolve esse problema: se o número total de dados não satisfizer essa condição, pode-se completar uma subárvore mais à direita com alguns nós com o maior valor que pode ser representado, por exemplo, 9999... ou ZZZZ..., isto é, com valores fictícios. Se na fig. 2.15 não houvesse dados de Rui, Teo e Tom, esses nomes poderiam ser substituídos por ZZZ nos respectivos nós. Nesse caso, em lugar de > na fig. 2.15 deve-se usar ≥, pois vários valores serão repetidos. Aliás, usar sistematicamente ≥ em lugar de > permite que se insiram os dados de várias pessoas diferentes com o mesmo nome. Com esses valores fictícios, a inserção de um dado com valor maior do que todos os já existentes na árvore não implica alteração de sua estrutura: o novo dado simplesmente substitui o último valor fictício no percurso da árvore. Já a inserção de um dado no meio de uma árvore com valores vazios vai eventualmente implicar o rearranjo de boa parte dela, mas sem aumento no número de níveis. O importante é que o número de comparações se dá linearmente pelos níveis, percorrendo exponencialmente os valores (número total de nós descartados).

Uma árvore em que, em lugar de dois ramos saindo de cada nó, saem três ramos é uma árvore ternária, ou de *grau três* – note-se que continua havendo apenas dois ponteiros em cada nó, um para o nó imediatamente descendente à esquerda e um para o próximo irmão. E assim por diante, para graus maiores. Nos bancos de dados em que estes estão armazenados em discos magnéticos, usam-se as árvores-*B* (*B-trees*) de busca. Cada nó pode comportar dezenas ou mesmo uma centena de valores ordenados, normalmente devendo conter no mínimo 50% da capacidade de cada nó. Isso permite muitas vezes a inserção de novos dados ou a eliminação de dados em um nó, sem que a estrutura da árvore seja alterada. Com isso tem-se uma árvore de grau variável.

Exr. 2.4.7:2 Modifique a árvore da fig. 2.15 para inserir o valor Ari. Quantas folhas fictícias terão que ser inseridas no novo nível para que a árvore mantenha-se completa?

2.4.8 Árvores AVL

Já que foram mencionadas estruturas de dados em forma de árvores binárias abstratas, matemáticas, na ciência da computação aborda-se uma árvore binária que não é completa e tem algo a ver com a sequência de Fibonacci: a árvore AVL. Essa abreviatura vem do nome dos seus descobridores, Georgy Adelson-Velsky e Evgeny Landis, que publicaram o algoritmo em 1962. As árvores AVL satisfazem três condições: 1. uma árvore AVL é uma árvore binária, isto é, de cada nó saem no máximo duas subárvores; 2. a árvore não precisa ser completa; 3. em uma árvore AVL cada nó *n* deve ter uma ou duas subárvores, sendo que a diferença de altura entre as subárvores de *n* não deve ser maior do que 1, como na fig. 2.17. Nesse caso, a *altura* de uma árvore (ou subárvore) é definida como o maior número de nós entre a raiz, inclusive, e cada uma de suas folhas, inclusive.

Como na árvore binária completa de busca, os dados representados nos nós são tais que, estando-se em um nó com um dado *d*, um dado menor do que *d* (ou que o precede alfabeticamente) fica na subárvore à esquerda de *d*, e um dado maior (ou que o sucede alfabeticamente) fica na subárvore à direita de *d*, como na fig. 2.17, na qual foram representadas algumas comparações com < (menor) e > (maior), mas elas ocorrem em todos os ramos. À esquerda de cada nó que não é uma folha, estão os valores menores do que o conteúdo desse nó e, à direita, os que têm valores maiores.

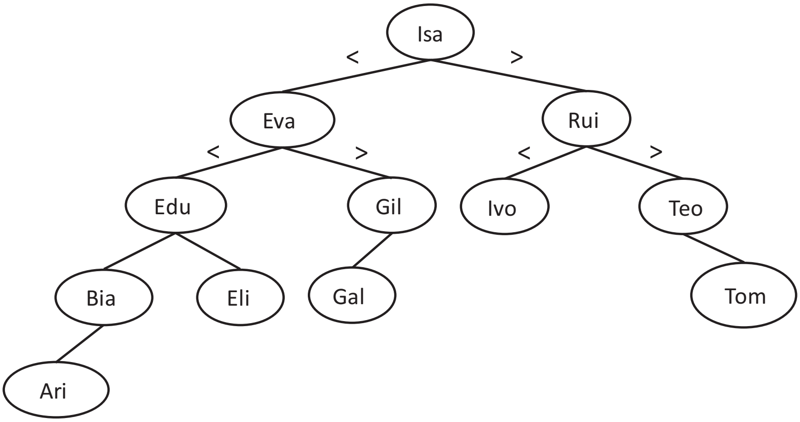


Fig. 2.17 Árvore AVL

Não serão dados aqui muitos detalhes sobre essas árvores; para esses detalhes, veja-se a referência sobre elas. O que nos interessa é que, à medida que uma árvore AVL cresce, o número mínimo total de nós cresce segundo a sequência de Fibonacci: uma árvore AVL de altura 1 tem um só nó (seriam as subárvores com as folhas com Ari, Eli, Gal, Ivo e Tom da fig. 2.17); a de altura 2 tem no mínimo 2 nós (as subárvores de raízes com Bia, Gil e Teo; a de altura 3 tem no mínimo 4 nós (seriam as de raízes com Edu e Rui); a de altura 4 tem no mínimo 7 nós (a com Eva); a de altura 5 tem no mínimo 12 nós (como toda a árvore da fig. 2.17) etc. Assim, a partir da altura 1, tem-se os números da sequência de Fibonacci com o valor de cada termo dela menos 1, começando no nível 1 com o termo da sequência com valor 2. Quando uma subárvore tem apenas um nó (como as folhas com nós contendo Ari, Eva, Gal e Tom), ela pode estar à esquerda (como os nós com Ari, Gal e Tom) ou à direita (Eli) do nó antecessor (respectivamente, Bia, Edu, Gil, Rui e Teo).

Talvez seja interessante especificar um pouco melhor o que significa 'número mínimo total de nós': é o número mínimo de nós de uma árvore AVL que preserva as três condições especificadas anteriormente. Nesse caso é possível adicionar um ou mais nós à árvore ou subárvore sem alterar sua altura, e sem alterar a regra de que em uma árvore AVL as alturas das duas subárvores de qualquer nó tomado como sua raiz não devem diferir mais do que 1, até que ela se torne uma árvore binária completa, que continua sendo AVL. Assim, se a árvore não está completa, a inserção de um nó não exige uma alteração no número de níveis; basta rearranjar os dados nos nós e inserir o nó no local correspondente. Ao contrário, a inserção de um nó em uma árvore binária completa de busca com um valor em cada nó exige, como foi visto, a adição de mais um nível com muitos valores fictícios (fazendo o papel de infinito) nos novos nós que não conterão valores significativos.

Assim, uma árvore AVL não precisa ser completa como a da fig. 2.15, isto é, não é necessário que a altura seja a mesma para todas as folhas, como no caso da árvore binária completa. Com isso, a inserção ou eliminação de novos nós ficam muito mais simples e rápidas em comparação com as árvores binárias completas, pois podem ocorrer vários nós vazios, não representados na fig. 2.17.

Exercícios

Exr. 2.4.8:1 Completar todas as indicações de < e > nos ramos da árvore AVL da fig. 2.15.

Exr. 2.4.8:2 Mostrar na fig. 2.16 onde seriam inseridos nós com valores Ema, Gui e Zia, verificando que isso não altera a altura da árvore e definição de árvore AVL. Note que os dados Teo e Tom têm que mudar de nós.

Note-se que na fig. 2.17 a raiz com Isa tem duas subárvores, uma com raiz Eva e número mínimo de 7 nós, e a outra com raiz Rui com 4 nós, isto é, o número mínimo de nós de uma árvore AVL de altura 5 é 1 (da raiz com Isa) mais a soma dos nós de uma árvore AVL de altura 4 mais os nós de uma de altura 3. Pode-se provar que isso vale para qualquer árvore AVL, isto é, o número mínimo de nós de uma árvore de altura h é a soma dos números mínimos de nós de uma árvore de altura $h - 1$ mais os de uma de altura $h - 2$ mais 1 (a raiz). Portanto, o crescimento do número mínimo de nós de uma árvore AVL segue a sequência de Fibonacci (cf. a seção 2.3), subtraindo-se 1 de cada termo. Na seção 7.1 será visto que essa sequência aproxima-se de uma progressão geométrica e, na seção 12.5, será visto por que nesse caso das árvores AVL isso é importante: conforme a árvore vai crescendo o número total de nós tende a ser uma exponencial do número de níveis, como era o caso da árvore binária completa. Isso significa que para um número linear de comparações (o percurso nos níveis da árvore) tudo se passa como se se tivesse varrido um número exponencial de valores, mesmo tendo-se uma árvore incompleta.

2.5 Referências

- Setzer, V.W. Dado, Informação, Conhecimento e Competência.
  Acesso em 23/11/18: www.ime.usp.br/~vwsetzer/dado-info.html

- Arquimedes. Acesso em 6/5/18: https://pt.wikipedia.org/wiki/Arquimedes
- Árvores AVL. Acesso em 21/6/18:
  https://medium.com/basecs/finding-fibonacci-in-golden-trees-1c8967b1f47a
- Árvores binárias. Idem: https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_tree

- Espiral de Arquimedes. Acesso em 6/5/18: https://pt.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Arquimedes
- Fibonacci. Acesso em 7/1/19: https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci
- Fig. 2.1. iStockphoto.
- Fig. 2.13. Acesso em 21/6/18: https://en.wikipedia.org/wiki/1/2_%2B_1/4_%2B_1/8_%2B_1/16_%2B_%E2%8B%AF
- Gauss. Acesso em 30/5/18: https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss
- Parafuso de Arquimedes. Acesso em 23/10/19: https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedes%27_screw
- Primórdios da imprensa. Acesso em 20/5/18: www.prepressure.com/printing/history/1400-1499
- Progressão aritmética. Acesso em 30/5/18: https://pt.wikipedia.org/wiki/Progress%C3%A3o_aritm%C3%A9tica
- Progressão geométrica. Idem: https://pt.wikipedia.org/wiki/Progress%C3%A3o_geom%C3%A9trica
- Xadrez: as lendas da origem. Acesso em 17/2/20: https://sites.google.com/site/caroluschess/ancient-history/origin-of-chess-legends

2.6 Resolução dos exercícios

Exr. 2.4.5:2 Como $p_{i+1} = qp_i$, a igualdade [1] de 2.4.5 fica

$$S = p_1 + qp_1 + q^2p_1 + \ldots + q^{n-1}p_1$$

Multiplicando os dois membros por q, obtém-se

$$qS = qp_1 + q^2p_1 + q^3p_1 + \ldots + q^{n-1}p_1 + q^np_1$$

Subtraindo de S logo acima,

$$S - qS = p_1 - q^np_1$$

que é a [3] de 2.4.5, continuando-se como nessa última seção.

Exr. 2.4.7:1 Sim, nos nós que não têm ‘irmão’, por exemplo, os dos nós com Gil, Teo, Eli etc. (Complete essa lista.)

Exr. 2.4.7:2 Serão introduzidas 16 novas folhas.

O principal obstáculo com que se defronta um professor de matemática em sua labuta, em qualquer nível, é uma visão preconceituosa a respeito da disciplina, considerada uma matéria difícil, quase sempre excessivamente técnica, que exige uma vocação especial ou uma competência inata para a compreensão de seus objetos, de suas ideias. Na verdade, como conteúdo da escola básica, fundamental para a formação da cidadania, a matemática pode e deve ser bem compreendida por todos. Para que isto se dê, não se pode, no entanto, prescindir de um professor inspirado e inspirador, que conheça profundamente os conteúdos a serem ensinados e saiba escolher centros de interesses adequados para, por meio deles, apresentar de maneira articulada as ideias fundamentais da disciplina. Tais requisitos são plenamente contemplados neste livro exemplar. O entusiasmo do autor, um professor de mão cheia, com vasta experiência no ensino de ciência da computação e matemática, é patente da primeira à última página do livro. Não por acaso, a competência do docente o fez escolher um centro de interesse especialmente fecundo: a zona de confluência entre a matemática e a estética propiciada pela razão áurea e todas as estripulias de Fibonacci, na exploração das interessantes propriedades do número φ. Finalmente, de posse de tão rico tema, o autor soube articular elementos e ideias fundamentais interessantes, não se deixando desviar por curiosidades menos relevantes. O resultado, ao final da obra, é um texto extremamente rico, que certamente vai encantar os leitores de todos os níveis de ensino, contaminando-os com o entusiasmo, a competência e o discernimento do autor. Eis aqui um livro imperdível.

Nílson José Machado
Professor Titular da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo
www.nilsonjosemachado.net

www.blucher.com.br
ISBN 978-65-5506-022-5
9 786555 060225

Blucher