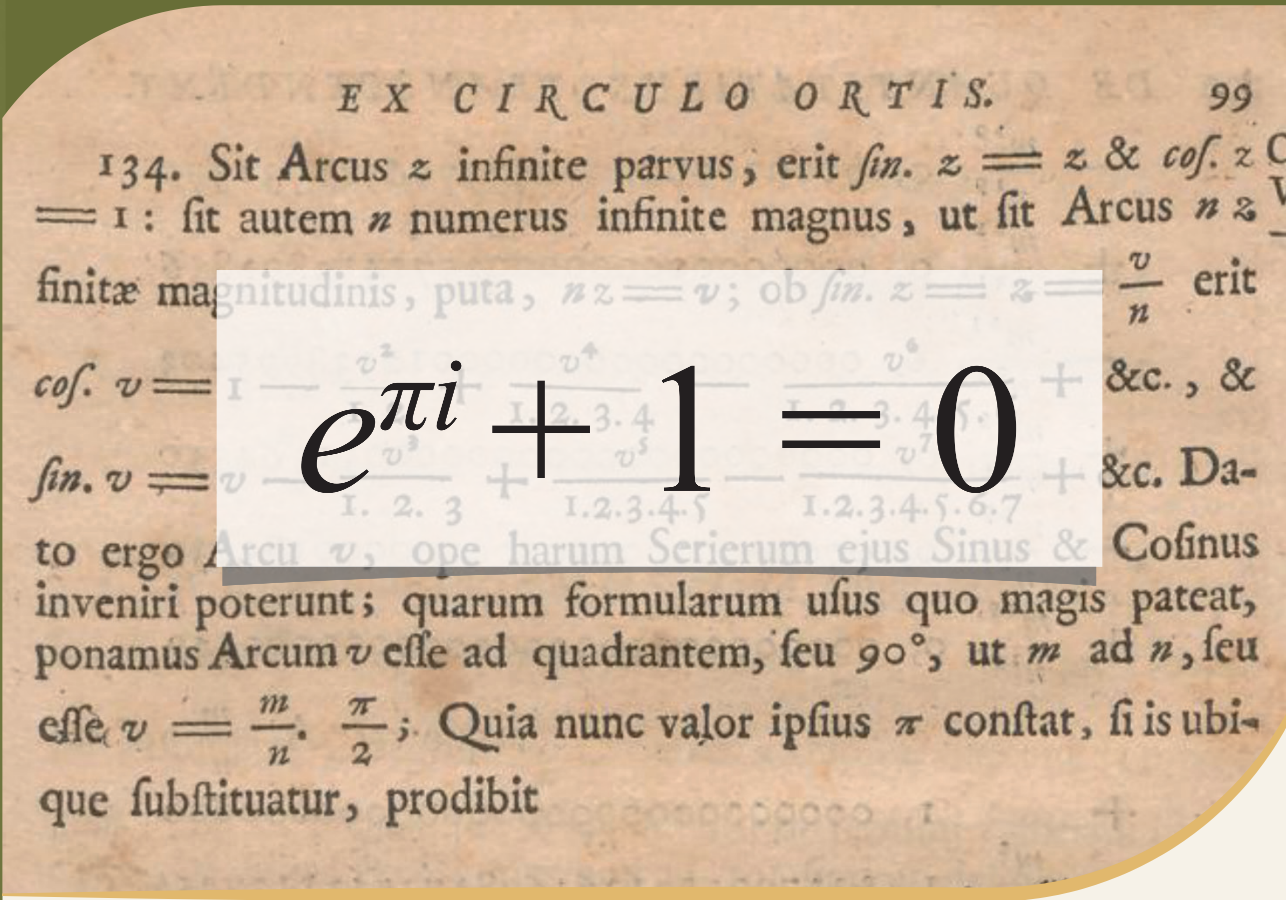
ALEXANDRE MOLTER
CÍCERO NACHTIGALL
MAURÍCIO ZAHN

# TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS

Com aplicações




$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Blucher

# Trigonometria e números complexos

Com aplicações

Alexandre Molter

Cícero Nachtigall

Maurício Zahn

*Trigonometria e números complexos: com aplicações*

Editora Edgard Blücher Ltda.

Imagem da capa: ao fundo, excerto da p. 99 da obra *Introductio in analysin infinitorum*, de Leonhard Euler, 1748.

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
**contato@blucher.com.br**
**www.blucher.com.br**

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009.



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

Molter, Alexandre
Trigonometria e números complexos : com aplicações / Alexandre Molter ; Cícero Nachtigall ; Maurício Zahn. -- São Paulo : Blucher, 2020.
312 p. : il.

Bibliografia
ISBN 978-65-5506-010-2 (impresso)
ISBN 978-65-5506-011-9 (eletrônico)

1. Álgebra. 2. Matemática I. Título. II. Nachtigall, Cícero. III. Zahn, Maurício.

20-0376 CDD 512

Índices para catálogo sistemático:
1.Álgebra

# Conteúdo

# Capítulo 1

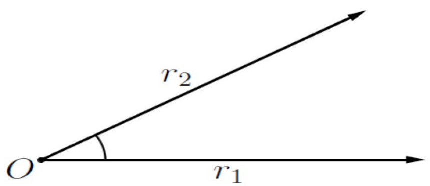
# Trigonometria básica

## 1.1 Arcos e ângulos

Para iniciarmos os estudos em Trigonometria, apresentamos nesta seção algumas definições preliminares.

**Definição 1.1**

**(a)** Define-se *ângulo* como sendo a reunião de duas semirretas de mesma origem.
**(b)** As semirretas ($r_1$ e $r_2$) e a origem ($O$) são chamadas, respectivamente, de *lados* e *vértice* do ângulo.



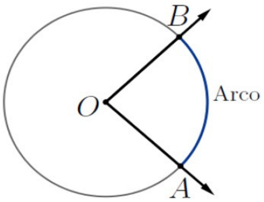
### Definição 1.2

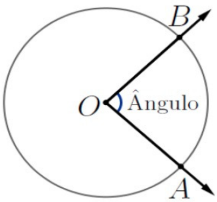
**(a)** Dada uma circunferência de centro $O$, quaisquer dois pontos $A$ e $B$ sobre esta circunferência determinam um *arco* e um *ângulo central*, ambos considerados de $A$ para $B$, no sentido anti-horário.

**(b)** Fixada uma circunferência, todo arco está associado a um ângulo e vice-versa.

**(c)** Quando os pontos $A$ e $B$ coincidem, tem-se um *arco nulo*, ou *arco de uma volta*; e, quando os pontos $A$ e $B$ são diametralmente opostos, tem-se um *arco de meia volta*.

**(d)** O *comprimento do arco* é a medida linear do arco considerado.




O comprimento de um arco depende, portanto, do raio da circunferência que o contém e as unidades utilizadas são as usuais, tais como: centímetro, metro etc.

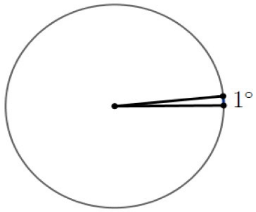
### Definição 1.3

A medida de um arco de circunferência é a medida do ângulo central associado a este arco, independentemente do raio da circunferência.

As unidades mais utilizadas para medir ângulos são o *grau* e o *radiano*.

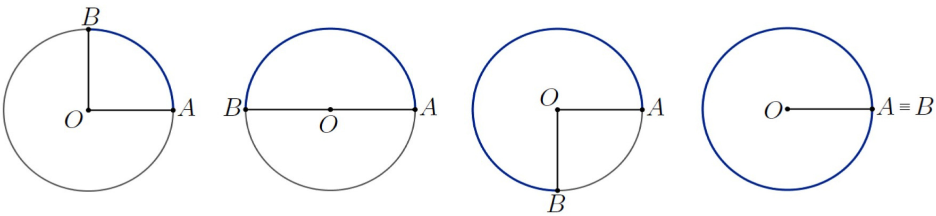
### Definição 1.4

Um *grau* (símbolo: $1°$) corresponde à medida de um arco cujo comprimento é igual a $\frac{1}{360}$ do comprimento da circunferência que está sendo considerada.




Em particular, o arco de uma volta mede $360°$, o arco de meia volta mede $180°$, e assim por diante.

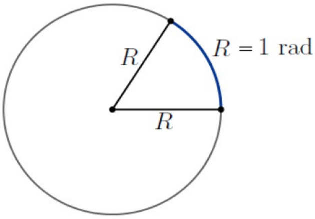
**Observação:** note que esta unidade de medida independe do comprimento do raio da circunferência.




90° 180° 270° 360°

**Definição 1.5**

Um *radiano* (símbolo: 1 rad) corresponde à medida de um arco que tem o mesmo comprimento do raio da circunferência que está sendo considerada.

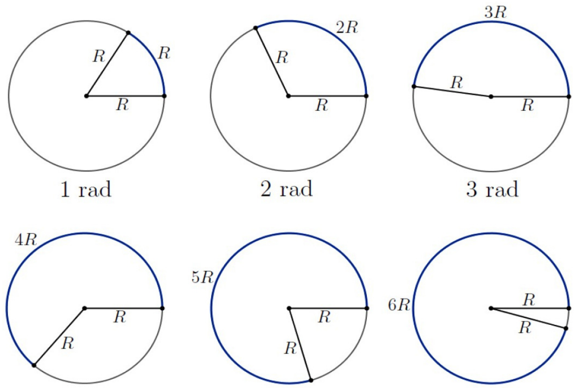



**Observação:** note que esta unidade de medida também independe do comprimento da circunferência considerada.

Como a fórmula para o comprimento $C$ de uma circunferência de raio $R$ é dada por

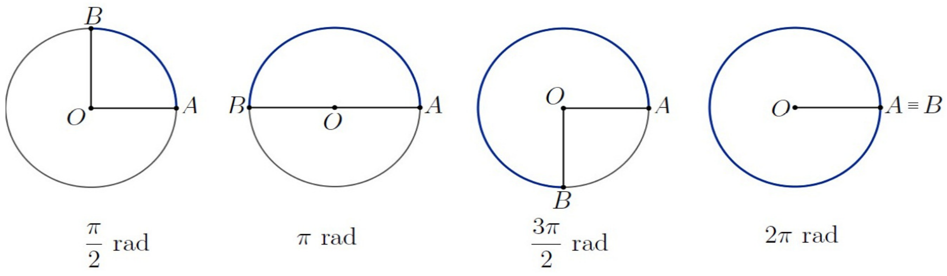
$$C = 2\pi R,$$

e como o valor de $2\pi$ é aproximadamente $6,28$, tem-se que um arco de uma volta possui aproximadamente $6,28$ radianos.




1 rad 2 rad 3 rad 4 rad 5 rad 6 rad

Em particular, o arco de uma volta completa equivale a $2\pi$ rad, o arco de meia volta equivale a $\pi$ rad, e assim por diante.



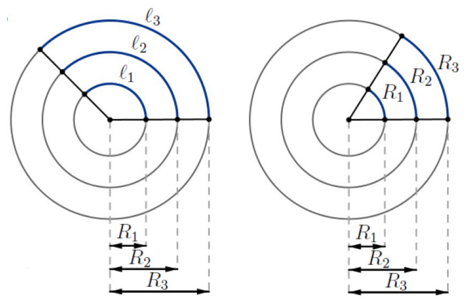

### Razão

Considere as circunferências de raios $R_1$, $R_2$ e $R_3$ da figura a seguir e os arcos $\ell_1$, $\ell_2$ e $\ell_3$.

Lembre que a razão entre o arco e o raio da respectiva circunferência permanece fixa, ou seja, existe uma constante $\alpha$ tal que

$$\alpha = \frac{\ell_1}{R_1} = \frac{\ell_2}{R_2} = \frac{\ell_3}{R_3}.$$

Note que o número $\alpha$ independe da medida do raio da circunferência considerada.




A medida de um ângulo em radianos é, portanto, a razão entre o arco que este ângulo determina e o raio da referida circunferência. Ou seja, dada uma circunferência de raio $R$, tomando um arco de comprimento $\ell$ sobre esta circunferência, o ângulo central $\alpha$, expresso em radianos, será dado por

$$\alpha = \frac{\ell}{R}.$$

**Exemplo 1.6** Um ângulo central de uma circunferência de raio 10 cm intercepta um arco de $6\pi$ cm. Determine o valor do ângulo central $\alpha$ que o referido arco forma com a circunferência. Em seguida, obtenha a área desse setor determinado por $\alpha$.

**Solução.** Como $R = 10cm$ e $\ell = 6\pi cm$, segue que o ângulo central $\alpha$, em radianos, será dado por

$$\alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{6\pi cm}{10\,cm} = \frac{3\pi}{5}\text{rad}.$$

Por fim, para determinar a área do setor circular de ângulo central $\alpha = \frac{3\pi}{5}$ rad, basta fazer uma regra de três simples como segue:

$$2\pi\text{rad} \dashrightarrow \pi R^2$$

$$\frac{3\pi}{5}\text{rad} \dashrightarrow A$$

Assim, $2\pi A = \frac{3\pi}{5} \cdot \pi R^2$, donde segue que, lembrando que $R = 10cm$,

$$A = 30\pi\, cm^2.$$

De forma geral, a relação entre graus e radianos é:

$$2\pi \text{ rad} \longleftrightarrow 360^\circ, \quad \text{ou, simplesmente,} \quad \pi \text{ rad} \longleftrightarrow 180^\circ,$$

onde o símbolo $\longleftrightarrow$ indica uma correspondência entre ambos.

**Exemplo 1.7** Converta os seguintes arcos de graus para radianos:

**(a)** $30^\circ$ **(b)** $45^\circ$ **(c)** $60^\circ$ **(d)** $135^\circ$

**Solução.** Utilizando a relação $\pi$ rad $\longleftrightarrow 180^\circ$ e uma regra de três simples, obtém-se:

**(a)** $\frac{\pi}{6}$ rad **(b)** $\frac{\pi}{4}$ rad **(c)** $\frac{\pi}{3}$ rad **(d)** $\frac{3\pi}{4}$ rad

**Exemplo 1.8** Converta os seguintes arcos de radianos para graus:

**(a)** $\frac{2\pi}{3}$ rad **(b)** $\frac{5\pi}{6}$ rad **(c)** $\frac{3\pi}{2}$ rad **(d)** $\frac{11\pi}{6}$ rad

**Solução.** Utilizando a relação $\pi$ rad $\longleftrightarrow 180°$ e uma regra de três simples, obtém-se:

**(a)** $120°$ **(b)** $150°$ **(c)** $270°$ **(d)** $330°$

# Exercícios

1. Converta para radianos.

   (a) $184°$ (b) $59°30''$

2. Um ângulo central de uma circunferência de raio $30cm$ intercepta um arco de $6cm$. Expresse o ângulo central $\alpha$ em radianos e em graus.

3. Um setor de um círculo possui um ângulo central de $50°$ e uma área de $605cm^2$. Encontre o valor aproximado do raio do círculo.

4. Calcule a área do setor circular determinado por um ângulo central de $\frac{\pi}{3}$ rad em um círculo de diâmetro $32cm$.

5. Encontre a área do setor circular determinado por um ângulo central de $100°$ em um círculo de raio $12cm$.

6. Um ângulo central de uma circunferência de raio $36cm$ intercepta um arco de $3\pi cm$.

   (a) Calcule o valor do ângulo central $\alpha$ que o arco acima determina na circunferência, em radianos e em graus.

   (b) Calcule a área do setor circular determinado por $\alpha$.

### Respostas

1. (a) $\frac{46\pi}{45}$ rad (b) $\frac{7081\pi}{216000}$ rad 2. $\alpha = \frac{1}{5}$ rad ou $\alpha = \frac{36°}{\pi}$

3. $\frac{66}{\sqrt{\pi}} cm$ 4. $A = \frac{128\pi}{3}\ cm^2$ 5. $8\pi cm^2$

6. (a) $\alpha = \frac{\pi}{12}$ rad ou $\alpha = 15°$ (b) $A = 108\pi cm^2$

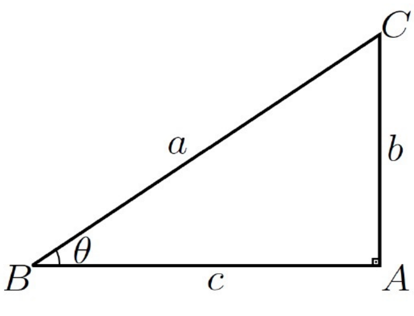
**Definição 1.9**

Com relação à sua medida, um ângulo pode ser classificado como:

- *Nulo:* um ângulo nulo mede 0°;
- *Agudo:* ângulo cuja medida é maior do que 0° e menor do que 90°;
- *Reto:* um ângulo reto é um ângulo cuja medida é exatamente 90°, assim os seus lados estão localizados em retas perpendiculares;
- *Obtuso:* é um ângulo cuja medida está entre 90° e 180°;
- *Raso:* ângulo que mede exatamente 180°, os seus lados são semirretas opostas.

## 1.2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Considere o triângulo retângulo dado pela figura a seguir.



### Definição 1.10

Definem-se, neste triângulo, os elementos:

- $A$, $B$ e $C$ são os *vértices* do triângulo;
- $\theta$ é o *ângulo relativo* ao vértice $B$;
- $a$ é a *hipotenusa* do triângulo;
- $b$ é o *cateto oposto* relativo ao ângulo $\theta$;
- $c$ é o *cateto adjacente* relativo ao ângulo $\theta$.

Sejam $r_1$, $r_2$ e $r_3$ as razões (divisões) entre os lados do triângulo anterior, então:

$$r_1 = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$r_2 = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{BA}{BC} = \frac{c}{a}$$

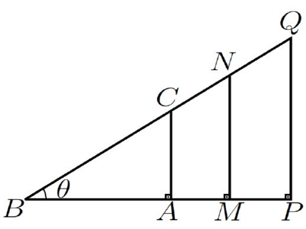
$$r_3 = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente}} = \frac{AC}{BA} = \frac{b}{c}$$

Da geometria sabe-se que triângulos semelhantes possuem lados correspondentes proporcionais e, por isso, estas razões permanecem fixas quando se considera qualquer triângulo retângulo com o ângulo $\theta$ em comum, ou seja,

$$r_1 = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{BC} = \frac{MN}{BN} = \frac{PQ}{BQ}$$

$$r_2 = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{BA}{BC} = \frac{BM}{BN} = \frac{BP}{BQ}$$

$$r_3 = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente}} = \frac{AC}{BA} = \frac{MN}{BM} = \frac{PQ}{BP}$$



### Definição 1.11

A razão $r_1$ é chamada de *seno do ângulo* $\theta$, ou simplesmente *seno de* $\theta$, e será denotada por $\operatorname{sen}\theta$, ou seja,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}.$$

### Definição 1.12

A razão $r_2$ é chamada de *cosseno do ângulo* $\theta$, ou simplesmente *cosseno de* $\theta$, e será denotada por $\cos\theta$, ou seja,

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}.$$

### Definição 1.13

A razão $r_3$ é chamada de *tangente do ângulo* $\theta$, ou simplesmente *tangente de* $\theta$, e será denotada por $\tan\theta$, ou seja,

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente}}.$$

As razões inversas de $r_1$, $r_2$ e $r_3$ são dadas, respectivamente, por:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto a } \theta}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente a } \theta}$$

e

$$\frac{1}{r_3} = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{cateto oposto a } \theta},$$

e são definidas como segue.

### Definição 1.14

A razão $\frac{1}{r_1}$ é chamada de *cossecante do ângulo* $\theta$ ou simplesmente *cossecante de* $\theta$, e será denotada por $\csc\theta$, ou seja,

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto a } \theta}.$$

### Definição 1.15

A razão $\frac{1}{r_2}$ é chamada de *secante do ângulo* $\theta$ ou simplesmente *secante de* $\theta$, e será denotada por $\sec\theta$, ou seja,

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente a } \theta}.$$

### Definição 1.16

A razão $\frac{1}{r_3}$ é chamada de *cotangente do ângulo* $\theta$ ou simplesmente *cotangente de* $\theta$, e será denotada por $\cot\theta$, ou seja,

$$\cot\theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{cateto oposto a } \theta}.$$

As razões seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente acima são chamadas de *razões trigonométricas*. Portanto, as razões trigonométricas são razões entre os lados de um triângulo retângulo que se mantêm fixas para o mesmo ângulo, independentemente do tamanho dos lados do triângulo.

É importante observar que as razões trigonométricas são números reais.

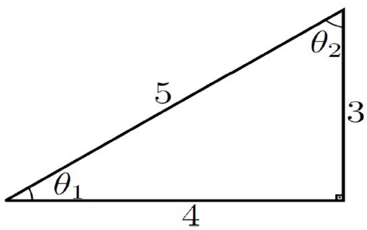
**Exemplo 1.17** Considerando o triângulo retângulo abaixo, determine:

**(a)** $\operatorname{sen}\theta_1$ **(e)** $\sec\theta_1$ **(i)** $\tan\theta_2$

**(b)** $\cos\theta_1$ **(f)** $\cot\theta_1$ **(j)** $\csc\theta_2$

**(c)** $\tan\theta_1$ **(g)** $\operatorname{sen}\theta_2$ **(k)** $\sec\theta_2$

**(d)** $\csc\theta_1$ **(h)** $\cos\theta_2$ **(l)** $\cot\theta_2$




**Solução.**

**(a)** $\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{3}{5}$ **(d)** $\csc\theta_1 = \frac{5}{3}$ **(g)** $\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{4}{5}$ **(j)** $\csc\theta_2 = \frac{5}{4}$

**(b)** $\cos\theta_1 = \frac{4}{5}$ **(e)** $\sec\theta_1 = \frac{5}{4}$ **(h)** $\cos\theta_2 = \frac{3}{5}$ **(k)** $\sec\theta_2 = \frac{5}{3}$

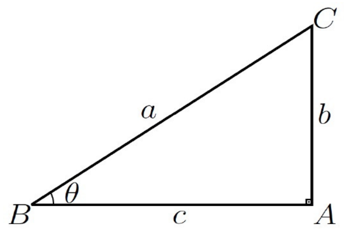
**(c)** $\tan\theta_1 = \dfrac{3}{4}$ **(f)** $\cot\theta_1 = \dfrac{4}{3}$ **(i)** $\tan\theta_2 = \dfrac{4}{3}$ **(l)** $\cot\theta_2 = \dfrac{3}{4}$

### Proposição 1.18

*Valem as seguintes relações trigonométricas:*

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

**Demonstração.** Considerando o triângulo retângulo abaixo, tem-se




$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{a} \qquad \text{e} \qquad \cos\theta = \frac{c}{a},$$

e, portanto,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \tan\theta.$$

Como a cotangente é a razão trigonométrica inversa da tangente, temos:

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

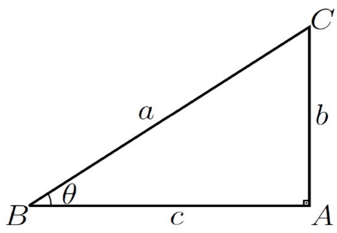
As duas últimas relações apresentadas na proposição seguem diretamente do fato de que secante e cossecante são as razões trigonométricas inversas de cosseno e seno, respectivamente. □

### Proposição 1.19

*Valem as seguintes relações trigonométricas:*

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \qquad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \qquad \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta.$$

**Demonstração.** Considerando o triângulo retângulo abaixo, tem-se




$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{a} \qquad \text{e} \qquad \cos\theta = \frac{c}{a},$$

ou seja,

$$c = a\operatorname{sen}\theta \qquad \text{e} \qquad b = a\cos\theta.$$

Segue agora, do Teorema de Pitágoras, que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow a^2 = a^2\operatorname{sen}^2\theta + a^2\cos^2\theta \Longrightarrow a^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = a^2,$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1. \tag{1.1}$$

Dividindo (1.1) por $\cos^2\theta$, tem-se:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Longrightarrow \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta.$$

Dividindo (1.1) por $\operatorname{sen}^2\theta$, tem-se:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \Longrightarrow 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta.$$

□

**Proposição 1.20**

*Valem as seguintes relações trigonométricas:*

$$\cos^2\theta = \frac{1}{\tan^2\theta + 1}, \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta + 1}.$$

**Demonstração.** Utilizando as Proposições 1.18 e 1.19, temos que:

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \Longrightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta \Longrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta}$$

Utilizando a relação acima, temos:

$$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta \Longrightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = 1 + \frac{1}{\tan^2\theta} \Longrightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1 + \tan^2\theta}{\tan^2\theta}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}.$$

□

**Observação:** as fórmulas destas duas Proposições foram provadas para $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Na seção 1.7 podemos estendê-las para arcos maiores.

# Exercícios

1. Ache os valores de $x$ que verificam simultaneamente $\tan a = \dfrac{x+1}{2}$ e $\sec a = \sqrt{x+2}$.

2. Calcule o valor de $\cos x$, sabendo que $\cot x = \dfrac{2\sqrt{m}}{m-1}$, com $m > 1$.

3. Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor da expressão

$$y = \frac{1}{\csc x + \cot x} + \frac{1}{\csc x - \cot x}.$$

4. Calcule o valor de $m$ para que $\operatorname{sen} x = 2m + 1$ e $\cos x = 4m + 1$.

## Respostas

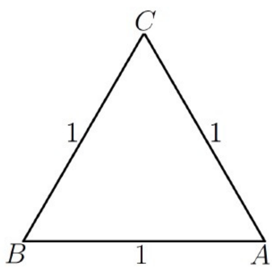
1. $x = -1$ ou $x = 3$. 2. $\cos x = \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$ 3. $y = 6$ 4. $m = -\frac{1}{10}$ ou $m = -\frac{1}{2}$

## 1.3 Razões trigonométricas especiais

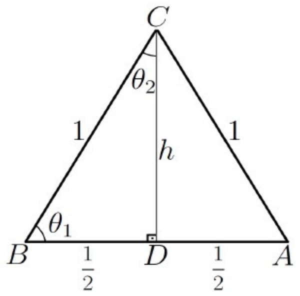
Nesta seção serão obtidas as razões trigonométricas de 30°, 45° e 60°.

**Razões trigonométricas de 30° e 60°**

Considere o triângulo equilátero $ABC$ de lado $\ell = 1$ representado na figura abaixo.



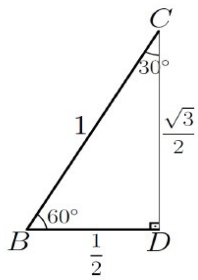
Sejam $h$ a altura relativa ao vértice $C$ e $\theta_1$, $\theta_2$ os ângulos internos agudos do triângulo retângulo $BCD$.




Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e, em um triângulo equilátero, todos os ângulos internos são congruentes entre si, obtém-se:

$$\theta_1 = 60^\circ \text{ e } \theta_2 = 30^\circ.$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo $BCD$, obtém-se:




$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2 \Longrightarrow h^2 = \frac{3}{4} \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Consequentemente,

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad \cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad\qquad \tan 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Note que

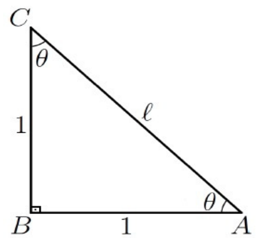
$$\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

assim como

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

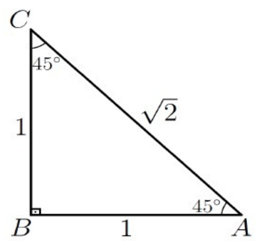
**Razões trigonométricas de** $45^\circ$

Considere o triângulo retângulo isósceles $ABC$, de catetos iguais a 1, hipotenusa $\ell$ e ângulo agudo interno igual a $\theta$, conforme a figura abaixo.




Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180^\circ$, obtém-se

$$\theta = 45^\circ.$$




Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo $ABC$, obtém-se

$$\ell^2 = 1^2 + 1^2 \Longrightarrow \ell^2 = 2 \Longrightarrow \ell = \sqrt{2}.$$

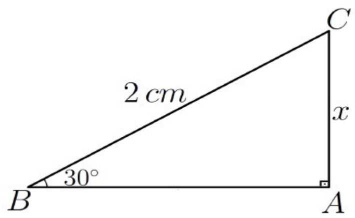
Consequentemente,

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

A tabela ao lado resume os resultados obtidos acima.

| | $30°$ | $45°$ | $60°$ |
|---|---|---|---|
| sen | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tan | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |

**Exemplo 1.21** Determine o valor de $x$ na figura abaixo.




**Solução.** Pela figura acima, tem-se:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{x}{2}. \tag{1.2}$$

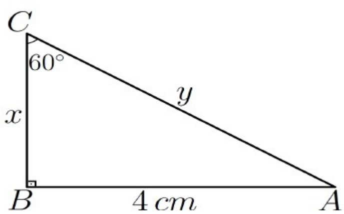
Da tabela anterior tem-se:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}. \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3) segue que:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = 1.$$

**Exemplo 1.22** Determine os valores de $x$ e $y$ na figura abaixo.



**Solução.** Da figura acima, tem-se:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{4}{y} \quad \text{e} \quad \tan 60^\circ = \frac{4}{x}. \tag{1.4}$$

Novamente, da tabela anterior tem-se:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}. \tag{1.5}$$

De (1.4) e (1.5) segue que:

$$\frac{4}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \sqrt{3}y = 8 \Longrightarrow y = \frac{8}{\sqrt{3}} \Longrightarrow y = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

$$\frac{4}{x} = \sqrt{3} \Longrightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}} \Longrightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

**Exemplo 1.23** Determine os lados de um triângulo retângulo e isósceles com hipotenusa de 2 cm.

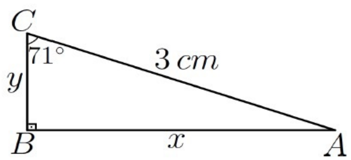
**Solução.** Como os catetos têm o mesmo tamanho $\ell$, usando a tabela acima temos que $\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\ell}{2}$, donde segue que $\ell = \sqrt{2}$ cm.

A título de ilustração, a tabela a seguir lista os valores aproximados das razões seno, cosseno e tangente dos ângulos de 1° a 89°, variando de grau em grau, com um arredondamento de quatro dígitos após a vírgula.

| ângulo | sen | cos | tan | ângulo | sen | cos | tan |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° | 0,0175 | 0,9998 | 0,0175 | 46° | 0,7193 | 0,6947 | 1,0355 |
| 2° | 0,0349 | 0,9994 | 0,0349 | 47° | 0,7314 | 0,6820 | 1,0724 |
| 3° | 0,0523 | 0,9986 | 0,0524 | 48° | 0,7431 | 0,6691 | 1,1106 |
| 4° | 0,0698 | 0,9976 | 0,0699 | 49° | 0,7547 | 0,6561 | 1,1504 |
| 5° | 0,0872 | 0,9962 | 0,0875 | 50° | 0,7660 | 0,6428 | 1,1918 |
| 6° | 0,1045 | 0,9945 | 0,1051 | 51° | 0,7771 | 0,6293 | 1,2349 |
| 7° | 0,1219 | 0,9925 | 0,1228 | 52° | 0,7880 | 0,6157 | 1,2799 |
| 8° | 0,1392 | 0,9903 | 0,1405 | 53° | 0,7986 | 0,6018 | 1,3270 |
| 9° | 0,1564 | 0,9877 | 0,1584 | 54° | 0,8090 | 0,5878 | 1,3764 |
| 10° | 0,1736 | 0,9848 | 0,1763 | 55° | 0,8192 | 0,5736 | 1,4281 |
| 11° | 0,1908 | 0,9816 | 0,1944 | 56° | 0,8290 | 0,5592 | 1,4826 |
| 12° | 0,2079 | 0,9781 | 0,2126 | 75° | 0,8387 | 0,5446 | 1,5399 |
| 13° | 0,2250 | 0,9744 | 0,2309 | 58° | 0,8480 | 0,5299 | 1,6003 |
| 14° | 0,2419 | 0,9703 | 0,2493 | 59° | 0,8572 | 0,5150 | 1,6643 |
| 15° | 0,2588 | 0,9659 | 0,2679 | 60° | 0,8660 | 0,5000 | 1,7321 |
| 16° | 0,2756 | 0,9613 | 0,2867 | 61° | 0,8746 | 0,4848 | 1,8040 |
| 17° | 0,2924 | 0,9563 | 0,3057 | 62° | 0,8829 | 0,4695 | 1,8807 |
| 18° | 0,3090 | 0,9511 | 0,3249 | 63° | 0,8910 | 0,4540 | 1,9626 |
| 19° | 0,3256 | 0,9455 | 0,3443 | 64° | 0,8988 | 0,4384 | 2,0503 |
| 20° | 0,3420 | 0,9397 | 0,3640 | 65° | 0,9063 | 0,4226 | 2,1445 |
| 21° | 0,3584 | 0,9336 | 0,3839 | 66° | 0,9135 | 0,4067 | 2,2460 |
| 22° | 0,3746 | 0,9272 | 0,4040 | 67° | 0,9205 | 0,3907 | 2,3559 |
| 23° | 0,3907 | 0,9205 | 0,4245 | 68° | 0,9272 | 0,3746 | 2,4751 |
| 24° | 0,4067 | 0,9135 | 0,4452 | 69° | 0,9336 | 0,3584 | 2,6051 |
| 25° | 0,4226 | 0,9063 | 0,4663 | 70° | 0,9397 | 0,3420 | 2,7475 |
| 26° | 0,4384 | 0,8988 | 0,4877 | 71° | 0,9455 | 0,3256 | 2,9042 |
| 27° | 0,4540 | 0,8910 | 0,5095 | 72° | 0,9511 | 0,3090 | 3,0777 |
| 28° | 0,4695 | 0,8829 | 0,5317 | 73° | 0,9563 | 0,2924 | 3,2709 |
| 29° | 0,4848 | 0,8746 | 0,5543 | 74° | 0,9613 | 0,2756 | 3,4874 |
| 30° | 0,5000 | 0,8660 | 0,5774 | 75° | 0,9659 | 0,2588 | 3,7321 |

| ângulo | sen | cos | tan | ângulo | sen | cos | tan |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $31°$ | $0,5150$ | $0,8572$ | $0,6009$ | $76°$ | $0,9703$ | $0,2419$ | $4,0108$ |
| $32°$ | $0,5299$ | $0,8480$ | $0,6249$ | $77°$ | $0,9744$ | $0,2250$ | $4,3315$ |
| $33°$ | $0,5446$ | $0,8387$ | $0,6494$ | $78°$ | $0,9781$ | $0,2079$ | $4,7046$ |
| $34°$ | $0,5592$ | $0,8290$ | $0,6745$ | $79°$ | $0,9816$ | $0,1908$ | $5,1446$ |
| $35°$ | $0,5736$ | $0,8192$ | $0,7002$ | $80°$ | $0,9848$ | $0,1736$ | $5,6713$ |
| $36°$ | $0,5878$ | $0,8090$ | $0,7265$ | $81°$ | $0,9877$ | $0,1564$ | $6,3138$ |
| $37°$ | $0,6018$ | $0,7986$ | $0,7536$ | $82°$ | $0,9903$ | $0,1392$ | $7,1154$ |
| $38°$ | $0,6157$ | $0,7880$ | $0,7813$ | $83°$ | $0,9925$ | $0,1219$ | $8,1443$ |
| $39°$ | $0,6293$ | $0,7771$ | $0,8098$ | $84°$ | $0,9945$ | $0,1045$ | $9,5144$ |
| $40°$ | $0,6428$ | $0,7660$ | $0,8391$ | $85°$ | $0,9962$ | $0,0872$ | $11,4301$ |
| $41°$ | $0,6561$ | $0,7547$ | $0,8693$ | $86°$ | $0,9976$ | $0,0698$ | $14,3007$ |
| $42°$ | $0,6691$ | $0,7431$ | $0,9004$ | $87°$ | $0,9986$ | $0,0523$ | $19,0811$ |
| $43°$ | $0,6820$ | $0,7314$ | $0,9325$ | $88°$ | $0,9994$ | $0,3049$ | $28,6363$ |
| $44°$ | $0,6947$ | $0,7193$ | $0,9657$ | $89°$ | $0,9998$ | $0,0175$ | $57,2900$ |
| $45°$ | $0,7071$ | $0,7071$ | $1$ | | | | |

**Exemplo 1.24** Determine os valores de $x$ e $y$ na figura abaixo.




**Solução.** Da figura acima, tem-se:

$$\text{sen}\,71° = \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad \cos 71° = \frac{y}{3}. \tag{1.6}$$

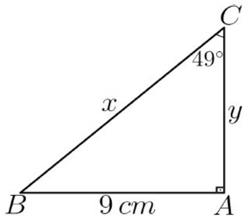
Assim, da tabela anterior tem-se que:

$$\text{sen}\,71° = 0,9455 \quad \text{e} \quad \cos 71° = 0,3256. \tag{1.7}$$

De (1.6) e (1.7) segue que:

$$\frac{x}{3} = 0,9455 \Longrightarrow x = 2,8365 \qquad \text{e} \qquad \frac{y}{3} = 0,3256 \Longrightarrow y = 0,9768.$$

**Exemplo 1.25** Determine os valores de $x$ e $y$ na figura abaixo.




**Solução.** Da figura acima, tem-se:

$$\operatorname{sen} 49^\circ = \frac{9}{x} \quad \text{e} \quad \tan 49^\circ = \frac{9}{y}. \tag{1.8}$$

Da tabela das razões trigonométricas tem-se:

$$\operatorname{sen} 49^\circ = 0,7547 \quad \text{e} \quad \tan 49^\circ = 1,1504. \tag{1.9}$$

De (1.8) e (1.9) segue que:

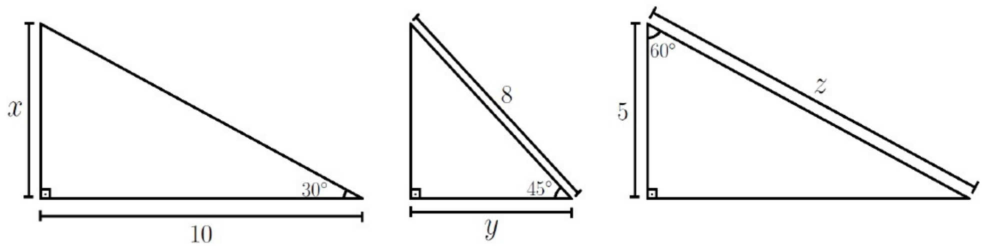
$$\frac{9}{x} = 0,7547 \Longrightarrow x = \frac{9}{0,7547} \Longrightarrow x = 11,9253$$

e

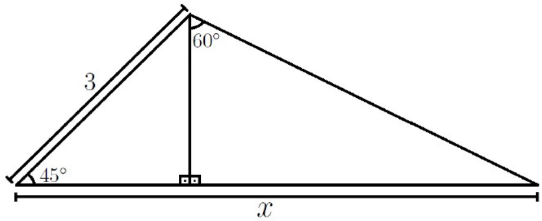
$$\frac{9}{y} = 1,1504 \Longrightarrow y = \frac{9}{1,1504} \Longrightarrow y = 7,8234.$$

# Exercícios

1. Determine o valor da soma $x + y + z$.



2. Determine o valor de $x$.

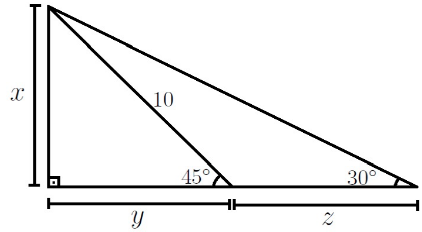



3. Utilizando a figura ao lado, determine:

   (a) a medida $x$ indicada;

   (b) a medida $y$ indicada;

   (c) a medida $z$ indicada.




4. Um observador vê o topo de um prédio, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60°. Afastando-se do edifício mais 30 metros, passa a ver o mesmo topo sob um ângulo de 45°. Qual é a altura do prédio?

## Respostas

1. $\dfrac{10\sqrt{3}+12\sqrt{2}+30}{3}$

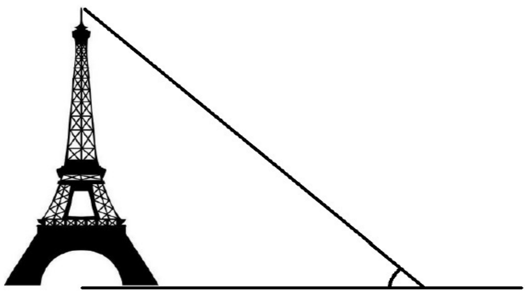
2. $\frac{3\sqrt{2}}{2}\,(1+\sqrt{3})$

3. (a) $5\sqrt{2}$ (b) $5\sqrt{2}$ (c) $5\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)$

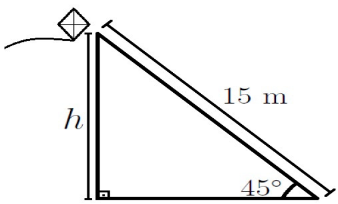
4. $15(3+\sqrt{3})m$

## 1.4 Exercícios com aplicações

1. Com o objetivo de calcular a altura de uma torre, um engenheiro mediu um ângulo de 45° do topo da torre com o solo, a uma distância de 15 metros do centro da base da torre, conforme mostra a ilustração abaixo. Verifique qual a altura da torre em relação ao solo.

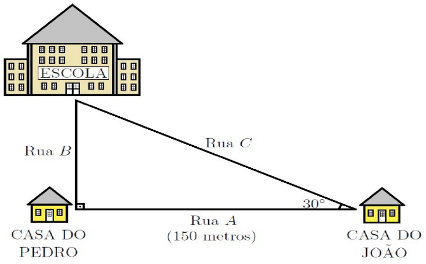


2. Uma pipa é presa a um fio esticado que forma um ângulo de 45° com o solo. Se o comprimento do fio é 15 metros, determine a altura da pipa em relação ao solo.




3. João e Pedro são dois amigos que costumam ir juntos à escola. Geralmente, João se desloca até a casa de Pedro, passando pela rua $A$, para então se deslocarem juntos até a escola utilizando a rua $B$, conforme a figura abaixo. Certo dia, Pedro não pôde ir à aula, e João decidiu se deslocar até a escola utilizando a rua $C$.

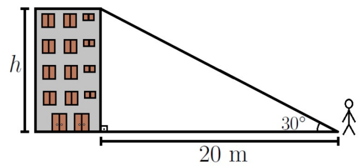
   Sabendo que as ruas $A$ e $B$ são perpendiculares, que as ruas $A$ e $C$ formam um ângulo de 30°, e que a distância entre as casas de João e Pedro é de 150 metros, determine:




(a) Qual a distância percorrida diariamente por João, passando pela casa de Pedro?

(b) No dia em que João utilizou a rua C para ir até a escola, qual foi a distância percorrida?

4. Determine a altura do prédio da figura abaixo, sabendo que a distância entre o observador e o prédio é de 20 metros e que o ângulo do solo ao topo do prédio é de 30°.

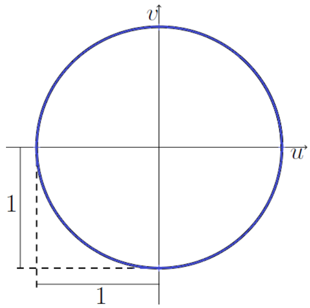



## Respostas

1. 15 m   2. $h = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ m.   3. (a) Para ir até a escola, passando pela casa de Pedro, João percorre $50(3+\sqrt{3})$ metros.  (b) $100\sqrt{3}$ metros.   4. $h = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ m

# 1.5 O ciclo trigonométrico

Com o objetivo de construir passo a passo o conceito de ciclo trigonométrico, considere um sistema cartesiano ortogonal $uv$, uma circunferência centrada na origem (o centro da circunferência é o ponto $(0, 0)$) e raio unitário (raio $r$ desta circunferência é igual a 1).



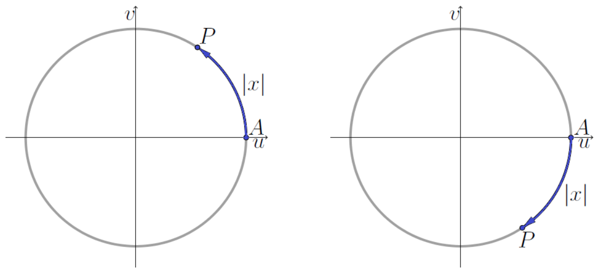

Note, em particular, que o comprimento desta circunferência é dado por

$$C = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi.$$

Considere agora o ponto $A = (1, 0)$ sobre a circunferência acima e, para cada número real $x$, vamos associar um ponto $P$ sobre a circunferência de tal modo que o comprimento do arco de origem em $A$ e extremidade em $P$ seja igual a $|x|$.

Se $x < 0$, o arco será percorrido no sentido anti-horário, que chamaremos de *sentido positivo*, e, se $x > 0$, o arco será percorrido no sentido horário, que chamaremos de *sentido negativo*.

Note que, se $x = 0$, então o ponto $P$ coincide com o ponto $A$.




$x > 0$
Sentido positivo
(anti-horário)

$x < 0$
Sentido negativo
(horário)

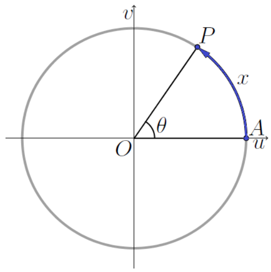
O ponto $P$ associado ao número real $x$ é denominado de *imagem* de $x$.

De posse da nomenclatura acima apresentada, introduzimos a seguinte definição.

### Definição 1.26

O *ciclo trigonométrico* é a circunferência orientada de raio unitário, centrada na origem do sistema de coordenadas cartesianas, na qual o sentido positivo é o anti-horário.

A cada arco $x$ no ciclo trigonométrico está associado um ângulo $AOP$, que denotamos na figura ao lado por $\theta$.



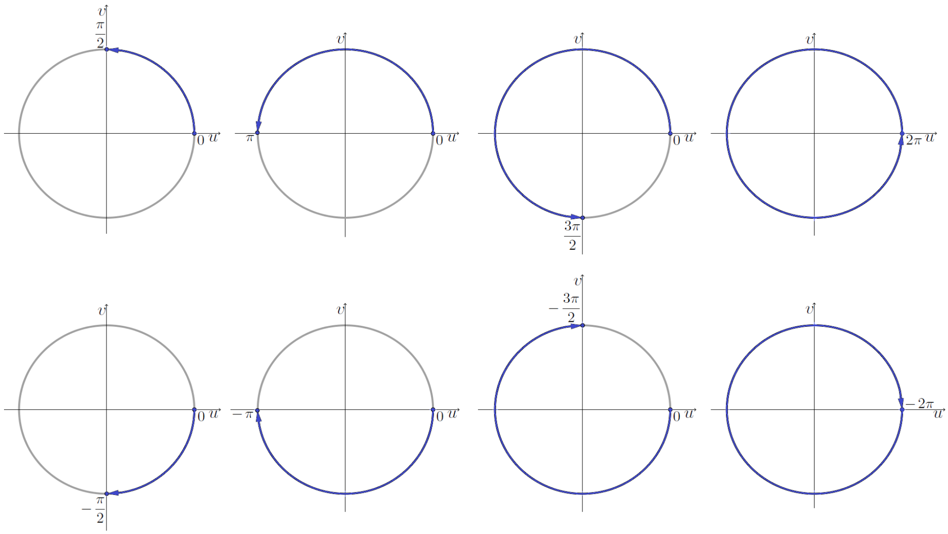

Lembre que as unidades de medida mais usadas para medir ângulos são graus e radianos, e que a relação que existe entre estas unidades de medida é:

$$\pi \text{ rad } \longleftrightarrow 180^\circ.$$

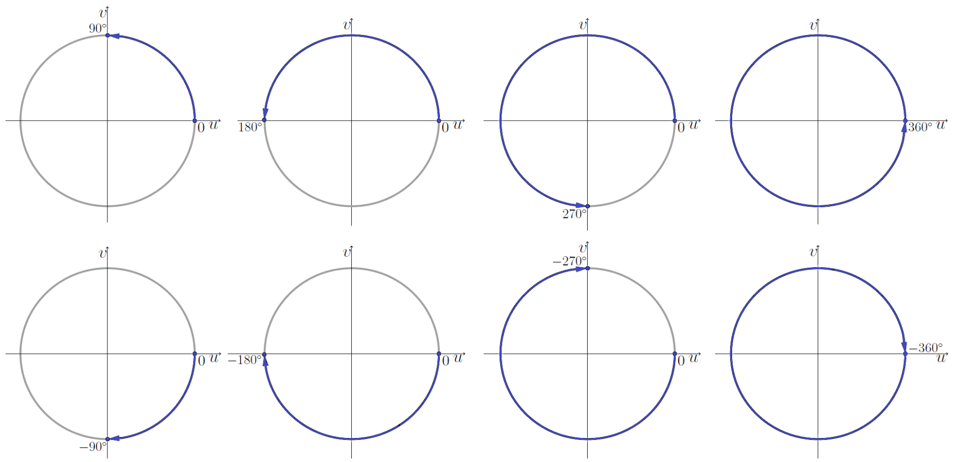
Portanto, valores positivos de $\theta$ serão considerados no sentido anti-horário, e valores negativos, no sentido horário.

A seguir, destacamos alguns arcos no ciclo trigonométrico.

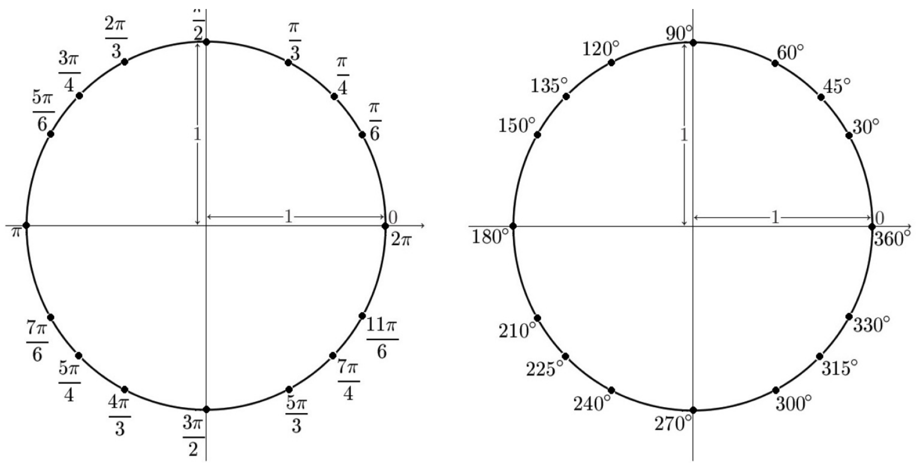
**Em radianos**



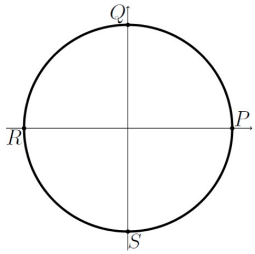
## Em graus




A figura a seguir destaca a correspondência entre os principais arcos que serão utilizados nesta seção, com as respectivas representações em radianos e graus.



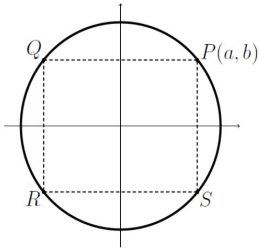
**Exemplo 1.27** Determine as coordenadas dos pontos $P$, $Q$, $R$ e $S$ no ciclo trigonométrico dado pela figura ao lado.




**Solução.** Como o ciclo trigonométrico tem raio unitário, obtém-se:

$$P\,(1,0)\,,\;\; Q\,(0,1)\,,\;\; R\,(-1,0) \;\text{ e }\; S\,(0,-1)\,.$$

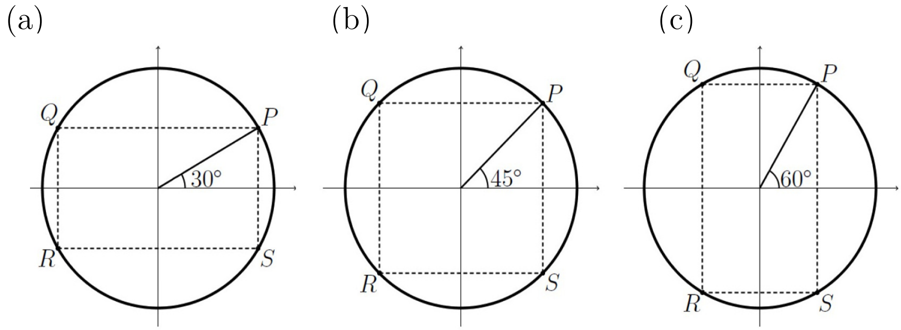
**Exemplo 1.28** Dadas as coordenadas do ponto $P(a,b)$ no ciclo trigonométrico a seguir, determine as coordenadas dos pontos $Q$, $R$ e $S$.




**Solução.** Utilizando semelhança de triângulos, obtém-se:

$$Q(-a,b),\;\; R(-a,-b) \;\text{ e }\; S(a,-b).$$

**Exemplo 1.29** Em cada caso, determine as coordenadas dos pontos $P$, $Q$, $R$ e $S$ no ciclo trigonométrico.




**Solução.** (a) Como

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

obtém-se:

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\; Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\; R\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right) \;\text{ e }\; S\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

(b) Como

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

obtém-se:

$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \; Q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \; R\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \; \text{e} \; S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

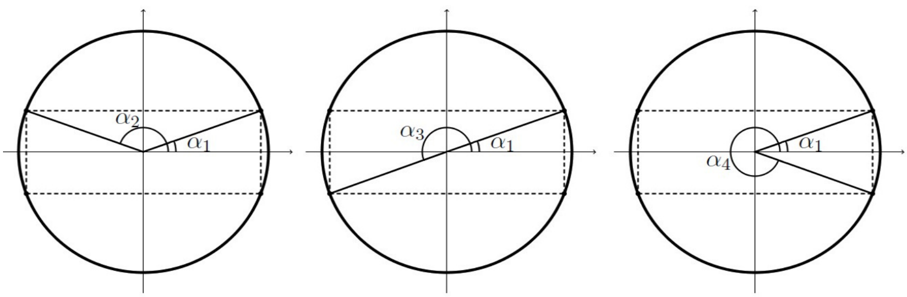
(c) Como

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

obtém-se:

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \; Q\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \; R\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \; \text{e} \; S\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

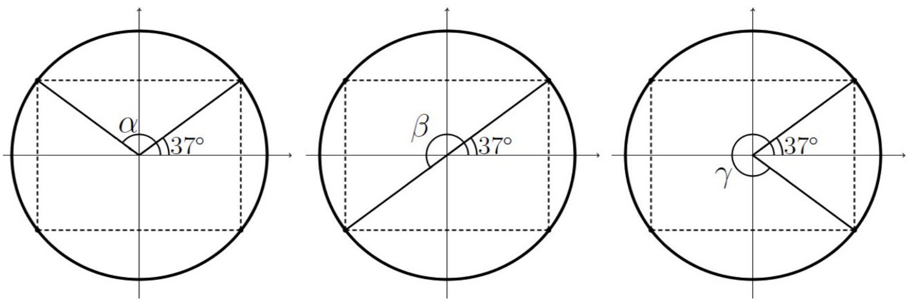
**Exemplo 1.30** Em cada caso, considere o ciclo trigonométrico dado para obter $\alpha_2$, $\alpha_3$ e $\alpha_4$ em função de $\alpha_1$.




**Solução.** Utilizando semelhança de triângulos, é fácil constatar que

$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1, \;\; \alpha_3 = 180^\circ + \alpha_1 \;\; \text{e} \;\; \alpha_4 = 360^\circ - \alpha_1.$$

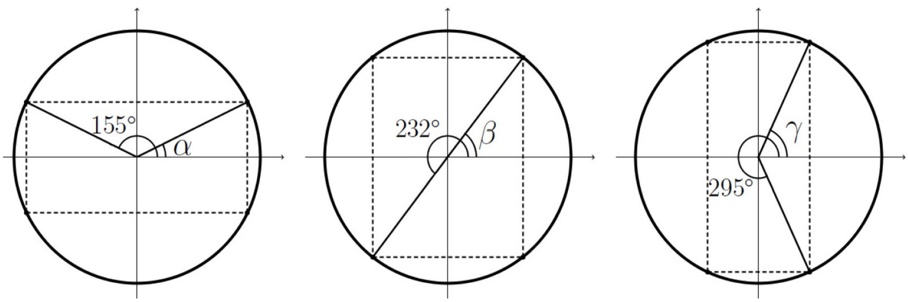
**Exemplo 1.31** Em cada caso, considere o ciclo trigonométrico dado para obter $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$.




**Solução.** Utilizando semelhança de triângulos, obtém-se:

$$\alpha = 180° - 37° = 143°, \ \beta = 180° + 37° = 217° \ \text{ e } \ \gamma = 360° - 37° = 323°.$$

**Exemplo 1.32** Em cada caso, considere o ciclo trigonométrico dado para obter $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$.




**Solução.** Utilizando semelhança de triângulos, obtém-se:

$$\alpha = 180° - 155° = 25°, \ \beta = 232° - 180° = 52° \ \text{ e } \ \gamma = 360° - 295° = 65°.$$

**Observação:** no ciclo trigonométrico, pode-se considerar arcos com mais de uma volta. Disto resulta que, dado um arco $x$, sempre é possível encontrar outros arcos com a mesma imagem de $x$ no ciclo. Em particular, se a diferença entre dois arcos é uma volta completa, eles possuem a mesma imagem.

### Definição 1.33

Dois arcos são *côngruos* ou *congruentes* quando possuem a mesma imagem no ciclo trigonométrico.

Em outras palavras, dois arcos são côngruos se a diferença entre eles é uma quantidade finita de voltas completas.

Note que um arco $x$ é côngruo a todos os arcos da forma

$$x + k \text{ vezes uma volta completa,}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$.

Utilizando as unidades de medida destacadas acima, tem-se que $x$ é côngruo a todos os arcos da forma

$$x + k \cdot 360^\circ \text{ (se } x \text{ é dado em graus)}$$

e

$$x + k \cdot 2\pi \text{ (se } x \text{ é dado em radianos)}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$.

É importante salientar que, dado o arco $\alpha = \widehat{AM}$, temos que $A$ é a origem e $M$ a extremidade do referido arco. Então, dizemos que dois arcos $\widehat{AM}$ e $\widehat{AP}$ são côngruos se possuírem mesma origem (o ponto $A$) e mesma extremidade ($M$ e $P$ coincidem), diferenciando-se apenas pelo número de voltas.

### Definição 1.34

A *primeira determinação positiva* de um arco $x$ é o menor arco não negativo côngruo a $x$.

A primeira determinação positiva de um arco também é chamada de menor determinação.

**Exemplo 1.35** Encontre a primeira determinação positiva dos arcos

**(a)** $390^\circ$ **(b)** $-570^\circ$ **(c)** $\dfrac{15\pi}{2}$ **(d)** $-\dfrac{37\pi}{3}$

**Solução.**

**(a)** Como $390^\circ = 30^\circ + 1 \cdot 360^\circ$, tem-se que $30^\circ$ é a menor determinação positiva de $390^\circ$.

**(b)** Como $-570^\circ = 150^\circ - 2 \cdot 360^\circ$, tem-se que $150^\circ$ é a menor determinação positiva de $-570^\circ$.

**(c)** Como $\dfrac{15\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} + 3 \cdot 2\pi$, tem-se que $\dfrac{3\pi}{2}$ é a menor determinação positiva de $\dfrac{15\pi}{2}$.

**(d)** Como $-\dfrac{37\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3} - 7 \cdot 2\pi$, tem-se que $\dfrac{5\pi}{3}$ é a menor determinação positiva de $-\dfrac{37\pi}{3}$.

**Exemplo 1.36** Uma volta completa equivale a $360^\circ$ ou $2\pi$ rad. Assim, de maneira geral, com base nessa informação podemos reduzir qualquer arco à primeira volta dividindo a medida do arco em graus por 360 (volta completa), e o resto da divisão será a menor determinação positiva do arco. Se o arco do resto for negativo, a menor determinação positiva será o arco positivo que completa a volta de $360^\circ$.

**Definição 1.37**

Dado um arco $\widehat{AM}$, definimos a sua expressão geral por $\widehat{AM} = k.360^\circ + \alpha$, onde $\alpha$ é a menor determinação para $\widehat{AM}$.

**Exemplo 1.38** Considere o arco $\widehat{AM}$, tal que sua extremidade termine em $210^\circ$ (no sentido positivo). Assim, a expressão geral fica $\widehat{AM}_k = k.360^\circ + 210^\circ$. Neste caso em particular, temos que:

- quando $k = 0$, $\widehat{AM}_0 = 210^\circ$;
- quando $k = 1$, $\widehat{AM}_1 = 1.360^\circ + 210^\circ = 570^\circ$, o que representa uma volta no sentido positivo a partir do $210^\circ$;
- e assim sucessivamente ...

Observe que a expressão geral de um arco caracteriza uma coleção (ou família) de arcos côngruos a $\alpha$, com $\alpha$ a menor determinação.

# Exercícios

1. Encontre a primeira deteminação positiva dos seguintes arcos:

   (a) $1930^\circ$

   (b) $1050^\circ$

   (c) $-4350^\circ$

   (d) $-930^\circ$

2. Encontre a primeira deteminação positiva dos seguintes arcos:

   (a) $\dfrac{25\pi}{3}$

   (b) $\dfrac{26\pi}{5}$

   (c) $-\dfrac{49\pi}{6}$

   (d) $-\dfrac{2\pi}{3}$

3. Considere um polígono regular de $n$ lados com medida de cada lado igual a $\ell$, inscrito numa circunferência de raio $R$. Da Geometria sabemos que, se traçarmos todas as diagonais desse polígono, formaremos $n$ triângulos isósceles.

   (a) Destacando um desses triângulos isósceles do polígono regular, considerando o vértice onde está o centro da circunferência, conclua que a medida de seu ângulo interno, em radianos, é dada por $\frac{2\pi}{n}$.

   (b) Mostre que a área $A_n$ do polígono regular de $n$ lados pode ser determinada pela fórmula

   $$A_n = \frac{n \cdot \ell^2}{4 \cdot \tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}.$$

   (c) Usando a fórmula acima, encontre as fórmulas para determinar a área de um quadrado de lado $\ell$, de um triângulo equilátero de lado $\ell$ e de um hexágono regular de lado $\ell$.

   (d) Considerando que $\cos 36^\circ = \frac{\varphi}{2}$, onde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro, determine uma fórmula para calcular a área de um pentágono regular.

4. No mesmo contexto do exercício anterior, mostre que a área $A_n$ do polígono regular de $n$ lados também é dada pela fórmula

$$A_n = n \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

O que vamos encontrar ao calcular $A_n$, utilizando valores de $n$ arbitrariamente grandes (simbolicamente, quando $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$)? Que conclusão tiramos disso?

5. Considere um polígono regular de $n$ lados, $n \geq 3$, inscrito no ciclo trigonométrico.

   (a) Mostre que $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{\ell_n}{2}$, onde $\ell_n$ denota a medida do lado do polígono regular de $n$ lados inscrito no ciclo.

   (b) Usando a igualdade acima, verifique os valores do seno de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{6}$.

   (c) Da Geomeria Plana, considerando um polígono regular de $n$ lados inscrito numa circunferência de raio $R$, temos que a medida do lado do polígono de $2n$ lados, também inscrito na circunferência, é dado por

   $$\ell_{2n} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - \ell_n^2})}.$$

   Dessa forma, determine o valor de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

## Respostas

1. (a) 130° (b) 330° (c) 330° (d) 150°
2. (a) $\dfrac{\pi}{3}$ (b) $\dfrac{6\pi}{5}$ (c) $\dfrac{11\pi}{6}$ (d) $\dfrac{4\pi}{3}$
3. (c) $A_4 = \ell^2$ $A_3 = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ $A_6 = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$ (d) $A_5 = \frac{5\varphi\ell^2}{4\sqrt{4-\varphi^2}} = \frac{5\varphi\ell^2}{4\sqrt{3-\varphi}}$
5. (c) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

**Fruto de diversas experiências dos autores com trigonometria e números complexos, este livro foi cuidadosamente escrito utilizando uma linguagem simples, porém precisa, que visa alcançar leitores de diversos contextos educacionais, sejam do ensino médio ou do superior, com variados interesses em relação à matemática.**

A obra contempla uma grande quantidade de exercícios propostos e diversos exercícios resolvidos, além de muitas aplicações dos conteúdos abordados em vários contextos. Foram adicionadas notas históricas e curiosidades acerca da trigonometria e dos números complexos, o que acrescenta qualidade ao texto e o diferencia da maioria dos livros que abordam esses conteúdos.

Alunos, professores e admiradores da matemática, principiantes ou não, encontrarão neste livro uma oportunidade de leitura organizada e agradável.

www.blucher.com.br

ISBN 978-65-5506-010-2

9 786555 060102

Blucher