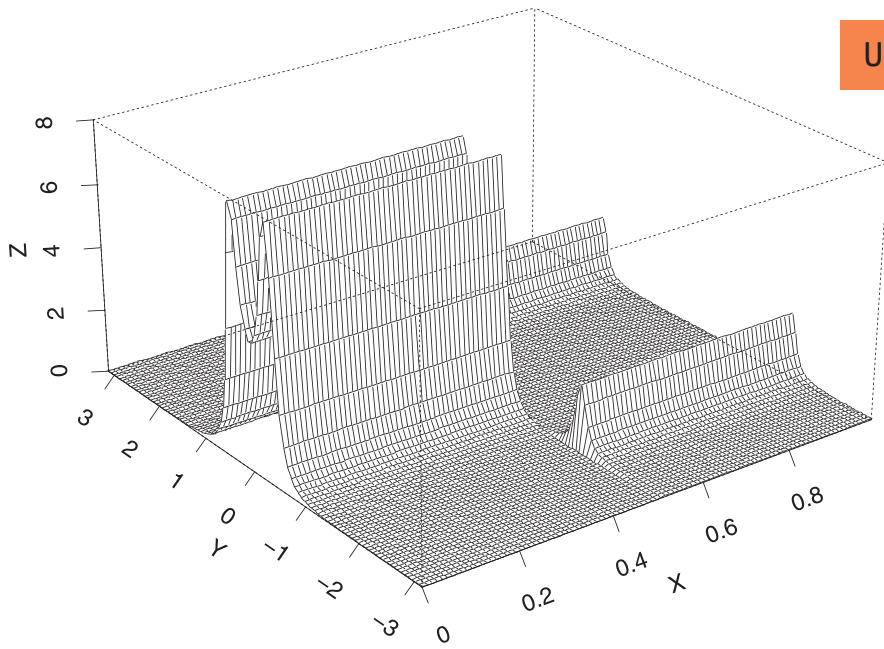


Use o R!



# ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

## Modelos multivariados e não lineares

PEDRO A. MORETTIN  
CLÉLIA M. C. TOLOI

VOLUME 2

**Blucher**



**ABE - PROJETO FISHER**

# Análise de séries temporais

Pedro A. Morettin

Clélia M. C. Toloí

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo

Volume 2

Modelos multivariados e não

lineares



**ABE - PROJETO FISHER**

*Análise de séries temporais, vol. 2: Modelos multivariados e não lineares*

© 2020 Pedro A. Morettin

Clélia M. C. Toloí

Editora Edgard Blücher Ltda.

---

# Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar

04531-934 – São Paulo – SP – Brasil

Tel.: 55 11 3078-5366

[contato@blucher.com.br](mailto:contato@blucher.com.br)

[www.blucher.com.br](http://www.blucher.com.br)

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 5. ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*, Academia Brasileira de Letras, março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora.

---

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Angélica Ilacqua CRB-8/7057

---

Morettin, Pedro A.

Análise de séries temporais – volume II : Modelos multivariados e não lineares / Pedro A. Morettin, Clélia M. C. Toloí. – São Paulo : Blucher, 2020.

284 p. : il.

Bibliografia

ISBN 978-65-5506-004-1 (impresso)

ISBN 978-65-5506-006-5 (eletrônico)

1. Séries temporais I. Título. II. Toloí, Clélia M. C.

---

20-0371

CDD 519.232

---

Índices para catálogo sistemático:  
1. Séries temporais

---

# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>xi</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Aspectos computacionais . . . . .	2
1.3 Séries temporais usadas no texto . . . . .	2
1.3.1 Séries temporais usadas no Volume 1 . . . . .	2
1.3.2 Séries novas . . . . .	3
<b>2 Modelos de Espaço de Estados</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	7
2.2 Representação em espaço de estados . . . . .	7
2.3 O filtro de Kalman . . . . .	10
2.4 Estimadores de máxima verossimilhança . . . . .	12
2.5 Modelos estruturais . . . . .	14
2.5.1 Modelo de nível local . . . . .	14
2.5.2 Modelo de tendência local . . . . .	15
2.5.3 Modelo com tendência local e componente sazonal . . . . .	16
2.5.4 Modelo com ciclo . . . . .	17
2.6 Observações perdidas . . . . .	29
2.7 Tópicos adicionais . . . . .	33
2.8 Problemas . . . . .	34
<b>3 Modelos Lineares Multivariados</b>	<b>37</b>
3.1 Introdução . . . . .	37
3.2 Séries estacionárias . . . . .	39
3.3 Estimação de médias e covariâncias . . . . .	41



3.4	Modelos autorregressivos vetoriais . . . . .	42
3.5	Construção de modelos VAR . . . . .	48
3.6	Problemas . . . . .	54
	Apêndice 3.A: Modelo VAR( $p$ ) na Forma VAR(1) . . . . .	57
	Apêndice 3.B: Causalidade de Granger . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Modelos Heteroscedásticos Condicionais</b>	<b>61</b>
4.1	Introdução . . . . .	61
4.2	Retornos . . . . .	62
4.3	Fatos estilizados sobre retornos . . . . .	64
4.4	Distribuições de retornos . . . . .	66
4.5	Assimetria e curtose . . . . .	69
4.6	Modelos ARCH . . . . .	70
4.7	Modelos GARCH . . . . .	84
4.8	Extensões do modelo GARCH . . . . .	98
	4.8.1 Modelos EGARCH . . . . .	98
	4.8.2 Modelos TGARCH . . . . .	101
4.9	Modelos de volatilidade estocástica . . . . .	108
4.10	Problemas . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Modelos GARCH Multivariados</b>	<b>123</b>
5.1	Introdução . . . . .	123
5.2	Generalizações do modelo GARCH univariado . . . . .	125
	5.2.1 Modelos VEC . . . . .	125
	5.2.2 Modelos BEKK . . . . .	130
5.3	Modelo fatorial via componentes principais . . . . .	134
	5.3.1 Modelo via componentes principais . . . . .	134
	5.3.2 Modelo GO-GARCH . . . . .	137
5.4	Combinações não lineares de modelos GARCH . . . . .	139
	5.4.1 Modelos com correlações condicionais constantes . . . . .	139
	5.4.2 Modelos com correlações condicionais dinâmicas . . . . .	143
5.5	Problemas . . . . .	145
<b>6</b>	<b>Modelos Não Lineares</b>	<b>149</b>
6.1	Introdução . . . . .	149
6.2	Expansões de Volterra . . . . .	151
6.3	Modelos bilineares . . . . .	152
	6.3.1 Formulação geral . . . . .	153
	6.3.2 Forma vetorial de um modelo bilinear . . . . .	154
	6.3.3 Estacionariedade e invertibilidade . . . . .	156
	6.3.4 Estimação . . . . .	156

6.4	Modelos lineares por partes . . . . .	161
6.4.1	Formulação geral . . . . .	161
6.4.2	Modelos TAR . . . . .	162
6.4.3	Estimação de modelos TAR . . . . .	163
6.4.4	Identificação e teste para linearidade . . . . .	169
6.4.5	Previsão de modelos TAR . . . . .	170
6.5	Modelos de transição markovianos . . . . .	173
6.5.1	Formulação geral . . . . .	173
6.5.2	Estimação . . . . .	176
6.5.3	Previsão de MTM . . . . .	186
6.6	Modelos AR funcionais . . . . .	187
	Apêndice 6.A: Estimação de um modelo bilinear . . . . .	192
	Apêndice 6.B: Estimação de MTM . . . . .	193
<b>7</b>	<b>Análise Espectral Multivariada</b>	<b>197</b>
7.1	Introdução . . . . .	197
7.2	Representações espectrais . . . . .	199
7.3	Coerência complexa e quadrática . . . . .	200
7.4	Estimação do espectro cruzado . . . . .	201
7.5	Estimadores suavizados . . . . .	204
7.6	Aplicações . . . . .	205
7.7	Problemas . . . . .	209
	Apêndice 7.A: Cumulantes . . . . .	216
<b>8</b>	<b>Processos Não Estacionários</b>	<b>221</b>
8.1	Introdução . . . . .	221
8.2	Processos cointegrados . . . . .	222
8.2.1	Tendências comuns . . . . .	223
8.2.2	Modelo de correção de erro . . . . .	224
8.2.3	Testes para cointegração . . . . .	228
8.3	Espectros dependentes do tempo . . . . .	233
8.3.1	Soluções que preservam a ortogonalidade . . . . .	235
8.3.2	Soluções que preservam a frequência . . . . .	238
8.3.3	Processos localmente estacionários . . . . .	239
8.3.4	Estimação do espectro de Priestley . . . . .	243
8.3.5	Estimação do espectro de Wigner-Ville . . . . .	246
8.3.6	Estimação do espectro de PLE . . . . .	248
8.3.7	Comentários adicionais . . . . .	250
8.4	Problemas . . . . .	252
8.4.1	Cointegração . . . . .	252
8.4.2	Espectros dependentes do tempo . . . . .	255

Referências	257
Índice remissivo	269

# Preliminares

## 1.1 Introdução

No Volume 1, tratamos os modelos lineares univariados, principalmente os chamados modelos ARIMA (autorregressivos, integrados, de médias móveis). Estudamos, também, a análise espectral para séries temporais estacionárias univariadas.

Neste segundo volume, estudaremos modelos multivariados lineares e alguns modelos não lineares. Modelos não estacionários, de modo geral, são complicados de analisar. No Capítulo 8, trataremos de uma forma especial de não estacionariedade, ou seja, relações de cointegração entre séries não estacionárias que são integradas de determinada ordem, em particular, integradas de ordem um, ou  $I(1)$ .

No que se refere à análise espectral, trataremos do caso bivariado para séries estacionárias. A análise espectral para processos não estacionários será apresentada no Capítulo 8 para o caso univariado.

Começamos, no Capítulo 2, com os modelos de espaço de estados lineares e gaussianos. Esses modelos são importantes, porque muitas classes de modelos como os de regressão, ARMA etc., são casos particulares desses modelos. Não trataremos de modelos de espaço de estados não lineares e não gaussianos. Para detalhes, veja a Seção 2.7 e Douc et al. (2014).

A seguir, no Capítulo 3, estudamos os modelos lineares multivariados, em especial os modelos VAR (autorregressivos vetoriais).

No Capítulo 4, estudamos os modelos heteroscedásticos condicionais, apropriados para modelar a volatilidade de séries financeiras. Em especial, consideramos os modelos da família ARCH e os modelos de volatilidade estocástica.

Modelos GARCH multivariados são estudados no Capítulo 5 e, modelos não lineares, no Capítulo 6. Este capítulo talvez seja o mais difícil para o

leitor, por várias razões, mas principalmente porque pacotes computacionais somente existem para alguns modelos.

No Capítulo 7, estudamos a análise espectral multivariada, restringindo-nos ao caso bivariado. Finalmente, no Capítulo 8, apresentamos noções sobre cointegração e análise espectral para processos não estacionários univariados.

## 1.2 Aspectos computacionais

Nos exemplos do livro, procuramos usar, sempre que possível, pacotes do Repositório R. Em algumas situações, foi necessário usar o pacote SPlus, ou porque o R não possui pacotes apropriados, ou porque seu uso conduziu a resultados conflitantes ou inesperados. Pacotes do R podem ser obtidos gratuitamente em *The Comprehensive R Archive Network*, no site [www.r-project.org/](http://www.r-project.org/).

## 1.3 Séries temporais usadas no texto

Nesta Seção descreveremos as séries temporais usadas no texto. Os arquivos de dados estão no site do livro.

### 1.3.1 Séries temporais usadas no Volume 1

Iremos ilustrar várias técnicas usadas no livro com séries apresentadas no Volume 1, Seção 1.9. São elas:

- 1) No Capítulo 2 usamos as séries ICV, Chuva (Lavras), Consumo, Índices (IPI, PFI), Energia, Temperatura (Ubatuba), Ibovespa e Petrobras (ambas de 19/08/1998 a 29/09/2010).
  - 2) No Capítulo 3 usamos as séries Ibovespa e Petrobras (como em 1)), Ibovespa e C-Bond mensais, Ibovespa e Merval, Ibovespa e IPC (essas quatro últimas de 04/09/1995 a 30/12/2004), Ibovespa e Cemig (de 02/01/1995 a 27/12/2000), Vale e Petrobras (de 31/05/1998 a 29/09/2010).
  - 3) No Capítulo 4 usamos as séries Ibovespa (de 04/07/1994 a 29/09/2010), Petrobras (de 30/01/1995 a 27/12/2000), Vale (de 31/08/1998 a 29/09/2010), TAM (de 10/01/1995 a 27/12/2000), Globo (de 06/11/1996 a 27/12/2000) e Cemig (como em 2)).
-

4) No Capítulo 5 usamos as séries Ibovespa e Petrobras (de 02/01/1995 a 30/07/2010), as séries Petrobras e Vale usadas no Capítulo 3 e as séries HP e IBM (de 02/02/1984 a 31/12/1992), constantes do pacote S+FinMetrics.

5) No Capítulo 8 usamos as séries Ibovespa e Petrobras, Ibovespa e C-Bond, Ibovespa e IPC e Ibovespa, Petrobras, com períodos especificados em [1] e [2], Vale, especificada em 2), Petrobras3 e Petrobras4 (de 02/01/2006 a 29/09/2010).

### 1.3.2 Séries novas

Novas séries foram introduzidas no Volume 2, que passamos a descrever.

1) Ibovespa (de 04/07/1994 a 30/07/2018), no Capítulo 8. Veja a Figura 1.1.

2) Série Lincas Canadenses, que dá o número anual desses animais capturados no distrito Mackenzie River, no norte do Canadá, no período 1821–1934, no Capítulo 6. Veja a Figura 6.8.

3) Dados de mortes diárias em acidentes de tráfego na Espanha durante o ano de 2010, constantes do pacote MSwM. Como covariáveis temos a temperatura média diária e a precipitação média diária. Os dados são da Dirección General de Tráfico e da Agencia Estatal de Meteorología da Espanha. Na Figura 6.19 temos os gráficos das três séries.

4) Variação do PIB do Brasil (em porcentagem ao ano), de 1901 a 2013. Veja a Figura 1.2.

5) Série mensal do índice de produção industrial nos Estados Unidos (EUA), de janeiro de 1952 a janeiro de 1995. Veja a Figura 1.3.

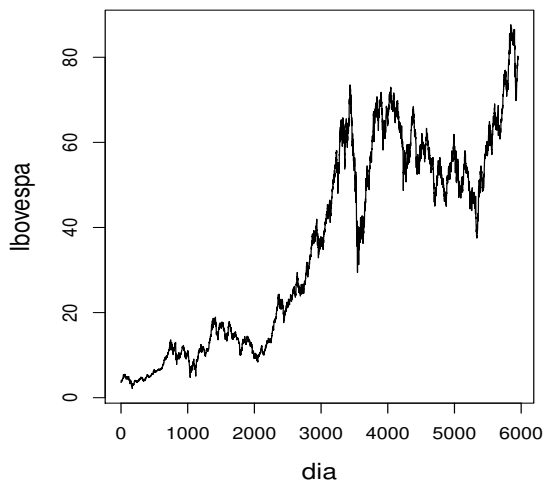
6) Séries temporais que fornecem o número de mortes mensais causadas por bronquite, enfisema e asma, no Reino Unido, para homens ( $X_{1t}$ , mdeaths) e mulheres ( $X_{2t}$ , fdeaths), de janeiro de 1974 a dezembro de 1980, total de  $N = 72$  observações. Veja a Figura 7.1.

7) Séries de poluição em Los Angeles, CA, constantes do pacote astsa do R.

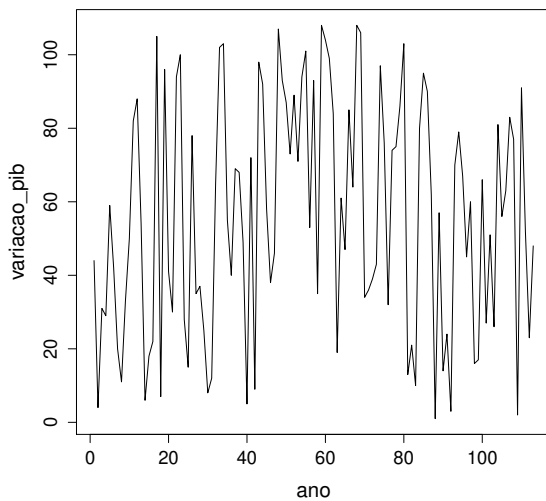
8) Séries de alturas de ondas oceânicas, medidas por dois instrumentos, ondógrafo de fio (brevemente WIRE) e ondógrafo de infra-vermelho (brevemente, IR), colocados a uma distância de 6 metros um do outro, sobre uma mesma plataforma no Cape Henry, Virginia Beach, Virginia. Veja a Figura 7.7.

Os arquivos de dados dessas séries encontram-se no site do livro.

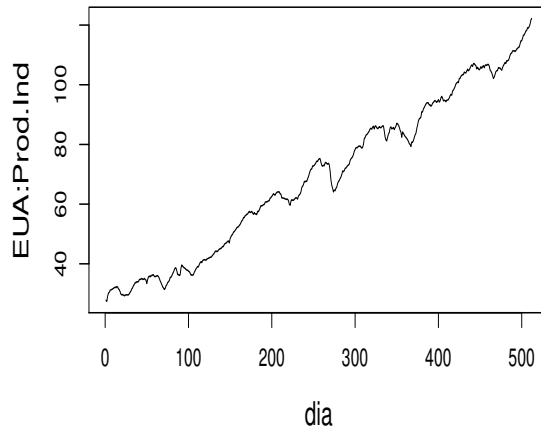
---



**Figura 1.1:** Índice Ibovespa diário, de 04/07/1994 a 30/07/2018.



**Figura 1.2:** Variação do PIB real anual do Brasil (em % a.a.)



**Figura 1.3:** Produção industrial nos EUA de jan/1952 a jan/1995.



# Modelos de Espaço de Estados

## 2.1 Introdução

Uma classe bastante geral de modelos, denominados modelos de espaço de estados (MEE) ou modelos lineares dinâmicos (MLD), foi introduzida por Kalman (1960) e Kalman e Bucy (1961) no contexto de rastreamento de veículos espaciais. Tais modelos têm sido extensivamente utilizados para modelar dados provenientes da Economia (Harrison e Stevens, 1976; Harvey e Pierse, 1984; Harvey e Todd, 1983; Kitagawa e Gersch, 1984; Shumway e Stoffer, 1982), da área médica (Jones, 1984) e de ciências do solo (Shumway, 1985), dentre outras áreas.

Neste capítulo estudaremos os modelos estruturais, que podem ser postos facilmente na forma de espaços de estados. A referência básica para o estudo desses modelos é Harvey (1989). Há um enfoque bayesiano ao MLD que não será discutido aqui. Veja Meinhold e Singpurwalla (1983) e West e Harrison (1997) para detalhes. Abordagens baseadas em projeções e distribuições normais multivariadas podem ser encontradas em Jazwinski (1970) e Anderson e Moore (1979).

## 2.2 Representação em espaço de estados

Todo modelo linear de séries temporais  $q$ -dimensionais tem representação em espaço de estados, que relaciona o vetor de observações  $\{Z_t\}$  e o vetor de ruídos  $\{v_t\}$ , por meio de um processo de Markov  $\{X_t\}$ ,  $p$  dimensional, denominado vetor de estados. Assim o *modelo de espaço de estados (MEE)* ou *modelo linear dinâmico (MLD)*, em sua forma básica, é constituído por duas

equações:

$$Z_t = A_t X_t + v_t, \quad (2.1)$$

$$X_t = G_t X_{t-1} + w_t, \quad t = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

em que

$A_t$  é a *matriz do sistema*, ou *matriz de mensurações*, de ordem  $q \times p$ ;

$v_t$  é o vetor ruído das observações, de ordem  $q \times 1$ , não correlacionado, com média zero e matriz de covariâncias  $R$ ;

$G_t$  é a *matriz de transição*, de ordem  $p \times p$  e

$w_t$  é um vetor de ruídos não correlacionados, representando a perturbação do sistema, de ordem  $p \times 1$ , com média zero e matriz de covariâncias  $Q$ .

A equação (2.1) é denominada *equação das observações*, enquanto (2.2) é a *equação de estados* ou do sistema.

No MEE supõe-se que:

- (a) o estado inicial  $X_0$  tem média  $\mu_0$  e matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ ;
- (b) os vetores de ruídos  $v_t$  e  $w_t$  são não correlacionados entre si e não correlacionados com o estado inicial, isto é,

$$E(v_t w_s') = 0, \text{ para todo } t, s = 1, \dots, N,$$

$$E(v_t X_0') = 0 \text{ e } E(w_t X_0') = 0, \quad t = 1, \dots, N.$$

Dizemos que o modelo de espaço de estados é gaussiano quando os vetores de ruídos forem normalmente distribuídos.

No modelo univariado  $q = 1$ ,  $A_t$  é um vetor e  $v_t$  é um ruído com média zero e variância  $\sigma_v^2$ .

As matrizes  $A_t$  e  $G_t$  são não estocásticas; assim, se houver variação no tempo, esta será predeterminada. Quando essas matrizes forem constantes no tempo, o sistema será dito *invariante no tempo* ou *homogêneo no tempo*. Um caso especial desse tipo de modelo são os modelos estacionários. Além disso, se houver elementos desconhecidos, nessas matrizes, eles poderão ser estimados utilizando-se o método de máxima verossimilhança ou métodos bayesianos.

A análise de (2.1) e (2.2) indica que o vetor de estados não é diretamente observado; o que se observa é uma versão linear dele, adicionada a um ruído.

O modelo básico (2.1)–(2.2) pode ser modificado incluindo variáveis exógenas e/ou erros correlacionados; veja Shumway e Stoffer (2015).

**Exemplo 2.1.** Modelo AR(2). Uma representação em espaço de estados do modelo

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t, \quad t = 1, \dots, N,$$

é dada por

$$\begin{aligned} Z_t &= [1 \ 0]X_t, \\ X_t &= \begin{bmatrix} Z_t \\ \phi_2 Z_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 1 \\ \phi_2 & 0 \end{bmatrix} X_{t-1} + \begin{bmatrix} a_t \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Uma representação alternativa é

$$\begin{aligned} Z_t &= [1 \ 0]X_t^*, \\ X_t^* &= \begin{bmatrix} Z_t \\ Z_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X_{t-1}^* + \begin{bmatrix} a_t \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Em ambas as representações, (2.3) e (2.4), temos  $\sigma_v^2 = 0$ .

**Exemplo 2.2.** Modelo MA(1), sendo que uma representação em espaço de estados do modelo

$$Z_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

é dada por

$$\begin{aligned} Z_t &= [1 \ 0]X_t, \\ X_t &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X_{t-1} + \begin{bmatrix} a_t \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que  $X_t = \begin{bmatrix} X_t \\ \theta a_t \end{bmatrix}$ .

**Exemplo 2.3.** Modelo de regressão linear. Esse modelo tem a equação de observação dada por

$$Z_t = Y_t' \beta_t + \varepsilon_t, \quad (2.6)$$

em que

$Z_t$ : observação escalar (variável resposta);

$Y_t$ : vetor de variáveis explicativas;

$\beta_t$ : vetor de coeficientes desconhecidos.

---

Se o modelo for estático, a equação do sistema será redundante, isto é,

$$\beta_t = \beta_{t-1} = \dots = \beta_0 . \quad (2.7)$$

Se os coeficientes forem dinâmicos, então a equação do sistema será dada por

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \delta\beta_t . \quad (2.8)$$

Ambos os modelos, (2.7) e (2.8), são MEEs particulares em que  $X_t = \beta_t$ ,  $A_t = Y_t$ ,  $\phi_t = 1$ ,  $v_t = \varepsilon_t$  e  $w_t = \delta\beta_t$ , no caso dinâmico, e  $\sigma_w^2 = 0$  no caso estático.

O objetivo ao utilizar um MEE é estimar  $X_t$ , com as observações  $\mathbf{Z}_{1:s} = (Z_1, \dots, Z_s)$ . Quando  $s < t$ , falamos em *previsão*, quando  $s = t$  falamos em *filtragem* e quando  $s > t$  falamos em *suavização*. As soluções desses problemas são dadas pelo *Filtro de Kalman* e pelo *Suavizador de Kalman*. No que segue, usaremos a notação  $\mathbf{Z}_s$ , no lugar de  $\mathbf{Z}_{1:s}$ .

## 2.3 O filtro de Kalman

O filtro de Kalman, um algoritmo de estimação recursiva, representa uma das maiores contribuições na teoria moderna de controle e sua importância pode ser constatada através de suas numerosas aplicações. No modelo de espaço de estados gaussiano, o filtro de Kalman fornece estimadores de mínimos quadrados do vetor de estados  $X_t$ , utilizando o conjunto de observações  $\mathbf{Z}_s = (Z_1, \dots, Z_s)$ .

Daqui em diante utilizaremos a seguinte notação:

$$X_t^s = E(X_t | \mathbf{Z}_s) \quad (2.9)$$

e

$$P_{t_1, t_2}^s = E[(X_{t_1} - X_{t_1}^s)(X_{t_2} - X_{t_2}^s)'] . \quad (2.10)$$

Quando  $t_1 = t_2 = t$ , escreveremos simplesmente  $P_t^s$  em (2.10).

Quando utilizamos a suposição de normalidade para os ruídos  $v_t$  e  $w_t$  das equações (2.1) e (2.2), temos que

$$P_{t_1, t_2}^s = E \left[ (X_{t_1} - X_{t_1}^s)(X_{t_2} - X_{t_2}^s)' | \mathbf{Z}_s \right] , \quad (2.11)$$

ou seja, a matriz de covariâncias do erro será, também, uma matriz de covariâncias condicional. Veja o Problema 8.

Outras notações para (2.9) e (2.10) são, respectivamente,

$$X_{t|s} = E(X_t | \mathbf{Z}_s),$$


---

$$P_{t_1, t_2 | s} = E[(X_{t_1} - X_{t_1 | s})(X_{t_2} - X_{t_2 | s})'].$$

O filtro de Kalman fornece as *equações de filtragem* ( $s = t$ ) e as *equações de previsão* ( $s < t$ ). Quando  $s > t$ , temos a suavização. O nome filtro deve-se ao fato de que  $X_t^t$  é uma combinação linear de  $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$ . A vantagem do filtro de Kalman é que pode-se atualizar o filtro de  $X_{t-1}^{t-1}$  para  $X_t^t$ , quando uma nova observação é obtida, sem ter que reprocessar o conjunto todo de observações  $\mathbf{Z}_t$ .

### Filtro de Kalman

Para o modelo (2.1)–(2.2), com condições iniciais  $X_0^0 = \mu_0$  e  $P_0^0 = \Sigma_0$ , temos para  $t = 1, \dots, N$

$$X_t^{t-1} = GX_{t-1}^{t-1}, \quad (2.12)$$

$$P_t^{t-1} = GP_{t-1}^{t-1}G' + Q, \quad (2.13)$$

com

$$X_t^t = X_t^{t-1} + K_t(Z_t - A_tX_t^{t-1}), \quad (2.14)$$

$$P_t^t = [I - K_tA_t]P_t^{t-1}, \quad (2.15)$$

em que

$$K_t = P_t^{t-1}A_t'[A_tP_t^{t-1}A_t' + R]^{-1} \quad (2.16)$$

é denominado *ganho* de Kalman.

As previsões para  $t > N$  são calculadas utilizando (2.12)–(2.13) com valores iniciais  $X_N^N$  e  $P_N^N$ .

A demonstração das equações do filtro é dada em Harvey (1989) e Shumway e Stoffer (2015).

O filtro também fornece as inovações (ou erros de previsão)

$$\varepsilon_t = Z_t - Z_t^{t-1} = Z_t - G_tX_t^{t-1},$$

e a matriz de covariâncias correspondente

$$\Sigma_t = \text{Cov}(\varepsilon_t) = \text{Cov}[G_t(X_t - X_t^{t-1}) + v_t] = G_tP_t^{t-1}A_t' + R.$$

### Suavizador de Kalman

Para o modelo (2.1)–(2.2) com condições iniciais  $X_N^N$  e  $P_N^N$ , calculadas utilizando (2.12)–(2.15), temos para  $t = N, N - 1, \dots, 1$ ,

$$X_{t-1}^N = X_{t-1}^{t-1} + J_{t-1}(X_t^N - X_t^{t-1}), \quad (2.17)$$

$$P_{t-1}^N = P_{t-1}^{t-1} + J_{t-1}(P_t^N - P_t^{t-1})J_{t-1}' , \quad (2.18)$$

em que

$$J_{t-1} = P_{t-1}^{t-1}G'[P_t^{t-1}]^{-1}. \quad (2.19)$$

Assim, o suavizador de Kalman fornece as estimativas do vetor de estados e da matriz de covariâncias no instante  $t - 1$ , utilizando como informação todas as observações  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  da série temporal. Para uma prova de (2.17)–(2.18), veja Shumway e Stoffer (2015).

## 2.4 Estimadores de máxima verossimilhança

O objetivo é estimar os parâmetros  $\Theta = \{\mu_0, \Sigma_0, Q, R\}$ , que especificam o modelo de espaço de estados (2.1)–(2.2), supondo-se  $A_t$  e  $G_t$  conhecidas. Sob a suposição de que o estado inicial tem distribuição gaussiana, isto é,  $X_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \Sigma_0)$  e que os ruídos  $w_1, \dots, w_N$  e  $v_1, \dots, v_N$  são variáveis não correlacionadas e conjuntamente normais, podemos calcular a função de verossimilhança utilizando as *inovações*, definidas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= Z_t - E(Z_t | \mathbf{Z}_{t-1}) \\ &= Z_t - A_t X_t^{t-1}, \quad t = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Note que

$$E(\varepsilon_t) = E(Z_t) - E(Z_t) = 0 \quad (2.21)$$

e

$$\begin{aligned} \Sigma_t &= \text{Var}(\varepsilon_t) = \text{Var}(Z_t - A_t X_t^{t-1}) \\ &= \text{Var}(A_t X_t + v_t - A_t X_t^{t-1}) = \text{Var}(A_t(X_t - X_t^{t-1}) + v_t) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Sigma_t = A_t P_t^{t-1} A_t' + R. \quad (2.22)$$

Considerando que, por definição, as inovações são vetores aleatórios com distribuições normais independentes, temos que a log-verossimilhança é

$$\ln L(\Theta | Z) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \ln |\Sigma_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t' \Sigma_t^{-1} \varepsilon_t, \quad (2.23)$$

que é uma função não linear em  $\Theta$ . Uma possível solução é utilizar o algoritmo de Newton-Raphson sucessivamente, até que a log-verossimilhança seja maximizada. Os passos para esse procedimento de estimação são dados por:

1. Selecionar valores iniciais para os parâmetros, denotados por  $\Theta^{(0)}$ .
2. Utilizar o filtro de Kalman e os valores iniciais  $\Theta^{(0)}$ , para obter o conjunto de inovações e as matrizes de covariâncias,  $\{\varepsilon_t^{(0)}, \Sigma_t^{(0)}, t = 1, \dots, N\}$ .
3. Executar uma iteração do algoritmo de Newton-Raphson utilizando os valores obtidos no passo 2 e obtendo um novo conjunto de estimativas,  $\Theta^{(1)}$ .
4. A cada iteração  $j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), repetir o passo 2 utilizando  $\Theta^{(j)}$  para obter um novo conjunto de inovações e as respectivas matrizes de covariâncias,  $\{\varepsilon_t^{(j)}, \Sigma_t^{(j)}, t = 1, \dots, N\}$ . Repetir então o passo 3, para obter uma nova estimativa  $\Theta^{(j+1)}$ . Parar quando as estimativas ou a log-verossimilhança estabilizar, ou seja, quando  $\|\Theta^{(j+1)} - \Theta^{(j)}\|$  ou  $|\ln L(\Theta^{(j+1)}|\mathbf{Z}) - \ln L(\Theta^{(j)}|\mathbf{Z})|$  for menor do que uma quantidade pequena e preestabelecida.

Esse procedimento é sugerido por Jones (1980), Gupta e Mehra (1974), Ansley e Kohn (1985).

A distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança é dada pelo resultado a seguir.

**Teorema 2.1.** *Sob condições gerais, seja  $\hat{\Theta}_N$  o estimador de máxima verossimilhança de  $\Theta$ , obtido maximizando a expressão (2.23). Então, para  $N \rightarrow \infty$ ,*

$$\sqrt{N}(\hat{\Theta}_N - \Theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, I(\Theta)^{-1}), \quad (2.24)$$

em que  $I(\Theta)$  é a matriz de informação assintótica dada por

$$I(\Theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} E[-\partial^2 \ln L(\theta/\mathbf{Z})/\partial\theta\partial\theta'].$$

A demonstração do teorema é dada em Caines (1988) e Hannan e Deistler (1988).

Uma solução alternativa, apresentada por Shumway e Stoffer (1982), é utilizar um procedimento de estimação baseado no algoritmo EM, desenvolvido por Dempster et al. (1977). Para mais detalhes, ver Shumway e Stoffer (2015).

**No primeiro volume do livro *Análise de séries temporais*, focamos em modelos lineares e univariados. Neste segundo volume, iremos estudar os modelos não lineares, multivariados, de espaço de estados e não estacionários. Esses últimos são abordados tanto no domínio do tempo (processos cointegrados), como no domínio da frequência (análise espectral).**

Como no primeiro volume, fazemos uso intenso de pacotes computacionais do Repositório R, que podem ser obtidos gratuitamente no site The Comprehensive R Archive Network, <https://cran.r-project.org/>.



**ABE - PROJETO FISHER**

[www.blucher.com.br](http://www.blucher.com.br)

ISBN 978-65-5506-004-1



9 786555 060041

**Blucher**





Clique aqui e:

**VEJA NA LOJA**

## **Análise de Séries Temporais – Volume 2** Modelos multivariados e não lineares

**Pedro A. Morettin, Clélia M. C. Toloí**

ISBN: 9786555060041

Páginas: 284

Formato: 17 x 24 cm

Ano de Publicação: 2020

Peso: 0.471 kg